

TEKST NR 238

1993

**SEMIOTIK og
SYSTEMEGENSKABER**

(2)

**Vektorbånd og
tensorer**

af

**Peder Voetmann
Christiansen**

Albert Chr. Paulsen

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Postbox 260,
DK-4000 Roskilde
tel: 4675 77 11
fax: 4675 5065
E-mail ACP@mmf.ruc.dk

priv.: Næsbyvej 40
DK-4171 Glumø
tel: 5364 6645

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde
SEMIOTIK og SYSTEMEGENSKABER (2) Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen

IMFUFA tekst nr. 238/93

198 sider

ISSN 0106-6242

Abstract.

Teksten består af en samling forelæsningsnoter, leveret til en teoretisk studiekreds med titlen "videregående energibånds-semiotik" på IMFUFA i efterårssemestret 1992.

Der forudsættes et grundlæggende kendskab til energibåndsformalismen, som introduceret i IMFUFA tekst nr. 8, "Dynamik og diagrammer" (1978). Enkelte afsnit bygger i mindre omfang på den lineære response-teori i tekst 22, "Semiotik og systemegenskaber (1) - 1-port lineært response og støj i fysikken" (1979). Fortsættelsen til den sidstnævnte tekst blev allerede dengang bebudet at indeholde en udvidelse af response- og støjteorien til multiporte, og dette er da også et af de emner, som behandles i nærværende tekst. Ideen med at behandle 1-portene for sig i en ret ekstensiv form og udsætte behandlingen af multiportene (som det viste sig, i 13 år) var, at en egnet vektor- og tensorformulering af energibåndsteknikken i det væsentlige ville kunne muliggøre en simpel oversættelse af 1-port teorien til multiporte.

Selve den generelle vektorbåndsformulering har imidlertid vist sig at rumme så mange muligheder, at multiport response-teorien blev trængt noget i baggrunden. Denne teori behandles derfor kun ret sporadisk i kapitel 5 efter udvikling af begrebet om det generelle vektorbånd i kapitel 4. De foregående kapitler leder op til dette begreb på grundlag af Peirces generelle semiotik og den simple energibåndsteknik.

Bortset fra et lille indskud om logik og Peirces eksistentielle grafer i kapitel 8 er hovedemnet for de sidste kapitler 6 - 11 er en videreudvikling af formalismen med henblik på de grundlæggende discipliner inden for mekanikken. Den kvantemekaniske brug af teknikken er ikke kommet med i denne omgang, men den klassiske analytiske mekanik behandles ved hjælp af samme Riemannske tensorformulering som den specielle og den generelle relativitetsteori.

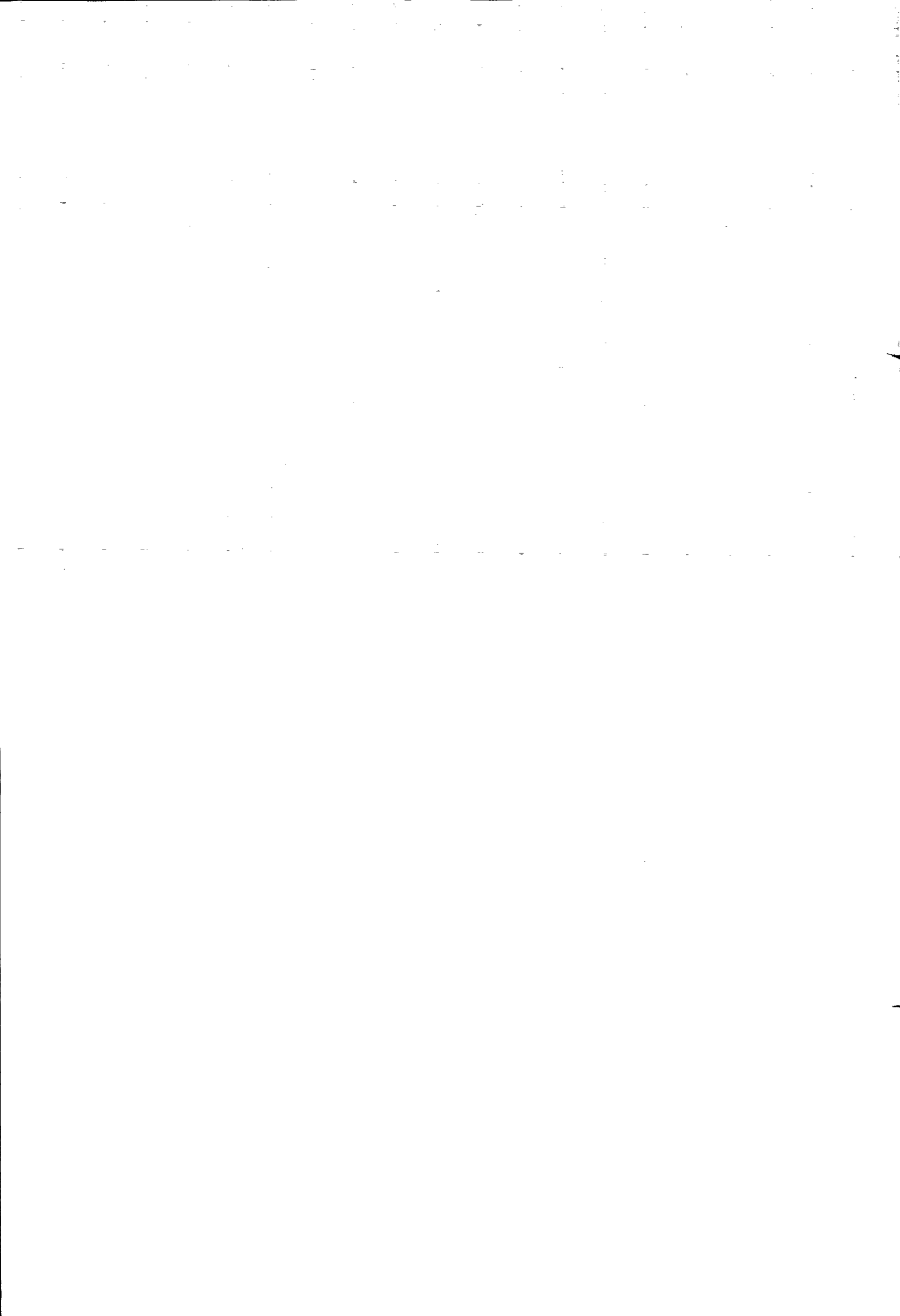
Teksten har ikke til hensigt at fungere som lærebog i nogen af de fysiske teorier, den berører, men snarere som en lærebog i en speciel og løfterig anvendelse af semiotik som et filosofisk grundlag for fysisk teoridannelse. Den generelt relativistiske dynamik benyttes derfor ikke til en egentlig behandling af gravitation, men indskrænkes til relativistisk bevægelse af partikler i accelererede koordinatsystemer.

SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer.

Indhold:

Kapitel 1.	Almen semiotik og modelbygning.	Side	1
Kapitel 2.	Simple energibånd og dynamiske variable.	Side	11
Kapitel 3.	Sammenlægning af simple bånd.	Side	22
Kapitel 4.	Generelle vektorbånd.	Side	33
Kapitel 5.	Multiporte som 1-porte.	Side	49
Kapitel 6.	Toporte og tensorer.	Side	71
Kapitel 7.	Samlere i generel metrik.	Side	99
Kapitel 8.	Eksistentielle bond grafer.	Side	117
Kapitel 9.	SRT partikel- og elektrodynamik.	Side	125
Kapitel 10.	Tellegen, Lagrange og Hamilton.	Side	149
Kapitel 11.	Mekaniske reticulationer.	Side	168
	Opgaver.	Side	191
	Litteratur.	Side	194



1. Almen semiotik og modelbygning.

Når man i fysikken taler om brugen af matematiske modeller, overser man ofte, at brugen af matematik i sig selv ikke kan give en model nogen troværdighed. Et matematisk symbol, som f.eks. et reelt tal, kan ikke have nogen fysisk betydning, medmindre det henviser til bestemte måleforskrifter, og måleforskrifter har heller ingen fysisk betydning, hvis der ikke eksisterer tegn, som er uden for enhver sproglig sammenhæng. En fysisk semiotik (tegnlære), som skal redegøre for, hvorfra de i modeller benyttede tegn får deres betydning, må nødvendigvis være realistisk, dvs. forudsætte, at der findes tegn uden for menneskets bevidsthed. En sådan semiotik er grundlagt af den amerikanske filosof Charles Sanders Peirce (1839-1914). I et manuskript fra 1897 (CP 2.227-9, Buchler s.99) siger han:

"A sign, or *representamen*, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the *ground* of the *representamen*."

Et tegn er altså ifølge Peirce en relation mellem tre faktorer:

1. Et *Representamen*, eller primært tegn, som er tegnets bærer, løsrevet fra enhver henvisning og betydning.
2. Et såkaldt *Objekt*, som er det, tegnet henviser til eller "handler om". Tegn-objektet er selvfølgelig ikke "das Ding an sich"; det er ikke et fysisk objekt, men snarere et bestemt træk eller en abstrakt kvalitet ved et sådant objekt, som Peirce i visse sammenhænge kalder tegnets Grund.
3. En *Interpretant*, som er en sammenfatning eller fortolkning af relationen mellem 1. og 2. Interpretanten kan siges at rumme tegnets betydning, idet den, som Peirce siger "indeholder den forestilling, at den selv indgår i samme triadiske relation med objektet som det primære tegn".

En mere abstrakt, relationslogisk beskrivelse af tegnrelationen giver Peirce i et manuskript fra 1902 (CP 2.274):

"A Sign or Representamen, is a First which stands in such a genuine triadic relation to a Second, called its *Object*, as to be capable of determining a Third, called its *Interpretant*, to assume the same triadic relation to its object in which it stands itself to the same object."

Tegnrelationen er irreducibelt triadisk, den kan ikke reduceres til dyadiske relationer, men den indeholder de tre dyadiske relationer R-O, O-I og I-R, og hver af disse tre dyader er formidlet af den tredje faktor; altså henvisningsrelationen mellem representamen og objekt (R-O) er formidlet af interpretanten. Interpretanten kan betragtes som representamen i en ny tegnrelation, og denne semiosis (O-I relationen), at objektet, formidlet af representamen, bliver til et nyt representamen, som så kan fortolkes videre i en ny tegnrelation, kommer klarest frem, hvis den enkelte tegnrelation fremstilles som O - R - I. To "kaskadekoblede" tegnrelationer afbildes så som $O_1 - (R_1, O_2) - (I_1, R_2) - I_2$. Denne afbildningsform, som er foreslået af biokemikeren Mogens Kilstrup, er meget velegnet til redegørelse for semiotiske processer, der hænger sammen i et større netværk. Umiddelbart får man ganske vist indtryk af en endimensional kæde, men man må forestille sig, at hver af faktorerne i O-R-I relationen er som knudepunkter i et net og kan have andre forbindelser til andre tegnrelationer. Afbildningsformen giver også indtryk af, at rækkefølgen af de tre faktorer er, at først kommer O, så R og til sidst I, og dette har også en vis berettigelse i fysisk forstand, når man tænker på R som et signal, der udgår fra O og registreres i I. I semiotisk forstand er det imidlertid vigtigt at fastholde den logiske rækkefølge 1. R, 2. O, 3. I, for R, det primære tegn, er jo det, der først fanger opmærksomheden, og objektet eksisterer kun som objekt (dvs. genstand for opmærksomheden) ved at R henviser til det, og I kun som interpretant ved, at der er en henvisning fra R til O.

Forbindelserne mellem R, O og I i den grafiske fremstilling O-R-I (altså stregerne -) kaldes af Mogens Kilstrup for *sign links*, og de er nært beslægtede med energibånd og andre typer af

bonds, f.eks dem, der benyttes i Peirces eksistentielle grafer, som vi senere skal vende tilbage til.

For at komme videre til en klassifikation af tegn, benytter vi en inddeling af sign-links i tre kategorier. Disse tre kategorier er hentet fra Peirces fænomenologi, hvor de benævnes 1, 2 og 3, eller førsteheden, andetheden og tredjeheden. De tre faktorer i tegnrelationen 1. R, 2. O og 3. I er eksempel på disse tre kategorier, og det er selve proto-eksemplet, idet kategorierne kan siges at være udtryk for den tanke, at al erkendelse foregår ved hjælp af tegn. Mere alment kan man sige, at førsteheden betegner eksistens "i sig selv" uden reference til noget andet, andetheden er eksistens som reaktion på noget første, og tredjeheden er eksistens som formidler af en relation mellem noget første og noget andet. Udtrykt på en anden måde kan man sige, at førsteheden er det potentielle, andetheden det aktuelle og tredjeheden det generelle. Førstehedens "eksistens i sig selv" gør sig ikke bemærket som noget, der eksisterer som skelneligt fra resten af verden; den er ikke aktuelt individuel, men netop potentiel. Andetheden er som en kontrast eller et sammenstød med virkeligheden og derfor aktuel. Hvis vi går og luller rundt i egne tanker, er vi "tabt for verden", hvilket er førstehed, men pludselig støder vi ind i en dør og vækkes brat til andetheden. Hvis vi så kommer i tanke om, at "sådan går det jo som regel", er vi inde i tredjeheden. Et konkret fysisk årsags-virknings forhold er en andethed, men hvis dette forhold kan genkendes som havende en vanemæssig karakter, hæver det sig til en tredjehed, og herved opstår betydning og forståelse, en interpretant.

Peirce beskriver de tre kategorier i følgende citat fra 1903 (CP 1.23, Buchler s. 75):

"My view is that there are three modes of being. I hold that we can directly observe them in elements of whatever is at any time before the mind in any way. They are the being of positive qualitative possibility, the being of actual fact, and the being of law that will govern facts in the future.

Let us begin by considering actuality, and try to make out just what it consists in. If I ask you what the actuality of an event consists in, you will tell me that it consists in its happening *then* and *there*. The specifications *then* and *there* involve all its relations to other existents. The

actuality of the event seems to lie in its relations to the universe of existents. A court may issue *injunctions* and *judgments* against me and I not care a snap of my fingers for them. I may think them idle vapour. But when I feel the sheriff's hand on my shoulder, I shall begin to have a sense of actuality. Actuality is something *brute*. There is no reason in it. I instance putting your shoulder against a door and trying to force it open against an unseen, silent, and unknown resistance. We have a two-sided consciousness of effort and resistance, which seems to me to come tolerably near to a pure sense of actuality. On the whole, I think we have here a mode of being of one thing which consists in how a second object is. I call that *Secondness*.

Besides this, there are two modes of being that I call *Firstness* and *Thirdness*. *Firstness* is the mode of being which consists in its subject's being positively such as it is regardless of aught else. That can only be a possibility. For as long as things do not act upon one another there is no sense or meaning in saying that they have any being, unless it be that they are such in themselves that they may perhaps come into relation with others. The mode of being a *redness*, before anything in the universe was yet red, was nevertheless a positive qualitative possibility. And redness in itself, even if it be embodied, is something positive and *sui generis*. That I call *Firstness*. We naturally attribute *Firstness* to outward objects, that is we suppose they have capacities in themselves which may or may not be already actualized, which may or may not ever be actualized, although we can know nothing of such possibilities, except so far as they are actualized.

Now for *Thirdness*. Five minutes of our waking life will hardly pass without our making some kind of prediction; and in the majority of cases these predictions are fulfilled in the event. Yet a prediction is essentially of a general nature, and cannot ever be completely fulfilled. To say that a prediction has a decided tendency to be fulfilled, is to say that the future events are in a measure really governed by a law. If a pair of dice turns up sixes five times running, that is a mere uniformity. The dice might happen fortuitously to turn up sixes a thousand times running. But that would not afford the slightest security for a prediction that they would turn up sixes the next time. If the prediction has a tendency to be fulfilled, it must be that future events have a tendency to conform to a general rule. "Oh," but say the nominalists, "this general rule is nothing but a mere word or couple of words!" I reply, "Nobody ever dreamed of denying that what is general is of the nature of a general sign; but the question is whether future events will conform to it or not. If they will, your adjective 'mere' seems to be ill placed." A rule to which future events have a tendency to conform is *ipso facto* an important thing, an important element in the happening of those events. This mode of being which

consists, mind my word if you please, the mode of being which consists in the fact that future facts of Secondnes will take on a determinate general character, I call a Thirdness."

Vi skelner derfor mellem tre typer af sign-links mellem et par vilkårlige faktorer A og B:

1:	A-/-B	potentiell
2:	A:-:B	aktuel
3:	A:->B	generel

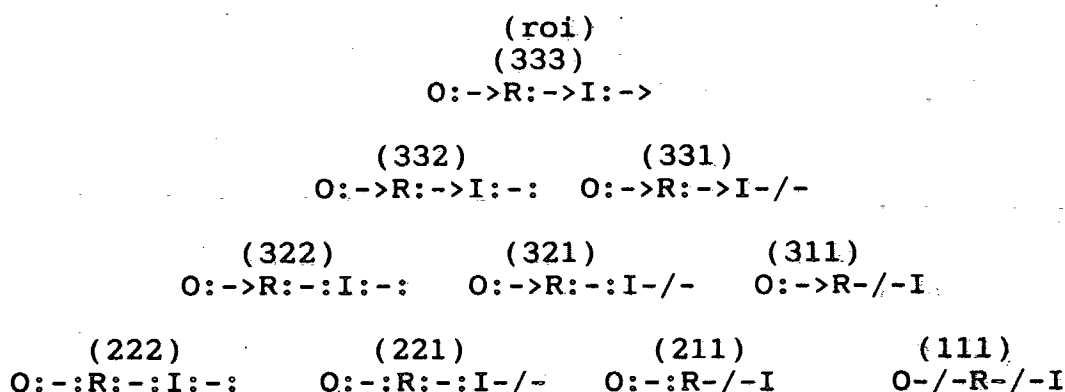
Disse tre typer af links kan imidlertid ikke kombineres vilkårligt i en O-R-I relation. Hvis vi har en O-/-R forbindelse, så kan vi ikke i samme tegnrelation have en R:-:I forbindelse, for hvis forbindelsen mellem O og R kun er potentiell, er der ingen mulighed for, at interpretanten I kan referere til et aktuelt, skelneligt objekt. På samme måde kan vi sige, at hvis O-R linket ikke er generelt, så kan R-I linket heller ikke være det. Vi kan derfor formulere følgende udvalgsregel for de mulige tegnrelationer: *Kategorien af O-R linket er mindst så høj som kategorien af R-I linket.*

Link-kategorierne kan nu knyttes til en kategorisering af hver af de tre faktorer R, O og I. Kategorien af hver faktor sættes lig med kategorien af det link, som leder til den næste faktor i relationen, når vi går fra R til O og derfra videre til I. For R og O kan vi altså aflæse kategorierne direkte af O-R-I grafen: først går vi mod venstre fra R til O og kategoriserer R efter dette link. Derefter går vi mod højre fra O til I, og kategorien af O sættes lig med kategorien af O-I linket, som ifølge ovenstående regel er den laveste af kategorierne for O-R linket og R-I linket, hvilket er det samme som kategorien af R-I linket. For at bestemme kategorien af interpretanten I bliver vi i almindelighed nødt til at angive linket til næste led i den semiotiske kæde O-R-I-, og vi definerer kategorien af I som kategorien af af dette næste link. Det er dog ikke nødvendigt at tegne dette link, hvis R-I linket er potentielt, for så ved vi, at det næste link også kun kan være potentielt, da I jo fungerer som R for den næste relation i kæden.

Vi kan nu angive tegnklassen som en taltripel (roi), hvor r, o og i er kategorierne for hhv. R, O og I og kan antage værdierne 1, 2 og 3 med udvalgsreglen

$$r \geq o \geq i \quad (1)$$

Man indser let, at der således kan dannes 10 klasser af tegn. Peirce anbragte disse 10 klasser i en såkaldt tetraktys, en talmagisk figur, der spillede en stor rolle for pythagoræerne. På nedenstående figur er tegnklasserne indplacerede i tetraktyssen med koordinatsættene (roi) og link-graferne O-R-I.



Figur 1. Tegnklassernes tetraktys med (roi) koordinater og O-R-I sign link grafer.

Peirce indførte også forskellige navne for kategorierne på de tre pladser i (roi) triplen. For Rs vedkommende kaldes de 1. *qualitegn*, 2. *sintegn* og 3. *legitegn*. Qualitegn er rene kvaliteter, såsom papirets hvidhed. Sintegn er individuelle tegn, som en given tilfældig krusedulle, man tegnede, da man talte i telefon. Legitegn er tegn, der kan genkendes som repræsentanter for en generel klasse, f.eks. et bogstav. (Med en anden terminologi kaldes sintegnet *token* og legitegnet *type*). Tetraktyssen indeholder 1 qualitegn, 3 sintegn og 6 legitegn.

For objektreferencen O kaldes kategorierne 1. *ikon*, 2. *index* og 3. *symbol*. Ikonet er altså ifølge ovenstående et tegn, hvor linket R-I er potentielt. Man kan sige, at det ikoniske tegn "skygger for" eller erstatter objektet, som ikke behøver at have nogen fysisk eksistens. En tegnet streg kan være et ikon for den matematiske abstraktion "en ret linje", et energibånd er et ikon for en idealiseret fysisk vekselvirkning. For indexet, derimod,

consists, mind my word if you please, the mode of being which consists in the fact that future facts of Secondness will take on a determinate general character, I call a Thirdness."

Vi skelner derfor mellem tre typer af sign-links mellem et par vilkårlige faktorer A og B:

1:	A-/-B	potentiell
2:	A:-:B	aktuel
3:	A:->B	generel

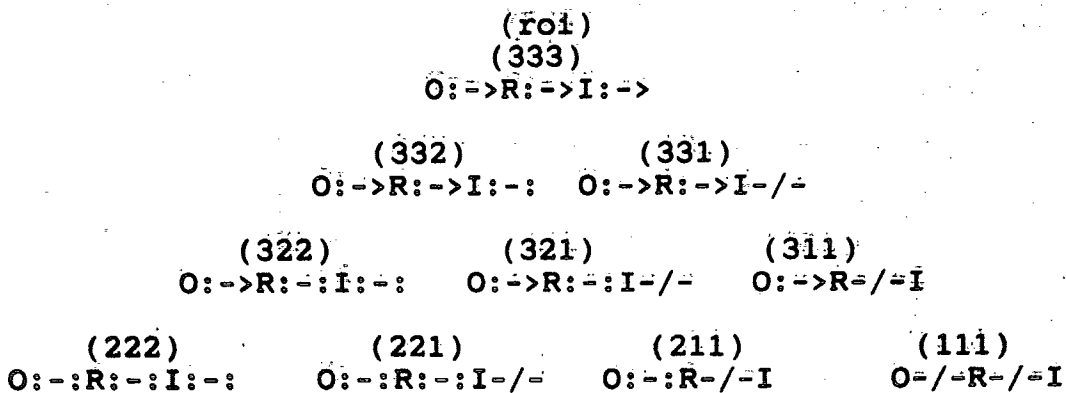
Disse tre typer af links kan imidlertid ikke kombineres vilkårligt i en O-R-I relation. Hvis vi har en O-/-R forbindelse, så kan vi ikke i samme tegnrelation have en R:-:I forbindelse, for hvis forbindelsen mellem O og R kun er potentiell, er der ingen mulighed for, at interpretanten I kan referere til et aktuelt, skelneligt objekt. På samme måde kan vi sige, at hvis O-R linket ikke er generelt, så kan R-I linket heller ikke være det. Vi kan derfor formulere følgende udvalgsregel for de mulige tegnrelationer: *Kategorien af O-R linket er mindst så høj som kategorien af R-I linket.*

Link-kategorierne kan nu knyttes til en kategorisering af hver af de tre faktorer R, O og I. Kategorien af hver faktor sættes lig med kategorien af det link, som leder til den næste faktor i relationen, når vi går fra R til O og derfra videre til I. For R og O kan vi altså aflæse kategorierne direkte af O-R-I grafen: først går vi mod venstre fra R til O og kategoriserer R efter dette link. Derefter går vi mod højre fra O til I, og kategorien af O sættes lig med kategorien af O-I linket, som ifølge ovenstående regel er den laveste af kategorierne for O-R linket og R-I linket, hvilket er det samme som kategorien af R-I linket. For at bestemme kategorien af interpretanten I bliver vi i almindelighed nødt til at angive linket til næste led i den semiotiske kæde O-R-I-, og vi definerer kategorien af I som kategorien af af dette næste link. Det er dog ikke nødvendigt at tegne dette link, hvis R-I linket er potentielt, for så ved vi, at det næste link også kun kan være potentielt, da I jo fungerer som R for den næste relation i kæden.

Vi kan nu angive tegnklassen som en taltripel (roi), hvor r, o og i er kategorierne for hhv. R, O og I og kan antage værdierne 1, 2 og 3 med udvalgsreglen

$$r \geq o \geq i \quad (1)$$

Man indser let, at der således kan dannes 10 klasser af tegn. Peirce anbragte disse 10 klasser i en såkaldt tetraktys, en talmagisk figur, der spillede en stor rolle for pythagoræerne. På nedenstående figur er tegnklasserne indplacerede i tetraktysen med koordinatsættene (roi) og link-graferne O-R-I.



Figur 1. Tegnklassernes tetraktys med (roi) koordinater og O-R-I sign link grafer.

Peirce indførte også forskellige navne for kategorierne på de tre pladser i (roi) triplen. For Rs vedkommende kaldes de 1. *qualitegn*, 2. *sintegn* og 3. *legitegn*. Qualitegn er rene kvaliteter, såsom papirets hvidhed. Sintegn er individuelle tegn, som en given tilfældig krusedulle, man tegnede, da man talte i telefon. Legitegn er tegn, der kan genkendes som repræsentanter for en generel klasse, f.eks. et bogstav. (Med en anden terminologi kaldes sintegnet *token* og legitegnet *type*). Tetraktysen indeholder 1 qualitegn, 3 sintegn og 6 legitegn.

For objektreferencen O kaldes kategorierne 1. *ikon*, 2. *index* og 3. *symbol*. Ikonet er altså ifølge ovenstående et tegn, hvor linket R-I er potentielt. Man kan sige, at det ikoniske tegn "skygger for" eller erstatter objektet, som ikke behøver at have nogen fysisk eksistens. En tegnet streg kan være et ikon for den matematiske abstraktion "en ret linje", et energibånd er et ikon for en idealiseret fysisk vekselvirkning. For indexet, derimod,

er R-I linket aktuelt. Det kan være et konkret fysisk årsagsvirkningsforhold som mellem et meteor og et ringbjerg på Månen, eller det kan være en automatisk, ufortolket henvisning, såsom personnumre, der kun har til formål at skelne et individ fra et andet. Symbolet har en generel henvisning til objektet, f.eks. en konvention til fortolkning af et ord. Symbolhenvisningen kan dog også være en vanemæssig naturlig proces som f.eks. virkningen af et enzym, som gennem en lang evolution er blevet indrettet til at sætte sig på en bestemt plads i et bestemt molekyle eller en nukleobasetriplet i DNA, der koder for en bestemt aminosyre. Symboler kræver, at representaminet R er et legitegn, indexet kræver et legitegn eller et sintegn, medens ikonet ikke stiller krav til R. Tetraktyssen indeholder 3 ikoner, 4 indices og 3 symboler.

For interpretanten benævnes de tre kategorier: 1. *rheme* eller *term*, 2. *dicitegn* eller *proposition* og 3. *argument*. Et rheme er en enkeltstående term, som et ord, der jo ikke i sig selv siger noget. Ordets mening er potentiel, og først når det kædes sammen med andre ord til en sætning, opstår et aktuelt udsagn, som altså her kaldes et dicitegn eller en proposition. Et argument består af meningsfuldt sammensatte propositioner. I tetraktyssen er der 6 rhemer, 3 dicitegn og 1 argument. Det kan forekomme lidt underligt, at den mest komplicerede tegntype, argumentet, kun får én plads i skemaet, medens enkle termer har hele 6. Forklaringen er, at et argument ikke kan beskrives fyldestgørende med en enkelt tegnrelation. Når vi her beskriver det som (333) eller $O \rightarrow R \rightarrow I \rightarrow$, siger vi blot, at det kræver den højeste grad af generalitet i begyndelsen af tegnkæden, hvilket er en nødvendig forudsætning for, at kæden kan fortsætte med generelle sign links. Disse højere led kan vi så overlade til retorikken. I fysikken, derimod, er vi specielt interesserede i enklere tegnrelationer, som kan redegøre for transformationen af tegn, der kommer til os fra den ikke-sproglige verden, til termer i fysikkens teori og dens eksperimentelle praksis.

Når man verbalt skal navngive en given tegnklasse, f.eks. klassen (321), som er et legitegn, et index og et rheme, plejer

man at læse koordinaterne fra højre mod venstre, så man siger: et rhemisk, indeksikalt legitegn.

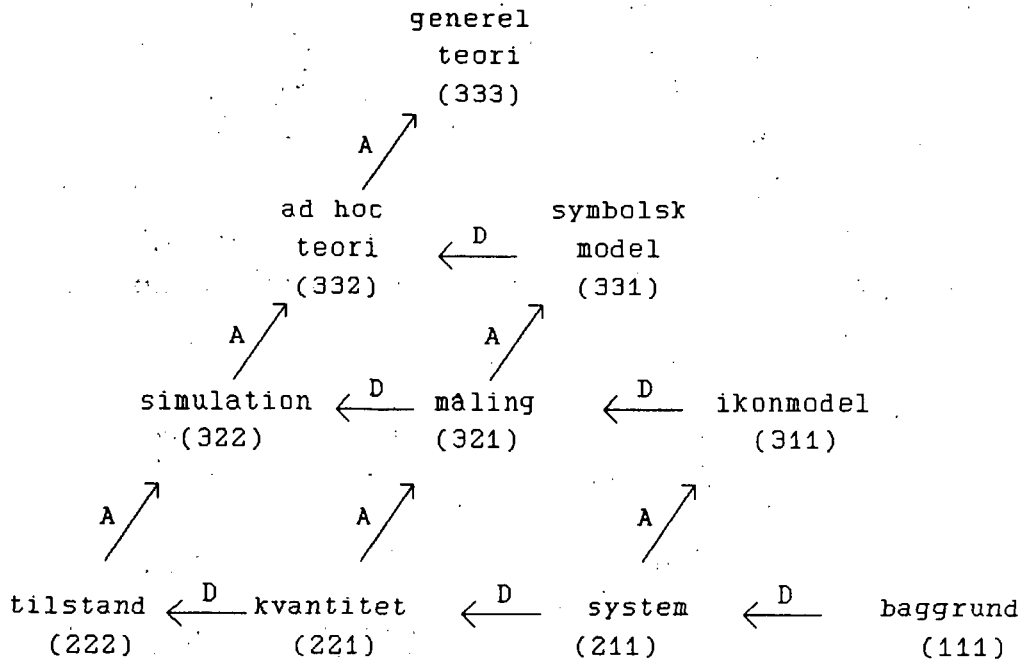
Medens førsteheden i Peirces kategorilære fremtræder som fuldstændig usammensat, må enhver af de højere kategorier indeholde de lavere. For at et repræsentamen kan være et legitegn (3), f.eks. en repræsentant for bogstavklassen "A", må det være et individuelt skelneligt tegn, altså et sintegn (2), og skelneligheden bygger på en kontrast mellem to sansekvaliteter, papirets hvidhed og tryksværtens sortthed, som er qualitegn (1). Det samme forhold gør sig gældende for de andre pladser i tegnrelationen, 0 og I, da det ligger i kategoriernes definition. En repræsentant for en given tegnklasse (r oi) kan derfor siges at inkludere eller indeholde alle de tegnklasser ($r'o'i'$) for hvilke det gælder, at

$$r' \leq r, o' \leq o \text{ og } i' \leq i \quad (2)$$

På denne måde får vi defineret en ordning af klasserne, som dog kun er partiel, hvilket f.eks. ses af, at tegnklassen (322) hverken indeholder eller er indeholdt i tegnklassen (331).

En analyse af et tegn består derfor i en redegørelse for alle tegn, der er indeholdt i det givne tegn. En syntese af et tegn er en proces, der starter i det nederste højre hjørne (111) af tetraktyssen og gradvist bevæger sig opad, indtil den stopper ved det ønskede tegn. Formålet med bond-graph teknikkerne og en række lignende formalismer er at levere et værktøj til systematisk syntese af tegn.

En tegnsyntese skrider trinvist opad i tetraktyssen uden at springe noget led over. Der er derfor to grundprocesser i syntesen: en kategori 1 kan hæves til en kategori 2, hvilket kaldes *diskrimination* (D), og en kategori 2 kan hæves til en kategori 3, hvilket kaldes *abstraktion* (A). På figur 2 er søgt illustreret, hvordan syntesen af fysiske modeller, eksperimenter og teorier forløber. Vi skal i de følgende afsnit se, hvordan energibånds-semiotikken i sin formalistiske opbygning systematisk går frem gennem de to nederste lag af tetraktyssen, og hvordan anvendelsen af formalismen leder frem mod generelle teoretiske begrebsrammer.

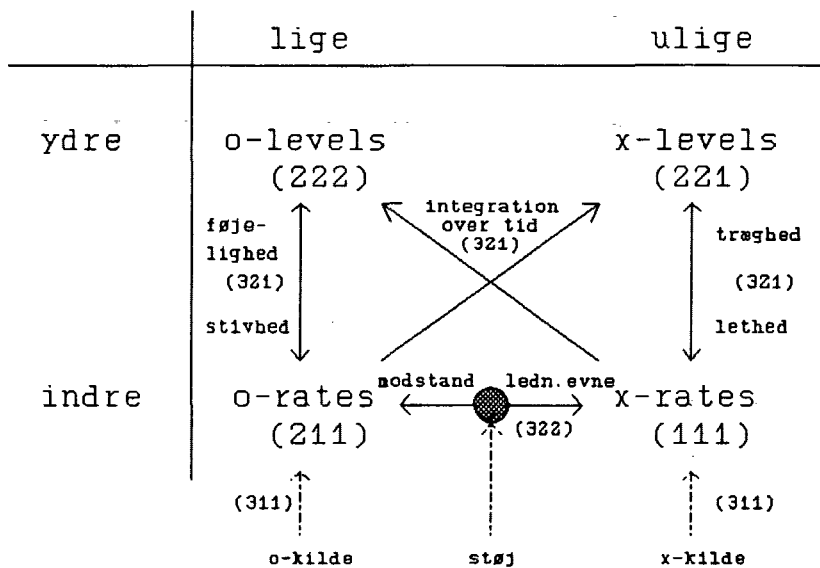


Figur 2 Syntese af model, eksperiment og teori.

Det nederste lag i den almene tetraktys, figur 1, som omfatter tegnklasserne (222), (221), (211) og (111), kan kaldes *det konkrete lag*. Tegnene i dette lag har en ikke-sproglig karakter, idet de er blottede for abstraktionens kategori 3. Det er disse tegn, som fysikken handler om. Da der er fire slags konkrete tegn, lader de sig gruppere i to modsætningspar og opstille i en såkaldt semiotisk firkant, en meget benyttet skemaform inden for den europæiske semiotiske tradition (Greimas, Per Aage Brandt, m. fl.). Når vi her benytter sådanne firkantopstillinger, må det ikke forveksles med denne skoles brug af samme figur, for i den europæiske tradition er alle tegn betragtet som sproglige, men her er det netop de ikke sproglige tegn, som opstillingen vedrører.

De to modsætningspar eller *dikotomier* for de konkrete tegn kan beskrives som ydre/indre og lige/ulige. Hvis objekthenvi-ningen er aktuel eller indeksikal taler vi om ydre tegn, hvis den er potentiel eller ikonisk, taler vi om indre tegn. Hvis summen af tegnkategorierne $r+o+i$ er ulige, er tegnet ulige, ellers er

det lige. Denne opdeling af de konkrete tegn genfindes i energibåndsformalismens opdeling af dynamiske variable. De ydre tegn kaldes *levels* og de indre *rates*. De lige tegn kaldes o-tegn og de ulige x-tegn. Relationer mellem disse fire klasser kan henføres til det overliggende lag i teraktyssen. Vi skelner her mellem aktive relationer, som er *monadiske*, og som svarer til tegnklassen (311), reaktive relationer, som er *mindst dyadiske* og svarer til tegnklassen (321), og *dissipative* relationer, som er *triadiske* og svarer til tegnklassen (322). I energibåndsformalismen repræsenteres disse tre relationstyper af henholdsvis kilderne, lagrene og lækkerne.



Figur 3 Konkrete tegn og relationer i energibåndsformalismen.

Ud over de abstrakte betegnelser for de fire klasser af dynamiske variable i figur 3, benyttes også nogle mere dagligtsprogede, men brugen af disse må indrette sig efter den konkrete sammenhæng. For et elektrisk system er o-levels *ladninger*, x-levels *magnetfluxe*, o-rates *spændinger* og x-rates *strømme*. I en ikke nærmere specificeret sammenhæng benyttes ordet *forskydning* (displacement) og bogstavet q for o-levels, ordet *impuls* (momentum) og bogstavet p for x-levels, ordet *spænding* (effort) og bogstavet e for o-rates og ordet *strøm* (flow) og bogstavet f for x-rates.

2. Simple energibånd og dynamiske variable.

Energibånds-teknikken er opfundet af en associate professor i "Mechanical Engineering" på M.I.T. Henry M. Paynter og første gang beskrevet i et duplikeret sæt "class notes for M.I.T. course 2.751" med titlen "Analysis and Design of Engineering Systems" fra 1960. De væsentligste inspirationskilder for Paynter er Peirces semiotik og bond-graph teknikker, den generelle systemteori af Bertalanffy, Norbert Wiener m. fl., netværksteori af Gabriel Kron og energetikken af den danske kemiker J.N. Brønsted. Den version af energibåndsteknikken, som er beskrevet og benyttet i de tidligere tekster "Dynamik og diagrammer" (IMFUFA tekst nr. 8, 1978) og "Semiotik og systemegenskaber - 1" (IMFUFA tekst nr. 22, 1979) er tæt forbundet med Paynters formalisme, men afviger på visse punkter, især ved den mere systematiske brug af ikoner og i indiceringssystemet for båndene. Det mere generelle synspunkt, som nærværende tekst lægger op til, vil behandle energibåndsvariablene som vektorer i en generel Riemann-metrik. Herved opnås for det første en semiotisk indføring til brugen af tensorregning i netværksanalyse og for det andet en stærkere kobling af dette traditionelt ingeniørmæssige område til grundlæggende discipliner i moderne fysik, såsom generelt relativistisk og klassisk analytisk mekanik, samt kvantefeltteorier. Den sidste ambition findes også både hos Gabriel Kron (Tensor Analysis of Networks, 1939) og Léon Brillouin (Wave Propagation in Periodic Structures, 1946), men noget hæmmet af begrænsningen til traditionelle elektriske netværksdiagrammer, som mangler den semiotiske fuldstændighed, som energibåndsteknikken besidder.

Indledningsvis beskriver Paynter i "Analysis and Design -", hvordan en model- eller teoribygning starter med afgrænsning af et system, hvilket svarer til diskriminationen fra (111) til (211) i figur 2. Den næste fase er en abstraktion fra (211) til (311) ved hjælp af generelle ikoner. Denne proces kalder Paynter for *reticulation*, dvs. netværksstrukturering:

"The rational proces of endowing a system with structure we call *reticulation*. - - Since the structural attribute

of a system which interests us most is the functional connectedness of its elements, the final step in the reticulation process is the sketching of the important relations and bonds of interaction among the elements and between each of the elements and the environment".

Vi har altså brug for generelle ikoner til at beskrive "elements" og "bonds of interaction". Reticulationen fører til et netværksdiagram, hvor elementerne optræder som knuder og båndene (en dårlig oversættelse af "bonds") som grene.

Sideløbende med reticulationen foregår en diskrimination (211) til (221), som identificerer og indicerer (indfører indices for) kvantificerbare variable i systemet, således at måleforskrifter (321) kan knyttes til disse variable og til den ikoniske model. Herved bliver modelbyggeren i stand til at nå frem til en symbolsk model (331), et sæt ligninger mellem de således definerede størrelser, hvorved matematificeringen af modellen er fuldent.

Energibåndet eller *vekselvirkningsbåndet* er et generelt ikon, som kun indirekte er kvantificerbart, idet vekselvirkningen beskrives i termer af indre variable, strømme og spændinger, (jfr. figur 3). Produktet af disse er en energistrøm, som også er en indre variabel og som sådan ikke direkte målelig. Paynter skriver:

1. An *energy bond* may be conceived as an interaction; associated with each bond are two variables, the first pertaining to an *effort* and the second to a *flow*, their product yielding the *power* or *energy flow rate*.
2. Alternatively, an interaction may be conceived as a *bilateral signal flow* between two elements, thus attributing a direction of causality to the interaction.

Et energibånd er en forbindelse mellem to elementer A og B. Det har to *porte* til sin omverden og betegner selv elementernes porte til deres omverden.

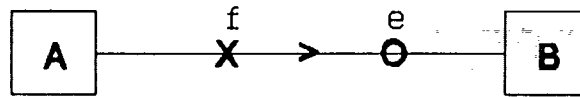
Løst sagt er ikonets forbindelse til sit objekt "billedagtig", ikke som et fotografi, der jo snarere er som et aftryk af objektet og derfor er indeksikalt, men snarere som en skitse eller et diagram, der danner grundlag for videreudvikling af tegnsystemet. Et ikon må fremhæve de træk, som objektet kræver for at kunne specificeres nøjere, og helst ikke mere end det. Altså det, som Peirce kalder *grunden* for objektet. For et energibånd er det væsentligt, at det forbinder netop to sy-

stemkomponenter, så et velegnet ikon vil være et linjestykke eller kurvestykke med to endepunkter.

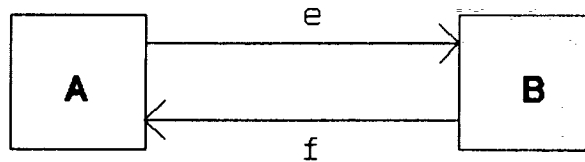
Energibånds-ikonet danner basis for en *indicering* af de indre variable *strøm* og *spænding* (flow og effort, f og e), hvis produkt er den overførte energistrøm. Da energistrømmen er en størrelse med retning i rummet, fra A til B eller omvendt, kræver indiceringen en angivelse af *orientering*. Hertil bruges en pil: produktet af strøm og spænding giver energistrømmen i pilens retning.

Der er endnu et aspekt, som indiceringen skal kunne beskrive, nemlig *kausaltiteten*, som fremhævet i ovenstående Paynter-citat. Et vekselvirkningsbånd beskriver faktisk en vekselvirkning i ordets egentlige forstand, dvs. at de to systemkomponenter A og B, som båndet forbinder, påvirker hinanden gensidigt via båndet. A virker på B via den ene af de to indre båndvariable, og B virker på A via den anden. Vi benytter følgende konvention for at angive kausaliteten: først anbringer vi et par "mærker" på båndet, et par indeksikale sintegn, som skal stå for strøm og spænding. Disse mærker skal kunne skelnes fra hinanden, så det ene må være nærmest ved A og det andet nærmest ved B. Det sintegn, som er nærmest ved A, indicerer den indre variabel, som B påvirker A med, som er input til A og output fra B, og det andet sintegn indicerer den anden indre variabel, som A påvirker B med, som er output fra A og input til B. Når disse sintegn er anbragt, kan vi med indeksikale legitegn som f og e angive hvilket af de to sintegn, der indicerer strømmen, og hvilket, der indicerer spændingen. Vi kan også udstyre sintegnene med en form, der gør dem til legitegn, f.eks. ved at benytte et x for strømmen og et o for spændingen. Herved mindskes behovet for at bruge f og e ; vi kan udpege x og o og sige: "denne strøm og denne spænding vil vi gerne have målt", hvorved vi begiver os på vej fra den ikoniske modeltype (311) og ind i målesituationen (321). Vi mangler dog en del endnu, før vi er nået så langt.

På figur 4a ses det foreløbige indiceringssystem, som nu er indført, og figur 4b viser med en *signal flow graf*, hvordan det hænger sammen med kausaliteten (jfr. Paynter-citatet).



a.



b.

Figur 4. a: Indiceret vekselvirkningsbånd mellem A og B.
 b: Signal flow graf for samme situation.

Indtil nu har vi kun løst beskrevet strøm og spænding som "indre variable" tilhørende tegnklasserne (111) og (211), men intet sagt om, hvordan vi kender forskel på strøm og spænding, hvordan de karakteriseres matematisk, og hvordan man danner deres "produkt", energistrømmen.

Når vi karakteriserer energibandsvariablene som "indre", ligger deri, at de ikke er direkte målelige. Det, der kræves, for at de kan give målelige eller "ydre" udtryk, er, at deres virkning bliver integreret over *tid* og derved skaber en ændring af en ydre variabel i et af de systemer, som båndet forbinder. Tænk på en cisterne med vand. Vandets niveau er en direkte målelig *level*-variabel (heraf navnet). Dette niveau kan kun ændres ved at vi sender en *strøm* af vand ind eller ud gennem et rør på cisternen, og hvis vi vil måle strømmen, kræver det, at vi lader den løbe en vis tid og så iagttager, hvor stor en ændring af niveauet, den forårsager.

Tænk på Golfstrømmen. En ål midt i den mærker ikke strømmen. Strømmen er en kvalitet ved et udstrakt rumligt område og har karakter af et qualitegn (111). Kun hvor den støder sammen med andre strømme opstår der mærkbare effekter. Tænk så på en vandoverflade. Denne flade skiller mellem to områder, som hver har deres karakteristiske strøm. I selve overfladen er der

spænding, som er en indre egenskab ved dette grænselag. Overfladespændingen er også en indre eller ikonisk egenskab, kun potentielt målelig, og som tegn betragtet har den derfor lige som strømmen et 1 på objektreferencens plads. Men som representamen er den knyttet til en klart skelnelig ting, et sintegn, og må derfor tilskrives tegnklassen (211). Inde i rumfanget (bulk) af et elastisk stof er der også spænding (stress), men kun som noget, der er knyttet til virkelige eller tænkte snitflader i stoffet.

Hvis vi har en doven ål, der driver med Golfstrømmen, og ovenover i luften en ballon, der driver med vinden, så kan vi fra et passende udsigtspunkt optage en film af forløbet. Den færdige film kan vise, det man så, men den kan også ved baglæns kørsel vise det *tidsvendte* forløb. Hvis strømmen angives ved hastigheden af ålen og ballonen, kan vi konstatere, at den skifter fortegn ved tidsvendingen. Spændingen, derimod, er uændret. Overfladespændingen prøver at mindske overfladens areal; det er den, der får en sæbeboble til at antage kugleform, og dette fænomen iagttages lige godt på film, hvadenten filmen kører forlæns eller baglæns. Energistrømmen er en strøm og skifter fortegn ved tidsvending, og da den skal være produktet af de indre variable strøm og spænding, er det konsistent at antage, at strømmen skifter fortegn, medens spændingen er uændret ved tidsvending.

På denne måde får vi en definition af, hvad der er strøm, og hvad der er spænding, i hvert tilfælde for et *simpelt* bånd, hvor strøm og spænding hver kan angives med et enkelt reelt tal efter måling. I den mere almindelige situation, hvor strøm og spænding beskrives som flerdimensionale vektorer, må definitionen modificeres noget, men den diskussion udsætter vi lidt.

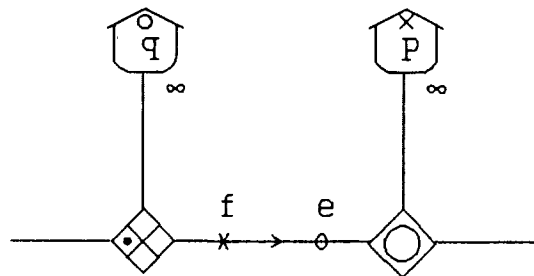
Tidsvendingsoperatoren T er et eksempel på en *spejlingsoperator*, dvs. en operator, som når den anvendes to gange i træk giver en identitet:

$$T^2 = 1 \quad (3)$$

(Vi benytter fede, kursiverede typer for operatorer). En spejlingsoperator kan derfor kun have egenverdierne +1 og -1. Hvis en størrelse har egenværdien +1 med hensyn til en given

spejling, siger vi, at den har *lige paritet* eller blot, at den er *lige*, og hvis egenværdien er -1 , siger vi, at den har *ulige paritet* eller er *ulige*. Strømmen i et simpelt bånd er altså *ulige* med hensyn til tidsvending, medens spændingen er *lige*.

Til det simple bånd kan vi formelt knytte en o-level q , som er integralet over tid af strømmen f fra et ikke nærmere defineret tidspunkt i fortiden og en x-level p , som på tilsvarende måde er tidsintegralet af spændingen e . Tilknytningen angives ikonisk med et par samlere og et par "cykliske lagre", der er karakteriserede ved at have output 0 og derfor ikke ændrer strøm og spænding i båndet.

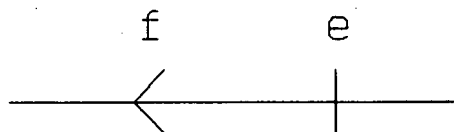


Figur 5 Tilknytning af cykliske level variable til et bånd.

Ved differentiation med hensyn til tiden skifter pariteten, så o-levels er lige og x-levels ulige over for tidsvending. Hvis tiden fastfryses som på et fotografi, bliver x-levels usynlige, så selv om de er målelige og derfor har objektkategorien 2, er de ikke direkte permanent registrerbare, så de må tildeles interpretantkategorien 1. Derfor tilskrives x-levels til tegnklassen (221) og o-levels til (222), og vi når frem til den regel, at variabelnes paritet med hensyn til tidsvending svarer til, om summen af deres tegnkategorier er lige eller ulige, sådan som vi tidligere har defineret lige/ulige dikotomien for det konkrete lag i tetraktyssen (jfr. figur 3).

Indiceringen af båndet kræver jo en orientering, så derfor må vi diskutere endnu en spejlings operation, nemlig *skift af orientering*. For et simpelt bånd må det være muligt at karakteri-

sere strøm og spænding med hensyn til deres paritet ved orienteringsskift. Det almindelige synspunkt, som Paynter argumenterer for, er, at strømme er "gennem-variable", medens spændinger er "tvær-variable", og at det derfor er strømmen, der har ulige paritet ved orienteringsskift. Det er også let nok at acceptere dette, hvis man tænker på et energibånd som en elektrisk dobbeltledning, hvor strømmen jo måles med ampèremetret indsat i den ene ledning, altså "på langs", medens spændingen måles med voltmetret sat mellem de to ledninger, altså "på tværs". I andre tilfælde kan man dog ikke anvende denne betragtning; f.eks. for et longitudinalt mekanisk energibånd, en stang, hvor strømmen er hastigheden og spændingen er kraften, går både strøm og spænding på langs, og for et transversalt mekanisk energibånd, hvor strømmen er vinkelhastigheden og spændingen er drejningsmomentet, går begge på tværs. Alligevel er det svært at finde modeksempler til den regel, at strømmen har ulige paritet og spændingen lige ved orienteringsskift: vi vil derfor antage denne regel med den svækkelse, at når den er opfyldt for et simpelt bånd, kalder vi det et *skalart* bånd, men hvis det er spændingen, der er ulige ved orienteringsskift og strømmen, der er lige, kalder vi det et *pseudoskalart* bånd. Samtidig vil vi indføre den ændring af de indeksikale sintegn for de indre variable, at vi lader strømindexet smelte sammen med orienteringsindexet til en pil, og vi lader spændingen indicere med en streg på tværs af båndet. Dette virker mest naturligt for skalare bånd, men vi vil benytte det i alle tilfælde. På figur 6 er de indeksikale legitegn *f* og *e* for strøm og spænding også vist.



Figur 6 Indicering af simpelt bånd.

Orienteringen af båndet kan ikke betragtes som hørende til det generelle ikon, energibåndet, men er et index, som kommer til, når vi begynder overgangen fra den ikoniske modelfase (311) til (321), hvor måleforskrifterne dukker op. I energibåndets grund er der ikke nogen form for udmærkelse af den ene retning

frem for den anden. Denne skelnen har med måleforskrifterne at gøre, ikke med selve energibåndet. Det følger heraf, at en given vekselvirkning kan beskrives lige så godt med den ene orientering som med den anden. Hvis vi for et skalarbånd har valgt orientering fra højre mod venstre og brugt legitemet f for strømmen, så må *den samme situation* kunne beskrives med orientering fra venstre mod højre, men da strømmen har ulige paritet for et skalarbånd, må måling med den modsatte orientering resultere i et fortegnsskift for strømmen, som vi derfor med den nye orientering betegner $-f$. Denne *strøm-orienteringsregel* er vist på figur 7a, medens 7b viser den tilsvarende regel for pseudo-skalare simple bånd.

$$\begin{array}{c} f \quad e \\ \leftarrow \quad | \quad \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} -f \quad e \\ \rightarrow \quad | \quad \leftarrow \end{array}$$

a

$$\begin{array}{c} f \quad e \\ \leftarrow \quad | \quad \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} f \quad -e \\ \rightarrow \quad | \quad \leftarrow \end{array}$$

b

Figur 7 Orienteringsregler for simple bånd.
a: Skalare. b: pseudoskalare

Når vi begynder at operere med fortegnsskift på f og e , er de ikke længere blot indeksikale, men må opfattes som symboler. For simple bånd er de reelle tal. Denne overgang til symboler kan ifølge figur 2 først finde sted, når målesituationen er defineret. Vi kan ikke her gå ind i en diskussion af de forskellige måleforskrifter for alle de medier, som energibåndsteknikken skal kunne anvendes til. Vi har kort omtalt de elektriske dobbeltledninger, hvor strømmen måles på langs og spændingen på tværs, så lad os kort se på ét andet eksempel: det longitudinale mekaniske bånd.

Hvis et system A vekselvirker med et system B via en stiv stang, således at A kan skubbe på eller trække i B i stangens retning, kan vi opfatte stangen som et longitudinalt mekanisk

bånd. Vi kan vælge orientering fra A til B. Strømmen f er da hastigheden af et fast punkt på stangen, regnet positiv i denne retning. Spændingen e kan så defineres som den kraft, A skubber på B med. dvs hvis A trækker i stedet for at skubbe, er e negativ. Produktet af e og f vil så være energistrømmen fra A til B. Måleforskrifterne er således defineret ud fra båndets orientering, uafhængigt af A og B. Hvis vi skifter orientering, så den nu går fra B til A, og beskriver *samme fysiske situation* som før, så vil det symbolske udtryk for strømmen ændres fra f til $-f$. Det symbolske udtryk for spændingen må så være uændret, for produktet af strøm og spænding skal jo skifte fortegn. Da orienteringen nu går fra B til A, er spændingen nu defineret som den kraft, B skubber på A med. Vi ser altså, at strøm-orienteringsreglen (figur 7a) for det longitudinale bånd medfører loven om aktion og reaktion: B skubber lige så meget på A, som A skubber på B.

For andre medier vil man også finde, at strøm-orienteringsreglen svarer til en "dyb" naturlov, loven om aktion og reaktion for det bestemte medium, som altså ikke er en naturlov, men en semiotisk lov. En snor kan beskrives med samme måleforskrift som en stang, men "skubbekraften" kan så kun være negativ. For et transversalt mekanisk energibånd, en roterende aksel, kræver måleforskrifterne en "håndethed", traditionelt en højreskrue. Strømmen kan så defineres som vinkelhastigheden den vej rundt, som sammen med orienteringen danner en højreskrue, og spændingen som det kraftmoment, systemet bag pilen påvirker systemet foran pilen med (som A påvirker B med, hvis orienteringen er valgt fra A til B). På denne måde bliver strøm-orienteringsreglen til en lov om aktion og reaktion, der udtaler sig om kraftmomenter i stedet for om kræfter. Man kan sige, at kræfter og kraftmomenter, spændinger i det hele taget for skalare bånd, ikke egentlig er størrelser med retning, således at de virker "fra" et system "på" et andet. De virker snarere "mellem" de to systemer. Det er dog ikke let at frigøre sig fra den normale sprogbrug og måske heller ikke ønskeligt, for det afgørende er, at både strømmen og spændingen er definerede ud fra energibånds-ikonet og dets indicering, og denne indicering kræver

en orientering, der er det eneste retningsgivende for begge variable. Hvordan dette retningsvalg så afspejler sig i måleforskrifterne for forskellige medier kan være højst forskelligt ligesom den specifikke formulering af "loven om aktion og reaktion". Strøm-orienteringsreglen er den generelle lov, der sammenfatter alle disse specialtilfælde.

Indiceringen angiver jo også kausaliteten i energibåndets kobling af de to systemer A og B (jfr. figur 4), så der må også findes måleforskrifter for kausalitet. Bertrand Russell hævdede ganske vist i et essay fra 1953, at kausalitetsbegrebet i fysikken er afgået ved døden og kun tilsyneladende overlever "ligesom kongedømmet, fordi man fejlagtigt tror, at det ikke gør nogen skade". Russells synspunkt bygger på den opfattelse, at alt i fysikken kan beskrives med deterministiske ligninger, og da man jo altid kan flytte en størrelse fra den ene side af lighedstegnet til den anden, har det ingen mening at skelne mellem årsag og virkning. Hvis det var rigtigt, kunne det selvfølgelig ikke nytte noget at diskutere måleforskrifter for kausalitet. Imidlertid er det, som vist i tekst 8, muligt at operationalisere kausalitetsbegrebet, men kun for *transienter*, dvs. forbigående indsvingningsforløb. Transienter er netop udtryk for, at *ikke alt* i fysikken kan beskrives deterministisk med ligninger. De kan sættes i gang på en principielt uforudsigelig måde, ved aktive indgreb udefra eller ved den støj, som altid findes i dissipative systemer (jfr. figur 3). Den semiotiske diskussion, som her er ført, skulle gerne også klargøre, at ligninger mellem matematiske symboler først optræder på et forholdsvis højt niveau (331) i tegnhierarkiet, de kan ikke svæve frit og styre nogetsomhelst med større eksakthed end den, der ligger i målesituationen.

En *simulation* af et systems opførsel, som vi her har tilskrevet tegnklassen (322) vil, hvis den foretages med en digital computer, også inddrage elementer af den symbolske beskrivelse. Programmet for en sådan simulation vil imidlertid ikke benytte ligninger, men algoritmer, hvori der er indbygget en *beregningsmæssig kausalitet*. Hvis vi afskaffer kausalitet i fysiske teorier, dukker den altså op et andet sted. En af de ambitioner, som energibåndsteknikken stiller op med, er at

formulere algoritmer for modeller, hvor den beregningsmæssige kausalitet bygger på fysisk-semiotiske betragtninger. Herved opnås en stærkere kobling mellem den numeriske stabilitet af algoritmen og den fysiske stabilitet af det simulerede system.

En direkte oversættelse af en energibåndsmodel til en algoritme, der kan udføres af en seriel digital computer er dog ikke altid mulig. Signalstrømmen svarende til en energibåndsmodel kan indeholde såkaldte *simultane tilbagekoblinger*, hvor outputtet fra en operation er bestemt ved inputtet *til samme tid*. Et sådan struktur kan ikke klares direkte af en seriel computer, som så i stedet må sætte ligningen op og løse den. En parallel computer, f.eks. en gammeldags analogcomputer kan under visse omstændigheder klare simultane tilbagekoblinger, men ikke altid, og det er ikke nogen simpel sag at formulere betingelser for, at det kan lade sig gøre. Problemet om de simultane tilbagekoblinger er dybtliggende og egentlig af semiotisk natur, idet vanskelighederne opstår, fordi computerne opererer med *symbolske* representationer af de *indeksikale* energibåndsvariable. Man løber ind i samme vanskelighed, hvis man forsøger at simulere en kvantemekanisk måleproces. Indtil videre må man slå sig til tåls med, at en implementering af energibåndsformalismen på en digital computer kan udføres ved at generere de simultane ligninger og derpå løse dem formelt eller numerisk.

3. Sammenlægning af simple bånd.

Vi skal nu generalisere begrebet om et vekselvirknings- eller energibånd. Generalisationen skal gå i to retninger: For det første vil vi udvide klassen af matematiske symboler, der kan tilordnes de dynamiske variable, til at omfatte *komplekse tal*. For det andet vil vi opfatte disse størrelser som *vektorer* i et vektorrum med en *generel metrik*.

Brugen af komplekse strømme og spændinger i skalare bånd, hvor strøm-orienteringsreglen (figur 7a) gælder, er velkendt fra den lineære response-teori, og er beskrevet indgående i tekst 22. Nu er det ikke specielt lineært response, vi skal have i tankerne, men også andre discipliner, såsom kvantemekanik, hvor brugen af komplekse tal er nødvendig. Vi vil imidlertid bruge den lineære response-teori som afsæt for generaliseringen, fordi den har vist sig konsistent, og fordi de samme regler kan benyttes for kvantemekanikken.

For enhver type af vekselvirkningsbånd må der være defineret et *skalarprodukt* af strøm og spænding. Dette produkt fortolker vi normalt som energistrømmen, men det vil vise sig, at det selv for fysiske anvendelser af teknikken ikke altid er energi i traditionel forstand, der strømmer i båndene. Det afgørende er, at denne størrelse er defineret som skalarproduktet af strøm og spænding. For et komplekst skalarbånd er strøm og spænding jo hver for sig også skalare størrelser, så her kan vi blot definere energistrømmen som et produkt. I responseteorien viser det sig dog, at den ene faktor i dette produkt skal komplekskonjugeres, så vi vil definere energistrømmen i retning af orienteringen for et komplekst skalarbånd på følgende måde:

$$w = \operatorname{Re}(e^* f) = \operatorname{Re}(e f^*) \quad (4)$$

hvor stjernen betyder komplekskonjugering og Re betyder "real-delen af". Hvis e og f er signalamplituder i responseteorien, er energistrømmen kun det halve af det her angivne, men vi vil udelade faktoren $\frac{1}{2}$ for at kunne benytte samme udtryk for reelle og komplekse bånd. Det betyder blot, at i en responseteoretisk

sammenhæng er e og f nu ikke længere amplituder for spændinger og strømme af en given frekvens, men effektive spændinger og strømme, som er $\sqrt{2}$ gange mindre end amplituderne.

Indfører vi real- og imaginærdel af spænding og strøm:

$$e = e_1 + ie_2 \quad ; \quad f = f_1 + if_2 \quad (5)$$

får vi af (4):

$$W = e_1 f_1 + e_2 f_2 \quad (6)$$

hvilket tyder på, at det komplekse skalarbånd kan reticuleres ud på to reelle skalarbånd, hvor det ene har spændingen e_1 og strømmen f_1 og det andet har spændingen e_2 og strømmen f_2 .

Vi må imidlertid huske på, at hvad der er strømmen, og hvad der er spændingen, er defineret ved tidsvendingskriteriet: strømmen skal skifte fortegn, spændingen ikke, ved tidsvending i et reelt skalarbånd, og endvidere, at strøm-orienteringsreglen figur 7a skal gælde for skalarbånd. I den lineære responseteori er signalamplituderne for frekvensen ω associerede med en "viser", der drejer rundt som $\exp(-i\omega t)$, dvs. hvis spændingsamplituden er e , er den faktiske spænding til tiden t givet ved

$$e_r(t) = \text{Re} [e \cdot \exp(-i\omega t)] \quad (7)$$

Da den reelle spænding skal have lige paritet ved tidsvending, og da den tidsvendte signalviser drejer den modsatte vej, må den tidsvendte spændingsamplitude være den *komplekskonjugerede* af den oprindelige:

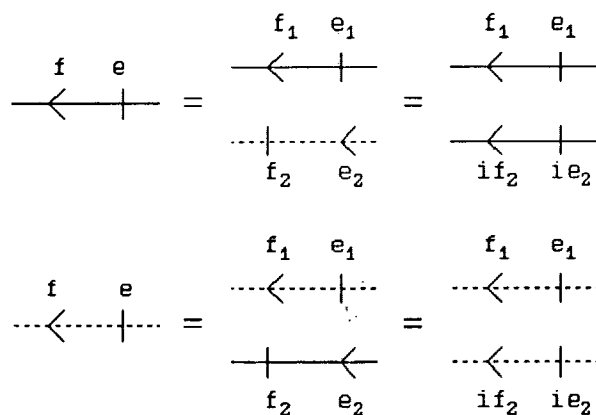
$$\mathbf{T} [e_r] = e_r = \text{Re} [e^* \cdot \exp(i\omega t)] \quad (8)$$

Vi har derfor følgende regel for tidsvending af signalamplituder i komplekse, endimensionale bånd (skalare eller pseudoskalare):

$$\mathcal{T}[e] = e^* ; \quad \mathcal{T}[f] = -f^* \quad (9)$$

Dvs. den imaginære del af spændingen skifter fortegn ved tidsvending, medens imaginærdelen af strømmen bevarer fortegnet. Det fremgår heraf, at et komplekst skalarbånd ikke kan reticuleres ud på to reelle skalarbånd. En mulighed er at benytte et reelt pseudoskalart bånd til imaginærdelene af strøm og spænding, men så må vi indicere imaginærdelen af spændingen som en strøm og imaginærdelen af strømmen som en spænding. Dette stemmer så også med strøm-orienteringsreglen for det komplekse skalarbånd, for ifølge denne skal både realdelen og imaginærdelen af strømmen skifte fortegn ved orienteringsskift, og når imaginærdelen af strømmen er en spænding, må den høre hjemme i et pseudoskalart bånd (figur 7b). En anden mulighed er at benytte to skalarbånd til reticulationen, men lade det bånd, som bærer imaginærdelene have imaginære variable, spændingen ie_2 og strømmen if_2 , for når e_2 skifter fortegn ved tidsvending, vil ie_2 jo ifølge (9) bevare fortegnet.

På tilsvarende måde finder vi, at et pseudoskalart komplekst bånd kan reticuleres ud i et reelt pseudoskalart og et reelt skalarbånd eller i et reelt og et imaginært pseudoskalart bånd. På nedenstående figur er disse regler vist, idet vi nu bruger punkterede linjer for pseudoskalare bånd og fuldt optrukne for skalare.



Figur 8 Oversættelse af komplekse, endimensionale bånd til reelle og imaginære bånd.

For et komplekst bånd har vi frit valg mellem at fremstille det som skalart eller pseudoskalart. For hvis vi vil definere et komplekst bånd ud fra simple (reelle) bånd, må det være et skalart og et pseudoskalart bånd, som i relation til orientering kan sidestilles, således at man meningsfuldt kan påstå, at de er orienterede "samme vej". Når vi så skal danne det komplekse bånd ved sammenlægning af af det skalare og det pseudoskalare simple bånd, kan vi frit vælge, om det ene eller det andet af disse to skal betragtes som "det øverste" i forhold til figur 8. Hvis vi kalder spændingen og strømmen i det skalare bånd for E_1 og F_1 og spændingen og strømmen i det pseudoskalare bånd for E_2 og F_2 , så kan spændingen og strømmen i det komplekse bånd defineres som

$$e_s = E_1 + iF_2 \quad ; \quad f_s = F_1 + iE_2 \quad (10)$$

hvilket fører til et skalart komplekst bånd (derfor subskriptet s), eller spændingen og strømmen kan defineres som

$$e_p = E_2 + iF_1 \quad ; \quad f_p = F_2 + iE_1 \quad (11)$$

hvilket fører til et pseudoskalart komplekst bånd. Vi kommer derved frem til en regel af samme karakter som strøm-orienteringsreglen: da de to valg (10) og (11) beskriver samme fysiske situation, og da

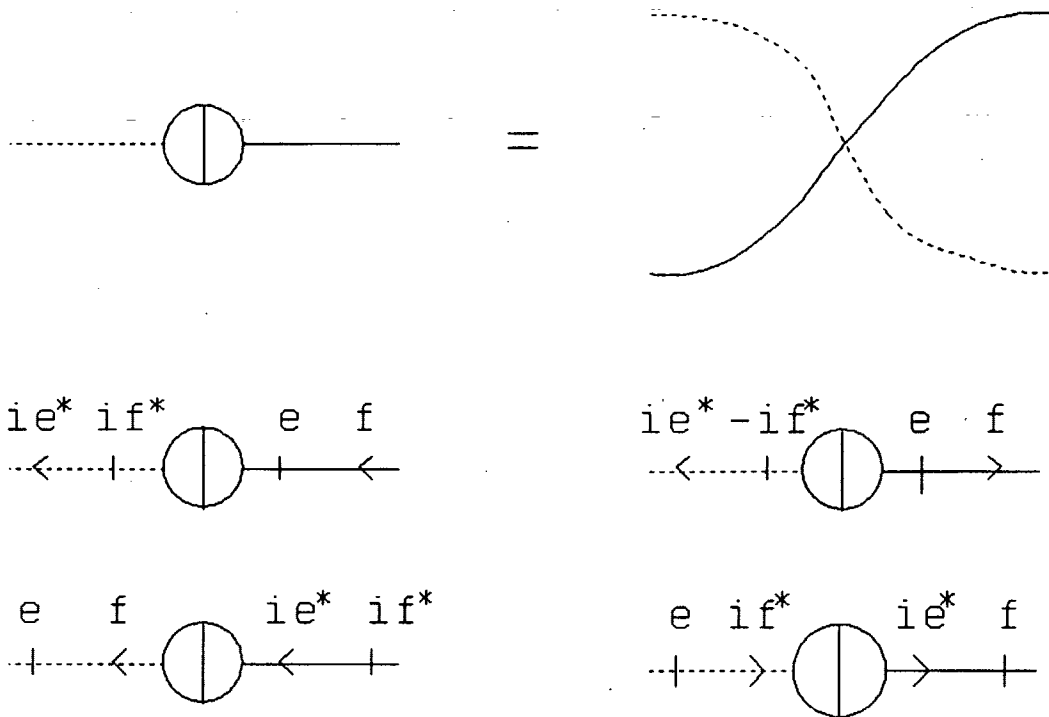
$$e_p = if_s^* \quad ; \quad f_p = ie_s^* \quad (12)$$

kan vi altså frit omdefinere et skalart bånd til et pseudoskalart, hvis vi bytter om på spændings- og strømindexet uden at flytte de symbolske udtryk, komplekskonjugerer disse udtryk og ganger dem med i . Denne regel, som kaldes reglen om skift af genus er fremstillet på nedenstående figur.

$$\begin{array}{c} e \quad f \\ \hline | \quad \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} ie^* \quad if^* \\ \hline \leftarrow \quad | \end{array}$$

Figur 9 Reglen om skift af genus.

Ved *genus* af et bånd vil vi forstå et tal, γ , der angiver båndets "type" med hensyn til tidsvending og orienteringsskift. For endimensionale bånd (simple eller komplekse) er der kun de to muligheder $\gamma = 1$, skalare bånd, og $\gamma = -1$, pseudoskalare bånd. For vektorbånd kan vi definere genus som et komplekst tal, der vil kunne antage et par andre værdier. Bånd med genus 1 er den grundlæggende standard, og reglen om skift af genus gør det muligt at tilbageføre eventuelle pseudoskalare bånd til den skalare type. Overgang fra $\gamma = -1$ til $\gamma = 1$ kan vises ikonisk med brug af en *genusgyrator*, som vist nedenfor:



Figur 10 Genusgyrator mellem et skalart og et pseudoskalart bånd.

Øverst på figur 10 ses, hvordan genusgyratoren konstrueres ved simpel ombytning af op/ned ordningen af to simple bånd. Det er indlysende herfra, at ikonet for elementet må være *symmetrisk* med hensyn til ombytning af de to porte. Nederst ses forskellige indiceringer og symboltilskrivninger. Ikonets symmetri svarer til en symmetri af de symbolske funktioner. Når en variabel i venstre port dannes ved at komplekskonjugere en variabel i højre port og

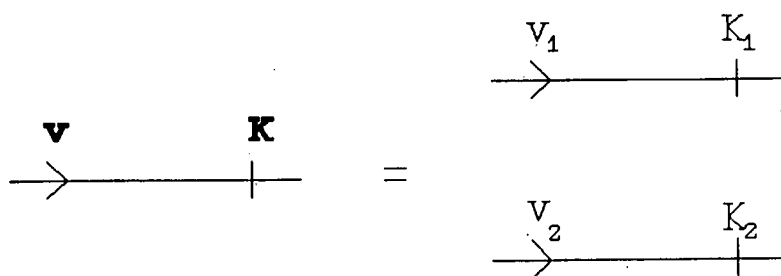
gange den med i , så fremgår variabelen i højre port ved samme operation anvendt på variabelen i venstre port.

Genusgyratoren er et eksempel på en antilinear topport med gyrator karakter. Antilineariteten beror på, at der sker en komplekskonjugering af input signalerne og gyrator karakteren på, at en input spænding i den ene port bliver til en output strøm i den anden, og vice versa. En ikonsymmetrisk gyrator findes ikke i den simple energibandsformalisme; at den dukker op nu, beror på, at omsætningsforholdet for gyratoren nu kan være et imaginært tal, eller, som vi senere skal se, en antihermiteske tensor.

Vi skal nu videre med opbygning af begrebet om det generelle vektorbånd, idet vi som tidligere vil lade generaliseringen ske gradvist, så forbindelsen til den simple formalisme ikke slipper os af syne. Lad os derfor starte med at se på bevægelsen af en partikel i 2 dimensioner. Vi kan benytte et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med grundvektorer e_1 og e_2 . Partiklens hastighedsvektor kan så skrives i koordinater som $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ og kraften på partiklen som $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$. Da energioverførselshastigheden til partiklen er skalarproduktet af \mathbf{K} og \mathbf{v} og kan skrives som

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = K_1 v_1 + K_2 v_2 \quad (13)$$

kan vi definere et todimensionalt vektorbånd for partiklen ved sammenlægning af to simple bånd som vist nedenfor.



Figur 11 Todimensionalt vektorbånd opbygget af to simple bånd.

Vi vil nu foretage en overgang til et andet koordinatsystem med grundvektorer e_1' og e_2' , som ikke nødvendigvis er vinkelrette på

hinanden, men stadig lineært uafhængige. Overgangen fra de gamle til de nye grundvektorer kan så defineres med en 2×2 matrix A hvis determinant er forskellig fra 0:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Vi kan nu vælge at opløse hastighedsvektoren efter de nye grundvektorer. De nye hastighedskoordinater bliver så

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

hvor matricen B er den til A hørende *contragradiente* matrix defineret som den transponerede af den reciproke af A :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1 \text{ t}} \quad \text{dvs.} \quad B_{ij} = A^{-1}_{ji} \quad (16)$$

Hvis kraftens koordinater transformeres efter samme formel, kan vi ikke bruge opskriften (13) for energistrømmen i det "skævvinklede" bånd. Omvendt kunne vi forsøge at finde en anden transformation for kraftvektoren, således at formen (13) stadig holder, altså således at

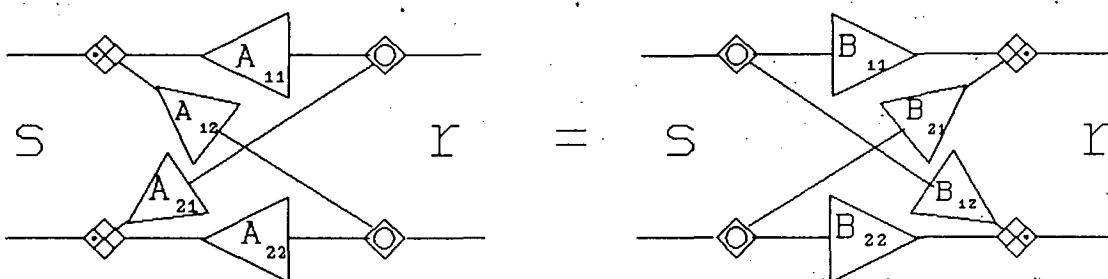
$$K'_1 V'_1 + K'_2 V'_2 = K_1 V_1 + K_2 V_2 \quad (17)$$

Det ses let, at de nye kraftkoordinater så skal defineres som

$$\begin{pmatrix} K'_1 \\ K'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

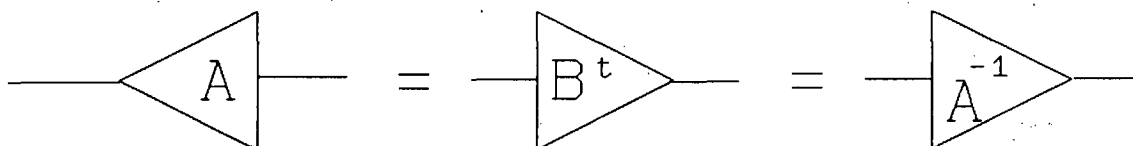
Altså: For at opretholde formen (13) for energistrømmen, som muliggør, at vektorbåndet kan reticuleres ud på skalarbånd, skal spændingen (kraften), når strømmen (hastigheden) transformeres med den *contragradiente* matrix B , transformere med samme matrix

A som grundvektorerne for koordinatsystemet. Vi siger derfor, at strømmen transformerer *contravariant*, medens spændingen transformerer *covariant*. Vi kunne lige så godt have valgt at lade spændingen transformere *contravariant*, men så måtte strømmen transformere *covariant*. Overgangen mellem det "retvinklede" vektorbånd (r) og det "skævvinklede" kan nu reticuleres på to forskellige måder med den simple energibåndsteknik, alt efter om vi lægger (18) eller (15) til grund:



Figur 12 Covariant og contravariant skalar reticulation af koordinattransformation fra retvinklede (r) til skævvinklede (s) koordinater i to dimensioner.

Vi kan nu indføre et vektorbånds-ikon for den sammensatte transformer på figur 12 (egentlig er det en *metrisk transducer*, men indtil videre er der ingen grund til at skelne). Vi får straks følgende regel for vending af ikonet:



Figur 13 Ikonvending af transformer.

Grunden til, at der dukker en transponering op på B -matricen, når A -ikonet vendes, er, at den skalare transformer, der forbinder 1-båndet på primærsiden (den flade side af ikonet) med 2-båndet på sekundærsiden (den spidse side) skal have indiceringen 21, og på figur 12 er det jo B_{12} .

Koordinattransformationer, der bevarer aksernes længde og deres retvinklethed, er karakteriserede ved, at A - og B -matricerne er identiske. En matrix, der er identisk med sin contragradiente matrix, siges at være *unitær*. Hvis vi kun betragter unitære

transformationer, svarende til drejninger af et sædvanligt retvinklet (ortonormalt) koordinatsystem, kan vi ikke skelne mellem en contravariant og en covariant vektor, men for et skævvinklet koordinatsystem er det nødvendigt med denne skelnen. Vi vil for eftertiden benytte en notation, hvori koordinaterne for de to vektortyper indiceres forskelligt, for contravariante vektorer anbringer vi koordinatindexet foroven, for covariante forned. Hvis strømmen er contravariant, skriver vi altså dens koordinater som f^i , og hvis spændingen er covariant, skriver vi dens koordinater som e_i , hvor indexet i i begge tilfælde går fra 1 til båndets dimension d . Energistrømmen skrives som

$$W = e_i f^i \quad (19)$$

(idet vi her forudsætter, at vektorerne er reelle). Vi benytter *Einsteins summationskonvention*, dvs. når der forekommer et dobbelt index (her i), skal man tænke sig til en summation over dette index fra 1 til d . Denne regel skal yderligere skærpes ved, at vi forlanger, at de to partnere i indexparret skal stå i forskellig højde, det ene foroven, det andet forned, og de må ikke tilhøre samme symbol.

Hvis både strømmen og spændingen i det skævvinklede system udtrykkes ved deres contravariante koordinater, kan energistrømmen skrives

$$W = e^i g_{ij} f^j \quad (20)$$

hvor g_{ij} er matrixelementerne af den *metriske tensor*

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^d A_{ik} A^t_{kj} = \sum_{k=1}^d A_{ik} A_{jk} \quad (21)$$

Vi har ikke her benyttet den nye summationskonvention, fordi alle indices på A erne står i samme højde. For at kunne gøre det indfører vi først den metriske tensor for det ortonormale ("retvinklede") bånd. Det er simpelthen enhedsmatricen, Kroneckers δ , som i dette tilfælde definerer *standardmetrikken*.

$$G_{ij} = G^{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (22)$$

Vi siger da, at standardmetrikken er *euklidisk*.

I stedet for at regne både strøm og spænding contravariant som i (20), kunne vi regne dem begge covariante, og energistrømmen i det skævvinklede bånd kan så skrives

$$W = e_i g^{ij} f_j \quad (23)$$

og man indser let, at g -matricen med begge indices foroven kan udregnes ved, at man i (21) erstatter A -matricerne med B -matricer, og at den iøvrigt er den reciprokke af g -matricen med begge indices forneden.

Ved hjælp af den nye summationskonvention og de metriske tensorer g og G kan vi nu hæve og sænke indices på matricerne for den metriske transducer A :

$$A_i{}^j = A_{ik} G^{kj} = A_{ij} \quad ; \quad A^i{}_j = g^{ik} A_{kj} = B_{ij} \quad (24)$$

Denne regel huskes lettest, hvis man på de ikoniske fremstillinger af den metriske transducer sørger for, som på figur 12 og 13, at have båndet med standardmetrikken G til højre og båndet med g -metrikken til venstre.

I et bånd med given metrik g kan man tilsvarende hæve og sænke indices for strøm og spænding, dvs. skifte fra covariant til contravariant representation af vektorerne ved brug af de to g -matricer:

$$f_i = g_{ij} f^j \quad ; \quad e^i = g^{ij} e_j \quad (25)$$

Vi kan også ved hæve-sænke reglen definere to matrix-repræsentationer af g , hvor det ene index står foroven og det andet forneden. Begge disse viser sig at være enhedsmatricen:

$$g_i^j = g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij} \quad ; \quad g^i_j = g^{ik}g_{kj} = \delta_{ij} \quad (26)$$

Ved brug af (22) og (24) kan vi nu udtrykke sammenhængen mellem standardmetrikken G og den givne metrik g :

$$g_{ij} = A_i^k A_j^l G_{kl} \quad ; \quad g^{ij} = A^i_k A^j_l G^{kl} \quad (27)$$

Begrebet metrisk tensor indførtes af Riemann til skildring af de geometriske forhold, f.eks. på krumme flader, indlejrede i et tredimensionalt euklidisk rum. Ligningerne (27), der udtrykker transformationen af den metriske tensor ved transformationsmatricerne for koordinatvektorerne benyttes så som definition på almindelige (2. ordens) tensorer i den Riemannske geometri. Einstein kunne benytte Riemanns formalisme uændret til formulering af den generelle relativitetsteori (GRT), og man siger derfor ofte, at GRT er en *geometrisk* beskrivelse af forholdene i et *krumt*, firedimensionalt rum-tids kontinuum, medens den specielle relativitetsteori (SRT) handler om et *fladt* rum-tids kontinuum. Som vi senere skal komme ind på, er der dog gode grunde til at tage afstand fra denne beskrivelse. I en egentlig geometri af den Riemannske type er alle afstande mellem to forskellige punkter positive, hvilket medfører, at den metriske tensor er *positiv definit*. Dette gælder ikke i relativitetsteorierne, fordi én af de fire dimensioner er *tiden*, som man ikke kan opfatte som en rumlig længde. Den ikke definitive metriske tensor i SRT og GRT kan på en simpel måde relateres til energibåndets metrik, men ikke til noget geometrisk kontinuum. Vi kan stadig benytte Riemanns og Einsteins formalisme inden for energibånds-semiotikken, men det er så ikke længere geometri, den handler om.

4. Generelle vektorbånd.

I foregående kapitel indledtes en generalisering af begrebet energibånd, startende fra det simple bånd. Generalisationen gik i to retninger: For det første indførte vi brugen af kompleks notation for endimensionale bånd og begrebet *genus*, γ , for at skelne mellem skalare og pseudoskalare bånd. For det andet definerede vi et vektorbånd ved sammenlægning af simple, skalare og reelle bånd, således at spændingerne i de skalare bånd tilsammen dannede en spændingsvektor og strømmene en strømvektor. For et sådant vektorbånd betragtede vi så en koordinattransformation ved hjælp af en *metrisk transducer*, A , der ændrede båndets *metrik* fra den *euklidiske standardmetrik*, svarende til et ortonormalt koordinatsystem (retvinklet og med lige lange akser), til en vilkårlig metrik, svarende til et skævvinklet koordinatsystem. Denne vilkårlige metrik blev beskrevet med en metrisk tensor g , og vi så, at det for båndets vektorer var nødvendigt at skelne mellem en *contravariant* og en *covariant* koordinatrepræsentation. Svarende hertil vil 2. ordens tensorer som g have 4 forskellige matrix-representationer (og en n 'te ordens tensor 2^n forskellige), som skelnes fra hinanden ved, at indices kan anbringes foroven eller forneden.

Vi har endnu ikke diskuteret, hvordan spejlingsoperationerne tidsvending og orienteringsskift skal forbindes med vektorbåndets indiceringssystem. Med vektorbåndet er der dukket et nyt indiceringsniveau op, nemlig forskellen på covariante og contravariante indices, og spørgsmålet er så, om spejlingerne skal have nogen indflydelse på dette niveau. For de hidtil diskuterede vektorbånd er der flere muligheder; vi kunne f.eks. vælge at overtage strøm-orienteringsreglen uændret fra de skalare bånd, dvs. blot lade strømvektoren skifte fortegn og spændingsvektoren være uændret ved orienteringsskift uden at hæve eller sænke indices, men så ville der blive lukket af for nogle mulige generaliseringer, som viser sig at være yderst frugtbare. Vi må derfor gå lidt forsigtigt til værks og først overveje, hvilke typer af generaliseringer, vi er interesserede i, og derpå

fastlægge spejlingsreglerne, så de er kompatible med alle disse typer og kan udtrykkes på en fælles form.

Den mest åbenlyse generalisering er at tillade vektorbånd opbygget af komplekse skalarbånd. I dette tilfælde må energistrømmen kunne skrives

$$w = \text{Re} [e^*_i f^i] = \text{Re} [e^{*i} f_i] \quad (28)$$

Hvis vi nu benytter sänkereglen

$$e_i = g_{ij} e^j \quad ; \quad f_i = g_{ij} f^j \quad (29)$$

hvor g nu kan indeholde komplekse elementer, får vi

$$\text{Re} [e^{*i} g^*_{ji} f^j] = \text{Re} [e^{*i} g_{ij} f^j] \quad (30)$$

og denne relation kan kun være opfyldt for vilkårlige værdier af e^i og f^j , hvis g_{ij} er hermitesk:

$$g^+_{ij} \doteq g^*_{ji} = g_{ij} \quad (31)$$

Den reciprokke matrix g^{ij} vil så også være hermitesk, så vi siger simpelthen, at *tensoren g er hermitesk*, $g^+ = g$. For reelle bånd betyder det, at g er symmetrisk, hvilket man let kan overbevise sig om er tilfældet for de tidligere fundne udtryk (21) og (27).

Da matricen g_{ij} er hermitesk, har den kun reelle egenverdier. Med passende koordinattransformationer kan vi bringe den på diagonalform, f.eks. kan vi finde en unitær transformation, der bringer den på en diagonalform, hvor det netop er de reelle egenverdier, der står i diagonalen. Vi vil dog få brug for meget andet end unitære transformationer (som vi senere skal definere mere præcist), men vi vil især interessere os for sådanne transformationer, der er kontinuert forbundne med identiteten, således at vi kan tænke os en sådan transformation opbygget gradvist, uden pludselige spring. Sådanne transformationer danner *Lie-grupper*, beskrevet ved et sæt kontinuerte parametre. For de ændringer af g -matricen, der defineres ved sådanne Lie-grupper gælder *Sylvesters træghedssætning*, der siger, at antallet af positive egenverdier og antallet af negative egenverdier er

uændret (og tilsammen lig med dimensionen d). Dvs. hvis vi har en metrik, hvor alle egenverdier er positive, så kan vi ved en kontinuert transformation bringe den på en diagonalform, hvor alle elementer er positive. Ved yderligere kontinuert skala-transformation kan vi bringe den på standardform med kun 1-taller i diagonalen. En metrik med lutter positive egenverdier har derfor en euklidisk standardmetrik.

Hvis der er p positive og n negative blandt egenverdierne ($p+n=d$), vil metrikken kunne bringes på standardform med p 1-taller og n -1-taller i diagonalen. Med passende omordning af koordinaterne kan vi sørge for, at det er de p første pladser i diagonalen, der har 1-taller. Spørgsmålet er nu: kan vi reticulere et sådant ikke-euklidisk standardbånd ud på skalarbånd?

Lad os se på et todimensionalt standardbånd med metrikken

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \quad (32)$$

en såkaldt σ_z -metrik (da $g_{..}$ er lig med Pauli-matricen σ_z). Hvis vi i et sådant bånd lader både spændingen og strømmen være contravariante, vil den metriske tensor afspejle sig i udtrykket for energistrømmen, som bliver

$$W = e^i g_{ij} f^j = e^1 f^1 - e^2 f^2 \quad (33)$$

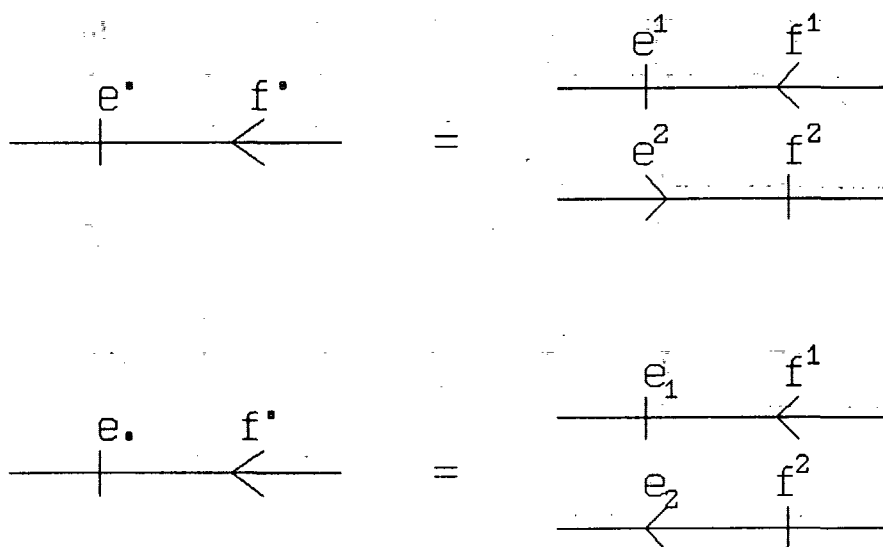
Dvs. bånd 2 i reticulationen må have orientering modsat bånd 1 og modsat vektorbåndet, når både strøm og spænding regnes contravariant. Hvis vi nu går over til at regne spændingen covariant, bliver energistrømmen

$$W = e_1 f^1 + e_2 f^2 \quad (34)$$

Orienteringen er nu den samme i skalarbåndene 1 og 2 og da spændingsindexet er blevet sænket ved hjælp af σ_z -metrikken, har e_2 skiftet fortegn. "Spændingen" i det skalare bånd 2 har altså skiftet fortegn ved orienteringskiftet, dvs. ifølge strøm-orienteringsreglen er e_2 i virkeligheden en strøm! Omvendt kan vi konstatere, at f_2 i det skalare bånd må indiceres som en spæn-

ding. Når vi i overgangen fra (33) til (34) har fastholdt strømvektorens varians, men ændret spændingsvektorens, er det stadig den samme fysiske situation, vi beskriver, men hvis vi ændrer strømvariansen, bliver det en anden situation.

Vi ledes herved til følgende reticulation af et vektorbånd med en ikke-euklidisk standardmetrik (her σ_2 -metrik):



Figur 14 Skalare reticulationer af vektorbånd i ikke-euklidisk standardmetrik. Øverst: begge vektorer contravariante. Nederst: blandet varians.

For et ikke-euklidisk bånd kan vi ikke bare overtage strøm-orienteringsreglen fra de skalare bånd. Hvis vi har reticuleret det ud på skalarbånd og derpå skifter orientering for alle disse og anvender strøm-orienteringsreglen, vil spændingsvektorens komponenter ikke være uændrede, men alle de afvigende komponenter, altså dem, som i den skalare reticulation fremtræder som strømme, og på hvis plads der står -1 i standardmetrikkens diagonalmatrix, vil skifte fortegn. Dvs. hvis det før var den covariante spændingsvektors koordinater, der figurerede i skalarbåndene, så vil det efter orienteringsskiftet være den contravariante spændingsvektors koordinater, der står. Tilsvarende vil gælde for strømvektoren. Det ser derfor ud til, at strømorienteringsreglen skal have den tilføjelse, at variansen for både strøm- og spændingsvektoren skal ændres ved orien-

teringsskiftet. Denne regel vil også kunne anvendes for bånd med euklidisk standardmetrik, for i den euklidiske metrik er der jo ingen forskel på de covariante og de contravariante vektorkoordinater.

Vi vil nu lave en tilføjelse til vektor-tensor-notationen. Ved en tensor af n 'te orden vil vi forstå et symbol med n indexpladser, der hver især kan være "oppe" eller "nede", contra- eller covariante. En ægte tensor transformerer efter bestemte regler ved koordinatskift. Vi har allerede set transformationsreglerne i anvendelse for tensorer af 1. og 2. orden i sidste afsnit, nemlig for energibandsvektorerne (1. ordens tensorer) og for den metriske tensor (2. ordens tensor). Det vigtigste i denne omgang er at beskrive index-systemet; vi vil ikke gøre egentlig brug af tensorer af højere end 2. orden. En tensor af n 'te orden har 2^n matrix-representationer, fordi hver af de n indices kan være oppe eller nede. Når vi skal angive en bestemt matrixform, kan vi derfor tildele tensorsymbolet et sæt indeksikale sintegn i form af prikker, der alene med deres op- eller ned-position angiver om den pågældende index position regnes contravariant eller covariant. Disse indeksikale sintegn kan så senere erstattes med indeksikale legitegn i form af bogstaver eller tal, der angiver bestemte koordinatnumre mellem 1 og dimensionen d .

Ved brug af de indeksikale sintegn kan vi angive matrix-produkter, hvor der skal summeres over dobbelt forekommende indeksikale legitegn, uden at vi eksplicit behøver at angive disse legitegn. Vi kan blot angive pladserne med sintegn (prikker), og disse kan så efter behag udfyldes med bogstav-par efter summationsreglen, f.eks.

$$e_{\cdot} = g_{\cdot\cdot} e^{\cdot} \quad \sim \quad e_i = g_{ij} e^j \quad (35)$$

Reglen for udfyldning af pladserne med bogstaver er altså, at hvis to prikker står i forskellig højde og er adskilt med et enkelt tensorsymbol, skal de udfyldes med samme bogstav, og dette bogstavpar kan så ikke benyttes andre steder i samme tensorprodukt, idet det implicerer en summation fra 1 til d over dette

indexpar. Når et matrixprodukt angives med prikker, er det altså vigtigt at anbringe faktorerne i den rigtige orden. F.eks. er

$$e^i g_{ij} \sim e^j g_{ji} \quad (36)$$

i almindelighed noget andet end (35).

Strøm-orienteringsreglen for vektorbånd kan suppleres med en anden regel, som kaldes *reglen om den indifferente spændingsvariens*. Hvis vi med fastholdte vektorsymboler og orientering af vektorbåndet ændrer spændingsvariensen, f.eks. fra contra- til covariant, men bibeholder strømvariensen, så er det stadig samme fysiske situation, vi beskriver. For når spændingsvariensen ændres, skifter orienteringen i alle de skalarbånd, hvor spændingsvektorens komponent er en strøm, og samtidig skifter denne komponent fortegn, hvilket jo ifølge strøm-orienteringsreglen for skalarbånd beskriver den samme fysiske situation.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} e^i \quad f^i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} e_i \quad -f_i \\ | \quad \rightarrow \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} e^i \quad f_i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} e_i \quad -f^i \\ | \quad \rightarrow \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} e_i \quad f^i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} e^i \quad f^i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} e_i \quad f_i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} e^i \quad f_i \\ | \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Figur 15 Strøm-orienteringsreglen for vektorbånd (de to øverste) og reglen om den indifferente spændingsvariens (to nederste).

Gyldigheden af disse regler kan kun eftervises for standardbånd, der kan reticuleres ud på skalarbånd. For bånd med en generel metrik bliver reglerne definatoriske, og deres styrke ligger i, at de kan formuleres i tensorregningens sprog, som jo

er uafhængigt af bestemte koordinatsystemer. Det er et relativitetsprincip for energibandsformalismen, at lovene skal kunne formuleres uafhængigt af referencesystemet, og det svarer nøje til Einsteins generelle relativitetsprincip, som vi senere skal se.

Når vi siger, at gyldigheden af reglen om den indifferente spændingsvarians kan eftervises ved at reticulere båndet ud på skalarbånd, er det lidt af en cirkelslutning, for den forudsætter jo, at vi ved, hvordan et bånd med ikke-euklidisk metrik skal reticuleres ud. Den regel for reticulation, som blev formuleret i figur 14 forudsætter på den anden side, at de to afbildede vektorbånd er fysisk identiske, dvs. at reglen om den indifferente spændingsvarians er opfyldt. Hvis vi i stedet havde valgt, at strømvariansen skulle være indifferent, ville vi ikke ved reticulationen af et ikke-euklidisk bånd komme frem til, at nogle af spændingsvektorens komponenter er strømme. Grunden til, at vi vælger at bygge på reglen om den indifferente spændingsvarians er, at vi har brug for at kunne behandle situationer, hvor nogle af en vektors komponenter er spændinger og andre er strømme, og med denne regel kan vi anvende de ikke euklidiske metrikker til formålet. Hvis vi kun var interesseret i "ublandede" vektorer, kunne vi klare os med euklidiske metrikker, og så var der ingen grund til at tale om forskellige varianter overhovedet.

Et vektorbånd i standardmetrik kan naturligvis lige så godt reticuleres ud på pseudoskalare bånd som på skalare, men i almindelighed er der ikke noget vundet ved det, og reglen om skift af genus (figur 9) gør det muligt at oversætte pseudoskalare til skalare bånd, hvis sammenhængen berettiger brugen af komplekse båndvariable. Når vi reticulere et vektorbånd ud på endimensionale bånd vil vi i alle tilfælde forlange, at de endimensionale bånd skal have samme genus, altså at hele samlingen består af enten skalare eller pseudoskalare bånd. Vi kan da tilskrive hele vektorbåndet en bestemt genus γ , som er en skalar (en 0. ordens tensor, et tal), som (foreløbig) kun kan være +1 eller -1. Hvis båndets dimension er 1, er den metriske tensor også et tal, g , som kun kan være +1 eller -1. På denne måde kan vi få strøm-orienteringsreglen på den almene form, figur

15, til også at gælde for endimensionale bånd (inclusive pseudoskalare), og for sådanne bånd er

$$\gamma = g \quad (37)$$

Reglerne for tidsvending af spænding og strøm i endimensionale bånd (9) må så omformuleres til

$$\mathbf{T}[e] = \gamma g e^* \quad ; \quad \mathbf{T}[f] = -\gamma g f^* \quad (38)$$

Dette antyder, at tidsvendingsoperationen for vektorbånd må indbefatte et skift af varians, lige som strøm-orienteringsreglen, hvilket man også let kan overbevise sig om ved at se på tidsvending af båndet på figur 14.

Vi vil forsøge at gøre diskussionen lidt mere generel ved at lade som om, at genus γ for et vektorbånd kan være et *komplekst tal*. For et sådant bånd kan metrikken $g..$ indeholde komplekse elementer. Vi skal derfor være lidt påpasselige med operationer, der både involverer sænkning af et index og komplekskonjugering. Vi fastsætter derfor definatorisk, at

$$\left. \begin{aligned} e.^* &\doteq e^{*}. \doteq (g..e')^* \\ e^{**} &\doteq e'^{*} \doteq (g'..e.)^* \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

(og tilsvarende for strømvektoren).

Vi kan nu definere den tidsvendte spændingsvektor ved

$$\mathbf{T}[e.] = \gamma e^{**} \quad ; \quad \mathbf{T}[e'] = \gamma e.^* \quad (40)$$

Når tidsvendingsoperatoren virker på et produkt, får vi produktet af de tidsvendte faktorer, dvs.

$$\mathbf{T}[e.] = \mathbf{T}[g..e'] = \mathbf{T}[g..] \gamma e.^* = \gamma e^{**} \quad (41)$$

Det ses heraf, af den tidsvendte metriske tensor må være

$$\mathbf{T}[g_{..}] = g^{*..} \quad ; \quad \mathbf{T}[g^{*..}] = g_{..} \quad (42)$$

Da T er en antilineær operator, må den tidsvendte af en skalar være den komplekskonjugerede af skalareren. Hvis vi deler spændingsvektoren op i en realdel og en imaginærdel

$$e^{\cdot} = e_1^{\cdot} + ie_2^{\cdot} \quad (43)$$

får vi af (40), at

$$\mathbf{T}[e_1^{\cdot}] = \gamma e_1^{\cdot} \quad ; \quad \mathbf{T}[e_2^{\cdot}] = \gamma e_2^{\cdot} \quad (44)$$

dvs. reglerne for tidsvending af de komplekskonjugerede spændingsvektorer må være

$$\mathbf{T}[e^{*..}] = \gamma e^{\cdot} \quad ; \quad \mathbf{T}[e^{\cdot}] = \gamma e^{*..} \quad (45)$$

Nu skal T jo være en spejlingsoperation, så vi må have

$$\mathbf{T}^2[e^{\cdot}] = \mathbf{T}[\gamma g^{*..} e^{*..}] = e^{\cdot} \quad (46)$$

Ved tidsvending af de enkelte faktorer og benyttelse af (42) og (45) fås

$$\gamma^* \gamma g^{*..} e^{\cdot} = e^{\cdot} \quad (47)$$

Dvs. for at T kan være en spejling må en kompleks genus af et vektorbånd tilfredsstille

$$\gamma^* \gamma = 1 \quad (48)$$

For at finde, hvordan strømvektoren transformerer ved tidsvending, benytter vi, at energistrømmen skal skifte fortegn. Med brug af (45) får vi

$$\mathbf{T}[e^* \cdot f.] = \gamma e \cdot \mathbf{T}[f.] = -e \cdot f^{**} \quad (49)$$

og dette giver så sammen med (48)

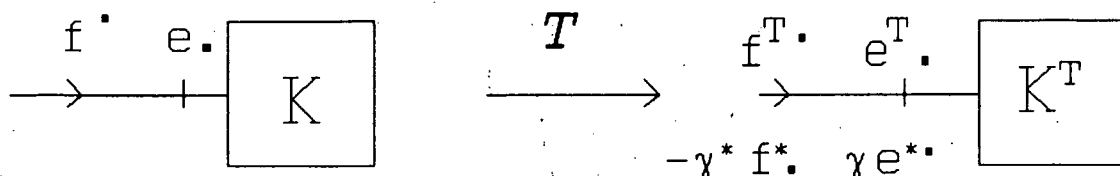
$$\mathbf{T}[f.] = -\gamma^* f^{**} \quad ; \quad \mathbf{T}[f^*] = -\gamma^* f^* \quad (50)$$

Prikkernes stilling i (40) og (50) viser tilsyneladende, at den tidsvendte af en covariant vektor er contravariant, og omvendt, men det vil være en fejlslutning. De tidsvendte symboler transformerer efter andre love end de retvendte, og prikkernes stilling i (40) og (50) refererer til det retvendte system, så heraf kan man ikke slutte noget om variansforhold i det tidsvendte system. Faktisk står vi over for endnu et valg, og det viser sig mest bekvemt at bevare variansen ved tidsvending, således at en tidsvendt covariant vektor opfattes som covariant i det tidsvendte system. Vi skriver derfor:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}[e.] &\doteq e^T. = \gamma e^{**} \quad ; \quad \mathbf{T}[e^*] \doteq e^{T^*} = \gamma e^* \\ \mathbf{T}[f.] &\doteq f^T. = -\gamma^* f^{**} \quad ; \quad \mathbf{T}[f^*] \doteq f^{T^*} = -\gamma^* f^* \\ \mathbf{T}[g^{..}] &\doteq g^{T..} = g^{**} \quad ; \quad \mathbf{T}[g^{*'}] \doteq g^{T^{*'}} = g^{*..} \end{aligned} \right\} (51)$$

Lad os forsøge at anvende tidsvendingsbetragtningen på en situation, hvor et vektorbånd giver spændingsinput til et 1-port system, som er beskrevet med en response-tensor K . I dette tilfælde eksisterer der altså en symbolsk relation mellem energibåndets to vektorer, givet ved en af de fire matrix-representanter af response tensoren K . Ved tidsvendingen erstattes strøm- og spændingsvektoren af deres tidsvendte udgaver, og response-matricen må da også erstattes af en tidsvendt udgave, således at *de samme symbolske relationer gælder for det tidsvendte system som for det oprindelige*. Tidsvendingsoperationen skal jo ikke opfattes som en omvendning af den rigtige fysiske tid, men som en ændring af de målekonventioner, der involverer brugen af et ur, svarende til, at man sætter et ekstra tandhjul ind i urværket, således at viserne kommer til at dreje

den modsatte vej rundt. Det er den samme fysiske situation, som beskrives af de tidsvendte symboler, og de symbolske relationer, der er definerede af det underliggende ikoniske lag i modellen, samt måleforskrifterne, skal derfor være uændrede.



Figur 16 Tidsvending af 1-port system.

For de to situationer på figur 16 fås:

$$f^* = K^* \cdot e. \quad \text{og} \quad f^{T*} = K^{T*} \cdot e^T. \quad (52)$$

Af udtrykkene for de tidsvendte vektorer anvendt i det retvendte system fås

$$-\gamma^* f^{**} = -\frac{\gamma^*}{\gamma} K^{**} \cdot (\gamma e^{**}) \quad (53)$$

Ved sammenligning af (52) og (53) og benyttelse af (48) finder vi så den variansform af K^T , som har begge indices foroven. Herfra kan let generaliseres til de tre andre variansformer. Bemærk, at en matrixligning, hvor variansen er angivet med prikker, men hvor prikkerne står i forskellig højde på de to sider af lighedstegnet skal forstås på den måde, at første indeks er lig med første og andet lig med andet:

$$\left. \begin{aligned} K^{T..} &= -\gamma^{*2} K^{**..} & \sim & K^{Tij} = -\gamma^{*2} K^{*ij} \\ K^{T..} &= -\gamma^{*2} K^{**..} & \sim & K^T_{ij} = -\gamma^{*2} K^{*ij} \\ K^{T..} &= -\gamma^{*2} K^{**..} & \sim & K^T_{i^j} = -\gamma^{*2} K^{*i_j} \\ K^{T..} &= -\gamma^{*2} K^{**..} & \sim & K^{Tij} = -\gamma^{*2} K^{*i_j} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Hvis vi nu tidsvender K^T en ekstra gang, skal vi få den oprindelige matrix K . igen, og det kan kun lade sig gøre, hvis

$$\gamma^{*4} = \gamma^4 = 1 \quad (55)$$

Foruden de oprindelige muligheder $\gamma=1$ (skalare bånd) og $\gamma=-1$ (pseudoskalare bånd) er der derfor kun to andre muligheder, nemlig $\gamma=i$ og $\gamma=-i$. Disse muligheder kan ikke realiseres for endimensionale bånd, men kræver mindst todimensionale, komplekse bånd, som vi vil kalde *spinorbånd*. For spinorbånd er der ingen forskel på tidsvendingsoperationerne for spændinger og strømme, som derfor ikke på nogen mulig måde kan skelnes fra hinanden.

Vi skal dog ikke foreløbig behandle sådanne eksotiske typer af bånd, men vil i det store og hele holde os til bånd med genus 1, som altså i standardmetrikken kan reticuleres ud på skalare bånd.

Hvis vi i stedet havde set på tidsvending af et system med strøminput, ville vi have fundet en relation svarende til (54), men med γ optrædende i stedet for γ^* . Imidlertid viser (55), at vi ikke behøver at skelne mellem γ og γ^* i en lige potens. Vi kan derfor for en vilkårlig 1-port K , hvadenten den har strøm- eller spændingsinput, skrive

$$K^T = -\gamma^2 \tilde{K} \quad (56)$$

hvor tilden over K 'et sammenfatter variansskift for begge indices, samt komplekskonjugering.

Begrebet "1-port system" er nu noget meget generelt, for da input-output båndet er et generelt vektorbånd, har vi nu muligheden for at definere et *vilkårligt multiport system* som en "1-port". Konsekvenser af denne mulighed vil blive undersøgt i næste kapitel.

Ved at karakterisere et vektorbånd med en metrisk tensor g og en skalar genus γ har vi opnået, at virkningen af spejlingsoperationerne tidsvending og orienteringsskift på de symbolske udtryk for strøm og spænding kan udtrykkes på tensorform, dvs. uafhængigt af koordinatsystemet. Det fremgår ikke

helt klart af den foregående diskussion, idet de betragtninger, der ledte op til figur 14 og 15 var baseret på reticulation med skalarbånd, dvs. de gjaldt kun for bånd med genus 1. Hvis reticulationen på figur 14 havde benyttet pseudoskalarbånd, uden yderligere ændringer af tegnsætningen, ville vektorbåndets genus være -1 og den metriske tensor ville være $-\sigma$, i stedet for σ . Standardmetrikken for bånd med genus -1 har altså 1 på de "afvigende" pladser og -1 på de "normale" pladser i diagonalen, modsat de skalart reticulerbare bånd med genus 1. Denne forskel medfører så, at både strøm-orienteringsreglen og reglen om den indifferente spændingsvarians kan formuleres som på figur 15, både for $\gamma=1$ og $\gamma=-1$. Hvordan disse regler skal formuleres for de hypotetiske spinorbånd med $\gamma=i$ (eller $-i$) er et vanskeligt spørgsmål, som vi indtil videre vil lade ude af betragtning, da vi i de vigtigste anvendelser kun får brug for tilfældet $\gamma=1$.

Vi har defineret *standardmetrikken* $G..$ som en diagonal matrix med 1 og -1 i diagonalen. Enhver metrik kan ved passende kontinuerte transformationer bringes på standardform og har derfor en entydigt bestemt standardmetrik. Ved *signaturen* af en metrik vil vi forstå *summen af standardmetrikkens diagonalelementer*. En d -dimensional metrik vil altså have signaturen d , hvis standardmetrikken er euklidisk. Ellers kan den være $d-2n$, hvor n er antallet af afvigende komponenter i spændingsvektoren. I almindelighed er den metriske tensor *hermitesk*, men ikke nødvendigvis dimensionsløs. Forudsætningen for, at $g..$ er dimensionsløs er, at alle komponenter i hver af de to energibandsvektorer har samme dimension. Der kan imidlertid være gode grunde til at anvende en *dimensioneret* (ikke-dimensionsløs) metrik, fordi vi vil benytte koordinatsystemer, såsom polære koordinater, hvor de forskellige koordinater har forskellig dimension. Blandt de dimensionsløse metrikker skal vi specielt interessere os for *neutrale metrikker*, der er karakteriserede ved, at

$$g.. = (g..)^{-1} = g' \quad (57)$$

At hæve eller sænke et index er så en spejling.

Som eksempel på, hvordan vi bestemmer $g_{..}$ for en given situation, ser vi på tredimensional bevægelse af en partikel, som vi ønsker at beskrive i *polære koordinater*. Da skalarproduktet af to givne vektorer skal være en skalar, dvs. invariant ved skiftet fra retvinklede til polære koordinater, skal det såkaldte *normkvadrat*, dvs. skalarproduktet af en vektor med sig selv, også være invariant. Normkvadratet for den contravariante hastighedsvektor i de polære koordinater hænger sammen med metrikken $g_{..}$ ved

$$|V|^2 = V^i g_{ij} V^j \quad (58)$$

Hvis de polære koordinater benævnes r , θ og ϕ kan vi fastsætte

$$V^1 = \dot{r} \quad ; \quad V^2 = \dot{\theta} \quad ; \quad V^3 = \dot{\phi} \quad (59)$$

hvor prikken over et symbol betyder, at den pågældende størrelse er afledet med hensyn til tiden. Sammenhængen mellem de polære koordinater og de retvinklede er givet ved

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Ved differentiation af x , y og z med hensyn til tiden fås

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (61)$$

hvoraf vi finder hastighedens normkvadrat

$$|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 \quad (62)$$

Af (58), (59) og (62) fås så

$$g_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (63)$$

Dette er et eksempel på en dimensioneret metrik med euklidisk standardmetrik. Signaturen er 3.

Mængden af neutrale metrikker med en given dimension d og signatur s udgør en ækvivalensklasse. Hele klassen frembringes ved en Lie gruppe af unitære transformationer af den standardmetrik $G_{..}$, som har den givne signatur. Hvis signaturen er lig med dimensionen, er standardmetrikken euklidisk, dvs. $G_{..}$ er enhedsmatricen, og ækvivalensklassen indeholder ingen andre metrikker. Hvis derimod signaturen er mindre end dimensionen, vil der være en mangfoldighed af ækvivalente neutrale metrikker. Lad os som eksempel se på de todimensionale metrikker for komplekse bånd. Ækvivalensklassen med $s=0$ indeholder her de tre Pauli matricer

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

for hvilke der gælder relationerne

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1} \\ \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x ; \quad \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y ; \quad \sigma_x \sigma_y = i \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Endvidere gælder, at de tre Pauli matricer antikommuterer indbyrdes.

Hele ækvivalensklassen udgør i dette tilfælde en todimensional mangfoldighed

$$\sigma(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \sigma_x + \sin \theta \sin \phi \sigma_y + \cos \theta \sigma_z \quad (66)$$

der frembringes af standardmetrikken σ_z med den unitære matrix

$$U(\theta, \phi) = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} [\sin \phi \sigma_x - \cos \phi \sigma_y] \quad (67)$$

således at

$$\sigma(\theta, \phi) = U(\theta, \phi) \sigma_z U^{-1}(\theta, \phi) \quad (68)$$

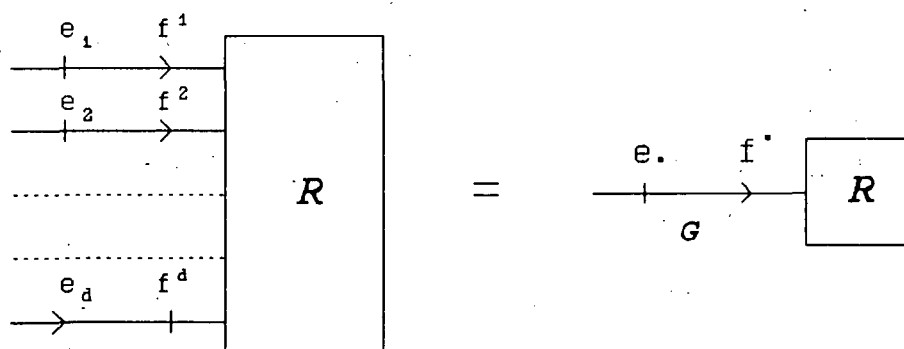
Vinklerne θ og ϕ er polær- og azimutvinkler for et punkt på enhedskuglen i det tredimensionale rum, så der er en enentydig forbindelse mellem de ikke-euklidiske Pauli metrikker og de tredimensionale euklidiske enhedsvektorer. U-matricen i (67) er et eksempel på en *1-unitær metrisk transducer*, en specielt vigtig type af ideel toport, som skal diskuteres nøjere i kapitel 6 og 7. Vi bemærker af (67), at forbindelsen mellem U og den tredimensionale enhedsvektor ikke er entydig, men dobbelttydig: til en given enhedsvektor hører to forskellige U-matricer.

5. Multiporte som 1-porte.

Vi skal i dette afsnit se på, hvordan begrebet om det generelle vektorbånd og tensor-algebraen muliggør en generalisering af den lineære response-teori, som i tekst 22 blev udviklet for 1-port systemer, beskrevet ved komplekse skalarbånd.

Med brugen af komplekse signalamplituder, der beskriver Fourier-komponenter af reelle spændinger og strømme for en given Laplace-frekvens $s = -i\omega$ opnår man, at de reaktive systemegenskaber, som har med oplagring af energi at gøre og involverer integration over tid, kan reduceres til en rent algebraisk relation af samme type som det passive response, der karakteriserer lækkene, men som afhænger af Laplace-frekvensen. Et o-lager med kapaciteten C kan formelt beskrives som en o-læk med ledningsevnen Cs og et x-lager med inertansen eller induktansen L svarer til en x-læk med modstanden Ls . For et lineært system med flere skalare porte kan relationen mellem input- og outputvariablene i portene derfor udtrykkes ved en lineær matrixrelation mellem en input- og en output-vektor.

Ser vi på et system med d porte, hvoraf p har strøminput og $n=d-p$ har spændingsinput, kan vi slå disse bånd sammen til et d -dimensionalt vektorbånd med strøminput, som vist på figur 17.



Figur 17 Definition af d -port med p strøminputs og n spændingsinputs som 1-port med d -dimensional strømvektorinput.

Metrikken $G..$ for det d -dimensionale bånd på figur 17 vil så være på standardform med p 1'er og n -1'er i diagonalen:

$$G_{..} = G^{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Når vi som på figur 17 har indiceret med contravariant strøminput og covariant spændingsoutput, er den lineære relation mellem strømvektoren og spændingsvektoren givet ved impedansmatricen $R_{..}$.

$$e_{.} = R_{..} f^{.} \quad \sim \quad e_i = R_{ij} f^j \quad (70)$$

I den lineære responseteori er impedansmatricen en funktion af Laplacefrekvensen s . Når s er reel, er impedansmatricen også reel og derfor nem at beregne. I den eksperimentelle situation, når der måles med vekselstrømme, er s derimod imaginær, og når vi skal bestemme systemets energiforbrug, er det for en bestemt Fourier-frekvens ω og dermed for en imaginær Laplace frekvens ($s = -i\omega$). Energistrømmen ind til systemet er så givet ved (jfr. (28)):

$$W = \frac{1}{2} [e^*_{.j} f^j + e_i f^{*i}] = f^{*i} R^D_{ij} f^j \quad (71)$$

hvor $R^D_{..}$ - den *dissipative* del af impedansmatricen - er den *hermiteske* del:

$$R^D_{..} = \frac{1}{2} (R_{..} + R^{*..}) \quad \sim \quad R^D_{ij} = \frac{1}{2} (R_{ij} + R^*_{ji}) \quad (72)$$

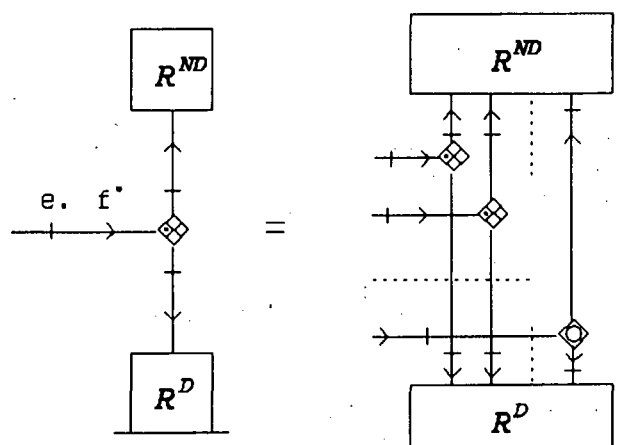
Tilsvarende vil den *ikke-dissipative* del af $R_{..}$ - R^{ND} være det samme som den *ikke-hermiteske* del:

$$R^{ND} \dots = \frac{1}{2} (R \dots - R^+ \dots) \sim R^{ND}_{ij} = \frac{1}{2} (R_{ij} - R^*_{ji}) \quad (73)$$

For de tre øvrige variansformer af impedanstensoren R kan vi tilsvarende definere en dissipativ del og en ikke-dissipativ del ved at hæve indices på $R^D \dots$ og $R^{ND} \dots$ med den metriske tensor. For de blandede variansformer med ét index oppe og ét nede, vil det imidlertid ikke gælde, at R^D er den hermiteske og R^{ND} den ikke-hermiteske del, medmindre metrikken er euklidisk ($G \dots$ er enhedsmatricen, hvis alle strømvektorens komponenter er strømme i den skalare reticulation). Opdelingen af R kan så udtrykkes med en *tensor-relation* uden indicering:

$$R = R^D + R^{ND} \quad (74)$$

På diagramform kan denne opdeling udtrykkes ved, at vektorbåndet forbindes til en samler, som skal være af x-type for strøminput og af o-type for spændingsinput. For systemet på figur 17 skal det altså være en x-samler. Diskussionen af samlerbegrebet for generelle vektorbånd er vanskelig og vil blive udsat til et senere afsnit, men når metrikken er på standardform, som her, er det ikke svært at se, at x-samlere kan reticuleres som skalare x-samlere for de bånd, hvor strømkoordinaten er en strøm og som skalare o-samlere for de afvigende bånd, hvor strømkoordinaten er en spænding.



Figur 18 Opdeling af tensor impedans i ikke-dissipativ (ND) og dissipativ (D) del.

Hvis et system udvikler sig efter sine egne interne love, vil man regne med, at disse love på mikroniveauet er reversible, dvs. uændrede ved tidsvending. Dette er dog ikke ensbetydende med, at systemets makroskopiske response er reversibelt, for systemets response på et udefra kommende signal vil jo kun kunne karakteriseres som et makroskopisk signal, hvis det hæver sig betydeligt over støjniveauet i systemet, og når det gør det, vil det give anledning til dissipation, idet den makroskopiske signalenergi vil have en tendens til at spredes ud på mikroskopiske frihedsgrader, og derfra vil den i reglen ikke kunne vende tilbage til makroniveauet, da det er uhyre usandsynligt, at mikrofrihedsgraderne "svinger i takt" og dermed frembringer et koherent signallignende støjbidrag. Hvis der ikke er noget udefra kommende felt, der kan bryde den mikroskopiske reversibilitet, vil det derfor kun være den dissipative del af systemets response, der kan bryde tidsvendingssymmetrien; den ikke-dissipative del af response tensoren må være invariant over for tidsvendingsoperationen. I henhold til (56) må vi derfor have

$$R^{ND T} \doteq \tilde{R}^{ND} = R^{ND} \quad (75)$$

For matrixformen med begge indices nede har vi (jfr. (54))

$$R^{ND T} \dots \doteq -R^{ND * \dots} = R^{ND} \dots \quad (76)$$

Nu er $R^{ND} \dots$ jo antihermitesk, dvs. hvis vi bytter om på venstre-højre rækkefølgen af de to indices og komplekskonjugerer, får vi den samme matrix igen, med modsat fortegn. Ligning (76) medfører derfor:

$$R^{ND}_{ij} = R^{ND}{}^{ji} \quad (77)$$

For den dissipative del R^D må det gælde, at den er anti-reversibel, dvs. at den skifter fortegn ved tidsvending, for den dissiperede energistrøm, som jo er givet ved R^D , skifter fortegn ved tidsvending, igen under forudsætning af, at dissipationen er det eneste, der bryder reversibiliteten, altså at ingen udefra

kommende felter bryder den mikroskopiske reversibilitet. Altså må vi have

$$R^{D T} \dots \doteq -R^{D * \dots} = -R^{D \dots} \quad (78)$$

og da R^D er hermitesk, får vi

$$R^D_{ij} = R^D{}^{ji} \quad (79)$$

Der gælder altså samme type symmetrirelation for R^{ND} og R^D , og da R er summen af disse to, har vi:

$$R_{ij} = R^{ji} \quad (80)$$

I udledningen af denne symmetrirelation har vi ikke benyttet specielle forudsætninger om metrikken, men kun den almene form for tidsvending (75), som gælder for genus 1 eller -1. Desuden har vi benyttet det fra fysikken hentede princip om mikroskopisk reversibilitet. Resultatet (80) er altså mere generelt end udgangspunktet for analysen, hvor vi jo forudsatte, at metrikken var på standardform. Hvis vi ser på en af de blandede variansformer, får vi for en generel metrisk tensor:

$$R_i{}^j = g_{ik} R^{kj} \quad (81)$$

Hvis metrikken er neutral, har vi lov at hæve begge indices på g , og samtidigt kan vi sænke R s indices ved brug af (80), så vi får:

$$R_i{}^j = g^{ik} R_{jk} = R_{jk} g^{*ki} \quad (82)$$

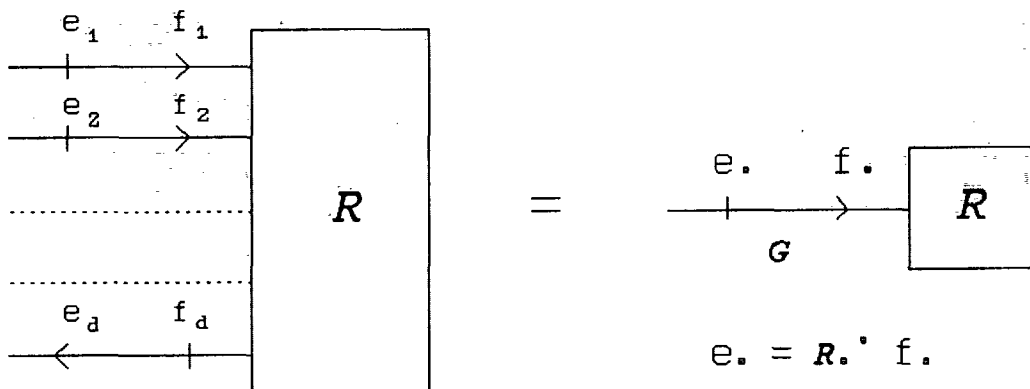
Her har vi også benyttet, at den metriske tensor er hermitesk (jfr. (31)). Hvis vi yderligere forudsætter, at metrikken er reel, får vi:

$$R_i{}^j = R_{jk} g^{ki} = R_j{}^i \quad (83)$$

Dette smukke resultat, at R -matricerne med blandet varians er symmetriske (det gælder selvfølgelig også, hvis første index er

oppe og andet nede), forudsætter således, at metrikken er neutral og reel. Specielt vil det gælde, når metrikken er på standardform.

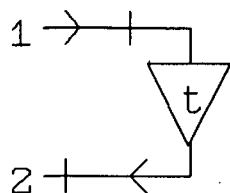
Response matrizen af blandet varians giver relationen mellem input- og output vektoren i energibåndet, hvis begge disse er af samme varians. Specielt hvis de begge er covariante, får vi brug for formen i (80) med første index nede og andet oppe. I standardmetrik kan vi reticulere et sådant vektorbånd ud på skalarbånd ved at sørge for, at båndene med de afvigende komponenter har den modsatte orientering (jfr. figur 14).



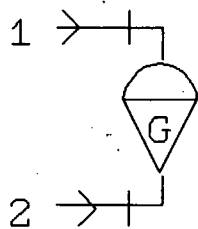
Figur 19 Relation mellem input- og output-vektor af samme varians.

Når vi i en standardmetrik reticulere et vektorbånd med samme varians af strøm og spænding ud på skalarbånd, får signaltegnene i de skalare bånd alle "samme form". Enten peger pilen væk fra stregen, som på figur 19, hvilket vi kalder D-tegn, eller den peger ind mod stregen, hvilket vi kalder K-tegn. Vi ser altså, at symmetrireglen (83) kan oversættes til en regel for skalart reticulerede multiporte: Hvis vi benytter samme type signaltegn i alle porte, enten D-tegn eller K-tegn, er response-matrizen symmetrisk. Når man modellerer med den simple energibandsformalisme, behøver man ikke at kende til den slags regler. Ligningerne følger entydigt af ikonmodellen og de valgte indiceringer, så man kan prøve efter, om ovenstående regel er opfyldt eller ej. For 1-port elementer som lække og lagre (i den komplekse responseteori) er den trivielt opfyldt, og den vil også

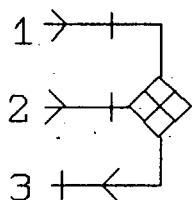
gælde for samlere og transformere, men *ikke for gyratorer*. Vi vil benytte betegnelsen *reciprokke* om systemer, der opfylder symmetrireglen. Alle andre simple elementer end gyratorer er reciprokke; gyratorer er *antireciprokke*, fordi K- eller D-tegns responsematricen for dem er antisymmetrisk.



$$\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Figur 20 K-tegns input-output relationer for simple 2- og 3-porte.

Gyratorer er *ikke-dissipative* og *antireversible*, og bryder dermed forudsætningen for reciprocitetsegenskaben, at den eneste kilde til irreversibilitet er dissipationen i systemet. Hvis systemet er påvirket af udefra kommende felter, som bryder den mikroskopiske reversibilitet, så må disse felter give sig til kende i en skalart reticuleret energibandsmodel via gyratorer. Omvendt, hvis vi i en systemreticulation kun bruger reciprokke elementer (altså ingen gyratorer), så ligger den eneste form for irreversibilitet i dissipationen, dvs. i lækken. Den ikke-dissipative del af systemets response varetages da udelukkende af

reversible elementer og må derfor være invariant ved tidsvending, som forudsat i (76). For den dissipative del må det gælde, at energistrømmen til alle lækene skifter fortegn ved tidsvending, og derfor må hele den dissipative response-matrix skifte fortegn, som forudsat i (78). Det må derfor gælde, at den totale response-matrix for et system reticuleret af reciproke elementer er reciprok. Denne sætning er kendt som *Braytons teorem*.

Hvis vi tillader komplekse transformerparametre bliver der tilsyneladende kludder med reciprocitetsegenskaberne. F.eks. vil $t=i$ i responsematricen på figur 20 give et antireversibelt response. Det må derfor på dette tidspunkt slås fast, at reglerne i figur 20 kun gælder for reelle parametre. Generaliserede regler for transformere og gyratorer i den komplekse vektorbåndsformalisme vil blive behandlet i næste afsnit.

Hvis et system er pålagt ydre felter, der bryder den mikroskopiske reversibilitet, kan vi genoprette reversibiliteten ved at lade tidsvendingsoperationen indbefatte en vending af disse ydre felter. Det kan f.eks. være et magnetfelt eller Coriolis-kræfter, der er tale om. Lad os for simpelheds skyld indføre et enkelt symbol B for sådanne felter, og lad $-B$ betyde, at alle disse felter er vendt. Reversibiliteten og antireversibiliteten af henholdsvis det ikke-dissipative og det dissipative response, (76) og (78) kan så generaliseres til:

$$\left. \begin{aligned} R^{ND T}(-B) \dots &= R^{ND}(B) \dots \\ R^D T(-B) \dots &= -R^D(B) \dots \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Symmetrirelationen (80) skal så ændres til

$$R_{ij}(B) = R^{ji}(-B) \quad (85)$$

og, under den forudsætning, at metrikken er reel og neutral, finder vi den generelle reciprocitets-relation

$$R_i^j(B) = R_j^i(-B) \quad (86)$$

Vi har her en energibåndsformulering af den berømte reciprocitetssætning, der skyldes Lars Onsager (1931). Sætningen betragtes som grundlæggende for ikke-ligevægts termodynamikken, men har en forløber inden for teorien for elektriske netværk (se f.eks. tekst 8, side 85).

Lad os som eksempel på anvendelsen af reciprocitets-sætningen se på de *thermo-galvano-magnetiske effekter*. Vi betragter en rektangulær metalplade med tykkelsen Δz og kantlængderne Δx og Δy . Et magnetfelt B kan pålægges i z -aksens retning, men foreløbig vil vi regne med, at det er 0, så der kun kan optræde termo-galvaniske effekter. Disse effekter omfatter elektrisk modstand, varmeledningsevne og termoelektricitet (Seebeck- og Peltier-effekt). Det vil være i god overensstemmelse med eksperimentelle kontrolmuligheder, hvis vi forestiller os, at vi kontrollerer den elektriske strøm i x - og y -retningen, samt temperaturforskellene i de samme to retninger. Systemet har således 4 porte: En elektrisk x -port og en elektrisk y -port, begge med strøminput, og en termisk x -port og en termisk y -port, begge med spændingsinput. Den termiske spænding i x -retningen kan defineres som en Carnot-nyttsevirkningsfaktor for varmestrømmen Q_x . Hvis baggrundsreservoirets temperatur er T og den x -afhængige lokale temperatur er $T(x)$ (x fra 0 til Δx), er den drivende kraft for varmestrømmen Q_x givet ved differensen mellem de to Carnot-faktorer, som så kan approksimeres, hvis de relative temperaturforskelle er små:

$$\left(1 - \frac{T}{T(0)}\right) - \left(1 - \frac{T}{T(\Delta x)}\right) \approx \frac{T(0) - T(\Delta x)}{T} = \frac{\delta_x T}{T} \quad (87)$$

og tilsvarende for spændingen i den termiske y -port, hvor strømmen er varmestrømmen Q_y . I den elektriske x -port er spændingen og strømmen simpelthen det elektriske spændingsfald fra $x=0$ til $x=\Delta x$, V_x , og den elektriske strøm i x -retningen, J_x , og tilsvarende for den elektriske y -port. Vi kan så beskrive situationen ved at definere et 4-dimensionalt vektorbånd med strøminput til systemet, idet vi definerer den *covariante strømvektor*, således at dens to første komponenter er de elektriske strømme og dens to sidste komponenter er de termiske

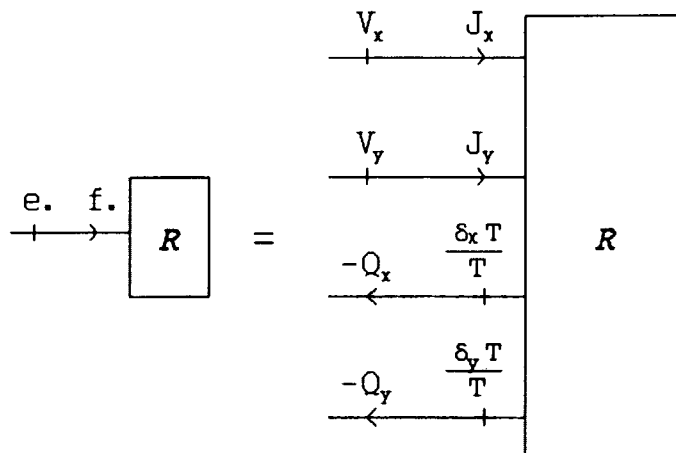
spændinger. Den contravariante spændingsvektor vil da have de elektriske spændinger som de to første komponenter og varmestrømmen som de to sidste. Energistrømmen ind til systemet (dissipationen) er så

$$w = e^i f_i = V_x J_x + V_y J_y + Q_x \frac{\delta_x T}{T} + Q_y \frac{\delta_y T}{T} \quad (88)$$

og den metriske tensor for det således definerede vektorbånd vil være

$$G_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (89)$$

Ifølge reglen om den indifferente spændingsvarians (figur 15) kan den samme fysiske situation fremstilles med covariante spændinger, når strømvariansen fastholdes som covariant. Det kræver blot, at der i den skalare reticulation af vektorbåndet skiftes orientering i de to skalarbånd med de afvigende komponenter (bånd 3 og 4) samtidigt med, at der skiftes fortegn på de symbolske udtryk for "spændingerne" (som jo er strømme). Vi får derved indicering som nedenfor vist:



Figur 21 System med elektriske og termiske porte i x- og y-retning.

Hvis systemet holdes isotermt, er spændingerne i de to nederste bånd på figur 21 0, og vi kan se bort fra de termiske bånd. De to elektriske bånd udgør da et todimensionalt euklidisk bånd, og reciprocitetssætningen (83) giver umiddelbart, at den elektriske modstandstensor vil være symmetrisk. Vi behøver ikke at skelne mellem de forskellige matrix-varianter af modstandstensen, da metrikken er euklidisk. Hvis vi afbryder de elektriske strømme, kan vi nøjes med de to termiske porte, og reciprocitetssætningen giver, at varmeledningsevnetensoren vil være symmetrisk.

Med alle fire bånd tilsluttede vil vi for at simplificere diskussionen antage, at materialet er isotropt. Så vil både modstandstensoren og varmeledningsevnetensoren være diagonale, og der vil i det hele taget ikke være nogen koblinger mellem de vektorkomponenter, der hører til x-retningen og dem, der hører til y-retningen. Responsematricen er så:

$$R. = \begin{pmatrix} R_x & 0 & P & 0 \\ 0 & R_y & 0 & P \\ P & 0 & -K_x & 0 \\ 0 & P & 0 & -K_y \end{pmatrix} \quad (90)$$

Her kan modstandene R_x og R_y udtrykkes ved materialets specifikke modstand ρ og varmeledningsevnerne K_x og K_y ved den specifikke varmeledningsevne κ og temperaturen T :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \rho \frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z} & ; & & R_y &= \rho \frac{\Delta y}{\Delta z \Delta x} \\ K_x &= T \kappa \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} & ; & & K_y &= T \kappa \frac{\Delta z \Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Kombinationen af skalafaktorerne Δx , Δy og Δz i (91) udtrykker, at strømmene J og Q skalerer proportionalt med tværsnitsarealet, medens både de termiske og de elektriske spændinger skalerer proportionalt med længden. Elementerne af tværsnitsarealet er så

at sige parallelforbundne (med en o -samler), medens længdeelementerne er serieforbundne (med en x -samler). Af samme grund må de matrixelementer i (91), der kobler en termisk til en elektrisk spænding eller en termisk til en elektrisk strøm, være uskalerede. For en isotrop prøve kan der ikke være nogen kobling mellem varmemstrømmen i x -retningen og den elektriske strøm i y -retningen, og koblingskoefficienterne mellem strømme i x -retningen og i y -retningen må være ens. Tilsvarende kan siges om koblingerne mellem elektriske og termiske spændinger. Der er derfor to par af termoelektriske koefficienter, og medlemmerne af et par på samme side af diagonalen må være ens af isotropigrunde. Reciprocitetssætningen siger så, at koefficienter, der står symmetrisk om diagonalen, er ens, så der er kun én termoelektrisk koefficient, P , men den har til gengæld to væsensforskellige betydninger. Ser vi på P 'et i 3. række og 1. søjle, angiver det forholdet mellem varmemstrømmen og den elektriske strøm (i x -retningen) med modsat fortegn, når der ikke er pålagt nogen temperaturforskul. I denne betydning er P 'et *Peltier koefficienten*. Ser vi derimod på P 'et i 1. række og 3. søjle, hænger det sammen med *Seebeck koefficienten, eller termospenningen, S* , der angiver forholdet mellem den elektriske spænding og temperaturfaldet (i x -retningen), når der ikke løber nogen elektrisk strøm. Sammenhængen er givet ved

$$S \doteq \left(\frac{V}{\delta T} \right)_{J=0} = \frac{P}{T} \quad (92)$$

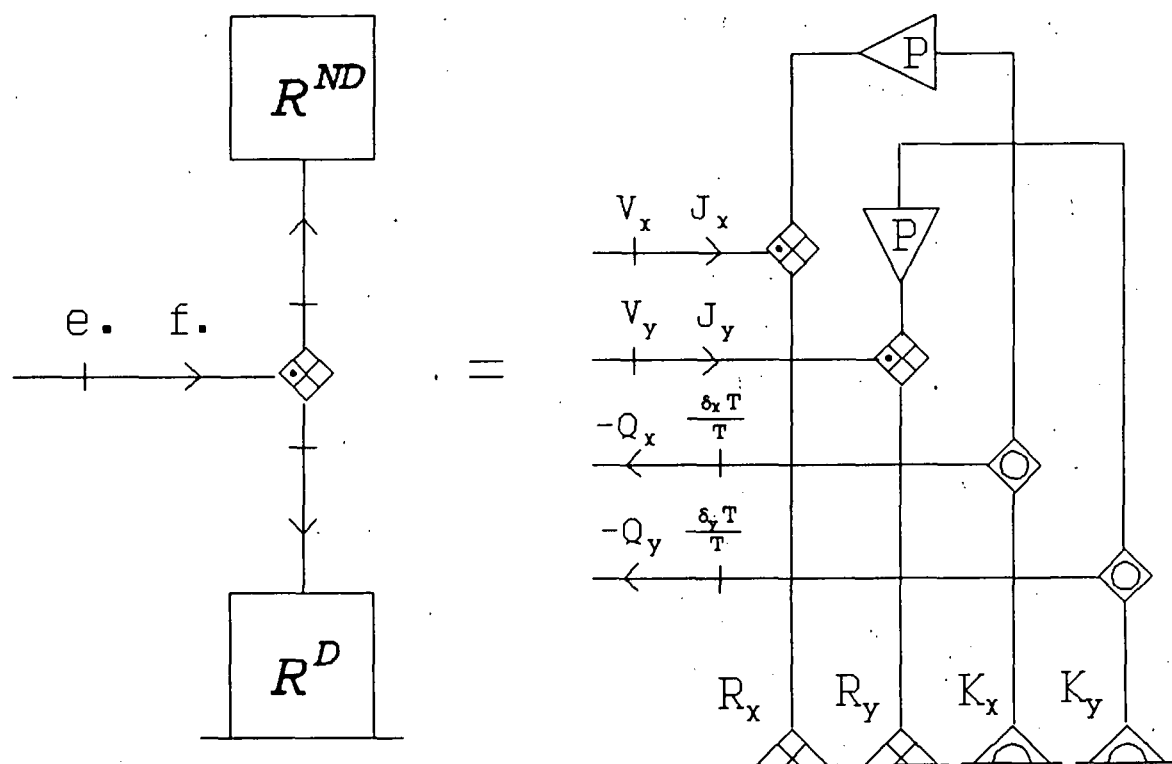
Denne relation mellem de to væsensforskellige termoelektriske effekter blev først opdaget af Kelvin i 1854 ad empirisk vej. Den teoretiske begrundelse kom noget senere med de kinetiske teorier af Boltzmann og andre, men den byggede på en del ad hoc antagelser, og først med Onsagers sætning kunne sagen ses i sit rette perspektiv.

Termoelektricitet er et ikke-dissipativt og reversibelt fænomen. Opdelingen af responsetensoren i en dissipativ og en ikke-dissipativ del sker jo ved at finde den hermiteske del (dvs.

den symmetriske del, da alt er reelt) og den antihermiteske (antisymmetriske) del af matricen

$$R_{..} = R \cdot G_{..} = \begin{pmatrix} R_x & 0 & -P & 0 \\ 0 & R_y & 0 & -P \\ P & 0 & K_x & 0 \\ 0 & P & 0 & K_y \end{pmatrix} \quad (93)$$

Det fremgår heraf, at de dissipative koefficienter står i diagonalen, og at de termoelektriske koefficienter uden for diagonalen beskriver ikke-dissipative effekter. Opdelingen svarende til figur 18 kan nemt reticuleres:



Figur 22 Reticulation af termogalvaniske effekter.

Diagrammet på figur 22 består af to adskilte dele, en x-del og en y-del, som er ukoblede på grund af isotropien. Når vi nu

pålægger et magnetfelt B i den positive z -aksens retning, vil der optræde en kobling mellem disse dele, svarende til, at der nu dukker magnetfeltafhængige koefficienter op, hvor der før stod 0 i responsematricen (90). Vi kan nu opdele denne matrix i en symmetrisk del og en antisymmetrisk del

$$R(B) \cdot = R^s(B) \cdot + R^a(B) \cdot \quad (94)$$

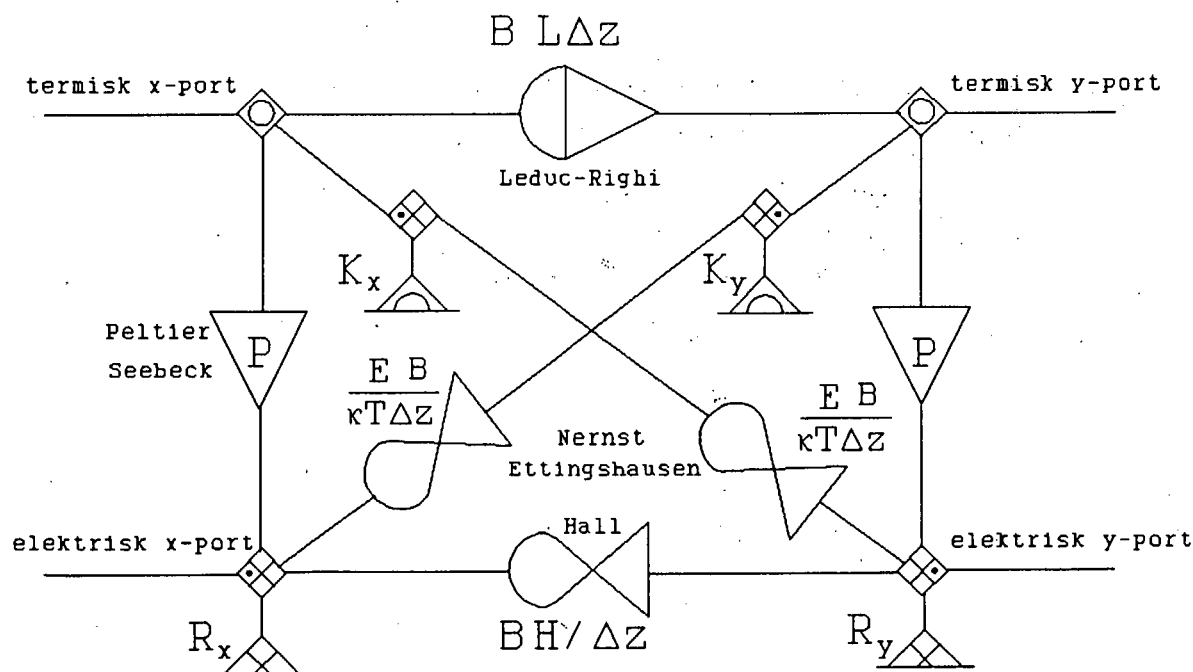
Ifølge reciprocitetssætningen (86) må det så gælde, at den symmetriske del er en lige funktion af magnetfeltet, og den antisymmetriske del er en ulige funktion af magnetfeltet. For svage magnetfelter kan vi regne med, at den symmetriske del er uafhængig af B og identisk med (90), medens den antisymmetriske del er lineær i B . Der er plads til fire nye parametre i den antisymmetriske del. Når vi tager hensyn til isotropien og hvordan strømme og spændinger skalerer med prøvens dimensioner, kan vi nøjes med tre nye termo-galvano-magnetiske specifikke parametre H , L og E :

$$R^a(B) \cdot = B \begin{pmatrix} 0 & \frac{H}{\Delta z} & 0 & E \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ -\frac{H}{\Delta z} & 0 & -E \frac{\Delta y}{\Delta x} & 0 \\ 0 & E \frac{\Delta y}{\Delta x} & 0 & -L \Delta z \\ -E \frac{\Delta x}{\Delta y} & 0 & L \Delta z & 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Til H svarer den isoterme *Hall effekt*, til L *Leduc-Righi effekten*, og til E svarer to reciprokke effekter, som kaldes *Ettingshausen effekten* og *Nernst effekten*. For Hall effektens vedkommende er H den traditionelt definerede Hall-koefficient, men for de tre andre effekter afviger de traditionelle koefficienter noget fra de her indførte størrelser, idet de indgår i forskellige kombinationer med den specifikke varmeledningsevne. Den nøjagtige definition af de traditionelle koefficienter kan findes i Callens lærebog i termodynamik. Energibandsparametrene, som her er indført, har en klarere fysisk betydning, når de

optræder i en ikonisk reticulation, fordi det klart fremgår, om de beskriver dissipative eller ikke-dissipative effekter, om de er reversible eller ikke-reversible (hvilket jo ikke er den samme distinktion, når der er et magnetfelt).

Med hensyn til reticulationen er det klart, at de i magnetfeltet lineære effekter er knyttet til gyratorer. Når disse gyratorer kobles til diagrammet på figur 22, må det ske med svag kausalitet, idet magnetfeltet kan tilkobles *adiabatisk*, dvs. som en langsomt opvoksende tilføjelse, der ikke ødelægger kausaliteten af de i forvejen eksisterende termo-galvaniske effekter. En x-gyrator, der har spændingsoutput i begge porte kan tilkobles de to x-samlere ved de elektriske porte, og tilsvarende kan en o-gyrator, der har strømoutput i begge porte, tilkobles de to o-samlere ved de termiske porte. Således får vi beskrevet henholdsvis Hall effekten og Leduc-Righi effekten. De to Etingshausen-Nernst gyratorer skal forbinde en elektrisk x-port med en termisk y-port, og omvendt, og det kan ikke ske med svag kausalitet, medmindre vi tilføjer en x-samler i båndene til de termiske lække. Vi kommer således frem til følgende reticulation:



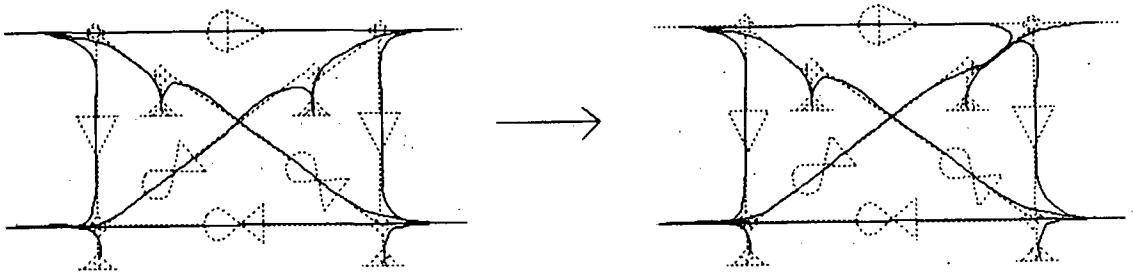
Figur 23 De termo-galvano-magnetiske effekter.

Når man opskriver response-matricen for figur 23 med de på figur 22 givne indiceringer, vil man opdage, at modstandene R_x og R_y optræder på en anden måde end i (90), idet de er kombinerede med et led af anden orden i magnetfeltet. Dette skyldes, at den elektriske strøm i x -retningen gennem Etingshausen-gyratoren giver et termisk spændingsinput til varmeledningslækken for y -retningen, og den resulterende tværgående varmestrøm virker tilbage gennem samme gyrtor og bidrager således til spændingen V_x . Hvis man prøver at måle den specifikke modstand af materialet ved at sende en strøm i x -retningen med $J_y=0$ og $\delta_x T=0$ (så der ikke optræder Hall- og termospenning), vil resultatet afhænge af, om den termiske y -port kontrolleres isotermt, $\delta_y T=0$, eller adiabatisk, $Q_y=0$. Den omtalte andenordens effekt gør sig kun gældende ved isotherm kontrol, og det er således den adiabatisk specifikke modstand, $\rho=\rho_a$, der bestemmer R_x og R_y som i (91). Sammenhængen mellem den isoterme og den adiabatisk specifikke modstand findes at være

$$\rho_i = \rho_a + \frac{(EB)^2}{KT} \quad (96)$$

Responsetensoren for en multiport vil i almindelighed kunne ændres ved kausale skift i en eller flere porte. Det vil ofte være muligt at finde matrixelementer i tensoren ved et hurtigt overblik over grafens *signalruter*. En metode til sådan visuel inspektion, hvorved man helt undgår at opskrive ligninger, bygger på *Shannons loop-regel* (J. Gundermann, 1976). Signalruter kan opfattes som jernbanespor, hvor "toget", dvs. signalet kan køre begge veje. Det udgår måske fra et sted som et strømsignal, kører hen til en "endestation", hvorfra det reflekteres og vender tilbage som et spændingssignal. Undervejs passeres forskellige "stationer" i form af energibånds-ikoner, der hver multiplicerer matrixelementet med en bestemt faktor. Samlere optræder som skiftespor, udgående fra det dominerende bånd. Signaler kan altså kun passere samleren fra det dominerende til et svagt bånd (stærk kausalitet) eller fra et svagt til det dominerende bånd (svag kausalitet), men ikke fra et svagt til et andet svagt bånd. På

nedenstående figur vises nogle mulige signalrutestrukturer for diagrammet figur 23.



Figur 24 Ændring af signalruter for figur 23 ved overgang fra spændingskontrol til strømkontrol i termisk y-port.

Reciprocitetssætningen er en grundlæggende sætning for multiporte, som ikke har nogen analog i 1-port teorien. En anden grundlæggende sætning, som vi nu skal se på, nemlig *fluktuations-dissipations-* (FD) teoremet har til gengæld en så åbenlys generalisering fra 1-port teorien, at den næsten kan overtages direkte, og vi skal derfor ikke gøre noget stort nummer ud af det. Lad os se på en multiport, der som i figur 17 kan som en 1-port med et d -dimensionalt vektorbånd. Vi vil igen lade inputvektoren være en contravariant strømvektor og outputvektoren en covariant spændingsvektor. I almindelighed vil responsematricen $R..$ have både en dissipativ del, $R^D..$, som er hermitesk, og en ikke-dissipativ del, $R^{ND}..$, som er antihermitesk. Det er nu klart, at den dissipative del alene er kilde til støjen på spændingsvektoren, for det er denne del, som i en skalar reticulation indeholder alle lækkene, som jo er de eneste kilder til støj blandt de simple energibandsikoner. Vi vil derfor lade som om, at $R..$ er hermitesk, hvilket blot betyder, at når $R..$ optræder i det følgende, er det i virkeligheden $R^D..$, vi mener.

En hermitesk matrix kan altid diagonaliseres ved en unitær transformation. Dvs. vi kan transformere strømvektoren

$$f' = U \cdot f \quad ; \quad U^* j_i = U^{-1} i_j \quad (97)$$

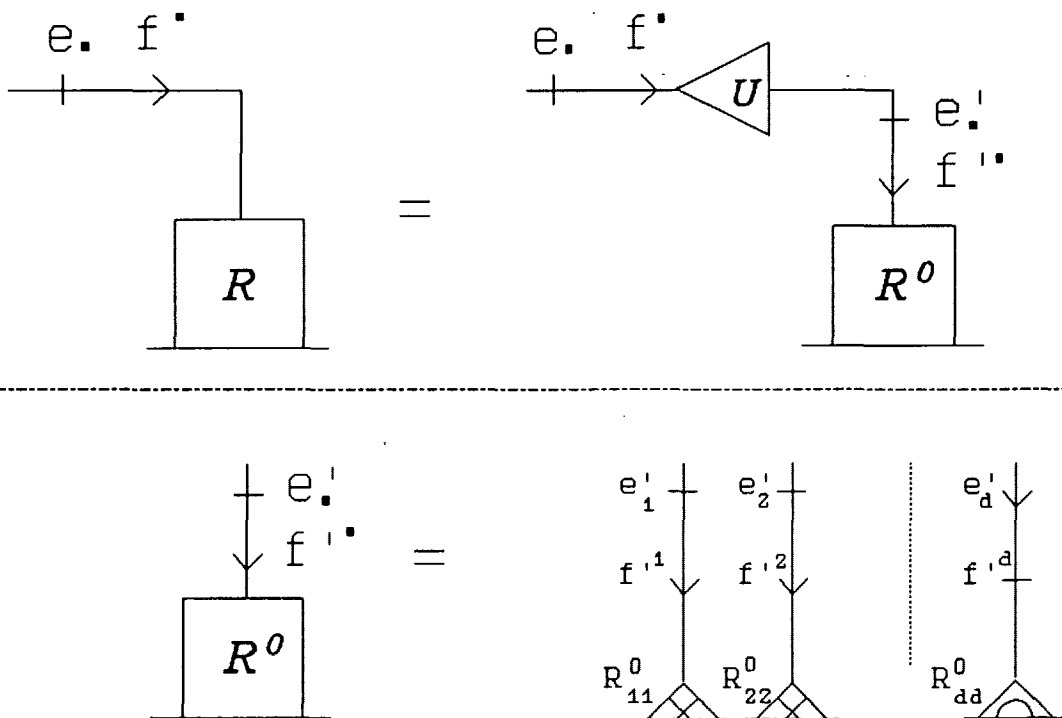
og spændingsvektoren skal så transformeres således at energistrømmen er bevaret:

$$e' \cdot f'^{*} = e \cdot f^{*} \Rightarrow e' = e' \cdot U^{*} \quad (98)$$

Det vil da være muligt at bestemme den unitære transformation U således, at den transformerede spændingsvektor er givet ved en diagonal matrix gange den transformerede strøm:

$$e' = R^0 \dots f' \quad (99)$$

Elementerne i diagonalen af R^0 vil være egenverdierne af den hermiteske R og derfor reelle. Ydermere vil de være positive, da dissipationen er positiv definit (ellers ville vi kunne lave en evighedsmaskine). Nedenstående figur viser dels, at U fremstilles som en transformer (mere herom i næste kapitel), og dels, at den diagonale R^0 kan reticuleres som en samling uforbundne lække.



Figur 25 Diagonalisering af dissipativt system.

I almindelighed vil både den diagonaliserende transformer U og egenverdierne R^0_{ii} være funktioner af frekvensen ω , og enhver af lækkene på figur 25 må derfor opfattes som realdelen af en kompleks impedans (eller admittans), hvis imaginærdel hører til den ikke-dissipative del af systemets response-matrix. Det er imidlertid kun realdelene, som giver anledning til støj. Af (97), (98) og (99) fås

$$e_i = U^*{}^k{}_i e'_k = U^*{}^k{}_i R^0{}_{kl} f'^l = U^*{}^k{}_i R^0{}_{kl} U^l{}_j f^j \quad (100)$$

dvs. sammenhængen mellem $R_{..}$ og $R^0_{..}$ er givet ved

$$R_{ij} = U^*{}^k{}_i R^0{}_{kl} U^l{}_j \quad (101)$$

De to summationer over indexparrene $k-k$ og $l-l$ i (101) er i virkeligheden kun én summation, da $R^0_{..}$ er diagonal, men det ser vi bort fra i (101) for at kunne bruge Einsteins summationskonvention. Bemærk også, at (101) ikke kan udtrykkes med "priknotationen", da højre-venstre rækkefølgen af de to indices på første faktor er forkert. Det vil der blive rådet bod på i næste kapitel.

Støjen fra de skalare lække i figur 25 er nu givet ved FD-teoremet, som beskrevet i tekst 22. Spændingsstøjen fra en x -læk R beskrives ved det frekvensafhængige *Power spektrum*. Hvis støjen udtrykkes som en Fourier-række over mange tætliggende frekvenser ω_k

$$\delta e'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-i\omega_k t) \quad (102)$$

kan vi gå ud fra, at de komplekse Fourier-koefficienterne c_k er statistisk uafhængige med tilfældigt fordelte faser, bortset fra, at koefficienterne for ω_k og $-\omega_k$ skal være hinandens komplekskonjugerede, når spændingen er reel. Power spektret er da defineret ved

$$\frac{1}{2} \Phi_e(\omega) \Delta\omega = \sum_{\omega_k \in [\omega, \omega + \Delta\omega]} \langle |c_k|^2 \rangle \doteq \langle |\delta \tilde{e}'(\omega)|^2 \rangle \Delta\omega \quad (103)$$

Faktoren $\frac{1}{2}$ skyldes, at power spektret kun defineres for positive frekvenser, men det inkluderer et lige så stort bidrag fra de negative. Den sidste omskrivning i (103) bygger på de store tals lov. De mikroskopiske frekvenser ω_k er så tætliggende, at de er makroskopisk uskelnelige, men summen af deres spredningskvadrater må være lig med spredningskvadratet af deres sum og proportional med længden af det lille frekvensinterval $\Delta\omega$, de indgår i. Vi kan altså lige så godt erstatte alle disse mikro-støjbidrag med "coarse grained" støjbidrag, ét for hvert af en serie frekvensintervaller $\Delta\omega$, som er små i makroskopisk forstand, men store nok i mikroskopisk forstand til, at de indeholder mange mikrofrequenser. De således definerede frekvensintervaller er disjunkte og dækker hele frekvensaksen, og i hvert af dem kan vi tænke os indlagt en støjkilde, der svinger med frekvensen ω , er ude af takt med og statistisk uafhængig af støjklenderne i de andre frekvensintervaller, og hvis spredningskvadrat er proportional med længden af frekvensintervallet, den er beliggende i.

FD teoremet for en læk $R(\omega)$ (altså realdelen af responsefunktionen) siger så, at

$$\Phi_e(\omega) = 2 \langle |\delta \tilde{e}'(\omega)|^2 \rangle = \frac{2}{\pi} R(\omega) E_{osc}(\omega, T) \quad (104)$$

hvor E_{osc} er energien af en harmonisk oscillator med frekvensen ω i termisk ligevægt med temperaturen T :

$$E_{osc}(\omega, T) = \frac{1}{2} \hbar \omega \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} = \frac{1}{2} \hbar |\omega| + \frac{\hbar |\omega|}{\exp \frac{\hbar |\omega|}{k_B T} - 1} \quad (105)$$

I den klassiske grænse, $\hbar \omega \ll k_B T$ er $E_{osc} = k_B T$, altså uafhængig af frekvensen.

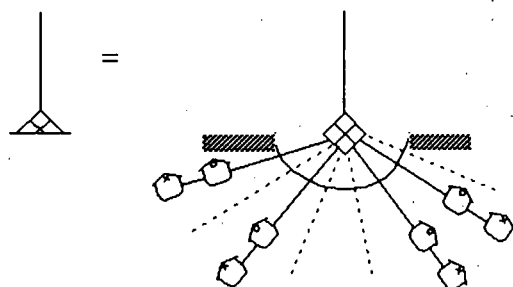
Det er nu let at generalisere (104) til at gælde for hele det dissipative felt R^0 ., som jo er en samling af uafhængige simple lække. Vi definerer

$$\Phi^0_{ij}(\omega) = 2 \langle \delta \tilde{e}'_i(\omega) \delta \tilde{e}'^*_j(\omega) \rangle \quad (106)$$

og har så, da $R^0..$ er diagonal, og støjbidragene fra to forskellige lække er statistisk uafhængige:

$$\Phi^0_{ij}(\omega) = \frac{2}{\pi} R^0_{ij}(\omega) E_{osc}(\omega, T) \quad (107)$$

FD teoremet (104) er udtryk for, at en responsefunktion $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$ kan "spektralopløses" på harmoniske oscillatorer med en spektraltæthed, der er givet ved realdelen $R(\omega)$. Specielt vil en ren læk, som er frekvensuafhængig og ikke modsvares af nogen imaginærdel, have en spektralfordeling, som er ligelig over alle frekvenser. Det er spektralopløsningen, der ligger til grund for valget af læk-ikonet



$$Z(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega') \left[\frac{1}{\omega - \omega'} + \frac{1}{\omega + \omega'} \right] d\omega'$$

Figur 26 Spektralopløsning af impedans $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$. Formlen forudsætter, at ω har en lille positiv imaginærdel. Tegningen viser specialtilfældet en ren læk, hvor R er frekvensuafhængig og den ikke-dissipative imaginærdel af Z er 0.

Vi kan nu finde den til (106) svarende funktion for den oprindelige impedans $R^0..$

$$\Phi_{ij}(\omega) = 2 \langle \delta \tilde{e}_i(\omega) \delta \tilde{e}^*_j(\omega) \rangle \quad (108)$$

Af (98) og (107) får vi så (idet vi nu udelader værne):

$$\Phi_{ij} = 2 \langle U^{*k}_i \delta \tilde{e}'_k U^l_j \delta \tilde{e}'_l \rangle = \frac{2}{\pi} E_{osc} U^{*k}_i R^0_{kl} U^l_j \quad (109)$$

Endelig får vi så af (101) FD teoremet

$$\Phi_{ij}(\omega) = \frac{2}{\pi} E_{osc}(\omega, T) R_{ij}(\omega) \quad (110)$$

For et passivt system, hvor den dissipative responsematrix er frekvensuafhængig (som f.eks. systemet på figur 23) har vi i den klassiske grænse et frekvensuafhængigt støjspektrum, *hvid støj*. Den øjeblikkelige støjkorrelation kommer da til at divergere, idet den er integralet af spektret over alle frekvenser. Dette er et eksempel på den klassiske fysiks *ultraviolette katastrofe*. I sin diskussion af hulrumsstrålingen løste Planck dette problem ved at erstatte den klassiske oscillator-energi $k_B T$ med det kvantemekaniske udtryk (105) *uden nulpunktsleddet* $\hbar\omega$. Når dette led medtages, får vi tilsyneladende en ultraviolet katastrofe, som er endnu værre end den klassiske, så man kan sige, at det var heldigt, at Planck ikke var fremsynet nok til at medtage oscillatorens nulpunktsenergi. Det har været diskuteret, om dette led burde fjernes fra FD-teoremet, men dette ville føre til analytiske vanskeligheder. Det må være korrekt, at nulpunktsenergien ikke skal med i spektret for hulrumsstrålingen, for denne energi kan ikke udstråles, da oscillatorerne jo ikke kan afgive den. På den anden side vil den give sig til kende ved at skabe impulsfluktuationer for en ladet partikel i vacuum. Nulpunktsfluktuationerne hænger nøje sammen med Heisenbergs usikkerhedsrelationer og kan derfor ikke bare "renormaliseres" væk. Problemet om kvantemekanikkens ultraviolette katastrofe må snarere løses ved at erkende, at de dissipative responsematricer i det ultraviolette område aftager med frekvensen hurtigere end $1/\omega$ på grund af elementarpartiklernes inertie.

6. Toporte og tensorer.

Vi skal i dette afsnit diskutere toporte, som er *ideelle* i den forstand, at de hverken oplagrer eller dissiperer energi. Disse toporte kan generelt karakteriseres som *transmittere*, der udfører operationer på spændings- og strømvektoren mellem en *primær* og en *sekundær* port, men lader energistrømmen være uændret. De simpleste typer af transmittere er lineære eller antilineære, og de opdeles i *transformere*, *gyratorer* og *transducere*.

Selve energibåndet er den grundlæggende transmitter, en *enhedstransformer*. Vi kan forestille os, at to iagttagere, som ikke kan se hinanden, men som har fælles måleforskrifter (definition af covariant og contravariant), kan måle strøm og spænding i hver sin ende af et langt energibånd. Disse målinger kræver så, at de hver især vælger en orientering, så lad os tænke os, at de begge vælger orientering i retningen fra 1 til 2. Vi ved så, at den samme fysiske situation (som det jo er, da det er to ender af det samme energibånd) kan beskrives lige godt med covariant og med contravariant spænding (reglen om den indifferente spændingsvarians, figur 15). Dvs. hvis begge iagttagere definerer strømmen som contravariant, og hvis orienteringen er den samme, så er de frit stillede med hensyn til, om spændingen skal defineres som covariant eller contravariant. Hvis nu iagttager 1 vælger at måle den contravariante spænding, og iagttager 2 vælger at måle den covariante spænding, vil relationen mellem de målte værdier være

$$e^{(2)} = g \dots e^{(1)} \quad (111)$$

hvor $g \dots$ er vektorbåndets metriske tensor. Hvis de to iagttagere er fælles om både orientering og varians af strøm og spænding, vil de selvfølgelig finde samme spænding, relationen mellem $e^{(1)}$ og $e^{(2)}$ vil så være givet ved enhedsmatricen, men denne er jo identisk med en af de to blandede varianter af den metriske tensor, så vi kan i dette tilfælde skrive

$$e^{(2)\cdot} = g^{\cdot} e^{(1)\cdot} ; e^{(2)\cdot\cdot} = g^{\cdot\cdot} e^{(1)\cdot\cdot} \quad (112)$$

Det er i denne betydning, vi kan hævde, at energibåndet er en enhedstransformer og den metriske tensor en enhedstensor. Hvis vi foreløbig bare tænker på en (2. ordens) tensor som et symbol med fire matrixvarianter, forbundne med hæve-sænke reglen, er det klart, at en tensor i almindelighed ikke kan have alle sine matrixvarianter lig med enhedsmatricen. Vi har tidligere indført Kronecker-symbolet δ , som er en enhedsmatrix med begge indices nede. Vi vil nu også indføre et beslægtet symbol Δ , som er enhedsmatricen med begge indices oppe. Vi har så

$$g^{\cdot\cdot} = g^{\cdot\cdot} = \delta_{\cdot\cdot} = \Delta^{\cdot\cdot} \quad (113)$$

og hæve-sænke reglen giver

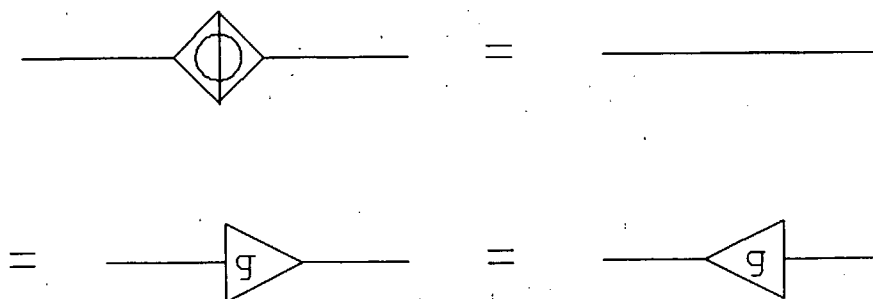
$$\begin{aligned} \delta_{\cdot\cdot} &\Rightarrow \delta^{\cdot\cdot} = g^{\cdot\cdot} ; \delta^{\cdot\cdot} = (g^{\cdot\cdot})^2 \\ \Delta^{\cdot\cdot} &= \Delta^{\cdot\cdot} = g_{\cdot\cdot} ; \Delta_{\cdot\cdot} = (g_{\cdot\cdot})^2 \end{aligned} \quad (114)$$

For en *neutral metrik* (jfr. (57)) er altså $\Delta = \delta$. Ved et udtryk som $(g_{\cdot\cdot})^2$ forstår vi det sædvanlige række-søjle produkt af matricen $g_{\cdot\cdot}$ med sig selv. Det kan vi ikke skrive som $g_{\cdot\cdot} g_{\cdot\cdot}$ med den nye notation, da prikkerne er i samme højde, men i sådanne situationer er de to Kronecker-matricer til hjælp, idet vi kan skrive

$$(g_{\cdot\cdot})^2 = g_{\cdot\cdot} \Delta^{\cdot\cdot} g_{\cdot\cdot} ; (g^{\cdot\cdot})^2 = g^{\cdot\cdot} \delta_{\cdot\cdot} g^{\cdot\cdot} \quad (115)$$

Selv om enhedstransformerer ikke er andet end det nøgne energibånd, er det alligevel en fordel at have et specielt ikon for den, som kan bruges, når vi diskuterer iagttagerne 1 og 2s forskellige indiceringer i de to ender af det samme bånd. Da båndet ikke har nogen indbygget asymmetri mellem sine to ender, må det være et *symmetrisk* ikon, så vi indfører nedenstående ikon for enhedstransformerer. Normalt indfører vi et tensorsymbol t

til at beskrive omsætningsforholdet for en transformer, så for enhedstransformeren er t lig med den metriske tensor g .



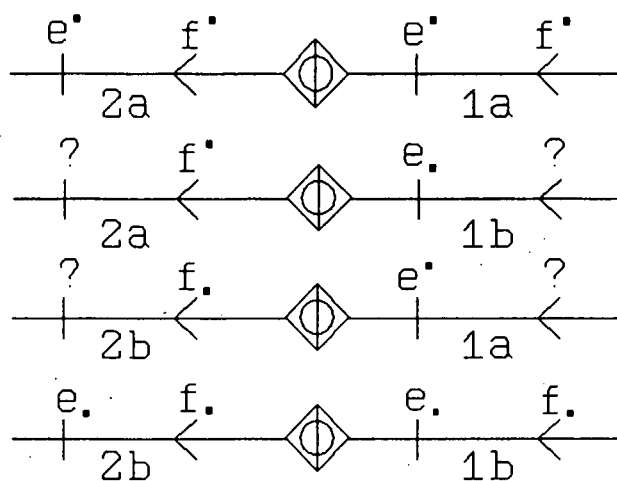
Figur 27 Enhedstransformeren. Omsætningsforholdet er den metriske tensor g .

Vi kan nu forsøge at danne os et fuldstændigt overblik over enhedstransformerens forskellige funktioner. Vi vil anbringe iagttager 1 på højre side, som vi kalder *primærsiden*, medens iagttager 2 får *sekundærsiden* til venstre. For et symmetrisk transformerikon er det selvfølgelig lige meget, hvad vi kalder primær og sekundær, men for det almindelige trekantede transformerikon er primærsiden trekantens grundlinje (den flade side) og sekundærsiden den modstående spids, og vi vil i reglen anbringe primærsiden til højre, da det, som vi senere skal se, medfører visse fordele, som hænger sammen med, at vi i formler normalt anbringer det, der skal bearbejdes, på højre side af lighedstegnet og har resultatet på venstre side.

Kausaliteten i de to bånd er relativt fastlagt. Vi kan frit vælge kausaliteten i bånd 1, men hermed er kausaliteten i bånd 2 fastlagt. For en transformer skal vi have samme kausale rækkefølge i de to bånd, dvs. hvis ikonet har spændingsinput på primærsiden, skal det have strøminput på sekundærsiden, og omvendt. Transformerens tensorsymbol t defineres ved sin operation på spændingen, når vi går fra primær- til sekundærsiden, og det virker derfor mest naturligt at vælge spændingsinput på primærsiden. Det må imidlertid slås fast, at forbindelsen mellem primær- og sekundærspændingen er en *ligning*, som er uafhængig af, hvilken af de to spændinger, der betragtes som input: hvis $e_2 = t e_1$, så

er $e_1 = t^{-1} e_2$. Vi vil derfor indskrænke os til spændingsinput på primærsiden.

Når kausaliteten således er fastlagt, er der 8 muligheder tilbage for indicering af hvert af de to bånd, idet der er to mulige orienteringer, og to mulige varianser for hver af de to vektorer. Der er således i princippet 64 forskellige funktioner af en transformer. Dette antal kan dog heldigvis reduceres til nogle få *prototyper* ved brug af strøm-orienteringsreglen og reglen om den indifferente spændingsvarians (figur 15). Med strøm-orienteringsreglen kan vi altid sørge for, at orienteringen af hvert bånd går fra primærsiden mod sekundærsiden. Når vi yderligere udnytter reglen om den indifferente spændingsvarians, er der kun to forskellige typer af bånd tilbage, som ikke direkte kan oversættes til hinanden. Vi vil kalde dem a- og b-bånd, og det er henholdsvis bånd med contravariant strøm og bånd med covariant strøm (underforstået, at orientering og kausalitet på forhånd er fastlagt, som beskrevet). Der er så kun fire forskellige prototyper af transformerfunktioner, som vi skal gøre rede for, nemlig 2a-1a, 2a-1b, 2b-1a og 2b-1b. For en ikonsymmetrisk transformer som enhedstransformereren, vil de to blandede former 2a-1b og 2b-1a være identiske, bortset fra nummereringen, men vi tager dem begge med alligevel af hensyn til den almindelige diskussion. På figuren nedenfor bruger vi spændingssymbolet e og strømsymbolet f til at betegne de to input-vektorer, altså primærspændingen og sekundærstrømmen, og elementets funktion angives ved symbolske udtryk for sekundærspændingen og primærstrømmen. Vi har valgt at lade spændingsvariansen følge strømvariansen, altså contravariant for a-bånd, covariant for b-bånd. Vi må så desværre konstatere, at vi selv for et så simpelt element som enhedstransformereren ikke uden videre kan angive funktionen i de to blandede tilfælde 2a-1b og 2b-1a.

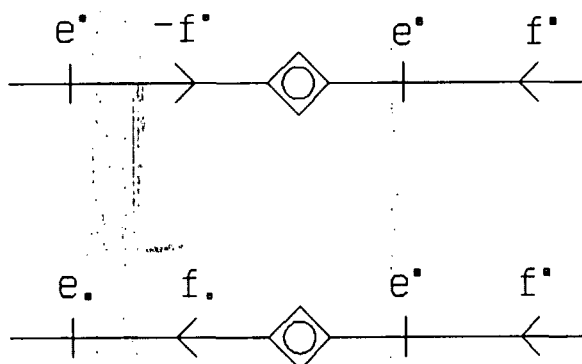


Figur 28 Enhedstransformerens kendte og ukendte funktioner. Båndene mærket a har contravariant strøm, b-båndene covariant strøm. På figuren er spændingsvarianserne i alle bånd de samme som strømvarianserne.

Problemet om den manglende oversættelse fra et a-bånd til et b-bånd har selvfølgelig en løsning; af semiotiske grunde må det være muligt at udtrykke den samme fysiske situation med både covariant og contravariant strøm, når orienteringen er uændret, men i det almindelige tilfælde vil dette involvere en symboltransformation, som ikke er triviel. Vi vil ikke i dette afsnit forsøge at finde det generelle udtryk for denne transformation, men vi vil oversætte det til et andet problem, nemlig funktionen af toport o-samlere, som for skalare og euklidiske bånd er identisk med enhedstransformerer, men for generelle bånd noget andet.

Samlernes funktion i energibåndsformalismen er jo at representere Kirchhoffs love for netværk. Knudeloven, at summen af strømmene ind mod (eller væk fra) en knude er nul, repræsenteres af o-samlere, maskeloven, at summen af spændingerne rundt i en maske er nul, repræsenteres af x-samlere. For at disse love skal give mening for generelle vektorbånd, må vi have samme varians af strøm og spænding i alle de tilknyttede bånd, når disse er orienterede ens i forhold til samlere. For toport o-samlere får vi derfor reglen øverst på figur 29, og denne kan så

oversættes til reglen nederst på figuren ved hjælp af strøm-orienteringsreglen.



Figur 29 Toport o-samleren.

Man overbeviser sig let om, at toport o-samleren er ikonsymmetrisk, og at dens funktion er en spejlingsoperation, dvs. hvis vi kaskadekobler to af dem, får vi en enhedstransformer. Den nederste fremstilling på figur 29 viser, at toport o-samleren i modsætning til enhedstransformerens har en simpel funktion, når den forbinder et a-bånd med et b-bånd. Disse to ting tilsammen betyder, at enhedstransformerens funktion, når den forbinder to bånd af forskellig a/b type og samme orientering vil være den samme som toport o-samlerens funktion, når den forbinder to bånd af samme type og samme orientering. Vi vil benytte tensorsymbolet h for denne funktion, selv om vi senere skal se, at h ikke er en egentlig tensor, men noget mere grundlæggende, som vi kalder en *protensor* (eller *proto-tensor*). På figur 30 vises, hvordan definitionen af toport o-samleren som en ikonsymmetrisk spejlings-transformer med omsætningsforholdet h løser problemet om de manglende funktioner på figur 28. Spejlings-egenskaben af h -transformeren udtrykkes ved tensor-relationen

$$h^2 = g \quad (116)$$

hvoraf man så kan udlede forskellige matrix-relationer, såsom

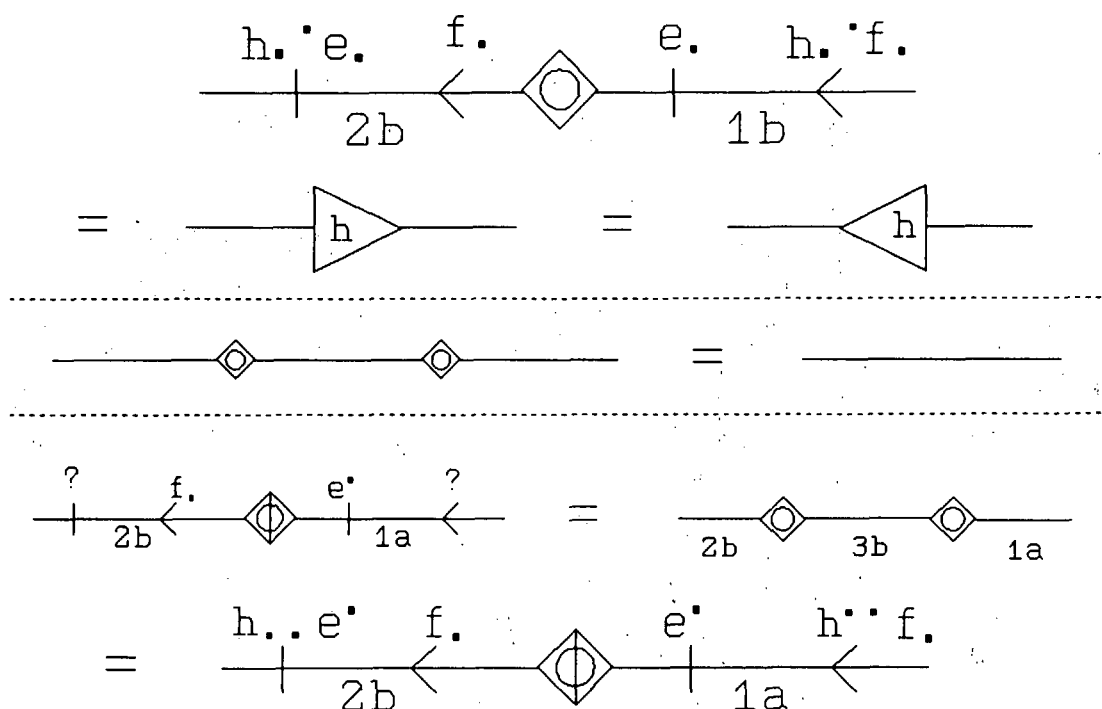
$$(h^{\cdot\cdot})^2 \doteq h^{\cdot\cdot} h^{\cdot\cdot} = g^{\cdot\cdot} = \delta^{\cdot\cdot} \quad (117)$$

$$h_{\cdot\cdot} h^{\cdot\cdot} = g_{\cdot\cdot} \quad ; \quad (h^{\cdot\cdot})^{-1} = h_{\cdot\cdot}$$

hvorimod man ikke kan slutte noget om f.eks. $(h_{\cdot\cdot})^2$. Vi skal senere vise, at der for *dimensionsløse* metrikker gælder

$$(h_{\cdot\cdot})^2 = \Delta_{\cdot\cdot} \quad ; \quad (h^{\cdot\cdot})^2 = \delta^{\cdot\cdot} \quad ; \quad h_{\cdot\cdot} = h^{\cdot\cdot} \quad (118)$$

samt, at $h = \delta$ for *neutrale* metrikker (som jo også er *dimensionsløse*).



Figur 30 Protensoren h som transformer-forhold for toport o-samler (øverst), h som spejling (midt), og h som relationskaber mellem a- og b-form af samme bånd (nederst).

Vi er nu i stand til at fremsætte den generelle definition på en transformer. Af det foregående må det være klart, at en enkelt tensor ikke er nok, hvis vi skal redegøre for alle en transformers mulige funktioner, der må være fire tensoragtige størrelser involveret, da primær- og sekundærbåndet hver især kan

være a- eller b-type. Det er imidlertid tilstrækkeligt at kende én tensor, så må de andre kunne aflædes af den og protensoren h (hvis man kender den). Vi vælger at lade tensorsymbolet t beskrive situationen, når begge de tilsluttede bånd er af a-type (contravariante strømme) og har orientering i retning fra primær- til sekundærsiden. Afhængigt af om spændingerne vælges contravariante eller covariante, skal relationen mellem sekundær- og primærspændingen altså være

$$e^{(2)\cdot} = t \cdot e^{(1)\cdot} \quad ; \quad e^{(2)\cdot} = t \cdot e^{(1)\cdot} \quad (119)$$

Relationen mellem primær- og sekundærstrømmen er så bestemt af, at energistrømmen skal være den samme på de to sider. Hvis vi i første omgang sætter $f^{(1)\cdot} = t' \cdot f^{(2)\cdot}$, giver energibevarelsen

$$\begin{aligned} e^{(1)*} \cdot f^{(1)\cdot} &= e^{(2)*} \cdot f^{(2)\cdot} \Rightarrow \\ e^{(1)*} \cdot_i t'^i_j f^{(2)j} &= (t_j^i e^{(1)}_i)^* f^{(2)j} \quad (120) \\ \Rightarrow t'^i_j &= t^*_{j \ i} \end{aligned}$$

Dette resultat fører os til definition af *hermitesk tensorskonjugering*. Vi siger, at tensoren t' er den hermiteske konjugerede af tensoren t , $t' = t^*$, og dette betyder for tensorens fire matrixvarianter

$$\left. \begin{aligned} t^+_{ij} &= t^*_{ji} \quad ; \quad t^+_{i \ j} = t^*_{j \ i} \\ t^{+i}_j &= t^*_{j \ i} \quad ; \quad t^{+ij} = t^*_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Sammenfattende kan vi sige, at vi hermitesk-konjugerer en (2. ordens) tensor ved for hver af dens fire matrixvarianter at komplekskonjugere og ombytte den vandrette rækkefølge af de to indices uden at ændre deres lodrette position.

For at gøre det lidt lettere at tale om de forskellige matrixvarianter af en tensor indfører vi en nummerering. Indexpladserne i den vandrette dimension opfattes som et binært tal, hvor positionen nede svarer til cifferet 0 og positionen oppe til cifferet 1. For en 2. ordens tensor t får vi da varianter med numrene 0, 1, 2 og 3:

$$\left. \begin{array}{l} 0\text{-variant: } t_{..} \\ 1\text{-variant: } t_{.}^{\cdot} \\ 2\text{-variant: } t^{\cdot} \\ 3\text{-variant: } t^{\cdot\cdot} \end{array} \right\} \quad (122)$$

Den hermiteske tensorkonjugering, som i (121) er udtrykt for de fire matrixvarianter, virker altså ligesom en "gammeldaws" hermitesk matrixkonjugering for varianterne 0 og 3, men er noget andet for 1- og 2-varianterne. Grunden til dette er, at vi gerne vil kunne bruge hæve sænkereglerne på sædvanlig måde for de hermitesk konjugerede tensorer, altså f.eks. vil vi gerne kunne skrive $t^{\cdot\cdot} = t^{\cdot\cdot} g^{\cdot\cdot}$, og da

$$t^{\cdot}{}_{ik} g^{kj} = t^{\cdot}{}_{ki} g^{kj} = g^{*jk} t^{\cdot}{}_{ki} = t^{\cdot}{}_{j_i} \quad (123)$$

(hvor vi har udnyttet, at 3-varianten af g er hermitesk), ser vi, at vi er nødt til at definere tensorkonjugeringen som i (121). For matrixkonjugering gælder det, at den konjugerede af et produkt er produktet af de konjugerede matricer i omvendt orden, og en tilsvarende regel gælder for tensorkonjugering:

$$t = uv \Rightarrow t^{\cdot} = v^{\cdot} u^{\cdot} \quad (124)$$

Beviset for denne sætning kan føres ved at man ser på en af dens mulige matrixvarianter. Når en tensorrelation er opfyldt for én matrixvariant, er den opfyldt for dem alle. F.eks. fås

$$t^+{}_i{}^j = t^{*j}{}_i = (U^{jk}V_{ki})^* = V^+{}_{ik}U^{+kj} \quad (125)$$

Når vi bruger ordet "tensor" vil det ofte være underforstået, at der er tale om en 2. ordens tensor. Tensorer af 1. orden kaldes vektorer, tensorer af 0. orden kaldes skalarer. Tensorer af 3. eller 4. orden får vi ikke brug for i denne sammenhæng. De er ikke så bekvemme, da "priknotationen" ikke kan anvendes for tensorer af højere orden end 2.

Hvis en tensor (af 2. orden) er lig med sin egen hermiteske konjugerede tensor, siger vi, at den pågældende tensor er *tensorhermitesk* eller *metrisk hermitesk*. Hvis en tensor har den egenskab, at dens i'te matrixvariant er hermitesk i "gammeldaws" forstand, altså at denne matrix er lig med sin egen matrixhermitesk konjugerede, siger vi, at den pågældende tensor er *i-hermitesk*. Vi kan så formulere følgende sætninger, hvis bevis overlades til læseren:

Hvis en tensor er 0-hermitesk, er den også 3-hermitesk og metrisk hermitesk, men ikke nødvendigvis 1-hermitesk eller 2-hermitesk.

Hvis en tensor er 1-hermitesk, er den også 2-hermitesk, men ikke nødvendigvis metrisk hermitesk.

Ved den *metrisk reciprokke* tensor af en given tensor t vil vi forstå en tensor t^{-1} , som adlyder relationen

$$t^{-1}t = tt^{-1} = g \quad (126)$$

Dette må ikke forveksles med reciprocitet af matrixvarianterne. Det gælder *ikke*, at i -matrixvarianten af t^{-1} er lig med den reciprokke matrix af i -matrixvarianten af t . Derimod gælder:

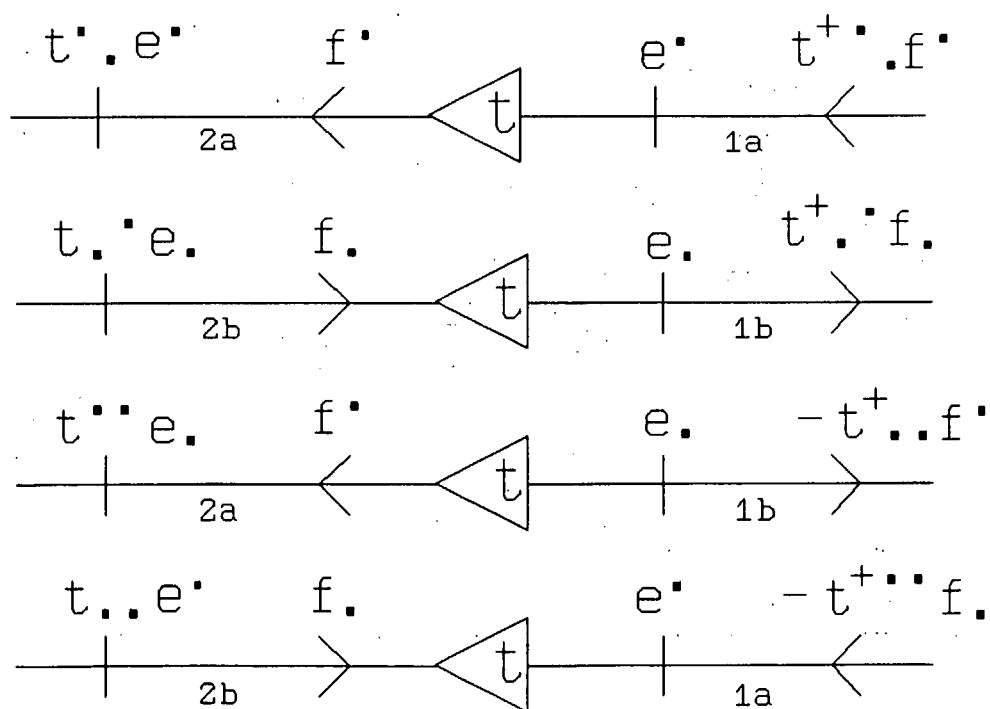
Matrixvariant nr 0, 1, 2, 3 af den reciprokke af en tensor t er lig med den reciprokke matrix af matrixvarianten nr. 3, 1, 2, 0 af t . F.eks. får vi af (126)

$$t^{-1}..t^{..} = t^{-1}..t^{..} = g^{..} \Rightarrow t^{-1}.. = (t^{..})^{-1} \wedge t^{-1}.. = (t^{..})^{-1} \quad (127)$$

Forudsætningen for, at en tensor har en reciprok tensor er så, at alle dens matrixvarianter har reciprokke matricer.

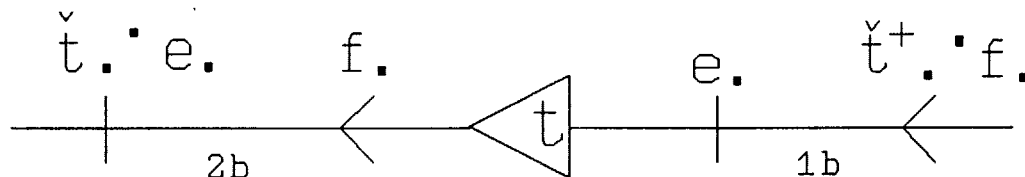
Hvis en tensor har den egenskab, at dens reciprokke er lig med dens hermiteske konjugerede tensor, siger vi, at den pågældende tensor er *metrisk unitær* (eller *tensor-unitær*). Hvis den derimod har den egenskab, at dens i 'te matrixvariant er unitær i "gammeldaws" forstand, dvs. at denne matrix er den reciprokke af sin hermiteske konjugerede matrix, siger vi, at den pågældende tensor er *i -unitær*. En metrisk unitær tensor vil i almindelighed ikke være matrix-unitær i nogle af sine varianter; kun hvis metrikken er euklidisk, vil der være sammenfald mellem disse egenskaber.

Lad os nu betragte den transformerdefinition, som blev fremsat i (119) og (120). Definitionen gjaldt for det tilfælde, hvor både primær- og sekundærbåndet var af a -type, altså med contravariant strøm, og hvor orienteringen var i retning fra primær- til sekundærporten. Ved brug af strøm-orienteringsreglen og reglen om den indifferente spændingsvarians kan vi herfra slutte os ialt 16 forskellige situationer, af hvilke kun så mange vises på figur 31, at vi får brug for alle matrixvarianterne af t og t^* .



Figur 31 Transformerdefinitioner med tensoren t .

Imidlertid er der jo 64 forskellige indiceringer af de to bånd til en transformer, og ud fra prototypen øverst figur 31 kan vi kun få fat i 16 af dem. De 48 andre må afledes ud fra 3 andre prototyper, som med orientering fra primær til sekundær vil være 2a-1b, 2b-1a og 2b-1b. Hvis tensorsymbolet t beskriver transformerens funktion som på figur 31 (altså med prototypen 2a-1a), så vil det være en anden tensor, \check{t} , der beskriver funktionen for prototypen 2b-1b. Vi kalder \check{t} den til t duale tensor (selv om dette ord bruges i en række andre sammenhænge, som ikke har noget med denne at gøre). Hvilken af de to prototyper 2a-1a eller 2b-1b man tilskriver t , og hvilken man tilskriver \check{t} , er arbitrært (men det må selvfølgelig gøres konsistent i en given kontekst). For fremtiden vil vi bruge konventionen fra figur 31 og figur 32, men i (97), (98) og figur 25 brugte vi faktisk den modsatte konvention, hvilket vi imidlertid let kunne ændre ved at omdøbe det der benyttede tensorsymbol U til \check{U} .



Figur 32 Den duale tensorfunktion af samme transformer som på figur 31.

Forskellen på figur 31 og figur 32 ligger ikke i transformeren, men i energibåndenes indicering. Hvis vi i figur 32 ændrede tensorsymbolet t indeni transformerikonet til \check{t} , ville det i almindelighed være en anden transformer (den duale), og så skulle vi samtidigt ændre symbolet \check{t} i udtrykkene for outputvariablene i båndene til t . Dualitetstransformationen er en spejling, fordi overgangen fra a-indicering til b-indicering (med fastholdt orientering) er en spejling.

Vi har tidligere set (figur 30), at den samme fysiske situation kan udtrykkes med både a-indicering og b-indicering (og samme orientering) ved, at vi transformerer begge båndvektorer med protensoren h . Det betyder, at vi altid kan finde frem til, hvilket tensorsymbol, der udtrykker funktionen af en transformator t med givne indiceringer. Først bruger vi strøm-orien-

teringsreglen til at orientere begge bånd i retning af transformernet, altså fra primær til sekundær. Så sammenligner vi a/b-typerne af de reorienterede bånd med prototypen 2a-1a (figur 31 øverst). Hvis der kan konstateres en afvigelse (altså et b i stedet for et a), skal tensorsymbolet t i udtrykkene for båndvariablene forsynes med en faktor h på den side af t 'et, hvor afvigelsen findes. Specielt finder vi for figur 32, hvor der er afvigelse på begge sider

$$\check{t} = hth \quad (128)$$

Ovenstående regel hviler tungt på den tegnestil, at vi har primærsiden til højre og sekundærsiden til venstre. Hvis prototypen havde heddet 1a-2a i stedet for 2a-1a, skulle vi anbringe h 'et på den modsatte side af t 'et af den, hvor afvigelsen findes. Nedenstående skema sammenfatter reglen:

Indiceringsform

Tensorsymbol

2a-1a

$t = h\check{t}h$

2a-1b

$th = h\check{t}$

2b-1a

$ht = \check{t}h$

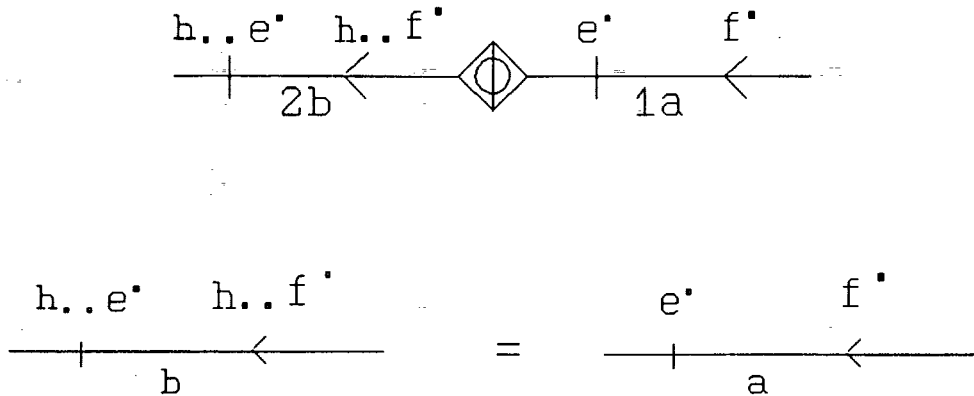
2b-1b

$\check{t} = hth$

En transformer eller dens tensor t siges at være *selvdual*, hvis $\check{t} = t$. Enhedstensoren g , som kommuterer med alle faktorer i et tensorprodukt, er selvdual, for $hgh = gh^2 = g$. Protensoren h er også selvdual, for $hhh = h^2 h = h$.

Ved sammenligning af figur 30 og figur 32 ses, at vi har forudskikket selvdualiteten af h . Endvidere har vi forudskikket, at h er *metrisk hermitesk*. Grunden til, at det nødvendigvis må forholde sig sådan, er, at vi ved overgang fra et a-bånd til et b-bånd med samme orientering, der beskriver samme fysiske situation, må anvende samme transformation for strøm og spænding (transformationen h .. nederst på figur 30). Der er jo ingen principiel forskel på strømme og spændinger, når tidsvending og orienteringsskift holdes ude af billedet, og vi har netop opbygget begrebet om det generelle vektorbånd ud fra ideen om en

standardmetrik, der kan reticuleres ud på skalare bånd, således at strømme og spændinger fra de skalare bånd kan blandes i en strømvektor eller en spændingsvektor. Når h er metrisk hermitesk og en spejling, er h også *metrisk unitær*.



Figur 33 Samme fysiske situation fremstillet med a- og b-bånd (jfr. figur 30 nederst).

For en dimensioneret metrik vil 1- og 2-matrixvarianterne af h også være dimensionerede og det har ingen mening at diagonalisere dem eller at tale om deres egenverdier. Hvis derimod metrikken er dimensionsløs, vil alle matrixvarianterne af h også være dimensionsløse. Da 1- og 2-matricerne er spejlinger (deres kvadrat er enhedsmatricen, jfr (117)), har de egenverdierne 1 og -1 og er hermiteske. Dvs. protensoren h er for en dimensionsløs metrik 1-hermitesk (og 2-hermitesk), foruden at den jo er metrisk hermitesk. Vi har derfor

$$\left. \begin{aligned} h^*{}_j{}^i &= h_i{}^j \quad \wedge \quad h^*{}_j{}^i = h^i{}_j \\ \Rightarrow h^* &= h^* \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Da $h^* = g..h^*$ og $h^* = h^*g..$ og da 0- og 3-varianterne af h og g er hinandens reciproke, finder vi, at alle *matrixvarianter af h kommuterer med alle matrixvarianter af g* . Da Kronecker symbolerne δ og Δ kan udtrykkes ved g -matricer, kan vi yderligere skærpe sætningen til: *alle matrixvarianter af g , h , δ*

og Δ kommuterer indbyrdes for en dimensionsløs metrik. Heraf følger også, at δ og Δ er selvduale. Resten af resultaterne, som blev forudskikket i (118) kan nu bevises:

$$\left. \begin{aligned} (h_{..})^2 &= h_{..}\Delta^{..}h_{..} = h_{..}\Delta^{..}h_{..} = (h_{..})^2\Delta^{..} = \Delta^{..} \\ (h^{..})^2 &= h^{..}\delta_{..}h^{..} = h^{..}\delta_{..}h^{..} = (h^{..})^2\delta_{..} = \delta_{..} \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Særligt vigtige blandt dimensionsløse metrikker er de neutrale metrikker, hvor $(G_{..})^2 = \delta_{..}$ og $\Delta = \delta$. (Vi bruger stort G for den metriske tensor, for at fremhæve, at der er tale om en neutral metrik). For en neutral metrik er der ingen forskel på 0- og 3-varianten af G, og det betyder faktisk, at vi ikke kan skelne mellem et bånd, hvor både strøm og spænding regnes contravariante (et a-bånd) og et andet, hvor vektorsymbolerne er de samme, men hvor begge regnes covariante, og orienteringen er den samme. Af figur 33 følger derfor, at for en neutral metrik er $h = \delta$. Dvs. 0- og 3-varianterne af h er begge lig med enhedsmatricen, og 1- og 2-varianterne er begge lig med $G_{..}$. Hvis specielt metrikken er euklidisk, $G = \delta$, er alle varianter af G, h, δ og Δ lig med enhedsmatricen. For en neutral metrik vil i-varianten af en tensor t derfor være lig med 3-i varianten af den duale tensor:

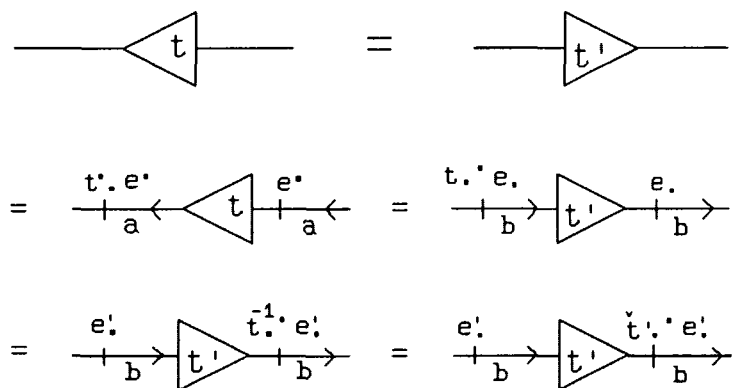
$$\check{t}^{..} = h_{..}t^{..}h^{..} = \delta_{..}t^{..}\Delta^{..} = t^{..} \quad (131)$$

(og tilsvarende for de andre varianter).

I foregående afsnit, da vi diskuterede multiporte som 1-porte i standardmetrik, blev der ikke talt om de to duale representationer, men forskellen gør sig også gældende for 1-porte, og (131) viser, at den ikke er triviel, selv for en standardmetrik (medmindre den er euklidisk). Vi kan ikke bare skifte varians på begge variable i input porten og så regne med, at den samme input-output relation kan udtrykkes ved, at vi skifter lodret position på begge indices af responsematricen og beholder tensorsymbolet. Dette symbol skal udskiftes med det duale symbol, og (131) udtrykker derfor, at det er den samme responsematrix, der skal bruges med de ændrede varianser, og

derfor kan det ikke være den samme tensor. Dette er umiddelbart klart, når man tænker på en skalar reticulation som f.eks. figur 23, for input-output forholdene i en sådan afhænger kun af de skalare bånds indiceringer og ikke af, hvad vi kalder covariant og contravariant i vektorbåndet. Man skal ikke stirre sig blind på tensornotationen og tro, at alt i verden er tensorer og Riemann geometri (som der har været en kraftig tendens til i fysikken efter relativitetsteorierne). En tensor er blot en bekvem regnestørrelse, som gør det muligt at udtrykke relationer, der er uafhængige af koordinatsystemet, men hvis vi mister jordforbindelsen til det underliggende ikoniske lag (som er vort semiotiske substitut for den fysiske virkelighed) er tensorerne intet værd.

Ikonet for en transformer er jo asymmetrisk for at vise, at vi har brug for at kunne skelne mellem primær- og sekundærsiden, når vi skal redegøre for transformerens funktioner. Denne skelnen er imidlertid en konvention, der ikke berører den underliggende fysiske virkelighed, så det må være muligt at beskrive den samme transformer med et vendt ikon, hvor vi samtidigt udskifter det oprindelige tensorsymbol t med et nyt, t' . Vi skal så finde den symbolske relation mellem t og t' .



Figur 34 Vending af transformerikonet.

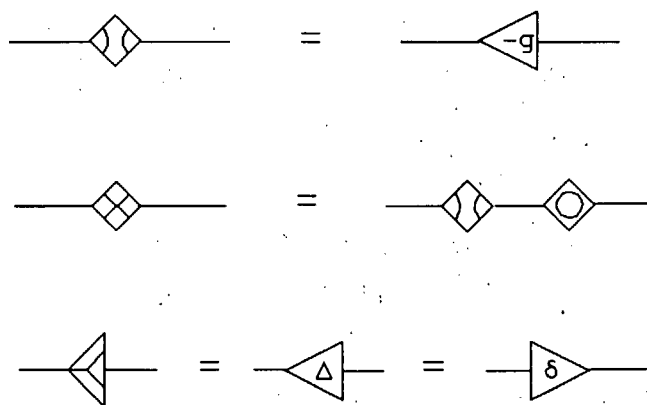
Ved brug af strøm-orienteringsreglen og definitionen af det duale tensorsymbol, figur 32, finder vi i figur 34 ved at se på relationen mellem spændingerne i de to porte, at sammenhængen mellem den oprindelige transformers tensor t og den vendte transformers tensor t' må være

$$t' = \check{t}^{-1} \quad (132)$$

Betingelsen for, at en transformer er ikonsymmetrisk er derfor

$$\check{t}^{-1} = t \sim t\check{t} = g \quad (133)$$

Hvis en transformer har spejlingsegenskaben $t^2 = g$ og er selvdual, må den derfor være ikonsymmetrisk, hvorved det bekræftes, at g og h er ikonsymmetriske. Blandt de skalare transformere fandtes der kun én ikonsymmetrisk transformer, bortset fra enhedstransformeren, nemlig den med omsætningsforholdet -1 , og den blev derfor i tekst 8 kaldt den *symmetriske transformer*. Nu er der flere muligheder for ikonsymmetri, og vi omdøber derfor den tidligere "symmetriske transformer" til den *negative enhedstransformer*, men benytter samme ikon for den (figur 35). Ved hjælp af denne kan vi udtrykke toport x -samlere. Transformere svarende til δ og Δ er ikonsymmetriske hvis og kun hvis metrikken er neutral, men i så fald er de identiske med toport o -samlere h og behøver ikke noget nyt ikon. For en ikke-neutral metrik er de selvduale og hinandens reciprokke, men ikke identiske, og de får derfor et asymmetrisk ikon, men kun ét, for ved ikonvending af Δ -transformeren fås δ -transformeren.



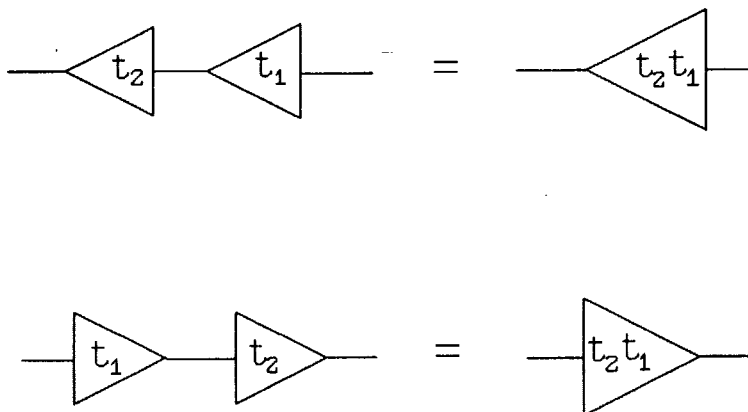
Figur 35 Ikoner for protensorer.

Egentlige transformere inden for en given metrik, dvs. sådanne, som har en reciprok, udgør i matematisk forstand en gruppe med kaskadekobling som komposition. I almindelighed er

kaskadekoblingen ikke kommutativ. Når vi kaskadekobler t_1 og t_2 og får en sammensat transformer $t = t_2 t_1$ betyder det, at 1- (eller 2) varianten af t er matrixproduktet af 1- (eller 2-) varianterne af t_1 og t_2 . Med udtrykket

$$t \cdot e = t_2 \cdot t_1 \cdot e. \quad (134)$$

menes, at et spændingssignal først møder transformeren t_1 og derefter t_2 . Denne i matrixformler så indarbejdede skrivemåde er hovedårsagen til, at vi i definitionerne foretrækker at have primærsiden til højre og sekundærsiden til venstre, hvilket illustreres af nedenstående figur.

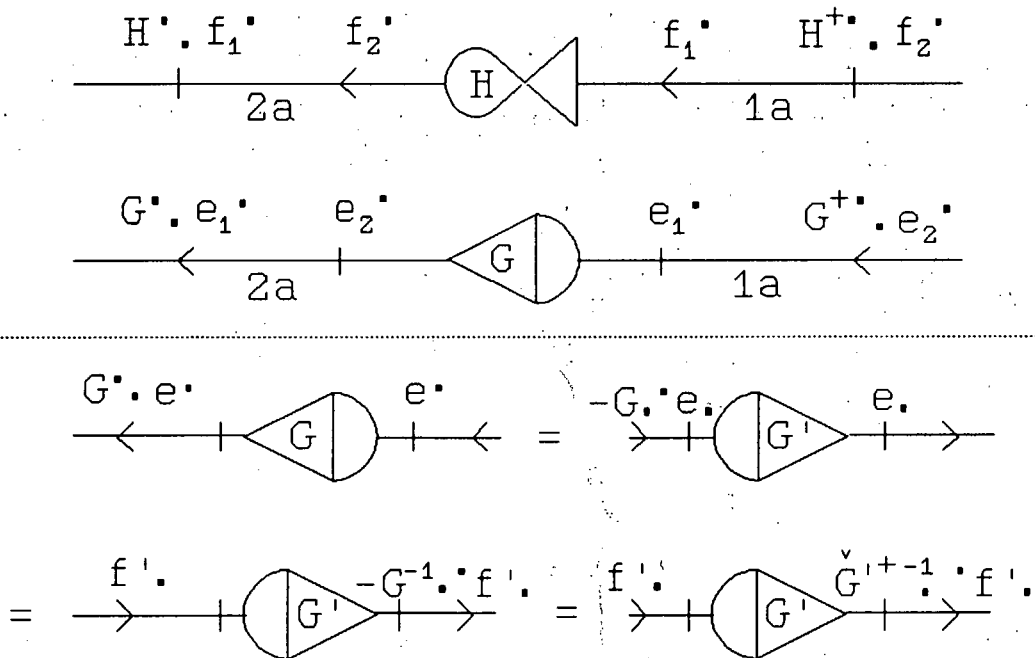


Figur 36 Kaskadekobling af transformere.

En *gyrator* har, i modsætning til en transformer, samme type input i begge porte, altså enten spændingsinput i begge porte eller strøminput i begge porte. Hvis kausaliteten ændres i den ene port, må den også ændres i den anden port, men for en bestemt gyrator kan begge former for kausalitet accepteres. Alligevel er det en fordel at operere med to forskellige ikoner, en *x-gyrator*, hvor omsætningsforholdet er forholdet mellem sekundærspænding og primær strøm, og en *o-gyrator*, hvor omsætningsforholdet er forholdet mellem sekundærstrøm og primærspænding. I definitionerne er det så mest naturligt at lade *x-gyratoren* have strøminput i begge porte og lade *o-gyratoren* have spændingsinput i begge porte, men dette er som sagt ikke nødvendigt; grunden til, at vi bruger to forskellige ikoner, er ikke, at der er to forskellige

kausalfomer, men at der er to mulige definitioner af omsætningsforholdet; *ikonets form tjener til at definere symbolets betydning.*

Lige som for transformeren lader vi tensorsymbolet svare til virkningen af gyratoren, når begge bånd er af a-type, og orienteringen er i retningen fra primærsiden til sekundærsiden. For indiceringsformen 2b-1b skal vi bruge det duale symbol, som fås af det oprindelige ved multiplikation på begge sider med protensoren h , og hvis indiceringsformen kun afviger på den ene side, skal symbolet ganges med h på den side (forudsat igen, at vi har primærsiden til højre og sekundærsiden til venstre. På nedenstående figur vises definitionen af begge gyratorer, samt ikonvending af en o-gyrator.



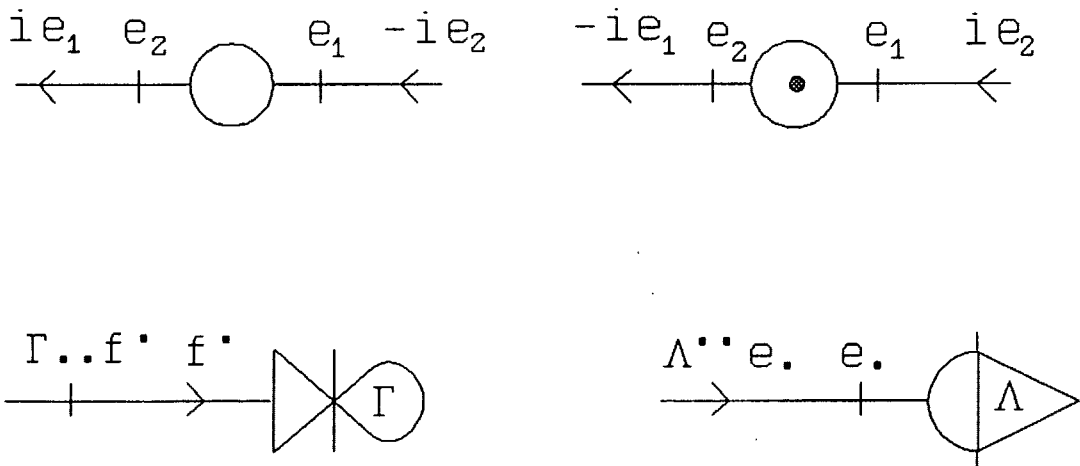
Figur 37 Øverst: Definition af x-gyrator H og o-gyrator G . Nederst: Ikonvending af gyrator.

Af udledningen nederst på figur 37 finder vi, at symboltransformationen af en gyrator-tensor G til G' , når ikonet vendes, må være

$$G' = -\check{G}^+ \quad (135)$$

Vi ser heraf, at den komplekse vektorbåndsformalisme åbner for en mulighed, der ikke findes for simple bånd, nemlig en *ikon-symmetrisk gyrator*, for hvilken $G' = G$. F.eks. vil o-gyratorer med omsætningsforholdet $G = \pm ig$ (hvor g er den metriske tensor) være ikonsymmetriske (og selvduale og metrisk antihermiteske), og de kan afbildes som vist på figur 38.

En anden ny mulighed i vektorbåndsformalismen er en 1-port gyrator, eller en *gyrolæk*. Dette er ikke en egentlig gyrator, men en ikke-dissipativ 1-port Γ , hvis 0-variant $\Gamma..$ er reel og antisymmetrisk. En gyrolæk er altså metrisk antihermitesk, men vi vil ikke bruge denne betegnelse om en "imaginær læk", som kan optræde for skalare bånd i form af et lager ved reelle frekvenser (imaginære Laplace frekvenser). Hvis vi slår de to skalarbånd til gyratoren på figur 20 sammen til et todimensionalt vektorbånd med euklidisk metrik, har vi en gyrolæk. Ikoner for sådanne (x- og o-gyrolæk) vises også på figur 38.

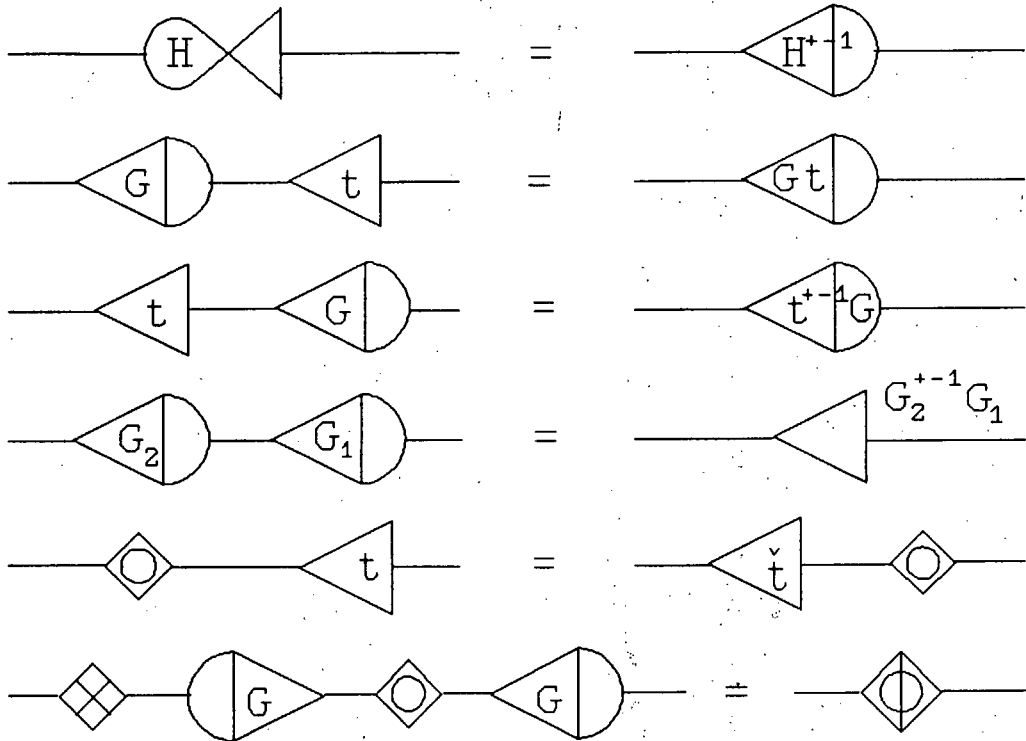


Figur 38 Ikonsymmetriske gyratorer for komplekse skalarbånd og gyrolække for reelle vektorbånd.

Vi har tidligere stiftet bekendtskab med en form for ikonsymmetrisk gyrator, nemlig genusgyratoren i figur 10. Denne

er imidlertid antilineær og forbinder to bånd med forskellig genus, medens de her betragtede gyratorer og transformere alle er lineære og lader genus og metrik være uændrede.

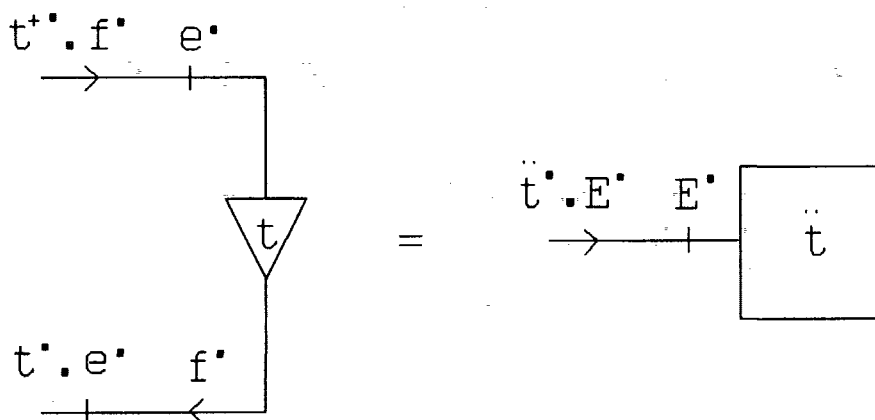
Nedenstående figur viser nogle regler for manipulation med ikoner og tensorsymboler.



Figur 39 Ikon-symbol operationer med toporte.

Både transformere og gyratorer er ikke-dissipative, men ikke nødvendigvis reversible elementer. For simple energibandsmodeller har vi set, at transformere er reversible og gyratorer antireversible, og at dette er ensbetydende med, at de er henholdsvis reciprokke og antireciprokke. Vi skal nu se, at der er flere muligheder i vektorbandsformalismen, vi kan have antireciprokke transformere og reciprokke gyratorer og nogle, som hverken er det ene eller det andet. For at overskue situationen benytter vi en teknik, som blev indført i sidste kapitel, nemlig at indføre nye vektorbånd ved sammenlægning af simple bånd. De to vektorbånd, som leder ind til en transformer t kan slås sammen

til et vektorbånd med den dobbelte dimension, som så leder ind til en 1-port \ddot{t} .



Figur 40 Transformer defineret som 1-port.

Når de oprindelige d -dimensionale bånd har den metriske tensor g , vil det på figur 40 definerede $2d$ -dimensionale bånd have metrikken

$$\ddot{g} \dots = \begin{pmatrix} g \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -g \dots \end{pmatrix} \quad (136)$$

hvor de fede nuller står for $d \cdot d$ nulmatricer. Responsematricen, som er 2-varianten af responsetensoren for den således definerede 1-port er så

$$\ddot{t} \dots = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & t^{+ \dots} \\ t^{\dots} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (137)$$

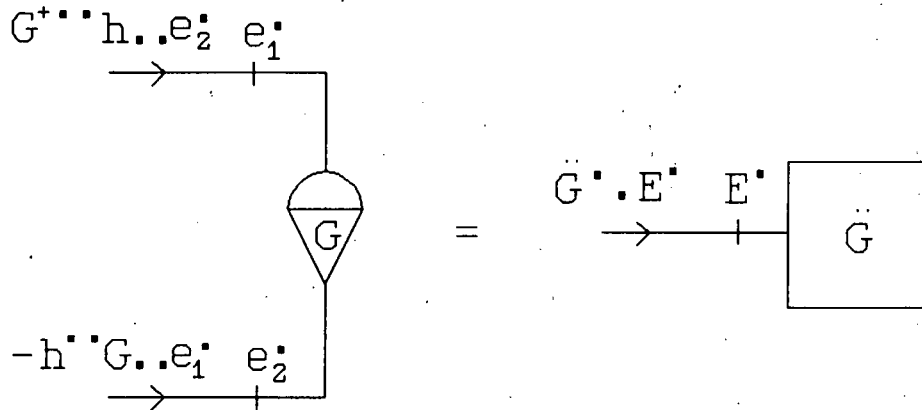
Betingelsen for, at transformeren er reciprok, er, at denne matrix er symmetrisk. Lader vi i og j være mellem 1 og d , har vi:

$$\ddot{t}_{d+j}^i = \ddot{t}_i^{d+j} \Rightarrow t^{+i}_j = t^{*j}_i = t^j_i \quad (138)$$

For en euklidisk d -dimensional metrik, er alle matrixvarianter af t ens, og reciprocitet er ensbetydende med, at alle matrixelementer af t er reelle, men for ikke-euklidiske standardmetrikker kan reciprokke transformere godt have komplekse

matrizelementer. F.eks. finder vi for $g_{..} = \sigma_{..}$, at transformeren med 1-varianten $\sigma_{..}$ er reciprok (jfr. (64)).

For en gyrator kan vi nu på tilsvarende måde sammenlægge de to d-dimensionale bånd til et 2d-dimensionalt, så gyratoren bliver til en 1-port:



Figur 41 Gyrator defineret som 1-port.

I dette tilfælde er metrikken af det 2d-dimensionale bånd:

$$\ddot{g}_{..} = \begin{pmatrix} g_{..} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_{..} \end{pmatrix} \quad (139)$$

og responsematricen for 1-port gyratoren er

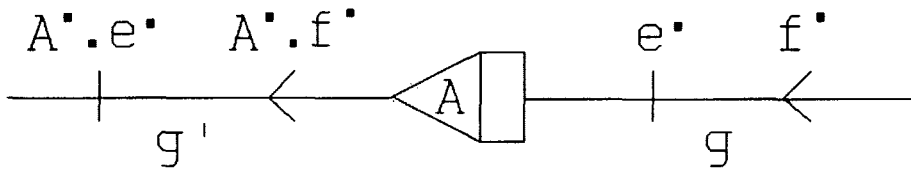
$$\ddot{G}_{..} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & G^{+...}h_{..} \\ -h^{...}G_{..} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (140)$$

Hvis metrikken er euklidisk, kan vi se bort fra h'erne i (140), og matrixvarianterne af G er ens. Vi finder da, at gyratoren er antireciprok, hvis og kun hvis alle dens matrizelementer er reelle.

Som den sidste form for ideel topport ser vi på transduceren. I den simple energibandsformalisme defineres transduceren som en transformer med dimension, og den er faktisk ikke til at skelne fra transformeren. Her vil vi anlægge et lidt andet synspunkt. En *metrisk transducer* er en koordinattransformation,

der ændrer metrikken. Hvis strømme og spændinger har samme varians i primærbåndet, skal vi anvende samme transformation på dem for at finde strøm og spænding i sekundærbåndet. Vi har tidligere, i kapitel 3, set på en sådan transformation fra et ortonormalt til et skævt koordinatsystem, hvorved metrikken ændredes fra at være euklidisk til en anden metrik (med euklidisk standardmetrik). Dengang tegnede vi den metriske transducer som en transformer og så også, at transformationen kunne reticuleres ud på skalarbånd, men kun hvis strøm og spænding var af forskellig varians, således at de transformererede forskelligt.

Når vi benytter blandede varianser i et vektorbånd, bliver metrikken usynlig, og en metrisk transducer bliver uskælnelig fra en transformer. Nu vil vi gøre metrikken synlig, og det kræver, at strøm og spænding har samme varians, så de transformerer på samme måde. På figuren nedenfor vises en sådan transformation, knyttet til ikonet for en metrisk transducer med omsætningsforholdet A , der ændrer metrikken fra g til g' .



Figur 42 Metrisk transducer.

Metrikken g' er så bestemt ved, at energistrømmen skal være bevaret:

$$W = (A^i_k e^k) * g'_{ij} A^j_l f^l = e^{*k} g_{kl} f^l \quad (141)$$

Dvs. vi får

$$A^{*i}_k g'_{ij} A^j_l = g_{kl} \quad (142)$$

Vi har her behandlet størrelsen A med indexpladser, som om den var en tensor, hvad den jo ikke er i sædvanlig forstand. De tensorer, vi ellers har mødt i forbindelse med 1-porte, transformere og gyratorer, fungerer inden for en bestemt metrik, med

hæve-sænke regler for indexpladserne forbundet med én bestemt metrisk tensor. Lad os for en kort stund benytte betegnelsen *endotensorer* for sådanne størrelser, for så kan vi betegne en størrelse som A for den metriske transducer som en *exotensor*, fordi den leder ud af metrikken, er et interface mellem to forskellige metrikker. Vi må så også indstille os på, at hvis vi ønsker at anvende det sædvanlige system med indexpladser for en exotensor, så må hæve-sænke reglerne komme til at involvere begge metrikker. Hvis vi definerer hæve-sænke operationen på A ved, at den benytter g' på venstre side og g på højre side, så kan vi skrive

$$A \cdot = g' \cdot \cdot A \cdot \cdot g \cdot \cdot \sim A_i^{\cdot l} = g'_{ij} A^j \cdot g^{ml} \quad (143)$$

Dette er den samme regel, som blev benyttet i (24). Hvis vi nu yderligere definerer hermiteske konjugering af exotensoren på samme måde som i (121), altså

$$A^+ \cdot \cdot^i = A \cdot \cdot^{*i} \cdot \cdot_k \quad (144)$$

så kan (142) omskrives til

$$A^+ \cdot \cdot = A^{-1} \cdot \cdot \quad (145)$$

og sammenhængen mellem de to metrikker (også (142)) bliver

$$g' \cdot \cdot = A \cdot \cdot g \cdot \cdot A^+ \cdot \cdot \quad (146)$$

Hæve-sænke reglen for A , at man anvender g' på venstre side og g på højre side virker rimelig naturlig, når tegningen er som på figur 42, men hvis vi vendte figuren, så primærsiden og g var til venstre, ville reglen stadig være den samme, og så ville den ikke virke så naturlig. Vi holder altså fast ved at tegne primærsiden til højre. Til gengæld får vi så et lille problem, når vi hæver og sænker indices på A , for her må vi bruge g' på højre side og g på venstre side:

$$A^{+i}{}_j = A^*{}_j{}^i = (g'{}^l{}_k A^k{}_l g^{li})^* = g^{il} A^+{}_l{}^k g'{}^j{}_k \quad (147)$$

Ligning (145) minder om den tidligere fremsatte (s. 77) definition på *metrisk unitaritet*, men man må ikke forveksle de to ting, fordi de metriske egenskaber af A involverer to forskellige metrikker, og (145) er opfyldt per definition, dvs. den stiller ikke specielle krav til A , men tjener til at fastlægge forholdet mellem g' og g . Vi kunne jo imidlertid forestille os en situation, hvor A var metrisk unitær inden for metrikken g , dvs. har egenskaben (145), når hæve-sænke operationerne og den hermiteske tensorskonjugering defineres på samme måde, som vi har gjort det for endotensorer i g -metrikken. I så tilfælde ville vi få af (146)

$$g'_{..} = A \cdot A^+ \cdot g_{..} = g_{..} \quad (148)$$

dvs. så er de to metrikker ens, og A er slet ikke nogen metrisk transducer, men en metrisk unitær transformer. De metrisk unitære transformere inden for en given metrik udgør en *gruppe af metrikbevarende koordinattransformationer*. De virker på samme måde som en metrisk transducer i den forstand, at vi skal anvende samme transformation på den contravariante strøm og spænding i primærbåndet for at finde den contravariante strøm og spænding i sekundærbåndet, men denne koordinattransformation resulterer altså ikke i en ændring af metrikken.

For en euklidisk metrik er de metrisk unitære transformationer det samme som "gammeldaws" unitære transformationer, der bevarer koordinatsystemets retvinklethed og de lige lange akser, dvs. de kan beskrives som drejninger af koordinatsystemet. For en ikke-euklidisk standardmetrik som den todimensionale σ_2 -metrik vil de metrisk unitære transformere udgøre en éndimensional Lie-gruppe, kendt som *Lorentz gruppen* fra den specielle relativitetsteori. Vi skal senere vende tilbage til denne gruppe og dens fysiske betydning, men foreløbig overlades det til læseren at vise, at alle medlemmerne af denne gruppe vil kunne skrives på formen

$$L(\chi) \cdot \cdot = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \quad (149)$$

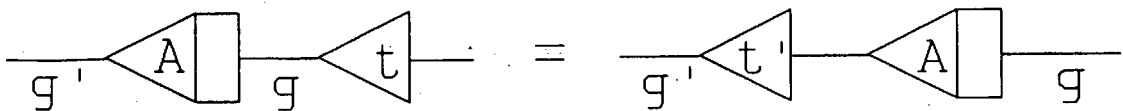
En koordinattransformation beskrives altså med en metrisk transducer eller en metrisk unitær transformer. Transformationsreglerne for en vektor

$$e'_{i} = A_{i}{}^{j} e_{j} \quad ; \quad e'^{i} = A^{i}{}_{j} e^{j} \quad (150)$$

fører så til tilsvarende regler for transformation af tensorer af højere orden. Vi har allerede i (146) set, hvordan den metriske tensor transformerer, og den samme regel findes for enhver anden tensor. Den konkrete udformning af reglen afhænger af matrixvariansen, og man kan let overbevise sig om, at det transformerede tensorsymbol t' er underkastet de samme hæve-sænke regler i den transformerede metrik g' som den oprindelige tensor t i den oprindelige metrik g .

$$\left. \begin{aligned} t' &= AtA^+ \\ t'_{..} &= A \cdot t \cdot A^{+\cdot} \quad \sim \quad t'_{ij} = A_i{}^k A^+{}_{j}{}^l t_{kl} \\ t'^{\cdot\cdot} &= A \cdot t \cdot A^{+\cdot} \quad \sim \quad t'^{ij} = A_i{}^k A^+{}_{j}{}^l t_k{}^l \\ &\text{etc.} \\ t'^{\cdot\cdot} &= A \cdot t \cdot g^{\cdot\cdot} A^{+\cdot} = \\ A \cdot t \cdot A^{+\cdot} \cdot A \cdot g^{\cdot\cdot} A^{+\cdot} &= t' \cdot g'^{\cdot\cdot} \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Transformationsreglen anvendt for en transformer t svarer til, at transformeren trækkes over på den anden side af den metriske transducer A :

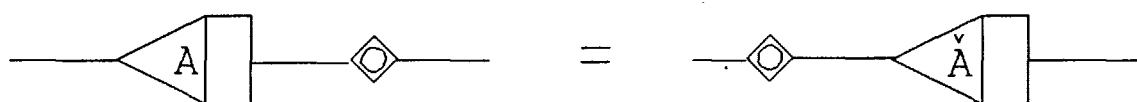


Figur 43 Overførsel af transformer til anden metrik.

Transformationsreglerne, som bygger på prototypen figur 42 (a-bånd, orientering fra primær til sekundær) må suppleres med andre regler, byggende på andre prototyper. Hvis orienteringen er den samme, men strømvariansen i begge bånd ændres fra contra- til covariant, skal symbolet A erstattes med det duale symbol

$$\check{A} = h'Ah \quad (152)$$

hvor h' og h er transformer-symbolet for toport o-samlere i metrikkerne g' og g . Vi vil antage (og skal i næste afsnit vise), at dette symbol er entydigt bestemt ud fra metrikken. Ligning (152) svarer til en regel, der siger, at vi kan trække en samler over på den anden side af en transducer, når vi samtidigt ændrer transducersymbolet til det duale:

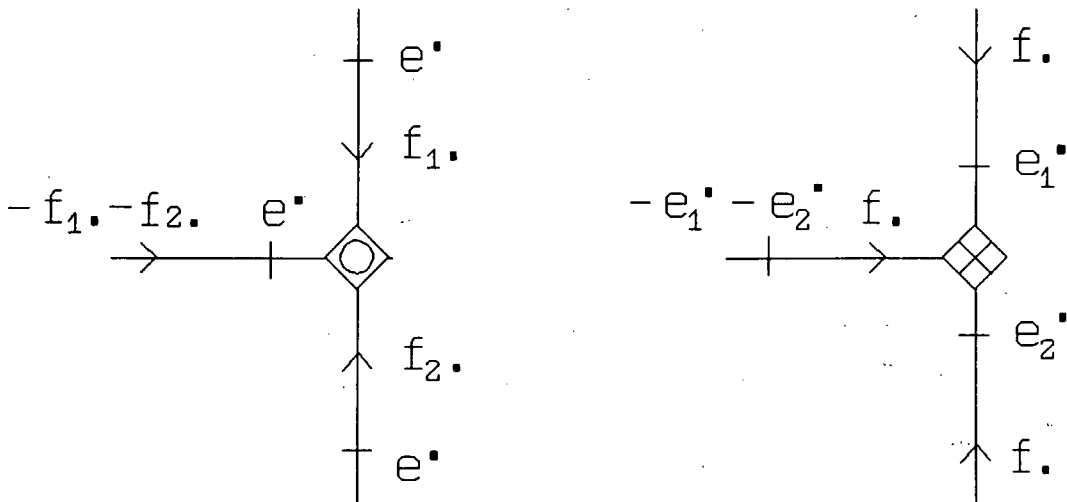


Figur 44 Overførsel af samler til anden metrik.

Transformationsreglerne (150)-(151) gøres normalt til definitionen på, at en størrelse er en tensor. Ud fra denne definition er protensorer som h og Δ ikke tensorer. Man kan ikke forlange af h , at den skal transformere som en tensor for vilkårlige koordinattransformationer, for så ville h ændres ved nogle transformationer, der lader metrikken uændret (de metrisk unitære) og så kunne h ikke være entydigt bestemt af metrikken. Protensorer er ikke egentlige tensorer, fordi de sætter scenen for tensorerne. Hvis ikke h kan bestemmes som en størrelse, der er bestemt ved metrikken alene og er uændret af de mange koordinatskift, der kan foretages inden for en given metrik, kan vi heller ikke definere transformationsreglerne for de egentlige tensorer. Protensorer er derfor mere grundlæggende for energibåndsformalismen end egentlige tensorer, bortset fra den metriske tensor, der kan opfattes som både en protensor og en egentlig tensor.

7. Samlere i generel metrik.

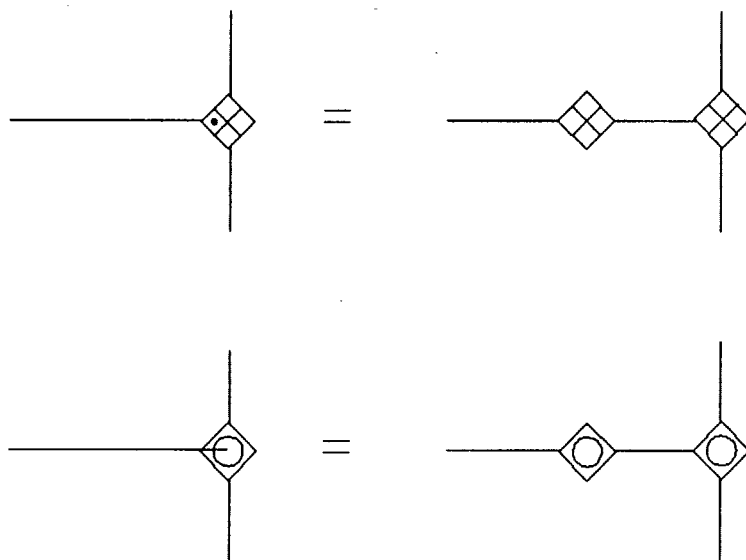
Definitionen af samlere volder ikke noget problem: o-samlere er *spændings-distributiv* og *strøm-konservativ*, medens x-samlere er *strøm-distributiv* og *spændings-konservativ*. En distributiv relation fastsætter samme værdi af en størrelse i alle bånd, medens en konservativ relation fastsætter summen af de involverede størrelser til nul. Disse definitioner kræver så, at alle de til samleren knyttede bånd orienteres ens i forhold til samleren, at alle spændingerne har samme varians, og at alle strømmene har samme varians. Med hensyn til kausaliteten følger det af definitionen, at en samler altid må have ét *dominerende* bånd, eller ét bånd med *stærk kausalitet*, nemlig det bånd, hvor den distributive størrelse er input til samleren. For o-samlere må der altså være ét bånd med spændingsinput, og de resterende (svage) bånd har strøminput; for x-samlere er der ét dominerende bånd med strøminput, og de svage bånd har spændingsinput.



Figur 45 Definition af samlere.

Hvis orienteringen skiftes i et af båndene med fastholdt strømvariens (eller hvis strømvariensen skiftes med fastholdt orientering), bliver relationerne mere komplicerede, idet de kommer til at indeholde protensoren h . Hvis vi så indsætter en

toport samler i det bånd, hvor orienteringen (eller strømvariansen) er skiftet, fås igen en simpel relation. Det er derfor bekvemt at operere med et par alternative multiport samlere ("multi" betyder 3 eller flere), hvor en ekstra topport samler af samme type som multiport samleren er indbygget i en af portene. Fra den simple energibåndsformalisme kendes "den prikkede x-samler", som er en x-samler med en ekstra topport x-samler indbygget i en eller flere porte. Der findes imidlertid ikke en tilsvarende modificeret o-samler, og det er fordi topport o-samleren er en identitet i den simple formalisme. I vektorbåndsformalismen er topport o-samleren ikke triviel, så vi får brug for en "prikket o-samler", som vi imidlertid af grafiske grunde vælger at tegne på en anden måde ved at forlænge en af energibånds-stregerne ind til centrum af samleren:



Figur 46 Modificerede samlere.

Ved brug af således modificerede samlere vil man ofte kunne opnå, at protensoren h ikke kommer til at optræde explicit i lignings-systemet for modellen, og det er en fordel. Alligevel slipper vi ikke for at diskutere, hvordan vi bestemmer h for en given metrik g .

Hvis metrikken er *neutral*, har vi set, at $h = \delta$. Endvidere har vi indset, at for *dimensionsløse* metrikker er 1- og 2-varianten af h identiske og alle matrixvarianter af g , h , δ og Δ

kommuterer indbyrdes. Lad os derfor i første omgang prøve at bestemme h for en dimensionsløs metrik g , som ikke er neutral.

En neutral metrik G har determinanten 1 eller -1, og vi vil foretage den indskrænkning af begrebet en dimensionsløs metrik, at vi forlanger det samme om den. Hvis en metrik ikke er dimensionsløs, kan vi afdimensionere den med en diagonal transducer, en såkaldt skalatransducer, og når vi alligevel skal gøre det, kan vi lige så godt sørge for, at skalatransduceren samtidigt ændrer determinanten til 1 eller -1. Der ligger således ikke nogen afgørende indskrænkning i, at vi stiller dette krav til determinanten af en dimensionsløs metrik.

I den dimensionsløse metrik g er altså

$$h_{\cdot\cdot} = h^{\cdot\cdot} \quad \wedge \quad (h_{\cdot\cdot})^2 = \delta_{\cdot\cdot} \quad (153)$$

Det betyder, at vi til metrikken g kan associere en neutral metrik G ved definitionen

$$G_{\cdot\cdot} = G^{\cdot\cdot} = h_{\cdot\cdot} \quad (154)$$

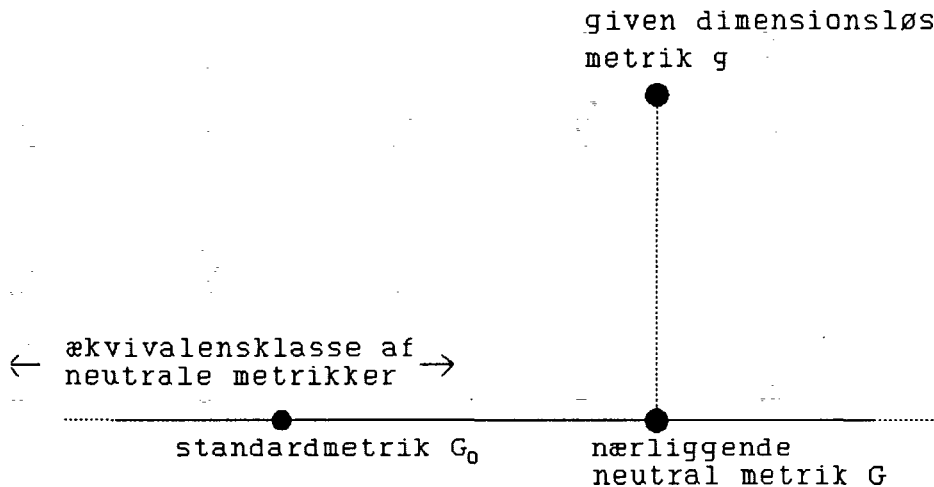
Denne neutrale metrik har så samme 1-variant af sit h som den givne dimensionsløse metrik g har af h . Hvis g i forvejen er neutral, er G samme metrik som g , og vi må antage, at G og g er af samme "familje", dvs. har samme determinant og signatur (samme standardmetrik). Da alle varianter af h kommuterer med alle varianter af g , vil alle varianter af G også kommutere med alle varianter af g .

Vi kalder G den nærliggende neutrale metrik eller den projicerede neutrale metrik. Ved en projektion forstås en operator P , som er idempotent, dvs. adlyder betingelsen

$$P^2 = P \quad (155)$$

og da ovenstående konstruktion af en neutral metrik ud fra en dimensionsløs ikke fører til noget nyt, når den gentages, kan operationen opfattes som en projektion fra rummet af dimensionsløse metrikker ned på rummet af neutrale metrikker. Hvis vi

tænker på projektionen af et punkt ned på en ret linje, så er det projicerede punkt det punkt på linjen, der er nærmest ved det oprindelige punkt. I denne metafor er linjen den ækvivalensklasse af neutrale metrikker, der indeholder metrikken G . Denne ækvivalensklasse vil også indeholde standardmetrikken G_0 .

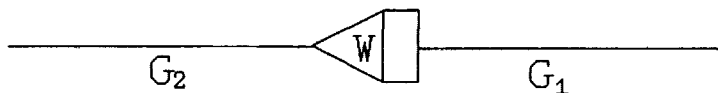


Figur 47 Projektionsmetaforen for metrikker.

Det, som forbinder de neutrale metrikker i en ækvivalensklasse er l -unitære transformationer. Lad G_1 og G_2 være to neutrale metrikker i samme ækvivalensklasse (samme standardmetrik G_0). Så er de forbundne med en l -unitær transducer W

$$G_2 \dots = W \cdot G_1 \dots W^+ \dots \quad (156)$$

for l -unitaritet af W er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at multiplikative relationer mellem matricer (herunder reciprocitet) nedarves til de transformerede matricer, og da de l -unitære matricer danner en gruppe, vil (156) konstituere en ækvivalensklasse



Figur 48 To neutrale metrikker i samme ækvivalensklasse forbundet med l -unitær transducer.

Da W er 1-unitær, har vi

$$\left. \begin{aligned} W^*_{j^i} &= W^{-1}_{i^j} = W^{+i}_{j^i} = W^{-1i}_{j^i} \\ &\Rightarrow W_{\cdot}{}^{\cdot} = W^{\cdot}{}_{\cdot} \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Dvs. for 1-unitære transducere er der ingen forskel på 1- og 2-varianten.

Forbindelsen mellem den til g nærliggende eller projicerede neutrale metrik G og standardmetrikken G_0 er derfor også givet ved en 1-unitær transducer U :

$$G_{\cdot\cdot} = U_{\cdot}{}^{\cdot} G_{0\cdot\cdot} U^{+\cdot\cdot} \quad (158)$$

Hvis standardmetrikken er euklidisk, dvs. hvis $G_{0\cdot\cdot}$ er enhedsmatricen, vil U (1-variant) og U^* (2-variant), som er hinandens reciprokke matricer, ophæve hinanden, så $G = G_0$. Ækvivalensklassen for en euklidisk metrik indeholder således kun selve den euklidiske metrik. Hvis den givne metrik har euklidisk standardmetrik, må den nærliggende neutrale metrik også være den euklidiske metrik. I så tilfælde har vi altså

$$G = \Delta \Rightarrow h_{\cdot}{}^{\cdot} = \Delta^{\cdot\cdot} \Rightarrow h_{\cdot\cdot} = g_{\cdot\cdot} \quad (159)$$

Dette resultat kan vises at gælde alment, også for dimensionerede metrikker med positive diagonalelementer, så vi fremhæver det som en generel sætning:

Hvis en metrik $g_{\cdot\cdot}$ har en euklidisk standardmetrik (er quasi-euklidisk), er protensoren h identisk med den metriske tensor g .

Dette betyder, at når der er tale om egentlig geometri i vilkårlige, lokale kordinatsystemer, behøver vi ikke at bekymre os om h , og toport o-samleren vil være en enhedstransformer. Resultatet kan f.eks. uden videre anvendes på beskrivelse i polære koordinater, hvor $g_{\cdot\cdot}$ er givet ved (63).

For det almindelige tilfælde, hvor standardmetrikken ikke er euklidisk, indfører vi begrebet *standardiseringstransducer*,

som er en metrisk transducer, der forbinder den givne metrik med standardmetrikken. En sådan transducer vil kunne konstrueres på mange måder, men vi skal specielt interessere os for en bestemt vej fra G_0 til g , nemlig den, der går om ad den nærliggende neutrale metrik G . Vi vil skrive en sådan transducer på formen

$$S \cdot = H \cdot U \cdot \quad (160)$$

hvor U er 1-unitær og H er 1-hermitesk, og hvor H 's varianter kommuterer med varianterne af den nærliggende neutrale metrik G . Forbindelsen mellem de tre involverede metrikker er altså givet ved (158) og

$$g \cdot \cdot = S \cdot G_0 \cdot \cdot S^{+ \cdot} \cdot = H \cdot G \cdot \cdot H^{+ \cdot} \cdot \quad (161)$$

og da H er 1-hermitesk og kommuterer med $G \cdot \cdot$, fås

$$\left. \begin{aligned} H^{+ \cdot} \cdot &= H \cdot = H^{-1 \cdot} \cdot \\ g \cdot \cdot &= (H \cdot)^2 G \cdot \cdot \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Når dette kombineres med (153) og (154), fås

$$h \cdot \cdot = g \cdot \cdot h \cdot = g \cdot \cdot G^{+ \cdot} \cdot = (H \cdot)^2 \quad (163)$$

og vi har derved fundet udtrykket for protensoren h i en dimensionsløs metrik. Et egentligt matematisk bevis for, at konstruktionen (160) er mulig og entydig, skal ikke gennemføres her. Vi vil i stedet gå konstruktivt til værks og se, hvad man konkret skal gøre for at bestemme h ud fra g . Vi vil i dette kapitel indskrænke os til todimensionale, komplekse metrikker med signaturen 0. Hvis signaturen er 2, er standardmetrikken jo euklidisk, og det tilfælde har vi allerede behandlet. Det vil vise sig, at eksemplet er tilstrækkeligt generelt til diskussionen af bevægelse i accelererede koordinatsystemer og viser

vejen for mere komplicerede tilfælde i den generelle relativitetsteori.

Vi ser altså på metrikken

$$g_{..} = \begin{pmatrix} a & be^{-i\phi} \\ be^{i\phi} & \frac{b^2-1}{a} \end{pmatrix} \quad (164)$$

hvor a , b og ϕ er reelle tal. Denne metrik er det mest generelle udtryk for en todimensional dimensionsløs metrik med determinanten -1 . Standardmetrikken er, som vi skal se,

$$G_{0..} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (165)$$

så signaturen er 0.

Ækvivalensklassen indeholdende G_0 og udtrykket for den 1-unitære transducer U er tidligere givet i (66) og (67). Den til (164) nærliggende neutrale metrik må kunne udtrykkes på formen

$$G_{..} = \sigma(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (166)$$

Da $G_{..}$ skal kommutere med $g_{..}$, overbeviser man sig let om, at det må være samme ϕ , der optræder i (164) og (166). Vi kan i første omgang skrive $g_{..}$ på formen

$$g_{..} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b^2-1}{a} \right) \delta_{..} + \rho G_{..} \quad (167)$$

hvor ρ er et reelt tal, som kan bestemmes ud fra udtrykket

$$\rho G_{..} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2-1}{a} \right) \sigma_z + b \cos\phi \sigma_x + b \sin\phi \sigma_y \quad (168)$$

for, da $(G_{..})^2 = \delta_{..}$, og da Pauli matricerne hver har kvadratet 1 og antikommuterer indbyrdes, må ρ være kvadratroden af summen

af kvadraterne på de tre koefficienter til Pauli matricerne i (168). Vi finder derfor:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} \left(a - \frac{b^2-1}{a} \right)^2 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(a + \frac{b^2-1}{a} \right)^2} \quad (169)$$

Størrelsen θ i (166) er så givet ved

$$\theta = \arcsin \frac{b}{\rho} \quad (170)$$

og $h..$ kan derpå bestemmes af (163) og (167):

$$h.. = \rho \delta.. + \frac{1}{2} \left(a + \frac{b^2-1}{a} \right) G.. \quad (171)$$

Den 1-hermiteske transducer H , hvis 1-variant jo ifølge (163) kan beskrives som kvadratrod af $h..$, vil i almindelighed kunne beregnes som en eksponentialfunktion af en generator, der kommuterer med $G..$. I dette todimensionale tilfælde, hvor $G..$ er spinmatricen $\sigma(\theta, \phi)$ (jfr. (166)), er der ikke andre generatorer, der kommuterer med $G..$ end $G..$ selv, og vi kan derfor skrive

$$H.. = \exp\left(\frac{\chi}{2} G..\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2} G..\right)^n}{n!} = \cosh \frac{\chi}{2} \delta.. + \sinh \frac{\chi}{2} G.. \quad (172)$$

så $h..$ er givet ved

$$h.. = (H..) ^2 = \exp(\chi G..) = \cosh \chi \delta.. + \sinh \chi G.. \quad (173)$$

hvilket stemmer med (171) og (169), når

$$\sinh \chi = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b^2-1}{a} \right) \quad (174)$$

Gennemgangen af dette eksempel på bestemmelse af h viser, at explicitte udtryk for matrixvarianterne i almindelighed kan forventes at blive ret komplicerede, og at det vil være en modelteknisk fordel, hvis man kan undgå, at de optræder i ligningerne. I de almindelige mekaniske reticulationsmetoder, som senere skal gennemgås, viser det sig da heldigvis også, at samlerne optræder i "prikkede" udgaver, så man i reglen kan slippe for at skulle udregne h .

Vi mangler stadig at diskutere, hvordan vi bestemmer h , når metrikken er dimensioneret. Dette vil vi også gøre med et eksempel, som samtidigt indfører den relativistiske synsmåde, der senere vil blive fulgt op. Vi ser på en partikel, der kan bevæge sig i de to rumlige dimensioner på en flad skive, der roterer i forhold til laboratoriesystemet med en konstant vinkelhastighed ω .

Lad os først diskutere forholdene i laboratoriesystemet, som vi går ud fra er et inertialsystem. Her kan vi ved hjælp af standardmålestokke og standardure afsætte måltal for de retvinklede koordinater x og y , de polære koordinater r og θ , og tiden t i hvert punkt. Koordinatsystemerne lægges med begyndelsespunkt i skivens centrum. Vi tænker os, at en partikel er forsynet med sit eget "armbåndsur", som også er et standardur, der måler partiklens egentid τ . Ved partiklens hastighed vil vi så forstå en tredimensional vektor, hvor de to første koordinater angiver ændringen af de rumlige koordinater x og y og den tredje ændringen af koordinattiden t , alle målt i forhold til egentiden τ :

$$U^1 = \frac{dx}{d\tau} \quad ; \quad U^2 = \frac{dy}{d\tau} \quad ; \quad U^3 = \frac{dt}{d\tau} \quad (175)$$

De to første koordinater af denne contravariante strømvektor er strømme, men den tredje er en spænding, for t og τ skifter fortegn ved tidsvending, hvad x og y ikke gør. Vi ved derfor, at den metriske tensor for dette koordinatsystem har et negativt diagonalelement på 3. plads, og at den ellers er diagonal, da vi forløbige er i et inertialsystem. Vi må antage, at dette negative diagonalelement, $-c^2$, er en naturkonstant, hvis vi tror på, at

bevægelsen af en fri partikel i et inertialsystem kan udtrykkes på en universel form. Naturkonstanten c er selvfølgelig lyshastigheden, men det behøver vi sådan set ikke vide nu.

$$g_0 \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad (176)$$

Går vi nu over til polære koordinater r og ϕ i laboratorisystemet, men holder fast ved tiden t , er den contravariante hastighedsvektor givet ved

$$V^1 = \frac{dr}{d\tau} \quad ; \quad V^2 = \frac{d\phi}{d\tau} \quad ; \quad V^3 = \frac{dt}{d\tau} \quad (177)$$

og sammenhængen mellem de to hastighedsvektorer er

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \quad (178)$$

Den metriske tensor g_1 for det polære laboratorikoordinatsystem kan så findes af betingelsen

$$U^* g_0 \dots U^* = V^* g_1 \dots V^* \quad (179)$$

og man får

$$g_1 \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad (180)$$

altså en dimensioneret diagonal metrik, hvor andet og tredje diagonalelement afhænger på forskellig måde af målestandarderne for længde og tid.

Metrikken g_1 kan bringes direkte på standardform samtidig med, at den gøres dimensionsløs med en diagonal skalatransducer

B, så der bliver ikke brug for yderligere standardisering af den dimensionsløse metrik:

$$g_1 \dots = B \cdot G_0 \dots B^+ \dots \quad (181)$$

hvor

$$G_0 \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B \cdot \dots = B^+ \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (182)$$

I dette tilfælde overtager skalatransduceren B rollen af den tidligere benyttede 1-hermiteske transducer H, for B er jo 1-hermitesk, og selv om vi ændrer på måleskalaerne for rum og tid, vil den vedblive at være 1-hermitesk, fordi den er diagonal. Så 0-varianten af protensoren for metrikken g_1 bliver

$$h_1 \dots = (B \cdot \dots)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \quad (183)$$

Med brug af den til (180) reciprokke matrix

$$g_1 \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \quad (184)$$

finder vi så

$$h_1 \dots = h_1 \dots = G_0 \dots \quad (185)$$

I dette tilfælde gælder (153) altså også, selv om metrikken er dimensioneret, men det hænger på, at metrikken er diagonal. Når

vi nu går over til at se på forholdene i det roterende koordinat-system (skivens), bliver forholdene anderledes.

I det til skiven knyttede koordinatsystem kan vi benytte koordinaterne

$$\left. \begin{aligned} r' &= r \\ \phi' &= \phi - \omega t \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

og hastighedens contravariante koordinater er så

$$\left. \begin{aligned} V'^1 &\doteq \frac{dr'}{d\tau} = V^1 \\ V'^2 &\doteq \frac{d\phi'}{d\tau} = V^2 - \omega V^3 \\ V'^3 &\doteq \frac{dt'}{d\tau} = V^3 \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

Af betingelsen (jfr. (179))

$$V^* g_{1..} V^* = V'^* g'^{1..} V'^* \quad (188)$$

finder vi så den metriske tensor g' for skivens koordinatsystem:

$$g'^{1..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & r^2\omega \\ 0 & r^2\omega & r^2\omega^2 - c^2 \end{pmatrix} \quad (189)$$

Vi bemærker om denne dimensionerede metrik, at de to første diagonalelementer er positive. Det sidste er negativt, men kun inden for den radius, hvor rotationshastigheden $r\omega$ bliver lig med lyshastigheden c . Herude ligger der en horisont "bag om hvilken alt er mørke", som Peirce siger i artiklen "The Architecture of

Theories" fra 1891. Inden for horisonten er signaturen 1, men uden for er den 3, dvs. metrikken uden for horisonten kan ikke på nogen kontinuert måde bringes i forbindelse med standardmetrikken G_0 . Sagt på en anden måde: den del af det fra laboratorie-inertialsystemet opmålelige univers, der ligger uden for skivesystemets horisont, hører ikke med til skivesystemets univers.

Metrikken $g'_{..}$ (189) har determinanten $-r^2 c^2$, og den reciprokke matrix er

$$g'^{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} & \frac{\omega}{c^2} \\ 0 & \frac{\omega}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \quad (190)$$

Når vi nu skal bringe $g'_{..}$ på dimensionsløs form med en diagonal skalatransducer B , skal vi samtidig sørge for, at determinanten af den afdimensionerede matrix $g_{..}$ bliver -1 . Det er kun det andet og det tredje diagonalelement i B 's 1-variant, som kan have dimension; det første må være 1, dvs. der er to skalaparametre, men kravet om, at determinanten af $g_{..}$ skal være -1 reducerer det til én (foreløbig) fri parameter μ . Vi forsøger derfor med en skalatransducer på formen (jfr. (182))

$$B_{\mu}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c\mu \end{pmatrix} \quad (191)$$

Den med B_{μ} afdimensionerede metrik er så også μ -afhængig, men, som vi snart skal se, er ikke alle værdier af μ lige gode, hvis vi skal bestemme protensoren h . Foreløbig bruger vi formlen

$$g'_{\dots} = B_{\mu} \cdot g_{\mu} \cdot B_{\mu}^+ \quad (192)$$

og dermed er den foreløbige μ -afhængige dimensionsløse metrik:

$$g_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & \beta \\ 0 & \beta & \frac{\beta^2 - 1}{\mu^2} \end{pmatrix} \quad (193)$$

hvor

$$\beta = \frac{r\omega}{c} \quad (194)$$

Vi har nu en situation, der kan klares med den tidligere udviklede metode for todimensionale neutrale metrikker med signaturen 0, for matrixen (193) er jo effektivt todimensional; vi behøver kun interessere os for den nederste 2*2 matrix, hvor alle elementer er forskellige fra 0. Denne undermatrix skal så sammenlignes med (164), og vi ser straks, at det dér optrædende ϕ må være nul, da metrikken er reel. Af (166) får vi da, at der må findes et θ , således at den nærliggende neutrale metrik og 1-varianten af h er givet ved

$$G_{..} = h_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (195)$$

Vi må regne med, at θ er noget bestemt, dvs. at θ bestemmer μ , og ikke omvendt, for G er jo den nærliggende neutrale metrik og skulle helst være uafhængig af en arbitrær skala. Nu træffer det sig så heldigt i dette tilfælde, at der er ét bestemt valg af μ (som jo må være positiv), som direkte gør metrikken (193) neutral og dermed identisk med (195), nemlig

$$\mu = \sqrt[4]{1 - \beta^2} \sim \theta = \arcsin \beta \quad (196)$$

Skalatransduceren B_μ (191) med denne værdi af μ indsat overtager dermed rollen af den 1-hermiteske transducer H i (163), dvs. vi kan fastsætte 0-varianten af protensoren i den dimensionerede metrik g' til

$$h'_{..} = (B_\mu \cdot)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & c^2\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \quad (197)$$

Ved brug af (190) og hæve-reglen kan vi derefter bestemme 1- og 2-varianten af h' . Vi indfører en anden dimensionsløs størrelse, den relativistiske tids-forlængelses-faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (198)$$

og finder så:

$$h'_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{r\beta\gamma}{c} \\ 0 & \frac{c\beta}{r\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}; \quad h'^{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{c\beta}{r\gamma} \\ 0 & \frac{r\beta\gamma}{c} & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (199)$$

De to h' -varianter er altså ikke identiske for en dimensioneret metrik, og de er heller ikke hermiteske, hvad de naturligvis ikke kan være, når de ikke-diagonale elementer har forskellig dimension.

I øvrigt kan man let overbevise sig om, at h for den neutrale metrik (195) transformerer som en tensor med transduceren B_μ og giver h' for den dimensionerede metrik. Det gælder i det hele taget for de specielle 1-hermiteske transducere H og B , vi har betragtet i dette afsnit og brugt til konstruktion af

h, at under dem transformerer h som en tensor. Denne transformationsegenskab gælder imidlertid ikke for vilkårlige transducere, og derfor har vi kaldt h en protensor i stedet for en tensor.

Formlerne (163) og (183) viser, at h.. er en *positiv definit hermitesk matrix*. For en dimensionsløs metrik betyder det, at h.. har lutter positive egenverdier, og for den dimensionerede metrik, vi lige har set på, er h' diagonal og har kun positive elementer.

For en dimensionsløs metrik har vi tidligere vist (130):

$$(h_{..})^2 = \Delta_{..} = (g_{..})^2 \quad (200)$$

og dette, i forbindelse med, at h.. er positiv definit, medfører at h.. kan udtrykkes som den *positive kvadratrod* af $(g_{..})^2$ eller som "den numeriske værdi af g.." :

$$h_{..} = \sqrt{(g_{..})^2} = |g_{..}| \quad (201)$$

Denne formel muliggør en direkte bestemmelse af h.. som funktion af g.. for enhver dimensionsløs metrik. Man skal blot finde en 1-unitær metrisk transducer U, der bringer metrikken på diagonalform $g_d_{..}$.

$$g_d_{..} = U^* \cdot g_{..} \cdot U \quad \sim \quad g_{..} = U \cdot g_d_{..} \cdot U^* \quad (202)$$

Det vil så være den samme transducer U, som optræder i (160), altså den, der diagonaliserer den nærliggende neutrale metrik G.. til standardformen $G_0_{..}$, for G.. kan jo også udtrykkes som funktion af g.. ved brug af (201)

$$G_{..} = h \cdot \cdot = h_{..} \cdot g \cdot \cdot \quad (203)$$

og alle hermiteske matricer, der kan udtrykkes som funktioner af en bestemt hermitesk matrix, kan diagonaliseres ved samme 1-unitære transformation. En funktion af en hermitesk matrix bestemmes ved, at man først diagonaliserer matricen, derpå tager den pågældende funktion af egenverdierne i diagonalen og til sidst transformerer tilbage igen. For at bestemme h.. skal man

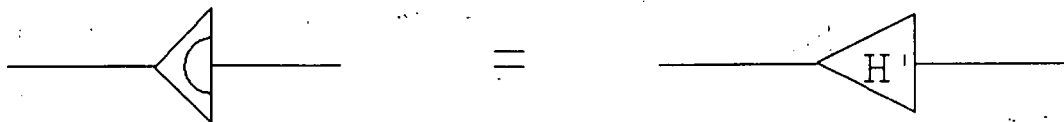
altså diagonalisere $g..$ med transduceren U som i (202), tage den numeriske værdi af diagonalelementerne og derpå transformere tilbage igen. Denne opskrift kan dog kun bruges for dimensionsløse metrikker; det har ingen mening at diagonalisere en matrix, hvis diagonalelementer har forskellig dimension.

Lige som 1-varianten af h (eller 2-varianten, som jo er den samme for en dimensionsløs metrik) definerer en projiceret metrik, nemlig den nærliggende neutrale metrik $G..$, kan 0-varianten $h..$ definere en projiceret metrik $g_{qe}.. = h..$, som kaldes den *projicerede quasi-euklidiske metrik*. Med "quasi-euklidisk" menes, at denne metrik har en euklidisk standardmetrik, idet egenværdierne af $h..$ er positive. At der er tale om en projektion følger af, at denne metrik vil have samme $h..$ som den oprindelige, så hvis man projicerer en gang til på denne måde, får man det samme (jfr. (155)).

De to transducere H og U , som tilsammen kan bringe en dimensionsløs metrik på standardform som i (160) og (161) kan opfattes som indre egenskaber ved den givne metrik. Det er derfor nærliggende at definere dem som protensorer, altså som transformere med lignende fundamental status som toport o-samleren h . Vi vil her indskrænke os til at se på definitionen af H som protensor. Vi indfører derfor en transformer H' , hvis 1-variant skal være det samme som 1-varianten af transduceren H . Da H' er en endotensor og H en exotensor, vil de andre varianter af H' være forskellige fra de andre varianter af H :

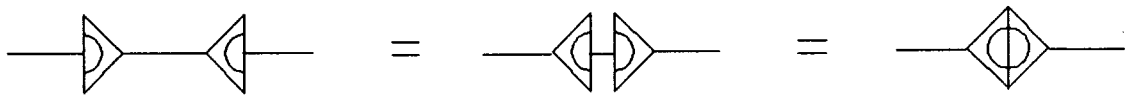
$$H'.. = H.. ; H'.. = H..g.. = H..G..g.. = H..\Delta..h.. \neq H.. \quad (204)$$

Vi indfører følgende ikon "en halv o-samler" (jfr. (163))



Figur 49 Protensoren H' , den halve o-samler.

Det er nu klart, at alle varianter af H' kommuterer med alle varianter af g og h . Dvs. 2-varianten af H' er lig med 1-varianten, og H' er selvdual. Af (132) fås så, at ikonvending af den halve samler fører til den reciprokke af H' , hvilket fører til nedenstående formel, der giver en anden begrundelse for valg af ikonet, jfr. figur 27.



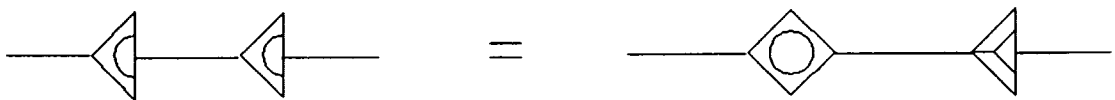
Figur 50 Ikonvending af den halve samler.

Hvis metrikken er neutral, $g = G$, er $H' = h = \delta$, dvs. den halve samler er identisk med den hele toport o-samler og behøver ikke noget specielt ikon.

Hvis vi kaskadekobler to halve samlere, får vi ikke en hel samler, for

$$(H'.')^2 = (H.'.')^2 = h..'\Delta'. = h.'.'\Delta.'. \quad (205)$$

hvilket kan fremstilles ved ikonformlen (jfr. figur 35)



Figur 51 Kaskadekobling af halve samlere.

For quasi-euklidiske metrikker (som har euklidisk standardmetrik) er $h = g$, så den hele toport o-samler kan undværes, men protensorerne H' og Δ er ikke-trivielle.

Spørgsmålet, hvordan disse lovmæssigheder kan formuleres for dimensionerede metrikker, vil vi indtil videre lade stå åbent.

8. Eksistentielle bond grafer.

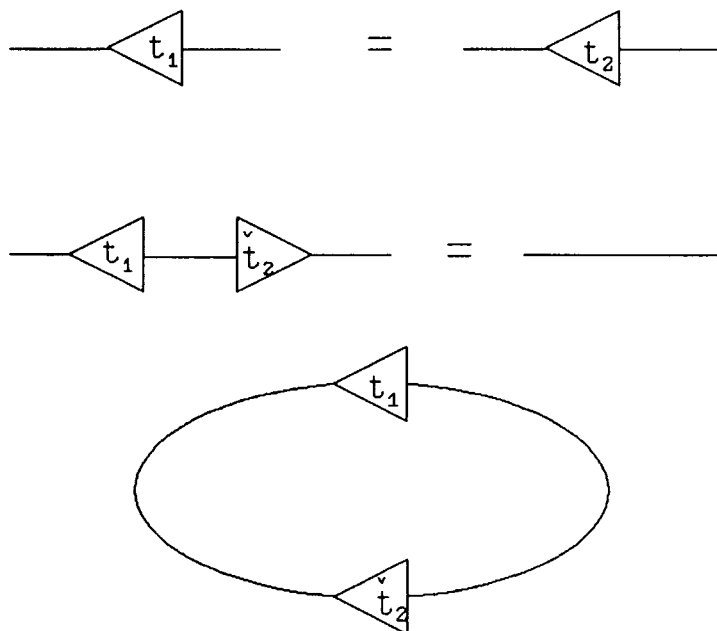
Teksten har indtil nu indeholdt adskillige eksempler på *ikonformler*, hvori der forekommer to eller flere energibåndsgrafer med lighedstegn imellem. Eksempler på sådanne formler findes i figurerne 27, 30, 35, 36, 39, 43, 44, 50 og 51. Vi skal her især interessere os for ikonformler, hvor to toporte optræder med et lighedstegn imellem. Hver enkelt af de to toporte er så, med Peirces nomenklatur, et *rheme*, dvs. et enkeltstående "ord", som i tegnklassifikationen har et 1-tal på interpretantens plads (3. plads), dvs. rhemets mening er potentiel, det enkelte ord siger ikke noget, men når ordene kædes sammen efter bestemte sprogregler, opstår der *propositioner* eller udsagn (*dicitegn*), som er sætninger med mening, der har et 2-tal på interpretantens plads. Lighedstegnet er i ikonformlerne det bindeled mellem de to grafiske rhemer, som skaber et udsagn.

Ser vi på en formel, der sætter lighedstegn mellem to transformere, t_1 og t_2 , kan vi kaskadekoble en ny transformer t_3 på begge sider af lighedstegnet, og på den måde kan vi gøre den samlede transformer på højre side til en enhedstransformer. Dette giver os så lov til at bukke de to ender af den venstre toport sammen. Den lukkede struktur, der opstår, når en toport "bider sig selv i halen", kalder vi en *sep*. Ordet betyder formentlig en *separator*, da det er en lukket kurve, der adskiller området indenfor fra området udenfor, når den tegnes i en plan, som på *hævdelsestavlen* (the sheet of assertion) i Peirces logiske spil "eksistentielle grafer".

Når seppen er dannet, behøver vi ikke lighedstegnet længere. Seppen er et udsagn, præcis lige som den oprindelige ligning, så ved at vi lader transmitteren bide sig selv i halen, hæver den sig en tegnklasse op, fra 1 til 2 på interpretantens plads, fra *rheme* til *dicitegn*.

En *sep* *hævder* noget om de indgående komponenter, og seppens eksistens er bevis for den påstand, den hævder. Den danner sin egen lukkede energikreds, som intet kan forstyrre. Hvis der

forekommer en toport samler i en sep, kan man ikke tilføje en tredje port til samleren, for det vil bryde seppens integritet.

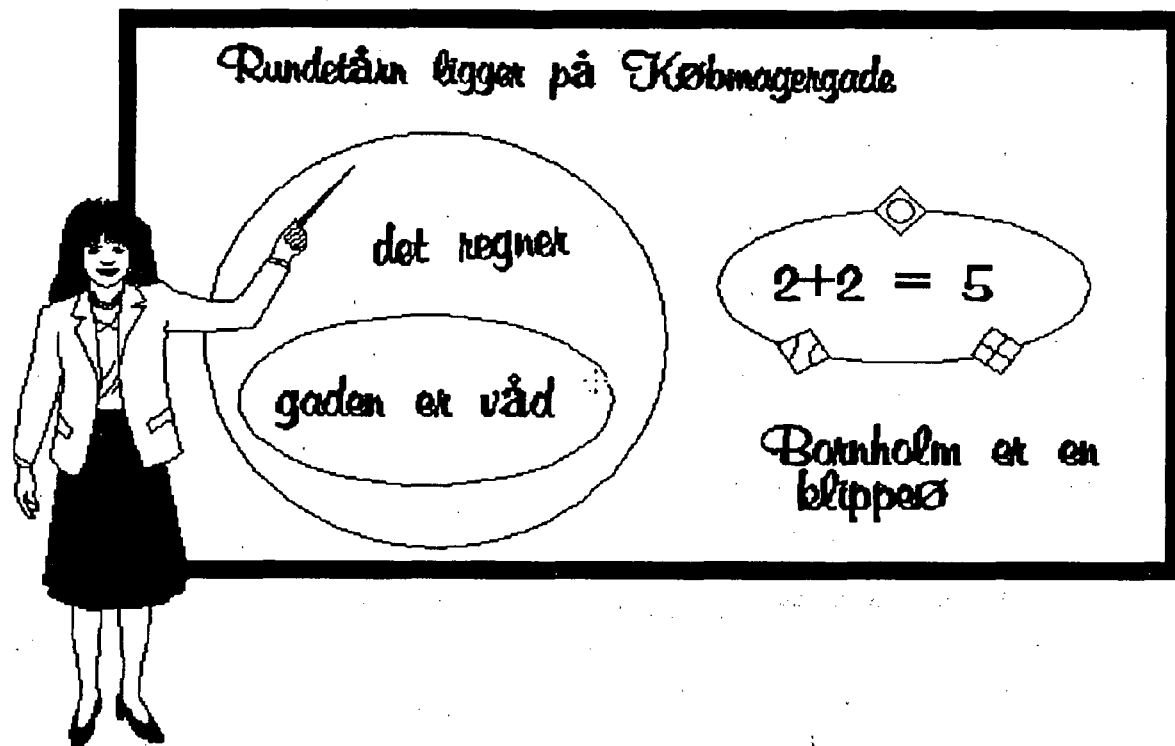


Figur 52 Dannelse af en sep (jfr. figur 34 og (132)).

Hvis man skriver samme tensorsymbol i transformerikonerne i en sep som på figur 52, hævder man dermed, at den pågældende tensor (transformer) er selvdual.

Peirces eksistentielle grafer er en slags spil, der har til formål at afklare meningen med logiske udsagn. Vi skal her kun se på den simpleste version, kaldet α -graferne, der handler om simpel udsagnslogik. I β -graferne indføres bond-grafer til relationslogisk analyse af sætninger, og i γ -graferne indføres kvantorer som eksistens- og al-kvantor. Spillet går ud på, at en deltager fremsætter en *hævdelse* på den dertil indrettede *hævdelsestavle*. De andre deltagere må så forsøge at gendrive eller validere hævdelsen. Hvis en hævdelse kan vises at være forkert, vil det medføre visse sanktioner mod den, der har fremsat den. Den forkerte hævdelse må så ikke viskes ud, men skal indrammes af en *sep*, hvorved den afskæres fra resten af hævdelsestavlen. En godkendt hævdelse må derimod godt viskes ud, hvilket svarer til, at den skubbes væk fra den centrale (synlige)

del af tavlen, hvortil den så eventuelt senere kan hentes tilbage.



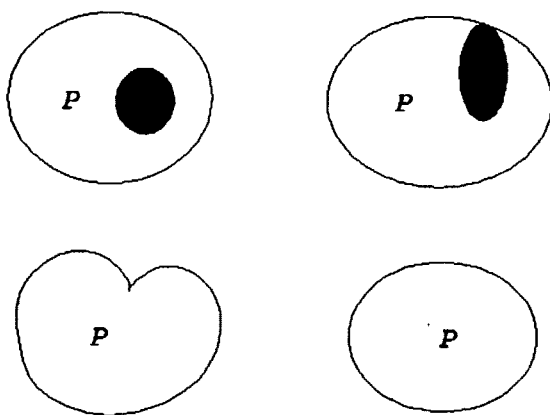
Figur 53 Hævdelsestavlen.

Den simpleste type af sep tegnes som en lukket kurve, men det er ikke en kurve i sædvanlig matematisk forstand, hvilket Peirce også gjorde opmærksom på. Vi vil opfatte den som et energibånd, der lukker sammen i sig selv, og derved rammer vi også i det væsentlige Peirces opfattelse. Et energibånd ændrer ikke karakter ved at vi tillader det at krydse sig selv, for en sådan overkrydsning er uden fysisk betydning, når der ikke er en samler. Et energibånd, som ser ud som en kurve med dobbelt-punkter, har ikke rigtige dobbeltpunkter og er derfor i topologisk forstand det samme som et cirkelformet bånd. Hvis vi forsyner energibånds-seppen med struktur i form af indbyggede toporte, som i et af eksemplerne på figur 53, har den stadig samme logiske funktion som en simpel sep: den afgrænser en del af hævdelsestavlen fra resten; så den kan bruges til at indkredse forkerte påstande som " $2+2=5$ ".

En struktur med en sep inden i en anden sep, kaldes af Peirce for en *scroll*. Vi ser en sådan på figur 53, hvor der i den

yderste sep står sætningen "det regner", og i den inderste "gaden er våd". Dette skal opfattes som den hypotetiske betingelses-sætning "hvis det regner, så er gaden våd". Den yderste sep afgrænser et hypotetisk univers, hvor man har lov at formulere påstande, som ikke kan stå for sig selv på hævdelestavlen, der kun vedrører det aktuelle univers. Påstanden i den inderste sep skal så opfattes som konsekvens af hypotesen i den yderste. Hvordan kan denne opfattelse forenes med reglen om, at en sep bruges til at afgrænse forkerte påstande? Sætningen "det regner" er jo ikke nødvendigvis forkert.

For at forstå dette indfører vi en ny konstruktion, en *blot*. En blot er en sep, hvis indre er helt fyldt ud, så der ikke kan skrives noget. Det skal opfattes som et hypotetisk univers, hvor "alting gælder", enhver hævdeelse er i forvejen fremsat. Hvis vi inden i en sep har sætningen P og en blot, som på figur 54, kan det læses som "hvis P er sand, så er alting sandt", og det er jo det samme som at sige, at " P er falsk". Vi kan så lade blotten flyde sammen med seppens inderste rand og gradvist snøre den sammen, så den til sidst er en spids og helt forsvinder. Vi står så tilbage med en enkelt sep, indeholdende sætningen P , og betydningen af dette må altså være " P er falsk".



Figur 54 Seppen som negation.

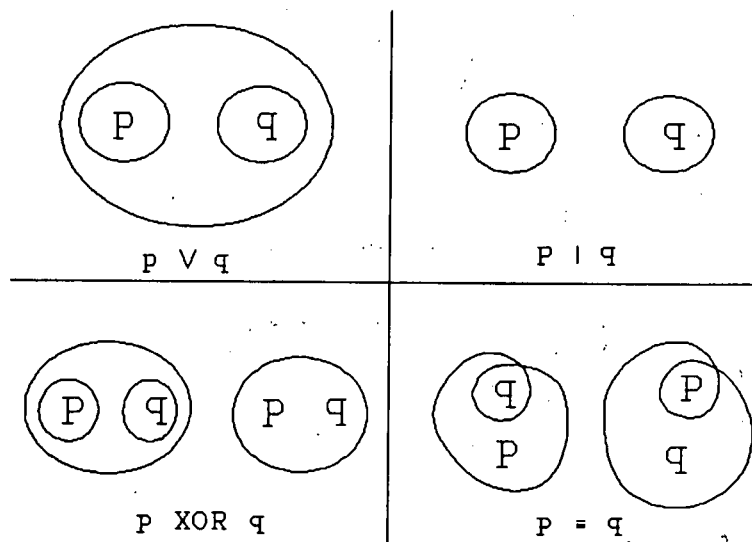
Med denne udlægning bliver den hypotetiske betingelsessætning "hvis p , så q " til det samme som en *materiel implikation*, der i den formelle Booleske logik udlægges som "enten er p falsk, eller også er q sand, eller begge dele". I formelsprog:

$$p \Rightarrow q = \neg p \vee q \quad (206)$$

Når seppen opfattes som en benægtelse af det, der står indeni, kan vi oversætte betingelsessætningen på figur 53 til "det er usandt, at det regner, og at gaden ikke er våd". Ordet "og" antyder en logisk *konjunktion*, der i formler udtrykkes med tegnet \wedge , modstykket til en *disjunktion*, der betyder "eller" (et inklusivt "eller", der indbefatter muligheden "både og") og betegnes med \vee (jfr. (206)). Negationen af en konjunktion mellem to udsagn er en disjunktion af negationerne af de to udsagn, så for den materielle implikation har vi

$$\neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q = p \Rightarrow q \quad (207)$$

Når to eksistentielle grafer optræder uafhængigt af hinanden på hævdeestavlen, f. eks. sætningerne "Rundetårn ligger på Købmagergade" og "Bornholm er en klippeø" på figur 53, kan den ene fjernes, uden at meningen af den anden ændres. Når de begge optræder, er den samlede hævdeelse af dem identisk med hævdeelsen af deres logiske konjunktion. På den måde kan vi oversætte traditionelt formulerede kombinationer af udsagn fra den Booleske algebra ved hjælp af diverse sepper, som vist nedenfor.



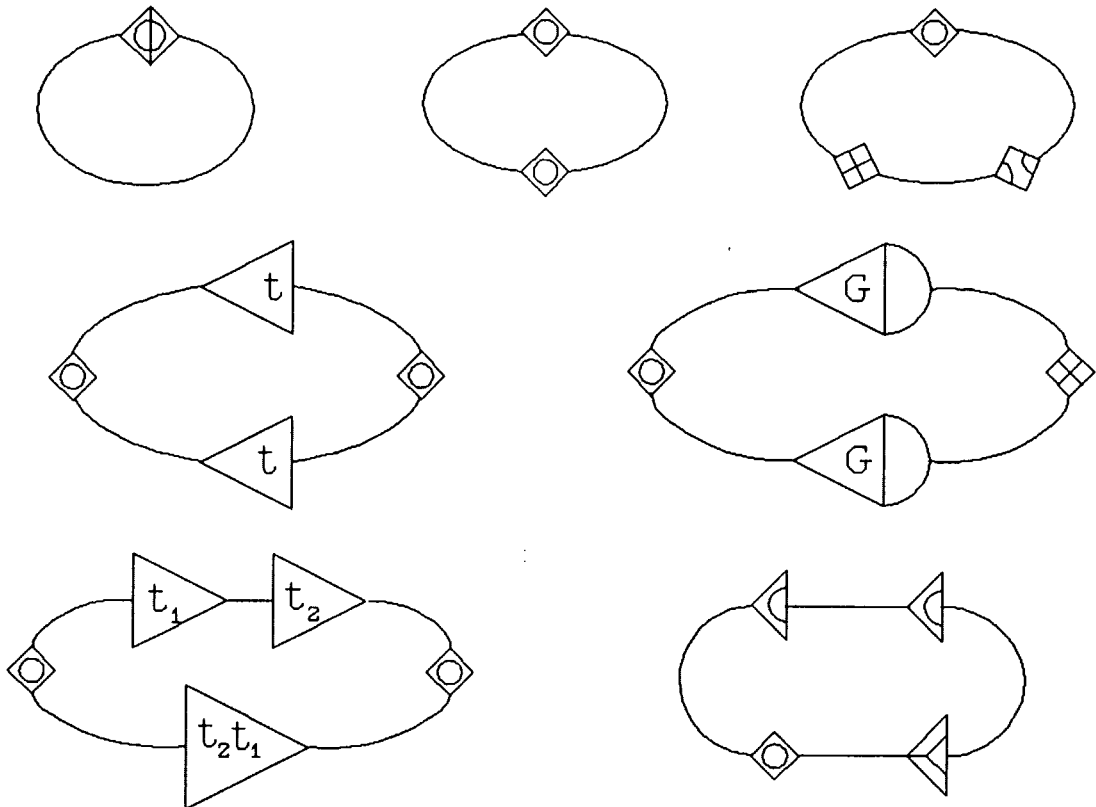
Figur 55 Logiske kombinationer af sætningerne p og q : disjunktion (inklusive eller), hverken eller, eksklusivt eller, ækvivalens (biimplikation).

Algebraiske manipulationer med logiske udtryk svarer så til topologiske ændringer af de eksistentielle grafer efter bestemte regler, der kan udledes af det foregående, såsom:

Hvis en sep indeholder én anden sep, og området imellem dem er tomt, kan begge sepper fjernes.

En blot inden i en sep kan fjernes, idet den opsuges af seppens indre rand (jfr. figur 54).

Peirce regner ikke seppen for en eksistentiel graf, fordi den er uden struktur og derfor ikke hævder noget. Når vi udvider begrebet om en sep til at omfatte lukkede energibånds-kredse med indbyggede toporte, bliver seppen til en graf, der hævder noget om disse toporte, og hævdelens gyldighed vil i nogle tilfælde afhænge af, at en symbolsk relation er opfyldt. Lad os se på nogle eksempler, som alle vil kunne udledes af de foregående kapitler.

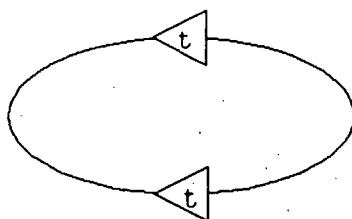


Figur 56 Eksempler på ubetingede sepper.

Alle disse eksempler er sikre, eller ubetingede, fordi de kan udledes af energibåndsformalismens aksiomer uden yderligere

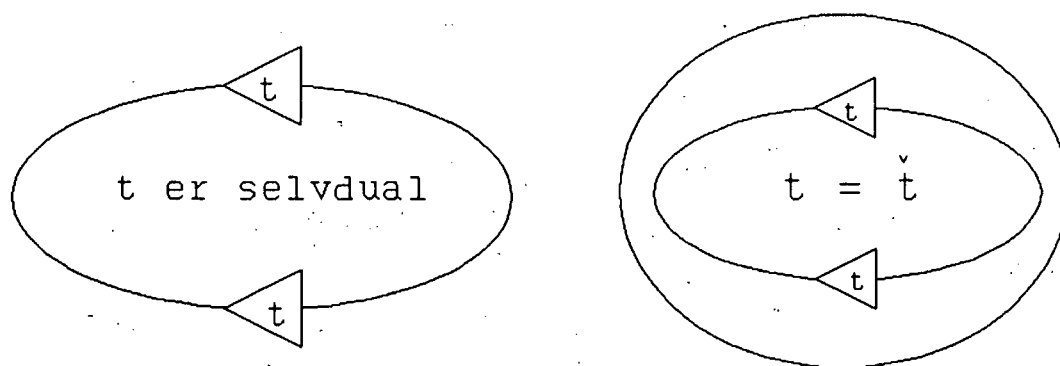
antagelser. Bortset fra den første, som er en definition af enhedstransformeren, er de imidlertid ikke trivielle, og de kan betragtes som teoremer. Lige som den simple sep er deres eksistens fastslået, når man har indset teoremernes gyldighed. Hvis man indeslutter en sådan sep i en anden ubetinget sep, vil begge sepper annihileres.

En *betinget sep* er kun en sand hævdelser, hvis en eller anden symbolsk relation mellem de indgående toporte er opfyldt. Eksempelvis er seppen



Figur 57 En betinget sep.

kun sand, hvis t er selvdual: $t = \check{t}$. En sådan sep er altså usikker og åben for verifikation eller falsifikation. Den hævdelser, den fremsætter, hører til på ydersiden af seppen, hvis det er en sep. Hvis betingelsen for seppens eksistens skrives inden for kredsen, fremkommer en selvmodsigende påstand, for hvis betingelsen er opfyldt, er kredsen en ægte sep, som benægter, hvad der står indeni. En ekstra sep uden om kan gøre det til en gyldig påstand, men de to sepper er så overflødige, påstanden $t = \check{t}$ kan stå alene, eller man kan nøjes med den ene sep, figur 57.



Figur 58 En selvmodsigende og en redundant graf.

Peirce nævner i sin anden Lowell lecture fra 1903, at han har været fyrré år om at udvikle de eksistentielle grafer, som med sine β - og γ - grafer er et langt mere indviklet spil, end de her antydede indledende beskrivelser af α -graferne kan antyde, (selv om energibånds-sepperne giver det en ny dimension, som Peirce ikke havde med). Den anden Lowell lecture, som det følgende citat er fra, er ét af flere ufuldstændige brudstykker om graferne samlet i Carolyn Eiseles 4 binds værk "The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce". I den hyppigst citerede samling af Peirce manuskripter "Collected Papers" er mange matematisk prægede papirer blevet udeladt af udgiveren, religionsfilosoffen Charles Hartshorne, hvilket matematikeren Carolyn Eisele søgte at råde bod på med "New Elements", som dog også virker ufuldstændig med hensyn til de eksistentielle grafer, af Peirce selv betegnet som hans "hovedværk". Citatet lyder:

"Before beginning, let us distinctly recognize the purpose which this system of expression is designed to fulfil. It is intended to enable us to separate reasoning into its smallest steps so that each one may be examined by itself. Observe, then, that it is not the purpose of this system of expression to facilitate reasoning and to enable one to reach his conclusion in the speediest manner. Were that our object, we should seek a system of expression which should reduce many steps to one; while our object is to subdivide one step into as many as possible. Our system is intended to facilitate the study of reasoning but not to facilitate reasoning itself. Its character is quite contrary to that purpose."

På lignende måde kan man bemærke, at formålet med energibåndsteknikken ikke er, at gøre modelopstilling for fysiske systemer lettere, men snarere at fremvise den semiotiske logik, der er fælles for fysiske teorier, hvadenten de hører til de klassiske eller de moderne discipliner.

9. SRT partikel- og elektrodynamik.

Dynamikken i den specielle relativitetsteori (SRT) refererer til *inertialsystemer*, som antages at have en universel metrik. Rumlige koordinater og tider fastlægges ved hjælp af standardmålestokke og standardure, som antages at være upåvirkede af stress og temperaturændringer. Det rumlige koordinatsystem er af den sædvanlige treretvinklede type med lige lange enheder på de tre akser. Hvert punkt i dette koordinatsystem har så et entydigt sæt af tre koordinater, som er udmålt med standardmålestokke, og vi kan tænke os, at der i visse jævnt fordelte referencepunkter opsættes skilte med koordinatværdierne påskrevet. I hvert referencepunkt skal der desuden være et standardur, koordinaturet, og urene skal synkroniseres ved hjælp af lyssignaler, eller signaler af en hvilken som helst anden type, hvis udbredelsehastighed kan antages at være uafhængig af tid, sted og retning.

En omrejsende partikel kan vi forestille os som et rumskib, der medbringer sit eget standardur. Skibsuret måler partiklens egentid, τ , som bruges til at ordne begivenhederne i partiklens (skibets) historie. Kaptajnen kan indføre i sin logbog: "Kl. 12, skibstid, passerede vi referencepunktet (1,2,3), hvor koordinaturet viste 13."

Hvis de rumlige koordinater kaldes x , y og z , og koordinattiden t , kan vi definere partiklens contravariante hastighedsvektor som

$$v^1 = \frac{dx}{d\tau} ; v^2 = \frac{dy}{d\tau} ; v^3 = \frac{dz}{d\tau} ; v^4 = \frac{dt}{d\tau} \quad (208)$$

Lige som i kapitel 7 kan vi så argumentere for, at den metriske tensor vil være diagonal med 1 på de tre første pladser og $-c^2$ på fjerde plads, hvor c er en naturkonstant med dimensionen hastighed. Vi kan afdimensionere metrikken ved at definere contravariante koordinater som

$$X^1 = x ; X^2 = y ; X^3 = z ; X^4 = ct \quad (209)$$

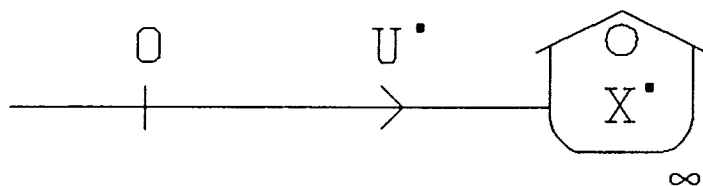
Den contravariante hastighed er da defineret som

$$U^\bullet = \frac{dX^\bullet}{d\tau} \quad (210)$$

og metrikken har standardformen

$$G_{..} = G^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (211)$$

Ligning (210) ligner relationen mellem en o -level og en x -rate fra den simple energibandsformalisme. Vi vil derfor indføre et o -lager, som skal indeholde den contravariante koordinatvektor. Dette lager skal være *cyklisk*, dvs. det må ikke forårsage nogen spænding i det tilsluttede bånd, hvor det som input har den contravariante hastighed. Vi vil i første omgang satse på at beskrive en fri partikels bevægelse i et inertialsystem, så der må ikke være nogen tilbagevirkning fra koordinatvektoren til de forhold, der bestemmer partiklens hastighed.



Figur 59 Koordinatvektor som cyklisk o -level.

Den contravariante 4-vektor, vi nu kalder partiklens hastighed, 4-hastigheden, må selvfølgelig ikke forveksles med

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = c \left(\frac{U^1}{U^4}, \frac{U^2}{U^4}, \frac{U^3}{U^4} \right) \quad (212)$$

den tredimensionale hastighed. Hvis partiklen ligger stille i inertialsystemet, har vi

$$U^1 = U^2 = U^3 = 0 \quad ; \quad U^4 = c \quad (213)$$

Normkvadratet, dvs. 4-hastighedens skalarprodukt med sig selv er altså (ingen grund til komplekskonjugering, alt er reelt)

$$U' G \dots U' = -c^2 \quad (214)$$

Hvis partiklen har 3-hastigheden \vec{v} , skal normkvadratet være det samme. Partiklen vil jo så ligge stille i et inertialsystem S' , der bevæger sig med hastigheden \vec{v} i forhold til det oprindelige system S . Overgangen mellem de to inertialsystemer, som begge har metrikken (211), er en metrikbevarende koordinat-transformation, altså en metrisk unitær transformer M , og en sådan vil bevare alle skalarprodukter, og dermed også normkvadratet af hastigheden. For to vilkårlige 4-vektorer v og w og deres metrisk unitært transformerede udgaver v' og w' har vi jo

$$M^{-1} = M^* \Rightarrow v'^i w'_i = M^i_j v^j M_i^k w_k = v^j M^*_j^i M_i^k w_k = v^i w_i \quad (215)$$

Vi får derfor af (212) og (214):

$$\left. \begin{aligned} (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2 - (U^4)^2 &= (U^4)^2 \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] = -c^2 \\ \Rightarrow U^4 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma c \quad ; \quad U^i = \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma v^i \end{aligned} \right\} (216)$$

Vi har her valgt den positive løsning for U^4 , som jo skal have værdien c for $v=0$. Endvidere har vi indført *Møllers konvention*, at græske indices (her i) løber fra 1 til 3, medens latinske indices løber fra 1 til 4. Den tredimensionale vektor (v^1, v^2, v^3) er altså partiklens normalt definerede hastighed i forhold til inertialsystemet (v_x, v_y, v_z) . Endelig har vi igen indført for-

kortelsen γ for den relativistiske tidsforlængelsesfaktor, som i (198). Denne faktor kan nu ses i sit rette lys, for den angiver jo forholdet mellem koordinattidens og egentidens tilvækst (jfr. (208) og (210)), og da den er større end 1, beskriver den det forhold, at det til partiklen knyttede standardur, set fra inertialsystemet, synes at gå for langsomt. Omvendt kan man ikke sige, at koordinaturene set fra partiklens synspunkt går for hurtigt, for det er jo ikke et bestemt koordinatur, der indgår i definitionen af 4-hastigheden U , men det ur, der er lige ud for partiklen, dvs. det er hele tiden et nyt ur, når partiklen bevæger sig. Det enkelte koordinatur, set fra partiklen, går lige så meget for langsomt som partiklens ur, set fra inertialsystemet, for situationen er fuldstændig symmetrisk; vi kunne lige så godt benytte et inertialsystem, der (momentant) ligger stille i forhold til partiklen, og betragte koordinaturet som en partikel, der bevæger sig med den modsatte hastighed i forhold til dette inertialsystem, og det vil give samme tidsforlængelse, da γ er uberørt af fortegnsskift på hastigheden. Forklaringen på, at koordinattiden, set fra partiklen, løber forud for partiklens egentid, må altså være, at koordinaturene ikke synes at være synkroniserede. Den i S anvendte synkroniseringsprocedure, som bygger på, at lyssignaler har samme hastighed i alle retninger, fører ikke til synkronisering, set fra partiklens system S' , for hvis alle inertialsystemer er lige gode, må en iagttager i S' mene, at lyshastigheden i dette system er den samme i alle retninger, og så kan den ikke være det i S .

Lad os nu se lidt nøjere på de metrisk unitære transformationer, der definerer overgangen fra et inertialsystem S til et andet system S' , der bevæger sig med hastigheden \vec{v} i forhold til S . Lad os i første omgang for nemheds skyld antage, at de to koordinatsystemer har parallelle akser, og at hastigheden v af S' i forhold til S går i den positive x -aksens retning. Vi kan da nøjes med at se på den ene rumlige koordinat x og tidskoordinaten t , således at transformationstensoren M kan beskrives ved 2×2 matricer. Vi vil endvidere antage, at de to koordinatsystemers begyndelsespunkters sammenfald sker samtidigt med, at begge

begyndelsespunkters koordinature viser 0. Vi kan da regne med, at den samme lineære transformation M , der transformerer energibandsvektorerne, også transformerer koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} U'^{\cdot} &= M^{\cdot} \cdot U^{\cdot} \Rightarrow X'^{\cdot} = M^{\cdot} \cdot X^{\cdot} \\ X^{\cdot} &= \begin{pmatrix} X \\ ct \end{pmatrix} ; X'^{\cdot} = \begin{pmatrix} X' \\ ct' \end{pmatrix} ; M^{\cdot} = \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_4 \\ M^4_1 & M^4_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

Når vi således har indskrænket os til 1-4 underrummet, er metrikken G_{\cdot} givet ved σ_{\cdot} . De metrisk unitære transformere, som kan komme på tale, må have determinanten 1 af deres 1- og 2-varianten, for hvis hastigheden v er 0, skal disse matricer være enhedsmatricen. Determinanten af 1- eller 2-varianten af en metrisk unitær og reel transformer kan kun være 1 eller -1, fordi

$$\det(M^{\cdot}) = \det(M^{+\cdot}) = \det(M^{-1\cdot}) \quad (218)$$

og da matricen skal kunne genereres ved kontinuert ændring af enhedsmatricen, kan determinanten kun være 1. Vi har da:

$$\left. \begin{aligned} M^{+\cdot} &= \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_4 \\ M^4_1 & M^4_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^1_1 & -M^4_1 \\ -M^1_4 & M^4_4 \end{pmatrix} \\ &= M^{-1\cdot} = \begin{pmatrix} M^4_4 & -M^1_4 \\ -M^4_1 & M^1_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

dvs.

$$M^1_1 = M^4_4 \quad \wedge \quad M^1_4 = -M^4_1 \quad \wedge \quad M^1_1 M^4_4 - M^1_4 M^4_1 = 1 \quad (220)$$

og derfor kan M udtrykkes på formen (jfr. (149))

$$M^{\cdot} = L(\chi)^{\cdot} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \quad (221)$$

Størrelsen χ er parameteren for den Lie-gruppe, som hedder den specielle Lorentz-gruppe. Hvis $v = 0$ er $\chi = 0$. Desuden ses,

at den til (221) reciprokke matrix fås ved at indsætte parameter-værdien $-\chi$. Hvis vi følger begyndelsespunktet i S' , er $x' = 0$, og $x = vt$, og vi får da af (217) og (221):

$$0 = \cosh\chi vt + \sinh\chi ct \Rightarrow \tanh\chi = -\frac{v}{c} \quad (222)$$

Med betegnelsen γ fra (221) ($\gamma = \cosh\chi$) finder vi da udtrykket for den specielle Lorentz transformation:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2} \right) \quad (223)$$

Den specielle Lorentz-gruppe (221) er kommutativ (Abelsk) og har iøvrigt den pæne egenskab, at

$$L(\chi_1) \cdot L(\chi_2) \cdot = L(\chi_1 + \chi_2) \cdot \quad (224)$$

Da protensoren $h = \delta$ for standardmetrikken, har vi:

$$\check{L}(\chi) \cdot = \delta \cdot L(\chi) \cdot \delta \cdot = L(\chi) \cdot = L(-\chi) \cdot = L^{-1}(\chi) \cdot \quad (225)$$

hvoraf vi får det måske lidt overraskende resultat, at den metrisk unitære transformer $L(\chi)$ er *ikonsymmetrisk* (jfr. (133)).

Egenskaben (224) antyder, at Lorentz matricen (221) må kunne udtrykkes ved hjælp af en generator L og parameteren χ på formen

$$L(\chi) \cdot = \exp(\chi L \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\chi L \cdot)^n}{n!} \quad (226)$$

denne formel vil passe, hvis generatoren er givet ved

$$L \cdot = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (227)$$

En generator for en 1-parameter Lie-gruppe defineres i almindelighed som i (226). Sammenhængen mellem hermiticitets-egenskaberne af generatoren og den genererede Lie-gruppe kan opsummeres som følger (bevis overlades til læseren):

Hvis generatoren er 1-/metrisk hermitesk, er gruppen 1-/metrisk hermitesk.

Hvis generatoren er 1-/metrisk antihermitesk, er gruppen 1-/metrisk unitær.

For den specielle Lorentz-gruppe er generatoren 1-hermitesk og metrisk antihermitesk, så gruppen er 1-hermitesk og metrisk unitær.

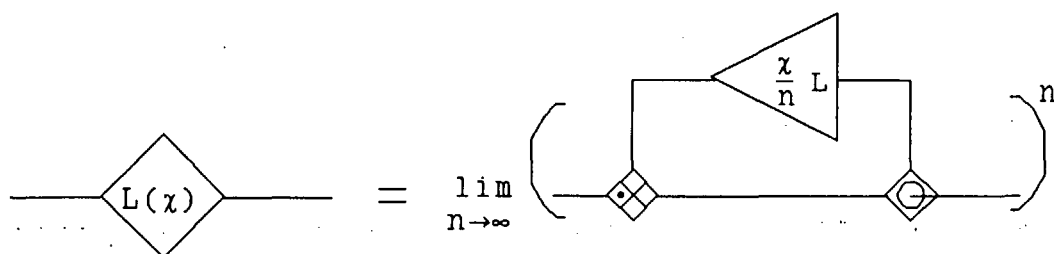
Da alle medlemmerne af Lie-gruppen har determinanten 1, må det gælde, at sporet af generatoren, dvs. summen af dens diagonalelementer, er 0. Vi kan nemlig omskrive (226) til

$$L(\chi) \cdot \cdot = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\chi}{n} L \cdot \cdot \right)^n \quad (228)$$

(lidt sjuksket tillader vi os nu at skrive 1 i parantesen, hvor der egentlig skulle stå enhedsmatricen). Vi får derved

$$\left. \begin{aligned} \det[L(\chi) \cdot \cdot] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\det \left(1 + \frac{\chi}{n} L \cdot \cdot \right) \right]^n = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\chi}{n} \text{sp}(L \cdot \cdot) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n &= \exp[\chi \text{sp}(L \cdot \cdot)] \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

Vi kan udtrykke (228) med diagrammet



Figur 60 Lie-gruppe element og generator.

I almindelighed kan man ikke regne med, at en således genereret metrisk unitær transformer er ikonsymmetrisk. Generatoren L for Lorentz gruppen er ikke ikonsymmetrisk.

Af (222) og (224) kan vi udlede den relativistiske lov for addition af hastigheder. Hvis vi har endnu et inertialsystem S'' , som bevæger sig med hastigheden w i forhold til S' (stadig i den positive x -aksens retning), så kan overgangen fra S' til S'' beskrives med en til (221) svarende metrisk unitær transformer, hvis parameter χ' er givet ved w ligesom χ er givet ved v i (222). Overgangen fra S til S'' er så ifølge (224) givet ved parameteren $\chi + \chi'$, så hastigheden af S'' i forhold til S må være

$$-c \tanh(\chi + \chi') = \frac{V + W}{1 + \frac{VW}{c^2}} \quad (230)$$

En konsekvens af denne formel er, at man aldrig ved successiv addition af små hastigheder kan komme op på hastigheder større end eller lig med c .

Vi har hidtil kun set på en speciel type af Lorentz transformation. Lad os nu forsøge at beskrive den samlede gruppe. Lorentz gruppen beskriver alle mulige metrisk unitære transformationer fra et inertialsystem til et andet, så den indbefatter også sædvanlige drejninger af det treretvinklede koordinatsystem, uden at systemerne bevæger sig i forhold til hinanden. Sådanne transformere har ingen matrixelementer, der blander de rumlige og de tidslige komponenter af en 4-vektor, og de vil derfor være 1-unitære (eller 2-unitære, hvilket er det samme) samtidig med, at de er metrisk unitære. F.eks. vil en drejning på vinklen ϕ om z -aksen svare til transformationsmatricen

$$D_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (231)$$

Dette er igen en 1-parameter Lie-gruppe, hvor alle medlemmerne har determinanten 1, og lige som før kan vi frembringe den med en generator, der har sporet 0. En sådan generator skal så være 1-

antihermitesk, for at den kan være metrisk antihermitesk, da den kun vedrører de tre rumlige koordinater. Den frembragte gruppe er så både 1-unitær og metrisk unitær. Det er nemt at finde generatoren. Vi har nemlig:

$$\left. \begin{aligned} D_z \cdot &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ (D_z \cdot)^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; & (D_z \cdot)^3 &= -D_z \cdot \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

og dermed

$$\left. \begin{aligned} \exp(\phi D_z \cdot) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi D_z \cdot)^n}{n!} = \\ 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) D_z \cdot &- \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\phi^2)^n}{(2n)!} \right) (D_z \cdot)^2 \\ = 1 + \sin \phi D_z \cdot - (\cos \phi - 1) (D_z \cdot)^2 &= D_z(\phi) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

(Vi skriver nu igen 1, hvor der burde stå enhedsmatricen $G \cdot$).

Tilsvarende kan vi angive generatorer for drejninger om x-aksen og y-aksen. De to andre drejningsgeneratorer er

$$D_x \cdot = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad D_y \cdot = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (234)$$

og vi har kommutator-relationerne (index prikker udeladt)

$$D_x = [D_y, D_z] ; \quad D_y = [D_z, D_x] ; \quad D_z = [D_x, D_y] \quad (235)$$

Ved hjælp af disse tre drejningsgeneratorer for de tre koordinataksler kan vi danne en generator for drejning om enhver enhedsvektor

$$D_{\vec{n}} = n_x D_x + n_y D_y + n_z D_z \quad (236)$$

Enhedsvektorens retning beskrives ved to parametre, f.eks. længde og bredde på enhedskuglen. En drejning på en vilkårlig vinkel ϕ om enhedsvektoren frembringes så som

$$D_{\vec{n}}(\phi) = \exp(\phi D_{\vec{n}}) \quad (237)$$

På denne måde genereres alle mulige rumlige drejninger af det stive koordinatsystem som en treparameter Lie gruppe.

Ser vi nu på de egentlige Lorentz-transformationer, hvor det ene inertialsystem bevæger sig i forhold til det andet med akserne parallelle, så kan vi på tilsvarende måde finde tre generatorer, der beskriver bevægelse i retning af x-, y- og z-aksen. Vi har tidligere set på den første af disse generatorer, men nu skriver vi dem alle ud som 4*4 matricer (underforstået, at det er 2-varianterne):

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (238)$$

Disse har kommutator-relationerne

$$[L_x, L_y] = D_z ; \quad [L_y, L_z] = D_x ; \quad [L_z, L_x] = -D_y \quad (239)$$

L-generatorerne har en vektorkarakter ligesom D'erne. Vi kan lave et skalarprodukt af (L_x, L_y, L_z) med en enhedsvektor (n_x, n_y, n_z) lige som i (236) og derved konstruere en generator for bevægelse i retning af denne enhedsvektor, så en vilkårlig Lorentz transformation uden rotation (akseparallel bevægelse) kan laves efter opskriften

$$L_{\vec{n}}(\chi) = \exp(\chi L_{\vec{n}}) \quad (240)$$

Hvis vi sammensætter to Lorentz transformationer uden rotation, som går i forskellige retninger, så vil det vise sig, at den resulterende transformation ikke er en Lorentz transformation uden rotation. Med andre ord: selv om det andet koordinatsystem har akserne parallelle med det førstes, og det tredje med det andets, så vil det tredje koordinatsystems akser ikke være parallelle med det førstes. Dette fænomen, der er kendt som *Thomas præcessionen* (se f.eks. Møller), hænger sammen med, at kommutator-relationerne mellem L 'erne (239) inddrager D 'erne.

De 6 generatorer, som nu er beskrevet, udspænder tilsammen rummet af metrisk antihermiteske 4×4 matricer. Den samlede gruppe af *egentlige* Lorentz transformationer (som har determinanten 1) kan derfor defineres som en 6-parameter Lie gruppe ved konstruktionen

$$\left. \begin{aligned} L(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z) &= \exp(K) \text{ , hvor} \\ K &= \phi_x D_x + \phi_y D_y + \phi_z D_z + \chi_x L_x + \chi_y L_y + \chi_z L_z \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Hermed har vi skitseret den grundlæggende *kinematik* i SRT.

For at behandle *dynamikken* i en partikels bevægelse, må vi diskutere, hvad en kraft er, og hvordan den ændrer partiklens hastighed. I energibåndsbeskrivelsen af klassisk (ikke-relativistisk) dynamik reticuleres Newtons anden lov ved hjælp af et lineært x -lager med en inertans, som er partiklens masse, en x -level, som er partiklens impuls, og et spændingsinput, som er kraften på partiklen. Strømoutputtet fra x -lageret er partiklens hastighed. Den simplest mulige generalisation af dette billede til SRT går ud på at benytte samme reticulation i den firedimensionale vektorbåndsformulering. Vi må derfor starte med at definere et lineært x -lager for generelle vektorbånd.

Et lineært lager har en energifunktion, som er kvadratisk i level-variablen, og outputtet fra lageret bestemmes ved differentiation af energifunktionen med hensyn til level-variablen. Input rate til et x -lager er en spændingsvektor, som er den tidsafledede af x -levelen. Hvis vi lader spændingen

(kraften) være covariant, så må x -levelen (impulsen) også være en covariant vektor. Den afledede af den skalare energifunktion med hensyn til impulsen, altså outputstrømmen (hastigheden) vil så være contravariant. Hvis vi kalder impulsen for P , energifunktionen $\epsilon(P)$ og kraften F , har vi jo

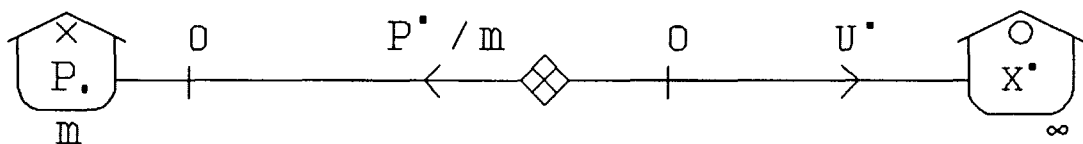
$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \epsilon}{\partial P_i} F_i = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \epsilon}{\partial P_i} \frac{dP_i}{d\tau} = w = U^i F_i \quad (242)$$

hvor w er energistrømmen ind til lageret, som jo er en skalar, der udtrykkes som en sum af produkter af de covariante spændingskoordinater med de contravariante strømkoordinater.

Sammenhængen mellem energifunktionen og outputstrømmen for det lineære lager er så

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(P) &= \frac{1}{2m} P \cdot G' \cdot P \\ U^i &= \frac{\partial \epsilon}{\partial P_i} = \frac{1}{m} G' \cdot P = \frac{1}{m} P^i \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

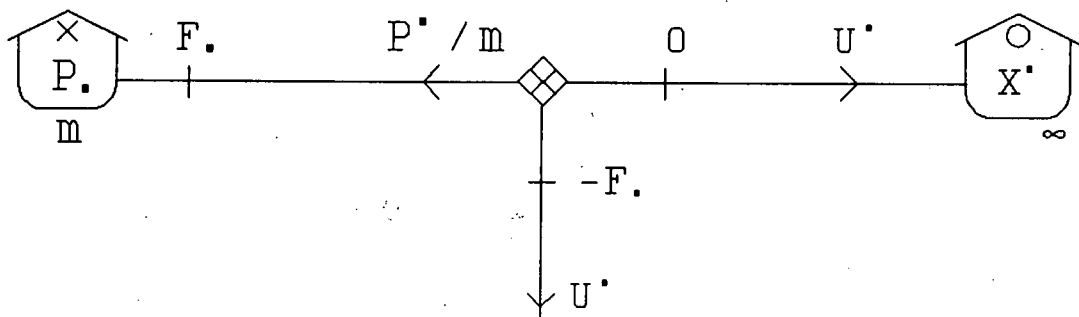
For en fri partikel er kraften 0, og vi kan benytte følgende reticulation



Figur 61 Fri partikel.

Vi har set, at partiklens 4-hastighed er underlagt den restriktion (214), at dens normkvadrat skal have værdien $-c^2$. Hastigheds-4-vektoren er bundet til en hyperflade i 4-rummet, som

kaldes en *pseudokugle* med ligningen (214). Det er derfor ikke muligt at addere 4-hastigheder for partikler med brug af o-samlere; hvis man gør det, vil den resulterende strømvektor ikke kunne fortolkes som en mulig partikel 4-hastighed. Vi kan konstatere, at multiport o-samlere ikke kan forekomme i den relativistiske partikeldynamik. (Dette gælder dog kun for de firedimensionale vektorbånd. Hvis vi reticulerer ud på lavere dimensionale bånd, f.eks. laver en skalar udgave af en Lorentz transformer, vil der selvfølgelig forekomme o-samlere.) Derimod har x-samleren en vigtig funktion i dynamikken, hvilket antydes af, at der forekommer en toport x-samler i figur 61. Hvis partiklen ikke er fri, dvs. hvis den er påvirket af en kraft, må denne komme ind i billedet via en tredje port på x-samleren.



Figur 62 Partikel påvirket af en kraft.

Af (243) og (214) finder vi følgende udtryk for x-lagerets energifunktion

$$\epsilon = \frac{1}{2} m U' G \cdot U' = -\frac{1}{2} m c^2 \quad (244)$$

Denne lagringsfunktion er altså noget helt andet end det, vi normalt forstår ved partiklens energi. Hvis partiklens masse er konstant, må ϵ beholde den samme konstante værdi. Udtrykker vi ϵ ved den contravariante 4-impuls, får vi

$$\epsilon = \frac{1}{2m} P' G \dots P' = \frac{1}{2m} [\vec{p}^2 - (P^4)^2] \quad (245)$$

Af dette udtryk, hvor vi har indført 3-impulsen, der for små hastigheder er det samme som den Newtonske impuls, finder vi

$$\left. \begin{aligned} P^4 &= \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = \\ mc \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{V^2}{c^2}} &= \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma mc \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

Denne størrelse kan så identificeres som partiklens energi E , divideret med c . Udtrykket for E og dets rækkeudvikling for små hastigheder giver nemlig

$$E = cP^4 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 \quad (247)$$

altså det velkendte Einstein udtryk for partiklens hvileenergi plus den sædvanlige kinetiske energi.

Da lagringsfunktionen ϵ skal være konstant (for konstant m), må skalarproduktet af strøm og spænding i det nyttilkomne bånd på samleren i figur 62 være nul. Vi har derfor

$$F_4 = -\frac{F_\lambda U^\lambda}{U^4} = -\frac{1}{c} F_\lambda V^\lambda = -\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad (248)$$

Kraftfeltets arbejds-hastighed er således

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} F_\lambda V^\lambda \quad (249)$$

hvilket tyder på, at Newton-kraften er givet ved de tre første

komponenter af 4-kraften, divideret med tidsforlængelsesfaktoren γ . Vi har jo også:

$$\frac{dP_\lambda}{d\tau} = m \frac{d(\gamma v_\lambda)}{d\tau} = F_\lambda \Rightarrow m \frac{dv_\lambda}{d\tau} = \frac{F_\lambda}{\gamma} - m v_\lambda \frac{d\gamma}{d\tau} \quad (250)$$

hvilket viser, at i det øjeblikkelige hvilesystem, hvor v_λ er nul, og hvor koordinattiden følger partiklens egentid, gælder Newtons anden lov, hvis kraften er F_λ / γ .

Lad os udregne partiklens bevægelse, når den starter fra hvile i nulpunktet til $\tau = t = 0$ og er påvirket af en konstant kraft, dvs. når den har en konstant acceleration i forhold til sit øjeblikkelige hvilesystem. Vi får

$$a_\lambda = \frac{1}{m\gamma} \frac{dP_\lambda}{d\tau} = \frac{d(\gamma v_\lambda)}{dt} \quad (251)$$

Hvis kraften og accelerationen a går i x aksens retning, får vi for hastigheden v i x -retningen:

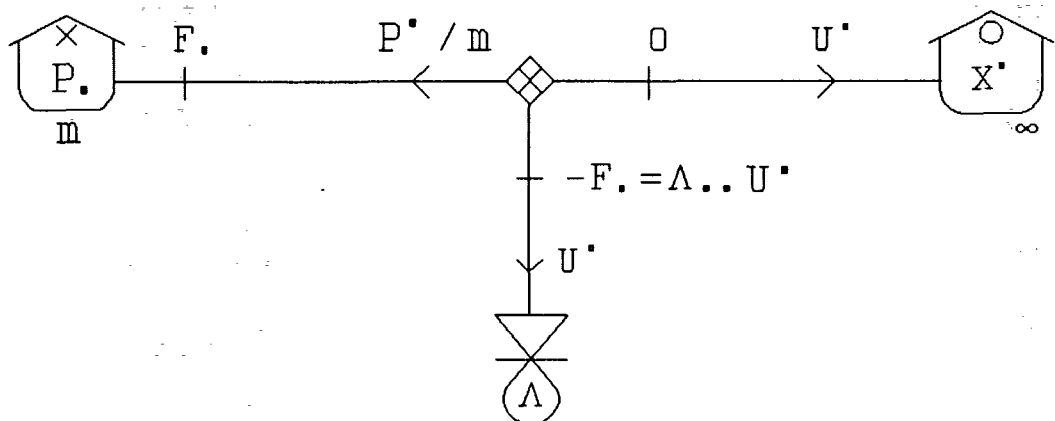
$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = at \Rightarrow v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \quad (252)$$

Det ses, at hastigheden går asymptotisk mod c for $\tau \rightarrow \infty$. Ved yderligere integration finder vi x som funktion af egentiden:

$$x = \frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{at}{c}} \frac{u du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right] \quad (253)$$

Grafen af x som funktion af t er en hyperbel med linjen $x = ct$ som asymptote.

Den simpleste relativistiske kraftlov svarer til en lineær 1-port koblet til samleren på figur 62. Da energifunktionen for lageret skal være bevaret, må denne 1-port være metrisk antihermitesk, dvs. den må være en *gyrolæk*, jfr. figur 38. Som vi skal se, kan en ladet partikels bevægelse i et elektromagnetisk felt beskrives på denne måde.



Figur 63 Bevægelse styret af gyrolæk.

Hvis partiklen har ladningen q og den bevæger sig i et elektromagnetisk felt med den elektriske feltstyrke \vec{E} og den magnetiske induktion \vec{B} , er den antihermiteske matrix $\Lambda..$ givet ved

$$\Lambda.. = q \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & 0 & -B_x & -\frac{E_y}{c} \\ -B_y & B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (254)$$

Kraften på partiklen bliver jo så

$$K_k = \frac{1}{\gamma} F_k = -\frac{1}{\gamma} \Lambda_k \cdot U \Rightarrow \vec{K} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (255)$$

hvilket er den velkendte Lorentz kraft. Den simple måde, dette udtryk fremkommer på, tyder på, at elektrodynamikken så at sige er født relativistisk, og det var da også udgangspunktet for Einsteins afhandling "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" fra 1905.

En feltbeskrivelse kræver imidlertid et helt andet synspunkt end partikelmeknikken, som jo bygger på, at vi kan følge den enkelte partikel i dens bevægelse. For felter må vi benytte Euler-synspunktet, som refererer til et fast koordinatsystem, og hvor tiden er den med standardure udmålte koordinattid t . Vi kan tænke os det tredimensionale koordinatsystem inddelt i små celler, og vi så for hver enkelt celle holde regnskab med, hvordan feltstørrelser, som f.eks. ladningstætheden varierer som funktion af koordinattiden. Denne tid, t , indgår jo som ct i fjerdekomponenten i den contravariante koordinatvektor. Vi kan definere en firedimensional differentialoperator, der virker som en covariant vektor på følgende måde:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \quad (256)$$

Hvis vi har en masse ladede partikler, kan vi beskrive dem med en ladningstæthed ρ og en strømtæthedsvektor \vec{i} og med disse størrelser kan vi danne en firevektor, den contravariante 4-strømtæthed:

$$J^{\mu} = (i_x, i_y, i_z, c\rho) \quad (257)$$

Kontinuitetsligningen, som udtrykker ladningsbevarelse

$$\nabla \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (258)$$

kan så udtrykkes på den invariante tensorform

$$\partial \cdot J' = 0 \quad (259)$$

Ser vi nu på Maxwell ligningerne for den magnetiske feltstyrke \vec{H} og den elektriske forskydning \vec{D}

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{i} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (260)$$

kan vi fremstille dem på lignende kompakt form. Vi indfører en felt-tensor, hvis 3-variant er

$$\Psi \cdot \cdot = \begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y & cD_x \\ H_z & 0 & -H_x & cD_y \\ -H_y & H_x & 0 & cD_z \\ -cD_x & -cD_y & -cD_z & 0 \end{pmatrix} \quad (261)$$

og kan så skrive (260) på formen

$$\partial \cdot \Psi \cdot \cdot = J' \quad (262)$$

I vacuum gælder

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad ; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (263)$$

Vi ser da, at tensoren Ψ (261) og tensoren Λ (254) ligner hinanden utrolig meget, faktisk så meget, at de må være proportionale, hvis de overhovedet skal være tensorer, dvs. transformere ved Lorentz transformationerne, når man skifter inertialsystem. Denne proportionalitet findes kun, hvis vacuumkonstanterne i (263) står i en bestemt relation til "den metriske hastighed" c :

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \Lambda = q \mu_0 \Psi \quad (264)$$

Hermed bliver vi i stand til at identificere c med lyshastigheden i vacuum.

De to andre Maxwell ligninger

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

kan udtrykkes på en tensorform lige som (262) med 0 på højre side. Det vil vi dog ikke gøre, men vi vil i stedet indføre vektorpotentialaet og det skalare potential ved definitionerne

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (266)$$

hvorved Maxwell ligningerne (265) automatisk er opfyldt. Vi indfører nu 4-vektorpotentialaet, hvis contravariante form er

$$A^\cdot = (A_x, A_y, A_z, \frac{\phi}{c}) \quad (267)$$

Felttensoren Ψ kan så udtrykkes på formen

$$\mu_0 \Psi_{ij} = \partial_j A_i - \partial_i A_j \quad (268)$$

Potentialvektoren A er ikke entydig, men kan ændres ved en gauge transformation. Vi vil benytte den såkaldte Lorentz gauge, der er defineret ved

$$\partial \cdot A^\cdot = \partial^\cdot A_\cdot = 0 \quad \sim \quad \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (269)$$

Den elektromagnetiske bølgeligning for vacuum får så sin simpleste udformning, når vi på (262), med højresiden sat til 0, benytter (268) og (269):

$$\mu_0 \partial^i \Psi_{ij} = \partial^i (\partial_j A_i - \partial_i A_j) = - (\partial \cdot \partial) A_j = 0 \quad (270)$$

Vi har her introduceret d'Alembert operatoren, den 2. ordens differentialoperator, der er Lorentz-metrikens generaliserede udgave af den euklidiske metriks Laplace operator:

$$\square = \partial \cdot \partial = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (271)$$

Feltbeskrivelser, der involverer differentialoperatorer, lader sig ikke uden videre reticulere ud på firedimensionale vektorbånd. Vektorbåndenes berettigelse i denne forbindelse ligger i deres definition af den grundlæggende metrik, som er basis for brug af tensorformalismen i feltbeskrivelsen. Partikeldynamikken i vektorbåndsformulering er det fundament, som feltbeskrivelsen bygger på, idet feltsymbolernes betydning defineres ud fra den ikoniske forestilling om en prøvepartikel som i diagrammet figur 63 og den tilhørende formel (254).

Når vi skal reticulere feltligninger ud, må vi bruge skalarbånd til opbygning af en dynamisk enhedscelle, der så ved repetition i det tredimensionale euklidiske rum kan reducere de partielle differentiaalligninger i rum og tid til et sæt ordinære differentiaalligninger i tid. Det nytter ikke noget at indføre enhedsceller og gitter struktur for "det firedimensionale rum", for der er ikke noget firedimensionalt geometrisk rum. Vektorbåndsformalismens fortjeneste i relativitetsteorien kan netop være, at den fritager os for geometriske forestillinger om et "firedimensionalt rum-tids kontinuum", hvor dynamiske fænomener bliver til geometriske mønstre af "verdenslinjer" uden udvikling. Der er en simpel grund til, at den firedimensionale tensorformalisme, byggende på Lorentz-metrikken, er så fundamental, og denne grund er strukturen af vektorbåndet, der beskriver dynamikken af

en prøvepartikel. Euler synspunktet på felter, hvor vi står fast i et koordinatsystem og holder øje med udviklingen af et felt ved hjælp af partielle differentiaalligninger eller periodisk repeterede energibåndsceller, bygger altid på Lagrange synspunktet, hvor vi følger den enkelte partikel i dens bevægelse. Dette gælder i lige høj grad for hydrodynamikken og den generelle relativitetsteori. I kvantefeltteorien får man ganske vist let det indtryk, at feltbeskrivelsen er den fundamentale, at partikelforstillingen må bygge på en feltligning, men til syvende og sidst er de kvantemekaniske feltligninger semantisk rodfæstede i klassiske forestillinger og korrespondensprincippet, som Bohr altid fastholdt.

Lad os se på, hvordan de "født relativistiske" elektromagnetiske feltligninger for vacuum tager sig ud i skalar energibandsformulering. Vi kan starte med at se på en situation, hvor det elektriske felt går i x-retningen og den magnetiske induktion i y-retningen. En sådan situation kan forekomme, når vi har en plan polariseret bølge, der udbreder sig i z-retningen. Begge felter vil da kun afhænge af z og t. Af (260) (uden strøm og ladning) og (265) får vi:

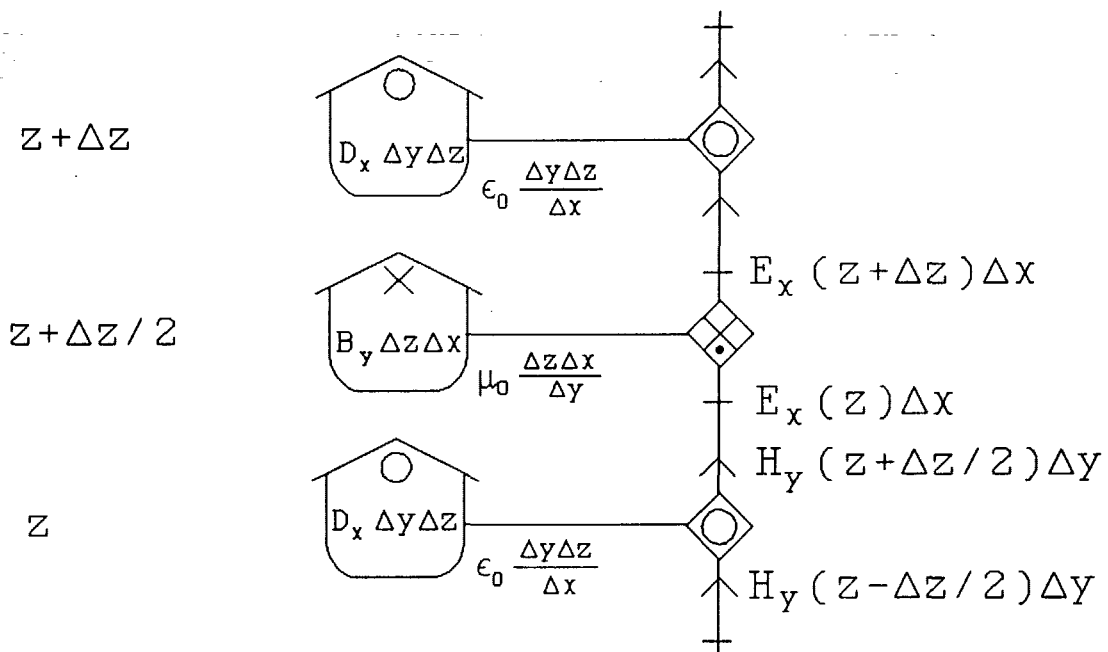
$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (272)$$

Denne form antyder, at størrelserne D og B må knyttes til level-variable, medens E og H må knyttes til rates. Da E-feltet er proportionalt med kraften på en prøveladning, dvs. en spænding, må E og D være o-variable, medens B og H er x-variable. Vi må nu udtrykke de partielle differentiaalligninger (272) til sædvanlige differentiaalligninger i tid. Vi indfører derfor *integreerede levels* knyttet til en kasseformet celle, der går fra x til $x+\Delta x$, fra y til $y+\Delta y$ og fra z til $z+\Delta z$. Som o-level indføres den elektriske flux $D_x \Delta y \Delta z$ og som x-level den magnetiske flux $B_y \Delta z \Delta x$. Vi skal så tænke på kantlængderne Δx , Δy og Δz som små i forhold til bølgelængden, således at feltstørrelserne med tilnærmelse er konstante over kassen. Vi vil dog ikke tænke på kassen som infinitesimal, men snarere som et *finite element*, der skal give

den bedst mulige approximation til de partielle differentiaalligninger for en endelig størrelse. Hvis vi lader den elektriske flux være defineret ved feltværdien i z , kan vi approximere den rumlige differentiaalligning bedst muligt ved følgende differensligning:

$$\frac{d}{dt} [D_x(z) \Delta y \Delta z] = H_y(z - \frac{\Delta z}{2}) \Delta y - H_y(z + \frac{\Delta z}{2}) \Delta y \quad (273)$$

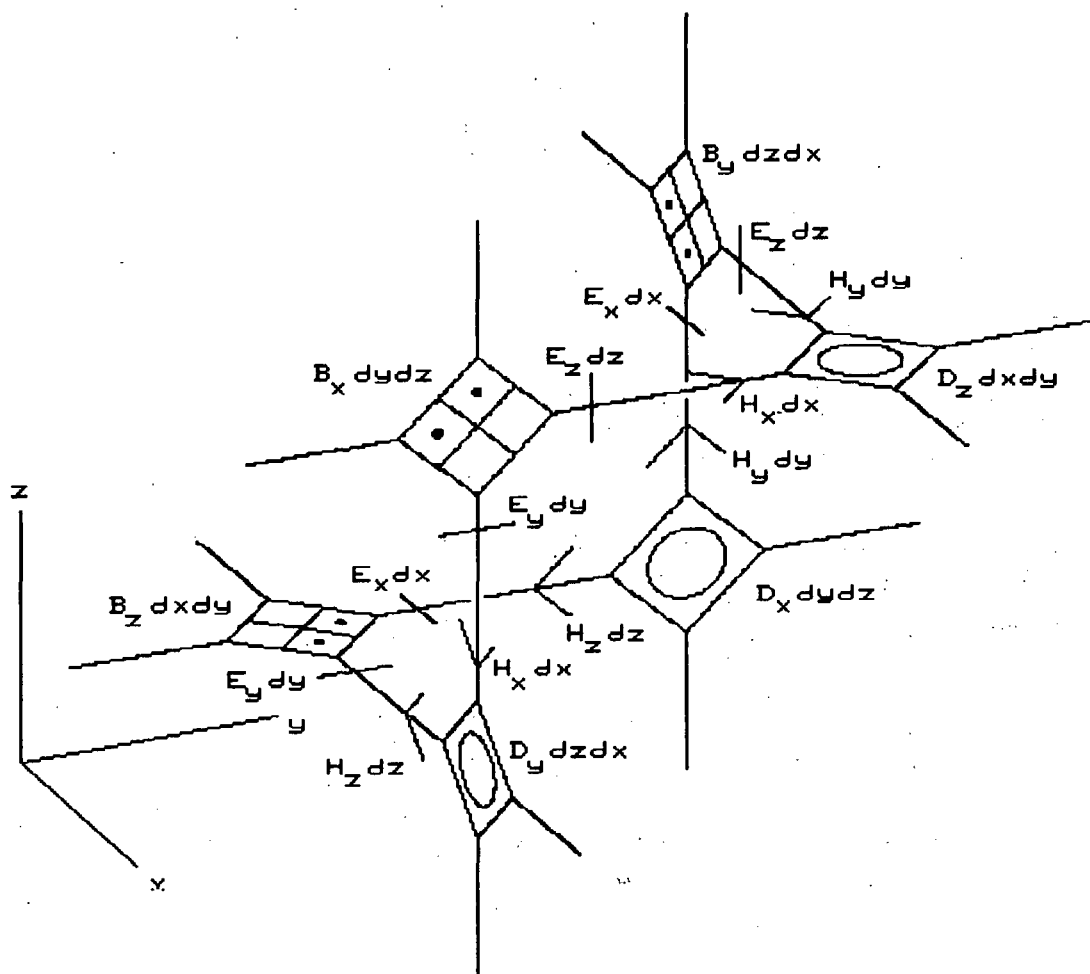
og en tilsvarende ligning for level-variablen $B_y \Delta z \Delta x$. Da ratevariablen $H_y \Delta y$ skal knyttes til z -værdierne $z - \Delta z/2$ og $z + \Delta z/2$, må de magnetiske levels også knyttes til disse punkter midtvejs mellem de elektriske levels. Vi når derved frem til følgende reticulation:



Figur 64 Udsnit af plan bølge i z -retningen.

På lignende måde kan vi reticulere hele sættet af Maxwells ligninger for vacuum som en tredimensional gitterstruktur, hvor et bestemt finite element, enhedscellen repeteres i alle tre dimensioner. Det er dog ikke så nemt at tegne enhedscellen, så på den følgende figur har vi udeladt lagrene og kun vist samlerne og energibåndene. Til gengæld er det hele vist i tredimensional projektion på en sådan måde, at enhver samler er parallel med den flade, som er vinkelret på fluxvariablen i det tilknyttede

(usynlige) lager. Lagerkapaciteterne skalerer alle proportionalt med arealet på denne flade, altså som $\Delta x \Delta y$ for en z-flux, og omvendt proportionalt med længden af cellen i feltretningen. På tegningen er Δ 'erne dog erstattet med d'er for at vise, at de partielle differentiaalligninger fremkommer i grænsen, hvor kantlængderne er infinitesimale.



Figur 65 Maxwells ligninger for vacuum (enhedscelle).

Signaltegnene for E og H felterne i båndene er også tegnet, så de viser retningen af den pågældende feltkomponent. Ser vi f.eks. på de to bånd, som går i z-retningen, så indholder det ene (som er det, der vises på figur 64) spændingen $E_x dx$ og strømmen $H_y dy$, og det andet har spændingen $E_y dy$ og strømmen $H_x dx$. Den samlede energistrøm i z-retningen er altså

$$(E_x H_y - E_y H_x) dx dy = S_z dx dy \quad (274)$$

hvilket er arealelementet af enhedscellen vinkelret på z-retningen ganget med z-komponenten af energistrømtætheden, den såkaldte *Poynting vektor*:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (275)$$

Den samlede energi i enhedscellens lagre er

$$\left(\frac{1}{2\epsilon_0} \vec{D}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) dx dy dz = u dx dy dz \quad (276)$$

hvor u er energitætheden. Energibevarelsen udtrykkes ved kontinuitetsligningen

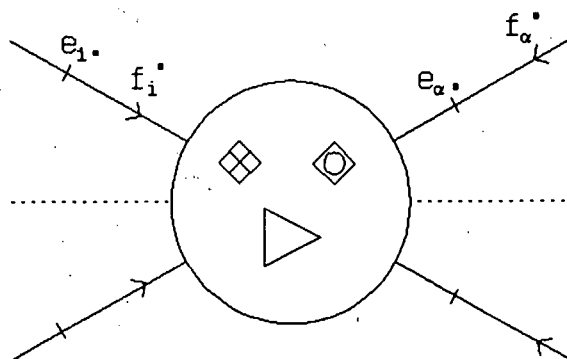
$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (277)$$

som svarer til (258) for ladningen. Lige som i (257) kan vi så konstruere en firevektor af Poyntings vektor og energitætheden, således at kontinuitetsligningen kan udtrykkes på tensorform som (259).

Når man ser en feltreticulation som figur 65, er det ikke umiddelbart synligt, at den er relativistisk invariant, dvs. har samme form i alle inertialsystemer, og at det hele kan udtrykkes på kompakt tensorform. En skalar reticulation som denne vil i de fleste tilfælde være endemålet for energibånds-semiotiske overvejelser, da den tillader numerisk løsning af de partielle differentiaalligninger med standardmetoder, og man kan naturligvis komme til den uden alle disse overvejelser om vektorbånd. Vektorbåndsformalismens berettigelse ligger i, at den kan gøre rede for den bagvedliggende logik og derved give modellen en større teoretisk dybde. Den relativistiske partikelmekanik, som udtrykt i figur 63, rummer forklaringen på, at der netop er 6 uafhængige elektromagnetiske feltstørrelser, fordi det er antallet af forskellige elementer i en antihermiteske 4×4 matrix (gyrolækken Λ).

10. Tellegen, Lagrange og Hamilton.

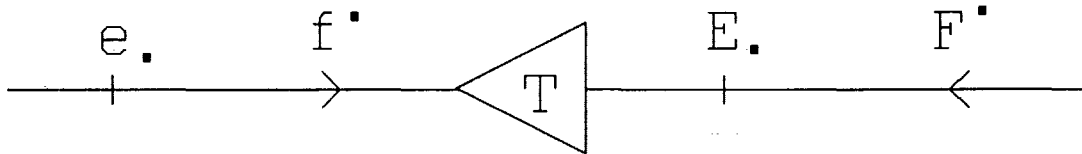
Lige som i den simple formalisme kan vi udnævne en bestemt del af en energibandsmodel til at være det såkaldte *skeletdiagram* (jfr. tekst 8, kapitel 5 ff). Det er den *topologiske* del af modellen, som gør rede for, hvordan de forskellige dele hænger sammen. Alle samlerne i modellen hører til i skeletdiagrammet, men også transformere og metriske transducere bør henregnes hertil. Karakteristisk for de komponenter, der indgår i skeletdiagrammet, er, at de alle har to eller flere porte, og at de hver især frembærer en ren strømrelation, der er uafhængig af spændingerne, og en ren spændingsrelation, der er uafhængig af strømmene. Gyrotorer hører altså ikke med til skeletdiagrammet. Hvis to systemer har samme skeletdiagram, inclusive de symbolske udtryk for transformerne, siger vi, at de er *topologisk ækvivalente*. Ser vi på skeletdiagrammet for sig, vil det være forbundet til de andre systemkomponenter (som vi nu ser bort fra) med en række porte, af hvilke nogle har strøminput og nogle har spændingsinput. På nedenstående figur har vi anbragt strømportene til venstre og nummereret dem med latinsk index, medens spændingsportene er til højre og er nummererede med græsk index. Vi indicerer alle porte med orientering ind mod skeletdiagrammet og vælger blandede varianter med covariante spændinger og contravariante strømme.



Figur 66 Skeletdiagrammet.

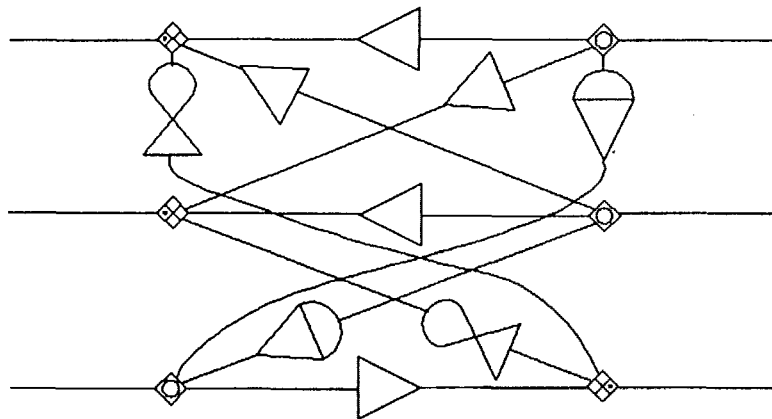
Båndene på figur 66 behøver ikke at være af samme type; de kan være forskellige med hensyn til dimension og metrik. Vi kan slå

flere bånd sammen til ét, hvis vi blot fastholder, at strømrelationer og spændingsrelationer ikke må blandes. Dvs. i -bånd kan slås sammen med i -bånd (strøminput) og α -bånd med α -bånd (spændingsinput), men aldrig et i -bånd med et α -bånd. På denne måde kan vi ende med en situation, hvor der kun er to bånd tilbage, nemlig samlingen af de oprindelige i -bånd og samlingen af de oprindelige α -bånd. Skeletdiagrammet er da blevet til en transformer:



Figur 67 Reduktion af skeletdiagrammet figur 66 til en enkelt transformer ved sammenlægning af bånd.

På denne måde får vi en meget bred fortolkning af "de topologiske egenskaber", som skeletdiagrammet beskriver. Ligeledes er reglen om, at der ikke må forekomme gyratorer i skeletdiagrammet mindre streng, for en transformer i en ikke euklidisk standardmetrik vil indeholde gyratorer, når den reticuleres ud på skalarbånd. F.eks. viser nedenstående figur en transformer-reticulation for en tredimensional standardmetrik med 1 på de to første diagonalpladser og -1 på tredje plads.



Figur 68 Skalar reticulation af tredimensional transformer i ikke euklidisk standardmetrik.

De to bånd på figur 67 kan have forskellig dimension og metrik, og i så tilfælde er transformeren ikke en egentlig transformer, men en form for transducer. Det er ikke en metrisk transducer, fordi strøm og spænding i sekundærbåndet ikke nødvendigvis er fremgået af samme transformation af strømmen og spændingen i primærbåndet, så vi vil behandle den som en transformer, men må tage hensyn til, at den tilknyttede tensor er en exotensor, dvs. involverer to forskellige metrikker. Hvis de to bånd har forskellig dimension, vil den til transduceren knyttede exotensor ikke have nogen reciprok, så ikonvending kan ikke komme på tale. Variansskift og dualitet af exotensoren involverer så to forskellige metriske tensorer og protensorer, som beskrevet i kapitel 6. Hvis vi har protensoren h' på sekundærsiden, kan vi definere

$$t = h'T \quad (278)$$

og vi har så

$$\begin{pmatrix} e. \\ F. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t. \\ -t^{+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f. \\ E. \end{pmatrix} \quad (279)$$

hvor de fede 0'er står for kvadratiske nulmatricer, medens t 'erne i almindelighed er rektangulære matricer med forskelligt antal rækker og søjler.

Formen (279) er det mest kompakte udtryk for, at spændingsrelationer og strømrelationer er helt adskilte i skeletdiagrammet. Vi kan forestille os, at spændingerne e og E hører til en fysisk situation (1) og strømmene til en anden fysisk situation (2). Måske refererer (1) og (2) til to forskellige tidspunkter i samme systems udvikling, eller måske hører de til to helt forskellige systemer, som er topologisk ækvivalente, dvs. har samme skeletdiagram. I alle tilfælde har vi:

$$\left. \begin{aligned} e^{(1)*} \cdot f^{(2)*} &= (t \cdot E^{(1)*}) \cdot f^{(2)*} = E^{(1)*} \cdot t^{**} \cdot f^{(2)*} \\ E^{(1)*} \cdot F^{(2)*} &= -E^{(1)*} \cdot t^{**} \cdot f^{(2)*} \end{aligned} \right\} (280)$$

og dette kan stilles op som en slags "arbejdsprincip" eller energibalance for skeletdiagrammet, hvilket det jo imidlertid ikke er, når (1) og (2) står for to forskellige fysiske situationer:

$$e^{(1)*} \cdot f^{(2)*} + E^{(1)*} \cdot F^{(2)*} = 0 \quad (281)$$

Vi har her en meget sammentrængt form for Tellegens teorem (jfr. tekst 8, kapitel 8), fordi alle de oprindelige bånd med spændingsinput er samlet til ét bånd og alle oprindelige bånd med strøminput er samlet til ét andet bånd. Vi kan imidlertid nemt gå den anden vej og genopløse de samlede bånd, så vi får de oprindelige tilbage, for hvert skalarprodukt i (281) er en simpel sum af tilsvarende skalarprodukter for de oprindelige bånd. Der er heller ikke i (281) nogen forskel på, hvordan bånd med spændingsinput og bånd med strøminput optræder i den sum af skalarprodukter, som giver nul. Vi kan derfor opstille et sådant sumregnskab for alle de oprindelige porte til skeletdiagrammet på formen

$$\sum_k e^{(1)*}_k \cdot f^{(2)*}_k = 0 \quad (282)$$

hvor summationsindexet k nu omfatter både i -båndene og α -båndene fra figur 66. Herved har vi den almene formulering af Tellegens teorem. Der er selvfølgelig andre formuleringer med samme generalitet. Vi kunne lige så godt have brugt covariante strømme og contravariante spændinger, men det er vigtigt, at varianserne er forskellige. Vi kunne også have komplekskonjugeret strømmene i stedet for spændingerne, men det er vigtigt, at enten strømmene eller spændingerne (men ikke både og) optræder komplekskonjugeret, hvis anvendelsen kræver komplekse vektorer. I anvendelserne inden for den analytiske mekanik, som vi snart skal

se på, er vektorerne dog reelle, og vi behøver ikke at bekymre os om komplekskonjugering.

Hvis (1) og (2) refererer til samme fysiske situation, udtrykker (282) et *arbejdsprincip* for processer, der er sammenkoblede via skeletdiagrammet. Et sådant princip benyttes som grundlag for Brønsted's energetik, der på mange måder afviger fra den klassiske termodynamik og har meget tilfælles med energibånds-synspunktet. Arbejdsprincippet kan siges at udtrykke energibevarelse, men det behøver ikke at være energi i sædvanlig forstand, der strømmer i båndene, hvilket vi jo har set et eksempel på i den relativistiske partikeldynamik i foregående kapitel. Det er karakteristisk for energibåndsmetoden og for Brønsted's energetik, at man ikke på forhånd behøver at definere, hvad det er for en slags energi, der løber i båndene, om det f.eks. er Helmholtz' eller Gibbs' fri energi eller noget helt tredje. Energiens "frihed" eller mangel på samme hænger sammen med i hvor høj grad det er muligt at lade systemet udføre arbejde på et "arbejdsreservoir" i omgivelserne, f.eks. et lod, der kan hæves og sænkes, og denne mulighed fremgår af den samlede energibåndsstruktur og kan ikke diskuteres for det enkelte bånd, uafhængigt af sammenhængen.

Hvis (1) og (2) er to forskellige situationer, har (282) ikke noget at gøre med energibevarelse. Man udtrykker ofte Tellegens teorem ved at sige, at strømvektoren og spændingsvektoren ligger i ortogonale vektorrum, men det må betones, at det ikke er muligt at definere én spændingsvektor og én strømvektor; de to bånd, der er tilbage på figur 67 kan ikke slås sammen til ét bånd.

En række nyttige formuleringer af teoremet opnås ved indførelse af begrebet *virtuelle ændringer*. Hvis vi benytter (282) med situation (2) er forskellig fra situation (1) og derfra fratrækker versionen, hvor (2) er identisk med (1), fås

$$\sum_k e^{(1)*}_k \cdot (f^{(2)}_k - f^{(1)}_k) = 0 \quad (283)$$

Differensen mellem de to strømvektorer kaldes en virtuel, dvs. en tænkt ændring af strømmen. Det er jo en forudsætning, at skeletdiagrammet er det samme for de to situationer (1) og (2). For en virkelig udvikling af et fysisk system vil skeletdiagrammet ofte indeholde transformere, der er parametrisk afhængige af visse level-variable. Når strømmene ændres som resultat af systemets dynamik, vil level variablene også ændres, og derfor er ændringer af strømmene med fastholdt skeletdiagram en tænkt ændring, som muligvis ikke kan finde sted som led i et systems tidslige udvikling. Vi benytter symbolet δ for en virtuel ændring og kan så skrive (283) på formen

$$\sum_k e^*_k \cdot \delta f_k = 0 \quad (284)$$

Selvfølgelig har vi så også

$$\sum_k \delta e^*_k \cdot f_k = 0 \quad ; \quad \sum_k \delta e^*_k \cdot \delta f_k = 0 \quad (285)$$

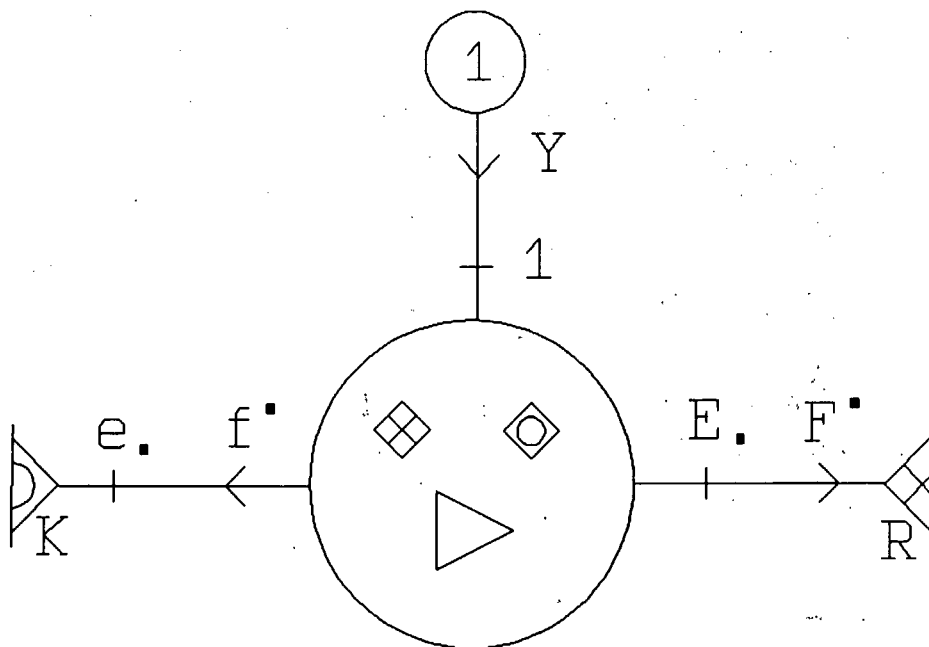
plus en hel del andre versioner, hvor der er skiftet varianser, eller hvor komplekskonjugeringen er flyttet fra e til f .

Vi kan også til hvert enkelt bånd knytte *cykliske levels*, en cyklisk impuls p (x -level), som er tidsintegralet af spændingen, og en cyklisk forskydning q (o -level), som er tidsintegralet af strømmen. Vi kan så lave forskellige integrerede versioner, f.eks. svarende til (284) får vi

$$\sum_k e^*_k \cdot \delta q_k = 0 \quad (286)$$

Som eksempel på anvendelsen af Tellegens teorem kan vi se på følgende problem: Hvis vi har et stort elektrisk netværk med modstande i alle grenene og vi forbinder en spændingskilde til to vilkårligt udvalgte knuder i nettet, hvordan vil den resulterende ledningsevne, set fra spændingskilden, variere, når vi ændrer en af grenenes ledningsevne?

I tekst 8, kapitel 8 er det vist, hvordan det topologiske system af knuder, grene og masker, der udgør et elektrisk netværk, kan oversættes til et skeletdiagram, der udelukkende indeholder samlere. I en sådan skalar reticulation vil nogle af grenmodstandene få strøminput og andre spændingsinput, og desuden vil et enkelt skalarbånd forbinde skeletdiagrammet med spændingskilden. Vi kan samle alle båndene med spændingsinput til grenmodstandene til et enkelt vektorbånd og alle båndene med strøminput til grenene til et andet vektorbånd, medens vi beholder båndet til spændingskilden som et skalarbånd. Alle disse tre bånd er så euklidiske, så vi behøver ikke at skelne mellem covariante og contravariante vektorer. Vi vil nu alligevel angive variansen i de to vektorbånd af hensyn til den generelle formulering. Vi sætter spændingen fra spændingskilden til 1, og strømmen i dette bånd er så givet ved Y , netværkets resulterende ledningsevne.



Figur 69 Netværk med spændingskilde og grenmodstande.

Da netværket kun indeholder separate grenmodstande, vil ledningsevnetensoren K og modstandstensoren R have diagonale matricer med reelle og positive diagonalelementer. Vi benytter nu

to forskellige versioner af Tellegens teorem, først med virtuelle strømændringer og dernæst med virtuelle spændingsændringer. Da båndet til spændingskilden har modsat orientering af de to vektorbånd, vil det optræde med modsat fortegn i summen, og vi trækker derfor produktet for dette bånd over på den anden side af lighedstegnet. I den anden version af teoremet bliver dette led 0, for spændingskilden skal have den konstante værdi 1.

$$\left. \begin{aligned} E^* \cdot \delta F' + e^* \cdot \delta f' &= \delta Y & (a) \\ F^{*'} \delta E. + f^{*'} \delta e. &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (287)$$

Hvis de virtuelle ændringer af strømme og spændinger alene skyldes en ændring af ledningsevnetensoren K , har vi:

$$\left. \begin{aligned} e^* \cdot \delta f' &= e^* \cdot K' \cdot \delta e. + e^* \cdot \delta K' \cdot e. \\ f^{*'} \delta e. &= e^* \cdot K' \cdot \delta e. \\ E^* \cdot \delta F' &= F^{*'} \delta E. = F^{*'} R. \cdot \delta F' \end{aligned} \right\} \quad (288)$$

Vi har her benyttet, at K - og R -matricerne er diagonale og reelle. Ved subtraktion af (287 b) fra (287 a) og benyttelse af (288) får vi så

$$\delta Y = e^* \cdot \delta K' \cdot e. \quad (289)$$

Hvis der kun er én af grenledningsevnerne, der ændres, K_i , er der kun ét af diagonalelementerne i δK matricen, der er forskelligt fra nul. Vi finder da

$$\frac{\partial Y}{\partial K_i} = |e_i|^2 \quad (290)$$

Dette resultat ser simplere ud, end det egentlig er. Hvis vi i stedet for det dybsindige Tellegen teorem havde brugt det simple arbejdsprincip, kunne vi straks skrive

$$Y = \sum_i K_i |e_i|^2 + \sum_k R_k |F^k|^2 \quad (291)$$

og det ser da ud som om, vi kunne få (290) direkte ved bare at differentiere Y med hensyn til K_i . Dette argument holder dog ikke, for hvis K_i ændres, vil alle grenspændingerne og -strømmene også ændres, og derfor kan man ikke udlede (290) fra (291) uden ekstra overvejelser.

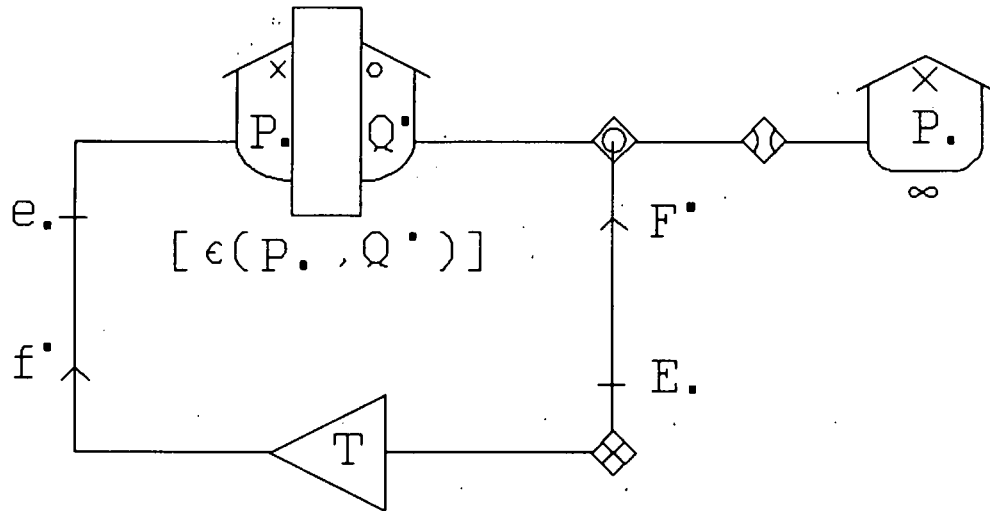
Vi skal nu se, hvordan Tellegens teorem kan benyttes til udledning af grundlæggende principper for den analytiske mekanik i energibandsformulering. Vi vil i det følgende regne med, at de mekaniske systemer beskrives ved reelle generaliserede koordinater (forskydninger, o-levels) og at alle kræfter, impulser og hastigheder er reelle. Vi behøver derfor ikke tage hensyn til komplekskonjugeringen i de forskellige formuleringer af Tellegens teorem.

Det mekaniske system antages at være *autonomt*, dvs. at vi ikke behøver kilder i reticulationen. Vi vil også se bort fra *gnidning* og andre former for dissipation, dvs. lække forekommer heller ikke. Systemets tilstand skal kunne beskrives ved en o-level vektor Q , som vi kalder koordinatvektoren, og en x-level vektor p , som vi kalder impulsvektoren, og der må kunne angives en energifunktion af disse to vektorer. Vi antager desuden, at koordinat- og impulsvektoren har *samme dimension*, og at alle vektorbånd også vil have denne dimension, samt en *fælles metrik*.

I almindelighed vil det ikke være muligt at separere de variable i energifunktionen, dvs. skrive energifunktionen som en sum af led, der hver kun afhænger af en enkelt af de dynamiske variable. Dette vil dog undertiden være muligt, hvis man vælger Q og p på en bestemt måde, men foreløbig vil vi tænke os, at Q og p er valgt ud fra et andet kriterium, f.eks. at de virker "naturlige". Generaliserede koordinater vælges som regel således, at de på en simpel måde udtrykker de forskellige stive bånd, som systemet er pålagt, således at man i beskrivelsen slipper for at

skulle indregne de reaktionskræfter, som sørger for, at båndene overholdes. Hvis vi f.eks. har en stiv stang, som kan rotere om et fast punkt, så er det naturligt at vælge en drejningsvinkel om dette punkt som generaliseret koordinat, idet man så stiltiende går ud fra, at navet er stift nok til at fastholde omdrejningspunktet, når stangen roterer. Impulser kan vælges, så de på en simpel måde hænger sammen med de generaliserede hastigheder, f.eks. som inertimoment gange vinkelhastighed. Valget af simple eller naturlige koordinater og impulser kan så have den ulempe, at det fører til en indviklet energifunktion, og man må så i anden omgang overveje, om det kan betale sig at omdefinere de variable for at få et simplere udtryk for energien. Vi vil dog gå ud fra, at koordinatvalget ligger fast, og at vi kan klare os med at omdefinere impulser, og derfor betegner vi koordinatvektoren med stort Q og kalder den *kanonisk*.

Impulsvektoren, som indgår i energifunktionen har ikke nogen kanonisk status, så vi betegner den med lille p . Vi vil dog stille det krav til impulsvektoren, at den sammen med koordinatvektoren muliggør en *lukket* dynamisk beskrivelse, dvs. der må ikke optræde andre energibandsvektorer i form af hastigheder og kræfter end dem, der kan afledes af energifunktionen. I første omgang vil vi altså ikke acceptere en reticulation som figur 63, hvor kræfterne fra det elektromagnetiske felt introduceres via en gyrolæk. Der må heller ikke optræde gyratorer, som jo afspejler et ydre felt, der bryder tidsvendingsymmetrien (jfr. kapitel 5). Hele dynamikken ligger i et toport energilager med en p -port og en Q -port og i det skeletdiagram, som forbinder de to porte. Vi kan derfor benytte nedenstående reticulation, hvor der dog foruden de nødvendige bestanddele er indført en *cyklisk impuls* P , der senere vil blive identificeret som den kanoniske impuls i Hamiltons ligninger. Foreløbig er den kun en regnestørrelse, som ikke er nødvendig for dynamikken.



Figur 70 Autonomt mekanisk system.

En integreret version af Tellegens teorem giver nu:

$$f' \delta p. = F' \delta P. \quad (292)$$

Vi indfører Lagrange-funktionen L ved definitionen

$$L = P.F' - \epsilon(p., Q') \quad (293)$$

og får så ved brug af (292)

$$\left. \begin{aligned} \delta L &= P.\delta F' + F'\delta P. - f'\delta p. - E.\delta Q' \\ &= P.\delta F' - E.\delta Q' \end{aligned} \right\} (294)$$

Den virtuelle ændring af Lagrange funktionen kan altså udtrykkes ved de virtuelle ændringer af koordinatvektoren (Q) og hastighedsvektoren (F). Disse to vektorer er ganske vist ikke uafhængige, for hastighedsvektoren er jo den tidsafledede af koordinatvektoren, men de virtuelle ændringer i (294) behøver ikke at respektere denne afhængighed. Vi kan derfor definere partielle afledede af L , som om den var en funktion af to uafhængige vektorer:

$$\left(\frac{\partial L(F', Q')}{\partial F'} \right)_{Q'} = P. \quad ; \quad \left(\frac{\partial L(F', Q')}{\partial Q'} \right)_{F'} = -E. \quad (295)$$

Vi vil nu se på et tænkt forløb, hvor de virtuelle koordinatændringer starter til et tidspunkt τ_1 og slutter til et andet tidspunkt τ_2 .

$$\delta Q'(\tau) = 0 \quad \text{for} \quad \tau \leq \tau_1 \quad \text{og} \quad \tau \geq \tau_2 \quad (296)$$

Vi finder da ved delvis integration, idet vi udnytter, at E . er den tidsafledede af P . med modsat fortegn, og F' er den tidsafledede af Q' , samt at $\delta Q'$ forsvinder i grænserne τ_1 og τ_2 :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} E \cdot \delta Q' d\tau = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dP}{d\tau} \delta Q' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} P \cdot \delta F' d\tau \quad (297)$$

Heraf og af (294) kan vi så udlede *Hamiltons princip*:

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = 0 \quad (298)$$

Integralet af Lagrangefunktionen over tid kaldes *virkningsintegralet*, eller blot *virksomheden*, og (298) udtrykker altså, at virkningen har et ekstremum for den historie af virtuelle koordinatændringer, som er den virkelige historie, sådan som dynamikken dikterer den. I (298) er der taget hensyn til, at den virtuelle ændring af hastighedsvektoren ikke er uafhængig af de virtuelle koordinatændringer, så historien tegnes alene af koordinaterne som funktion af tiden τ , systemets egentid. Ved variationsregning fører ekstremumsbetingelsen til *Euler-Lagrange* ligningen

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^{\cdot}} \delta Q^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial F^{\cdot}} \delta F^{\cdot} \right\} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^{\cdot}} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial F^{\cdot}} \right) \right\} \delta Q^{\cdot} d\tau = 0 \quad (299)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial Q^{\cdot}} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial F^{\cdot}} \right) = 0$$

Spørgsmålet er nu, hvordan Lagrange funktionen skal bestemmes, for definitionen (293) involverer to sæt impulser, og de cykliske impulser P . har ikke direkte noget med energien at gøre. Vi vil gøre den antagelse, at systemets kinetiske energi kan udtrykkes som en homogen kvadratisk form i hastighederne:

$$\epsilon_{kin} = \frac{1}{2} F^{\cdot} M \cdot F^{\cdot} = \frac{1}{2} f^{\cdot} m \cdot f^{\cdot} \quad (300)$$

Dette betyder så også, at den kinetiske energi er kvadratisk i p ., og at der er en lineær sammenhæng mellem p . og f .:

$$\epsilon_{kin} = \frac{1}{2} p \cdot m^{-1} \cdot p \quad ; \quad p \cdot = m \cdot f^{\cdot} \quad (301)$$

Da vi nu også har en lineær sammenhæng mellem de to hastighedsvektorer, givet ved transformeren T i figur 70:

$$F^{\cdot} = T^{\cdot\cdot} \cdot f^{\cdot} = f^{\cdot} T \cdot \quad (302)$$

har vi følgende sammenhæng mellem de to inerti-tensorer i (300):

$$m = TMT^{\cdot\cdot} \quad (303)$$

Den lineære sammenhæng mellem de to hastighedsvektorer i (302), kombineret med (292), viser, at der må gælde en tilsvarende lineær sammenhæng mellem p . og P . :

$$p. = T. \cdot P. \quad (304)$$

således at vi også har:

$$\epsilon_{kin} = \frac{1}{2} P. M^{-1} \cdot \cdot P. \quad ; \quad P. = M. \cdot F' \quad (305)$$

Vi får så:

$$P. F' = p. f' = 2\epsilon_{kin} \quad (306)$$

Lagrange funktionen (293) kan derfor skrives på formen

$$L(F', Q') = \epsilon_{kin}(F', Q') - \epsilon_{pot}(Q') \quad (307)$$

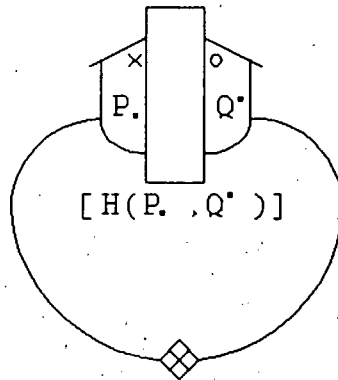
hvor ϵ_{pot} er den potentielle energi, som kun kan afhænge af koordinaterne, hvorimod ϵ_{kin} gennem inertanstensoren M kan afhænge af koordinaterne udover den kvadratiske afhængighed af hastighederne. Summen af den kinetiske og den potentielle energi er energifunktionen ϵ , som vi kan udtrække som funktion af impulser og koordinater, og i stedet for de oprindelige impulser $p.$ kan vi substituere den kanoniske impulsvektor $P.$ ved brug af (304). Den således fremkomne energifunktion kaldes systemets *Hamilton funktion* $H(P., Q')$. Vi har ved brug af (293) og (294):

$$\left. \begin{aligned} \delta H = \delta (P. F' - L) &= F' \delta P. + E. \delta Q' \\ \left(\frac{\partial H}{\partial P.} \right)_{Q'} &= F' \quad ; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial Q'} \right)_{P.} = E. \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Da F' er den tidsafledede af Q' og $E.$ er den tidsafledede af $P.$ med modsat fortegn, får vi *Hamiltons ligninger*:

$$\frac{dQ'}{d\tau} = \left(\frac{\partial H}{\partial P'} \right)_{Q'} ; \quad \frac{dP'}{d\tau} = - \left(\frac{\partial H}{\partial Q'} \right)_{P'} \quad (309)$$

Det viser sig altså, at diagrammet figur 70 kan reduceres til den kanoniske form



Figur 71 Hamiltons ligninger.

Ved udledningen af Lagrangeligningen (299) og Hamiltonligningerne (309) er der gjort en række forudsætninger, som ikke alle er nødvendige for ligningernes gyldighed. Vi kan f.eks. vise, at den relativistiske bevægelse af en ladet partikel i et elektromagnetisk felt, som blev behandlet i kapitel 9, kan udledes af Hamiltons ligninger, når vi bruger Hamilton funktionen

$$H(P., X') = \frac{1}{2m} (P. - qA.) G' (P. - qA.) \quad (310)$$

Her er X' partiklens koordinatvektor, svarende til Q' i dette kapitel, og $P.$ er den kanoniske impuls, som imidlertid ikke er identisk med 4-impulsen fra foregående kapitel. Vi får nemlig af den første Hamilton ligning:

$$\frac{dX'}{d\tau} \doteq U' = \left(\frac{\partial H}{\partial P'} \right)_{X'} = \frac{1}{m} (P' - qA') \quad (311)$$

hvorimod den tidligere benyttede 4-impuls jo er lig med massen gange 4-hastigheden. Hamilton funktionen afhænger af koordinatvektoren gennem $A.$, så den anden Hamilton ligning giver:

$$\frac{dP_i}{d\tau} = - \left(\frac{\partial H}{\partial X^i} \right)_P \doteq - \partial_i H = \frac{q}{m} (\partial_i A_j) (P^j - qA^j) \quad (312)$$

Vi finder da ved kombination af (311) og (312) følgende udtryk for 4-kraften F . i figur 63:

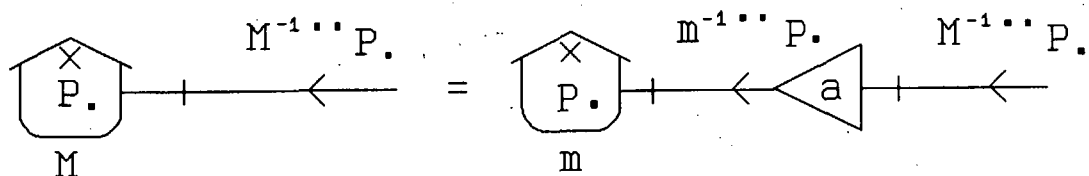
$$F_i = m \frac{dU_i}{d\tau} = \frac{dP_i}{d\tau} - q(\partial_j A_i) U^j = - \Lambda_{ij} U^j \quad (313)$$

hvor vi har benyttet udtrykkene (264) og (268) for gyrolækken Λ i figur 63.

Vi ser altså, at Hamilton formalismen fungerer i dette tilfælde, selv om forudsætningen om, at den kinetiske energi er kvadratisk i impulsen, ikke er opfyldt med Hamilton funktionen (310). (Energien er dog kvadratisk i hastighedsvektoren, lige som for en fri partikel). Den kanoniske impuls P i (310) og (311) er mindre anskuelig end den kinetiske impuls mU i figur 63. Hamiltonformalismen er en symbolsk teori, der knytter an til mange discipliner i fysikken, men når det gælder ikonisk anskuelighed og direkte numerisk løsbare står den noget tilbage for både Lagrange- og energibåndsformalismen. Lagrangeformalismen kræver, at den kinetiske energi udtrykkes som funktion af hastighederne, og det er som regel ret nemt således at bestemme Lagrange funktionen, når den kan udtrykkes som i (307). Hamiltonformalismen kræver yderligere, at den kanoniske impuls bestemmes af (295) udtrykt ved hastighederne, og at man dernæst eliminerer hastighederne til fordel for de kanoniske impulser i den kinetiske energi, og det kan godt være ret kompliceret. Energi-båndsformalismen opererer med koordinater og impulser (o- og x-levels) lige som Hamiltonformalismen, men kræver ikke, at impulserne skal være kanoniske. Det er derfor muligt med energibåndsformalismen at udnytte det ekstra spillerum mellem de to andre formalismer og vælge den i den givne situation simpleste og mest anskuelige løsning.

Lad os igen forudsætte, at den kinetiske energi er kvadratisk i den kanoniske impulsvektor P , dvs. at den kan udtrykkes ved en inertanstensor M . som i (301). Denne tensor må

være hermitesk og kan derfor diagonaliseres til en form m .. med reelle diagonal elementer ved hjælp af en transformer a :



Figur 72 Diagonalisering af inertanstensor.

Vi har så (jfr. (303) og (304)):

$$p. = a. \cdot P. \quad ; \quad m = aMa^+ \quad (314)$$

I almindelighed vil den oprindelige inertitensor M afhænge af koordinatvektoren Q' , men vi kan ved passende valg af transformer a opnå, at den diagonale inertitensor m er uafhængig af koordinaterne. Det vil så betyde, at a kommer til at være koordinatafhængig. Da koordinaterne ændrer sig under systemets udvikling, kan vi ikke regne med, at den transformerede impulsvektor er tidsintegralet af den transformerede spændingsvektor. Desuden kan vi heller ikke regne med, at den utransformerede spændingsvektor er den tidsafledede af den kanoniske impuls, for den partielle afledede af energifunktionen med hensyn til koordinatvektoren er noget andet, når den nye impuls $p.$ er fastholdt, end når den kanoniske impuls fastholdes. For den nye energifunktion E , har vi

$$\left. \begin{aligned} E(p., Q') &= H(P., Q') \\ \delta E &= \frac{dQ'}{d\tau} \delta P. - \frac{dP.}{d\tau} \delta Q' \end{aligned} \right\} \quad (315)$$

Kaldes den utransformerede spænding, dvs. spændingen på primærsiden af a -transformeren for $e.$, har vi

$$e_j = - \left(\frac{\partial E}{\partial Q^j} \right)_p = \frac{dP_j}{d\tau} - \frac{dQ^k}{d\tau} \left(\frac{\partial P_k}{\partial Q^j} \right)_p \left. \vphantom{\frac{dP_j}{d\tau}} \right\} \quad (316)$$

$$= \frac{dP_j}{d\tau} - \frac{dQ^k}{d\tau} \frac{\partial a^{-1}_{k^1}}{\partial Q^j} p_1$$

Den tidsafledede af den nye impuls p . er så

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (a_i^j P_j) = \left. \vphantom{\frac{d}{d\tau}} \right\} \quad (317)$$

$$a_i^j \left(e_j + U^k \frac{\partial a^{-1}_{k^1}}{\partial Q^j} p_1 \right) + P_j \frac{\partial a_i^j}{\partial Q^k} U^k$$

hvor vi igen har indført vektorsymbolet U for den tidsafledede af koordinatvektoren. Vi benytter nu:

$$P_j = a^{-1}_{j^1} p_1 \quad ; \quad a^{-1}_{j^1} \frac{\partial a_i^j}{\partial Q^k} = -a_i^j \frac{\partial a^{-1}_{j^1}}{\partial Q^k} \quad (318)$$

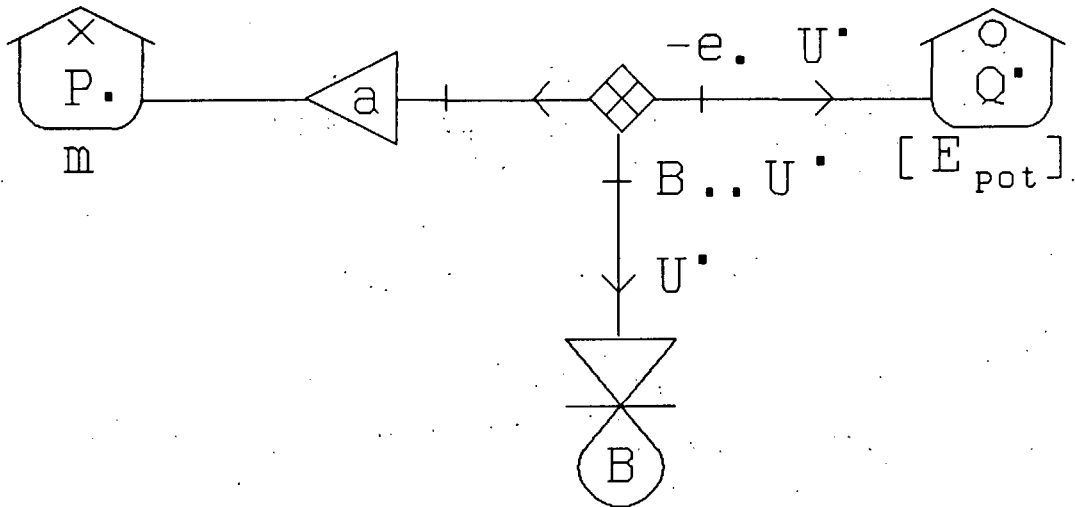
og kan så skrive (317) på formen

$$\frac{dp_i}{d\tau} = a_i^j \left\{ e_j - \left[\frac{\partial a^{-1}_{j^1}}{\partial Q^k} - \frac{\partial a^{-1}_{k^1}}{\partial Q^j} \right] p_1 U^k \right\} \quad (319)$$

Med dette udtryk får vi en opskrift på reticulation, som viser sig meget anvendelig. For det første har vi fået separeret energifunktionen i en potentiel energi og en diagonal kinetisk energi, og for det andet finder vi et bidrag til kraften, der kan udtrykkes ved en gyrolæk, lige som i figur 63, idet faktoren, som hastigheden ganges med i (319) er en antihermiteske tensor:

$$B_{jk} = \left[\frac{\partial a^{-1}{}_j{}^l}{\partial Q^k} - \frac{\partial a^{-1}{}_k{}^l}{\partial Q^j} \right] p_l \quad (320)$$

Vi kan altså benytte følgende diagram:

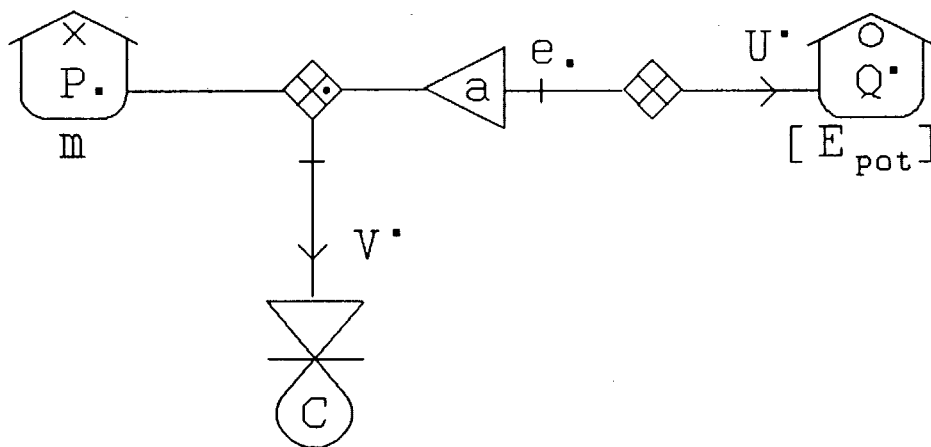


Figur 73 Standard mekanisk reticulation.

I næste kapitel skal vi se, at den her angivne metode har en række anvendelser fra klassisk analytisk mekanik til generel relativitetsteori.

11. Mekaniske reticulationer.

Vi skal i dette kapitel se på en række mekaniske eksempler, som alle beskrives med et sæt generaliserede koordinater Q og et sæt impulser p ., som ikke er de til koordinaterne hørende kanoniske impulser, men som har det fortrin, at de diagonaliserer den kinetiske energi. Som vi skal se, fører figur 73 til den mest anvendelige generelle opskrift på reticulation, men i visse tilfælde kan det betale sig at afvige lidt fra den. Vi skal se på en anden variant, som indeholder den samme diagonaliserende transformer a som figur 73, men hvor der optræder en gyrolæk C , der er rykket over på den anden side af transformeren.



Figur 74 Alternativ til figur 73.

Da den nye gyrolæk C skal give samme spændingsinput til p -lageret som den tidligere B , men har et andet hastighedsinput og er på den anden side af transformeren, må den have en anden tensor. Vi har

$$U = a^{*'} \cdot V = V' a \cdot ; \quad C \cdot V = a \cdot B \cdot U \quad (321)$$

så vi får af (320):

$$C_{ij} = a_i^k a_j^l B_{kl} = a_i^k a_j^l \left[\frac{\partial a^{-1 k m}}{\partial Q^l} - \frac{\partial a^{-1 l m}}{\partial Q^k} \right] p_m \quad (322)$$

Med brug af (318) og efterfølgende ombytning af de dobbelte indices k og l i et af leddene finder vi:

$$C_{ij} = \left[a_i^k \frac{\partial a_j^l}{\partial Q^k} - a_j^k \frac{\partial a_i^l}{\partial Q^k} \right] P_l \quad (323)$$

altså et forholdsvis simpelt udtryk i de Hamiltonske kanoniske variable P og Q. Det viser sig, at opskriften figur 74 lægger sig tæt op ad Hamiltonformalismen, hvor figur 73 ligger nærmere ved Lagrangeformalismen. For at se dette indfører vi den såkaldte *Poisson parantes* af to størrelser A og B, der begge opfattes som funktioner af de kanoniske variable:

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial Q^k} \frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k} \frac{\partial B}{\partial Q^k} \quad (324)$$

Ved de partielle differentiationer underforstår vi nu, at det er de øvrige *kanoniske variable*, som fastholdes. Det er ikke nogen tilfældighed, at vi bruger den firkantede parantes både til Poisson paranteser og til kommutatoren af to matricer (jfr. (235) og (239)), for i kvantemekanikken viser det sig, at kommutatoren af to observabel-operatorer er nært forbundet med den klassiske Poisson parantes. For enhver funktion A, der ikke afhænger eksplicit af tiden, men kun implicit gennem de kanoniske variable (vi siger så, at A er en fasefunktion), gælder så i kraft af Hamiltons ligninger:

$$\frac{dA}{d\tau} = [A, H] \quad (325)$$

For de kanoniske variables Poisson paranteser finder vi:

$$[Q^i, Q^j] = [P_i, P_j] = 0 \quad ; \quad [Q^i, P_j] = \delta_{ij} \quad (326)$$

Når vi indfører impulsvektoren p . fra figur 73 og 74 i stedet for den kanoniske impulsvektor P . , finder vi (jfr. (314)):

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = a_i^k ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = \frac{\partial a_i^l}{\partial Q^k} P_l \quad (327)$$

og dermed

$$\left. \begin{aligned} [p_i, Q^j] &= -a_i^j \\ [p_i, p_j] &= -C_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

Vi ser således, at alle de koefficienter, der indgår i transformeren og gyrolækken på figur 74, på en simpel og logisk måde er udtrykt ved Poisson paranteser mellem præcis de variable, de forbinder. Dette gælder ikke for figur 73, som derfor umiddelbart ikke fremtræder så smukt relateret til den analytiske mekanik (se f.eks. Goldstein). Som påvist af Jesper Gundermann (1976) er der imidlertid en anden metode, der bygger på *Lagrange paranteser*, som er lettere at anvende end Poisson parantesereticulationen. Lagrange parantesen af A og B er defineret ved

$$\{A, B\} = \frac{\partial Q^k}{\partial A} \frac{\partial P_k}{\partial B} - \frac{\partial P_k}{\partial A} \frac{\partial Q^k}{\partial B} \quad (329)$$

og for koefficienterne i figur 73 gælder

$$\left. \begin{aligned} a^{-1}_i{}^j &= \{Q^i, p_j\} \\ B_{ij} &= \{Q^i, Q^j\} \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

Lagrange paranteserne ser ikke så indbydende ud som Poisson paranteserne, men brugen af figur 73 kræver sådan set ikke, at man benytter (329) og (330). Vi vil kalde figur 73 Lagrange-

reticulationen og figur 74 Poisson-reticulationen. For at benytte Lagrange reticulationen skal man gennemføre følgende program:

- 1) Vælg et passende sæt generaliserede koordinater Q' .
- 2) Udtryk den kinetiske energi ved de generaliserede hastigheder

$$U' = \frac{dQ'}{d\tau} \quad ; \quad E_{kin} = \frac{1}{2} U' M(Q') \dots U'$$

- 3) Bestem en lineær hastighedstransformation, a^{-1} , som diagonaliserer den kinetiske energi, således at den transformerede inertitensor er uafhængig af koordinaterne

$$V' = U' a^{-1}(Q') \dots \quad ; \quad E_{kin} = \frac{1}{2} V' m \dots V'$$

- 4) Indfør impulsvektoren $p' = m \dots V'$ og bestem gyrolækken B' ved ligning (320).

Ved brug af Poisson reticulationen skal man også starte med at gennemføre punkt 1), 2) og 3) som ovenfor, men dertil kommer så et ekstra punkt:

- 3a) Bestem den kanoniske impulsvektor P' ved at differentiere den kinetiske energi med hensyn til hastighedsvektoren U' .

Dernæst gennemføres punkt 4) med den ændring, at det nu er gyrolækken C' , der skal bestemmes ved ligning (323). Ved numerisk integration af den således fremkomne model skal man løbende holde regnskab med både den diagonaliserende impulsvektor p' og den kanoniske impulsvektor. Alt i alt er det derfor noget mere kompliceret at bruge Poisson reticulationen, figur 74, end at bruge Lagrange-reticulationen, figur 73.

Der er dog visse tilfælde, hvor en gyrtorstruktur som C på figur 74, der er tæt knyttet til impulsvektoren, byder sig naturligt til. Som eksempel på dette, skal vi se på Euler ligningerne for et stift legemes bevægelse i tre dimensioner med en euklidisk metrik. Til et sådant legeme er knyttet en inertimoment-tensor $I...$, som diagonaliseres i et til legemet fast knyttet koordinatsystem efter legemets tre hovedakser, \vec{n}_i . Impulsmomentvektoren \vec{L} og vinkelhastigheden $\vec{\omega}$ (begge normale tredimensionale vektorer) kan så opløses i komponenter efter de tre hovedakser:

$$\left. \begin{aligned} \vec{L} &= L_1 \vec{n}_1 + L_2 \vec{n}_2 + L_3 \vec{n}_3 \\ \vec{\omega} &= \omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3 \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

og sammenhængen mellem disse størrelser er så givet ved den diagonale inertimoment-tensors værdier:

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad ; \quad L_2 = I_2 \omega_2 \quad ; \quad L_3 = I_3 \omega_3 \quad (332)$$

Drejningen af legemet får hovedakserne til at ændre retning:

$$\frac{d\vec{n}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{n}_i \quad (333)$$

(der er nu ingen grund til at skelne mellem egentiden τ og koordinattiden t). Hvis legemet er påvirket af et kraftmoment

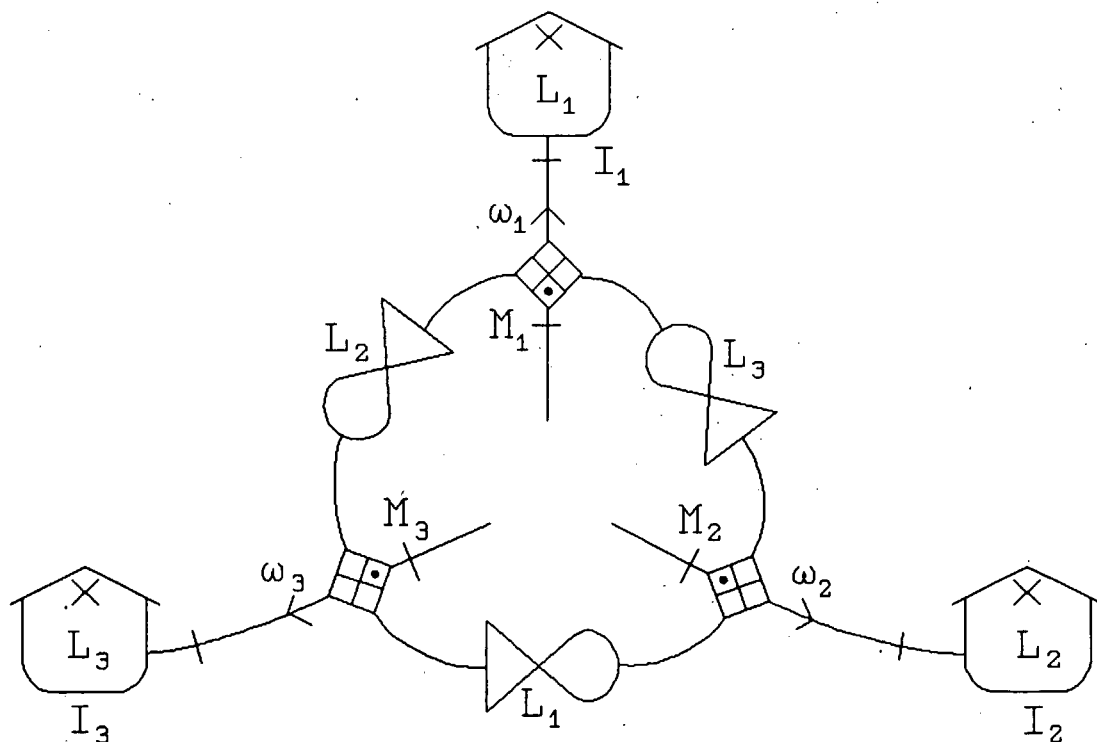
\vec{M} , vil ændringshastigheden af impulsmomentet i forhold til inertialsystemet være givet ved dette kraftmoment,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (334)$$

og det betyder, at impulsmomentets komponenter efter de tre hovedakser ændrer sig af to grunde, (333) og (334):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{n}_i) = \vec{M} \cdot \vec{n}_i + \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{n}_i) \\ &= [\vec{M} + (\vec{L} \times \vec{\omega})] \cdot \vec{n}_i \end{aligned} \right\} \quad (335)$$

Denne Euler ligning kan udtrykkes ved nedenstående reticulation, hvor vi ser gyrolækken C fra figur 74 udviklet på tre skalare gyrotorer:

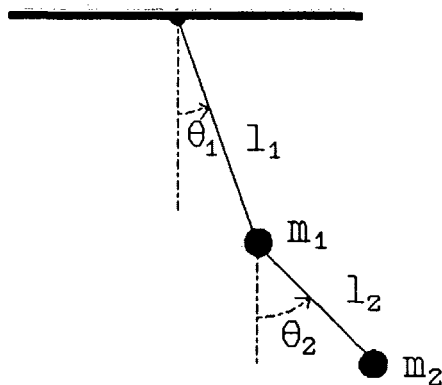


Figur 75 Euler ligning for stift legemes bevægelse.

Gyrotorstrukturen på figur 75 er altså en fast ingrediens i ethvert stift legemes bevægelse, men derfra og til at fuldende

den dynamiske beskrivelse kan der være et langt stykke vej. Transformeringen a fra figur 74 vil i dette tilfælde transformere fra inertialsystemet til legemets hovedaksesystem og kan f.eks. udtrykkes ved Euler-vinklerne (se Goldstein). Desuden kan der optræde kinematiske bånd som rulning på et underlag eller lignende, som vi ikke her vil gå i detaljer med.

Som et ikke-relativistisk eksempel på brug af Lagrange-reticulationen figur 73 vil vi se på *det matematiske dobbeltpendul*, der består af to stive, masseløse stænger med længderne l_1 og l_2 og med punktmasser m_1 og m_2 for enden. Den første stangs endepunkt fungerer som omdrejningspunkt for den anden stang. Som generaliserede koordinater Q^1 og Q^2 vælger vi de to stængers vinkler med lodlinjen, θ_1 og θ_2 .



Figur 76 Dobbeltpendulet.

Den potentielle energi af dobbeltpendulet er

$$\left. \begin{aligned} E_{pot}(\theta_1, \theta_2) &= m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) \\ &+ m_2 g [l_1 (1 - \cos\theta_1) + l_2 (1 - \cos\theta_2)] = \\ &-g[(m_1 + m_2) l_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \cos\theta_2] + \text{konst.} \end{aligned} \right\} (336)$$

dvs. den potentielle energi kan separeres ud på to simple, men ikke-lineære o-lagre.

For at bestemme den kinetiske energi som funktion af hastighederne, finder vi først de normale hastighedsvektorer for hver af de to partikler:

$$\vec{v}_1 = l_1(\cos\theta_1, \sin\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} ; \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + l_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \quad (337)$$

Det viser sig da, at der i den kinetiske energi optræder et produkt af de to hastigheder, hvilket betyder, at vi må i gang med punkt 3) i det ovenfor givne program, diagonalisering af den kinetiske energi gennem transformation af hastighederne.

$$\left. \begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2(U^1)^2 \\ &+ m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)U^1U^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2(U^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (338)$$

hvor U^1 og U^2 nu som før står for hastighederne af koordinaterne θ_1 og θ_2 .

Ved diagonaliseringen af den kinetiske energi gælder det om at få a-matricen til at indeholde så mange nuller som muligt, fordi det giver den simpleste skalare reticulation. Vi vælger at lade matricen have den nedre trekantform, dvs. med nuller på alle pladser over diagonalen. Inertanstensoren $M..$ i (338) har koefficienterne

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= (m_1+m_2)l_1^2 \\ M_{12} &= M_{21} = m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ M_{22} &= m_2l_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (339)$$

Vi skal så diagonalisere $M..$ til en koordinatuafhængig form

$$\left. \begin{aligned} m.. &= a..M..a^{+..} = \\ &\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

Der er så stadig frihed tilbage i valget af a 'erne. Vi kan vælge at sætte $a_1^1 = 1$ og at lade de to koefficienter m_{11} og m_{22} i den diagonaliserede inertanstensor være lig med henholdsvis M_{11} og M_{22} , som jo er koordinatuafhængige. Altså:

$$m_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2 \quad ; \quad m_{22} = m_2 l_2^2 \quad (341)$$

Vi finder da a og må desuden bestemme den reciprokke a^{-1} , som jo skal bruges til bestemmelse af gyrolækken B . i figur 73:

$$a \cdot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2} + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}}} & \sqrt{\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}} \end{pmatrix} \quad (342)$$

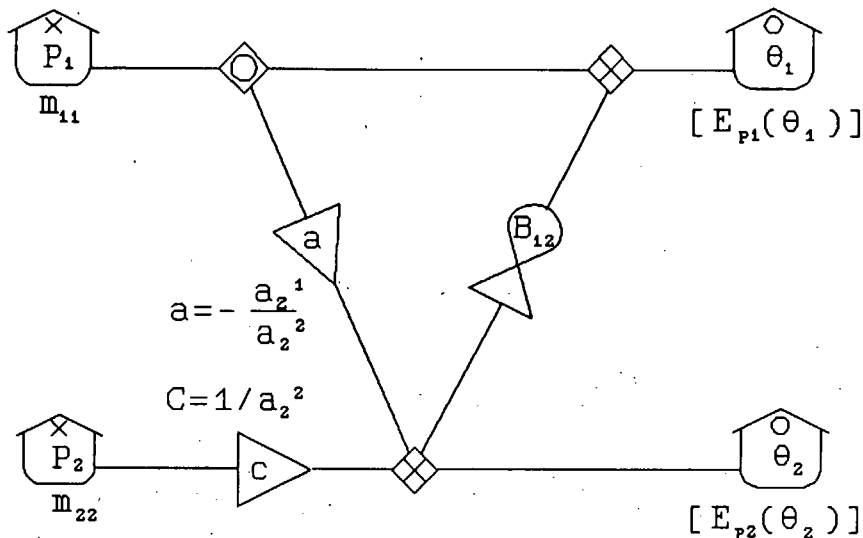
og

$$a^{-1} \cdot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} & \sqrt{\frac{\frac{m_1}{m_2} + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}} \end{pmatrix} \quad (343)$$

For gyrolækken B , som jo er antihermitesk, er der kun én koefficient, der skal udregnes fra (320) og (343):

$$B_{12} = \frac{m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 + m_2} \left[\frac{l_2}{l_1} p_1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}} p_2 \right] \quad (344)$$

Vi har så alle parametre for den skalare reticulation af figur 73. Ved at flytte lidt rundt på transformere og samlere kan vi bringe diagrammet på formen



Figur 77 Skalar reticulation af dobbeltpendul.

Her er $E_{p_1}(\theta_1)$ og $E_{p_2}(\theta_2)$ de to separate bidrag til den potentielle energi, som optræder i (336).

Efter dette eksempel, som er rimeligt repræsentativt for den ikke-relativistiske analytiske mekanik, vender vi tilbage til diskussionen fra kapitel 9 om den relativistiske partikeldynamik. Vi skal se, at den udviklede standardmetode, Lagrange reticulationen figur 73 fungerer lige så godt i relativistisk sammenhæng. Den væsentligste forskel ligger i metrikken, idet de relativistiske partikelkoordinater kræver en ikke-euklidisk standardmetrik, medens den klassiske analytiske mekanik altid vil have euklidisk standardmetrik, medmindre man medtager x -levels i sin definition af generaliserede koordinater.

I den relativistiske partikeldynamik må vi også tage det forbehold, at en potentiel energifunktion af partiklens fire-dimensionale koordinatvektor ikke kan forekomme. Ganske vist kan det elektriske potential for en ladet partikel indgå i dynamikken, men kun som komponent af 4-vektorpotentialet, ikke som en skalar. Hvis kraftfelter skal kunne henføres til materielle kilder, såsom fjerne masser og ladninger, så må kraftens virkning formidles lokalt af et felt, hvori virkninger af forstyrrelser af kilderne udbredes med en hastighed mindre end lysets. Denne filosofi passer godt med, at kraften i figur 63 optræder i forbindelse med et antihermiteske tensorfelt, gyrolækken, der

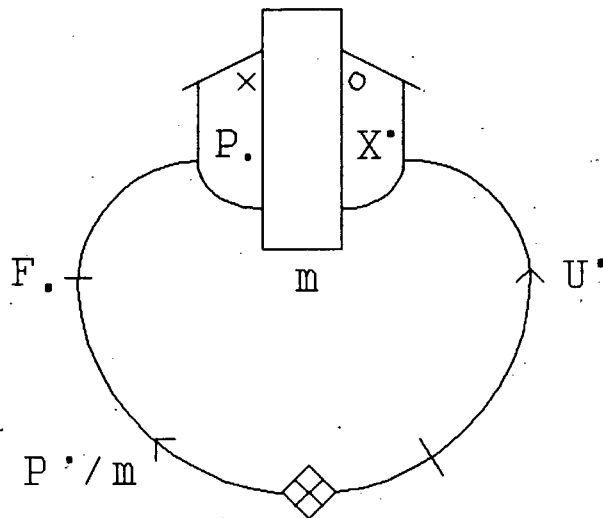
virker lokalt på partiklens plads, og hvis udbredelse fra kilderne kan beskrives med lokale partielle differentiaalligninger (Maxwells ligninger, (262), (270)), der kan formuleres i den til metrikken knyttede tensorformalisme. Derimod passer den ikke til en skalar, potentiel energifunktion af koordinatvektoren, der på forhånd er sat op som parametrisk styret af kildernes konfiguration. Energifunktionen for lagre må være lokal, ellers er den ufysisk, og derfor står man sig ved at "krænge den ud" og omsætte den til den form for strukturel information, der kan beskrives med samlere, transformere og gyrotorer, for når den på den måde kommer til at indgå i energibåndene, der jo direkte synliggør energiens veje, gøres lokalitetsprincippet eksplicit. Dette har været hovedmotivet for at foretrække Lagrange-reticulationen frem for Hamiltons ligninger, og når vi går videre til den relativistiske partikeldynamik, hvor koordinatvektoren Q i figur 73 er partiklens sted-og-tid-vektor X , vil vi derfor undgå at introducere en energifunktion $E_{\text{pot}}(X)$.

Forskellen på den specielle relativitetsteori, SRT, og den generelle, GRT, er, at i SRT har metrikken altid samme form, standardformen (211), hvorimod i GRT kan den være hvadsomhelst, bortset fra, at den skal være hermitesk og reel (g.. symmetrisk) og have (211) som standardmetrik. I SRT fastlægges afstande og tider med standardmålestokke og specielt synkroniserede standardure, i GRT kan de benyttede målestokke og ure defineres specifikt for hvert enkelt tilfælde. Vilkaarligheden af metrikken i GRT kan ikke afskaffes ved at gå over til standardmålestokke og standardure, for permanente gravitationsfelter vil umuliggøre en *global* koordinattransformation, der standardiserer metrikken, selvom den selvfølgelig altid kan standardiseres *lokalt*.

Ser vi på en *fri partikel* i GRT med en koordinatafhængig metrik $g..(X)$, vil den have en Hamiltonfunktion, som er rent kinetisk, men ikke desto mindre stedafhængig:

$$H(P., X') = E_{kin} = \frac{1}{2m} P. g(X') \cdot \cdot P. \quad (345)$$

Hamiltons ligninger kan reticuleres som i figur 71, idet vi blot karakteriserer det blandede lager med den skalare masse m , idet vi underforstår, at inertitensorens 0-variant er $mg..$



Figur 78 Hamiltonsk beskrivelse af GRT fri partikel.

Selv om partiklen er "fri", vil den alligevel være styret af en 4-kraft $F.$, når metrikken er stedafhængig. Af den anden Hamilton ligning i (309) får vi:

$$F. = \frac{dP.}{d\tau} = - \left(\frac{\partial H}{\partial X'} \right)_{P.} \quad (346)$$

Venstresiden kan omskrives til

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_i}{d\tau} &= m \frac{d}{d\tau} \left(g_{ik} \frac{dX^k}{d\tau} \right) = \\ m \left[g_{ik} \frac{d^2 X^k}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^l} \frac{dX^k}{d\tau} \frac{dX^l}{d\tau} \right] & \end{aligned} \right\} \quad (347)$$

Ved ombytning af de summerede indices k og l i sidste led i parantesen, kan udtrykket skrives mere symmetrisk:

$$\frac{dP_i}{d\tau} = m \left[g_{ik} \frac{d^2 X^k}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial X^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial X^k} \right) \frac{dX^k}{d\tau} \frac{dX^l}{d\tau} \right] \quad (348)$$

Højresiden af (346) bliver

$$\left. \begin{aligned} - \left(\frac{\partial H}{\partial X^i} \right)_P &= - \frac{1}{2m} \frac{\partial g^{rs}}{\partial X^i} P_r P_s = - \frac{1}{2m} \frac{\partial g^{rs}}{\partial X^i} g_{rk} P^k g_{sl} P^l \\ &= \frac{1}{2m} g_{rk} g^{rs} \frac{\partial g_{sl}}{\partial X^i} P^k P^l = \frac{1}{2} m \frac{\partial g_{kl}}{\partial X^i} \frac{dX^k}{d\tau} \frac{dX^l}{d\tau} = \left(\frac{\partial H}{\partial X^i} \right)_P \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

Vi finder da, at (346) giver

$$g_{ik} \frac{d^2 X^k}{d\tau^2} = - \Gamma_{i,kl} \frac{dX^k}{d\tau} \frac{dX^l}{d\tau} \quad (350)$$

her har vi indført *Christoffel-symbolet*

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial X^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial X^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial X^i} \right) \quad (351)$$

Det kan vises (Møller, IX.103), at Γ ikke transformerer som en tensor, medmindre den metriske tensor er koordinatuaafhæn-

gig. Inden for en given metrik kan vi imidlertid hæve første index på normal måde og således definere

$$\Gamma^j_{kl} = g^{ji} \Gamma_{i,kl} \quad (352)$$

og bevægelsesligningen (350) kan så omformes til den såkaldte *geod tligning*:

$$\frac{d^2 X^j}{d\tau^2} = - \Gamma^j_{kl} \frac{dX^k}{d\tau} \frac{dX^l}{d\tau} \quad (353)$$

Ved en *geodætisk kurve* forstås den kurve mellem to givne kurver, som har den mindste buelængde. I euklidisk geometri er de geodætiske kurver rette linjer, og inertiens lov kan udtrykkes på den måde, at bevægelsen af en fri partikel følger en geodætisk kurve. På en kugleflade er geod terne storcirkelbuer, og tilsvarende kan man for enhver differentiabel flade indlejret i det tredimensionale euklidiske rum bestemme et metrisk tensorfelt og derfra systemet af geod ter. Nu er den firedimensionale energib ndsmetrik, som ligger til grund for (353) ikke geometri, og når vi her taler om buelængde og geodætiske kurver, er det kun en analogi til den Riemannske fladengeometri, som man ikke skal lægge for meget i.

For at indse, at (353) er analog til en parameterfremstilling af en geodætisk kurve, bemærker vi først, at energien af den frie partikel er kvadratisk i impulserne eller hastighederne, og da der ikke er nogen potentiel energi, har Lagrange funktionen samme værdi som Hamilton funktionen:

$$L(U', X') = H(P., X') = E_{kin} \quad (354)$$

Vi kan opfatte egentiden τ som en naturlig parameter for partiklens bane i det firedimensionale koordinatrum. N r τ f r en lille tilvækst $d\tau$, har vi:

$$L d\tau^2 = \frac{1}{2} m dX' g_{..} dX' = - \frac{1}{2} m ds^2 \quad (355)$$

og størrelsen ds er så analog til den tilbagelagte vejlængde ved bevægelse på en Riemannsk flade. Det negative fortegn er nødvendigt, hvis ds^2 skal være positiv, når partiklen bevæger sig langsommere end lyset. Da L er lig med energifunktionen, er den en bevægelseskonstant, givet ved (244), dvs.

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{-\frac{2L}{m}} = c \quad (356)$$

Hvis vi sammenligner den virkelige bevægelse med alle virtuelle bevægelser fra τ_1 til τ_2 , ved vi, at virkningsintegralet (298) antager et ekstremum. Vejlængden for de virtuelle bevægelser er

$$S(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\frac{2L}{m}} d\tau \quad (357)$$

så for små virtuelle ændringer omkring den virkelige bevægelse, hvor (356) gælder, finder vi

$$\delta S(\tau_1, \tau_2) = - \frac{1}{mc} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = 0 \quad (358)$$

Det er i denne forstand, at partiklens bevægelse siges at følge en geodætisk kurve i det firedimensionale rum-tids kontinuum. "Vejlængden" s er dog ikke *minimal* som for en virkelig geodæt, men *maksimal*, hvilket vi kan indse ved at betragte en klassisk inertiel bevægelse i standardmetrikken, for hvilken det gælder

$$S^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - D^2 \quad (359)$$

hvor D er den tilbagelagte vejlængde i det tredimensionale rum. Da D er minimal for den retlinede inertielle bevægelse, følger det, at s er maksimal. Det følger så også af (358), at virkningsintegralet er minimalt.

Filosofien i GRT går ud på, at såkaldte fiktive kræfter, der optræder i accelererede koordinatsystemer, ikke lokalt kan skelnes fra gravitationskræfter. Egentlige gravitationskræfter er lige så "fiktive" som f.eks. centrifugalkræfter, idet de kun indgår i dynamikken via den metriske tensors afledede, som skildret i geodætligningen. Da massen ikke indgår i geodætligningen, er den et udtryk for ækvivalensen mellem tung og træg masse. Egentlig indgår tiden heller ikke, for egentiden τ kan erstattes med en hvilkensomhelst anden parameter λ , der er en monoton og differentiabel funktion af τ , så vi får:

$$\frac{d^2 X^j}{d\lambda^2} = - \Gamma^j_{kl} \frac{dX^k}{d\lambda} \frac{dX^l}{d\lambda} \quad (360)$$

Den "frie" GRT partikels dynamik kan også beskrives ved hjælp af standardmetoden, Lagrange reticulationen figur 73. Her gælder det så om at diagonalisere den kinetiske energi, hvilket bliver det samme som at diagonalisere den metriske tensors 0-variant $g_{..}$, idet (jfr. (345))

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m U^{\cdot} g_{..} U^{\cdot} \quad (361)$$

Vi skal altså finde en hastighedstransformation a , således at

$$U^{\cdot} = V^{\cdot} a^{\cdot} \quad ; \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m V^{\cdot} G_{..} V^{\cdot} \quad (362)$$

hvor G er standardmetrikken (211). Normalt vil en sådan hastighedstransformation være lokal, dvs. den kan ikke integreres til en global koordinattransformations. Hvis der findes en sådan global transformation, således at

$$U^{\cdot} = \frac{dX^{\cdot}}{d\tau} \quad ; \quad V^{\cdot} = \frac{dX'^{\cdot}}{d\tau} \quad ; \quad X'^i = f^i(X^{\cdot}) \quad (363)$$

så gælder

$$a^{-1}{}_j{}^i = \frac{\partial f^i}{\partial X^j} \quad (364)$$

og dette fører til følgende integrabilitetsbetingelse, som a -transformeren må tilfredsstille:

$$\frac{\partial a^{-1}{}_j{}^l}{\partial X^k} = \frac{\partial a^{-1}{}_k{}^l}{\partial X^j} \quad (365)$$

Hvis der findes en sådan global (og muligvis ikke-lineær) koordinattransformations f , som forbinder de givne koordinater X^{\cdot} med koordinaterne i et *inertialsystem* X'^{\cdot} , så vil den tilhørende lineære hastighedstransformation a diagonalisere den kinetiske energi. Vi ser da ved sammenligning af (365) og (320), at *gyrolækken* B , hørende til en sådan transformation, forsvinder *identisk*. Hvis der findes en global transformation til et inertialsystem, er det altså muligt helt at borttransformere de gravitationelle kræfter, som *gyrolækken* beskriver, dvs. kræfternes tilstedeværelse skyldes så udelukkende, at det benyttede koordinatsystem er accelereret i forhold til et inertialsystem. Hvis det ikke er muligt at finde en global transformation til et koordinatsystem, må vi konkludere, at *gyrolækken* beskriver et *permanent gravitationsfelt*. Der er således en vidtgående parallel mellem den måde, de elektromagnetiske kræfter optræder på i SRT, og den måde, de permanente gravitationsfelter optræder på i GRT.

Hovedopgaven for GRT er så at formulere en teori for sådanne felters udbredelse fra deres kilder i form af tensor-differenti- alligninger, der bestemmer de træk ved metrikken, der er invariante over for vilkårlige koordinattransformationer. Einsteins feltligninger giver et bud på en sådan teori, men de er ikke entydigt bestemt ud fra kravet om, at de skal reproducere Newtons teori for små hastigheder, afstande og massetætheder. Det er ikke muligt i øjeblikket at afgøre eksperimentelt, hvilken teori, der er den rigtige. Af de tre kendte eksperimentelle tests, lysafbøjningen ved en solformørkelse, rødforskydningen i et tyngdepotentiale, målt ved Mössbauer-effekt, og Merkurs periheldrejning, er det kun den sidste, der viser afvigelse fra den klassiske teori, som ikke kan udledes alene af SRT, men Merkurs faktiske periheldrejning er langt større end GRT effekten på grund af perturbationer fra de andre planeter, så effekten sløres for meget af klassisk støj til, at en afgørelse kan findes. En "kættersk" diskussion af disse forhold er givet af Draminsky. Endelig kan nævnes den mulige eksistens af sorte huller, som forudsiges af Einsteins teori, men foreløbig savner sikker verifikation.

Vi skal ikke her gå ind i den egentlige gravitationsteori, men vil nøjes med diskussionen af, hvordan en given rumafhængig metrik påvirker partiklers bevægelse. Som eksempel på bevægelse i et accelereret koordinatsystem vil vi genoptage diskussionen af den roterende skive, som blev introduceret i kapitel 7. Det er her naturligt at benytte de polære koordinater r og ϕ , som vi kan tænke os udmålt med standardmålestokke og påmalet skiven, inden den sættes i rotation. Som tidsmål benyttes ure, som under rotationen kan afstemmes til at følge gangen af de synkroniserede standardure i laboratorie-inertialsystemet, som de passerer på vej rundt.

$$X^1 = r \quad ; \quad X^2 = \phi \quad ; \quad X^3 = t \quad (366)$$

Den metriske tensor for skivens system, som vi nu vil kalde g , er så givet ved udtrykket (189). For at knytte forbindelse til diskussionen ovenfor om globale koordinattransformationer vil vi nu kalde laboratoriesystemets koordinater X' , idet vi holder os

til to cartesiske rumkoordinater $X'^1 = x$ og $X'^2 = y$ og en tidskoordinat $X'^3 = ct$. Den globale transformation til et inertialsystem, som givet i (363) er så

$$\left. \begin{aligned} X'^1 &= f^1(X') = x = r \cos(\phi + \omega t) \\ X'^2 &= f^2(X') = y = r \sin(\phi + \omega t) \\ X'^3 &= f^3(X') = ct \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

Den lineære hastighedstransformation svarende hertil er så ifølge (364) givet ved matricen

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \omega t) & \sin(\phi + \omega t) & 0 \\ -r \sin(\phi + \omega t) & r \cos(\phi + \omega t) & 0 \\ -r \omega \sin(\phi + \omega t) & r \omega \cos(\phi + \omega t) & c \end{pmatrix} \quad (368)$$

Med dette valg af transformeren a i figur 73, bliver der altså ikke brug for gyrolækken B , da integrabilitetsbetingelsen (365) er opfyldt. Der optræder ingen former for fiktive kræfter eller gravitationskræfter i beskrivelsen, som blot fører hele problemet tilbage til laboratorie-inertialsystemet, hvor partiklen bevæger sig jævnt og retlinet. Metoden er utilfredsstillende, fordi transformeren a er tidsafhængig, medens den metriske tensor i skivens system (189) er uafhængig af tiden. Vi ønsker at reticulere problemet på systemets egne præmisser, dvs. på grundlag af den metriske tensor alene, så de benyttede elementer må være tidsuafhængige.

Vi vender derfor tilbage til den metode, der blev benyttet for dobbeltpendulet, dvs. vi bestemmer den diagonaliserende transformen a , således at dens 1-variant har den nedre trekantform. Der skal altså gælde (jfr. (361) og (362)):

$$G_{..} = a \cdot g_{..} \cdot a^+ \quad (369)$$

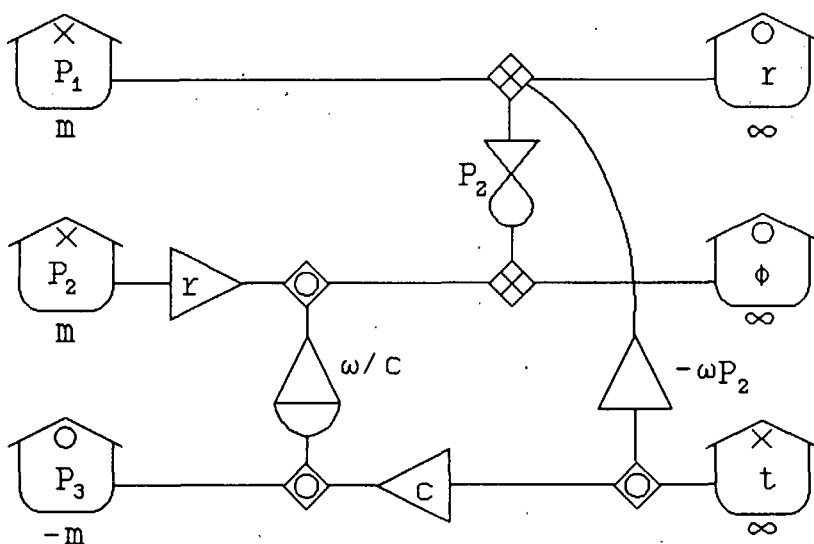
hvor $G_{..}$ er standardmetrikken i (182) og $g_{..}$ er matricen (189), og $a_{..}$ skal have nuller på alle pladser over diagonalen. Den simpleste løsning er

$$a_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} ; \quad a^{-1}_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & r\omega & c \end{pmatrix} \quad (370)$$

Ved skalar reticulation af en transformer i metrikken g kan der højst forekomme fem skalare transformere og fire skalare gyratorer, som vist på figur 68. Med a givet ved (370) reduceres dette til en enhedstranformer og to ikke-trivielle transformere, r og c , samt én gyrator, ω/c . Gyrolækken B , som nu kan bestemmes af (320) og (370), kunne i princippet indeholde én skalar gyrator, B_{12} , og to skalare transformere, B_{13} og B_{23} , men det viser sig, at B_{23} er nul, fordi a^{-1} hverken afhænger af ϕ eller t , så tilbage er kun

$$B_{12} = -p_2 \quad ; \quad B_{13} = -\omega p_2 \quad (371)$$

Vi kan så gennemføre den skalare reticulation og når frem til diagrammet



Figur 79 Relativistisk partikel på roterende skive.

Bevægelsesligningerne for de tre koordinater er

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_1}{m} ; \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_2}{mr} + \frac{p_3\omega}{mc} ; \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{p_3}{mc} \quad (372)$$

Det viser sig nu, at de to bidrag til strømmen til o-lageret for p_3 , som leveres gennem gyrotoren ω/c og transformeren c , netop ophæver hinanden, dvs. p_3 er en bevægelseskonstant.

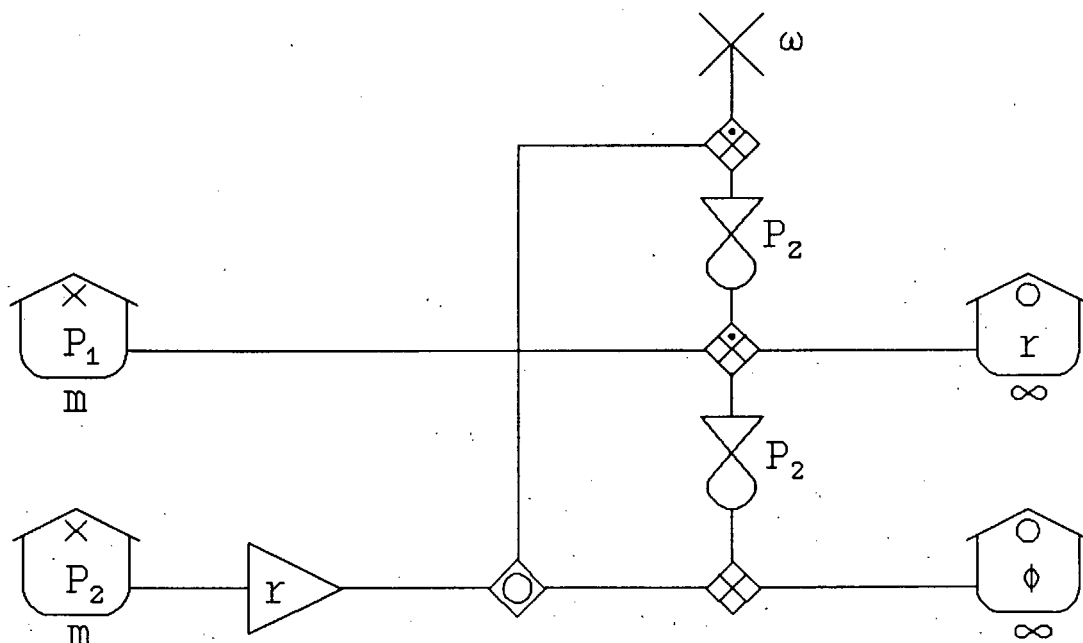
$$p_3 = -mc\gamma \quad (373)$$

hvor γ er tidsforlængelsesfaktoren. Da den samlede energifunktion af de tre x-lagre også er en konstant, $-\frac{1}{2}mc^2$ (244), og da p_1/m og p_2/m ifølge (372) og (373) er henholdsvis den radiale og den azimuthale del af partiklens hastighed u i forhold til laboratorie-inertialsystemet, målt med partiklens egentid, fås

$$\gamma^2 = 1 + \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (374)$$

hvor v er partiklens normale hastighed i forhold til laboratoriet, målt med laboratoriets ure. Disse udtryk bekræfter kun, at der er tale om en SRT fri partikel, når bevægelsen beskrives fra laboratoriesystemet, og at de gravitationelle eller fiktive kræfter i skivens system, som bl.a. skyldes gyrotoren p_2 , kan transformeres bort.

Vi vil nøjes med at se på de fiktive kræfter i den klassiske grænse, $v \ll c$. Vi kan så erstatte p_3 -lageret med en spændingskilde med den konstante spænding c . Denne spændingskilde ses nu gennem gyrotoren ω/c som en strømkilde med strømmen ω , hvilket er en mere tilfredsstillende reticulation, da c må udgå fra bevægelsesligningerne i den klassiske grænse. Når spændingskilden erstattes med strømkilden ω , bliver transformeren $-\omega p_2$ til endnu en x-gyrotor p_2 . På denne måde forsvinder alle relativistiske træk; t-lageret kan undværes, da der ikke vil være nogen forskel på koordinattiden t og egentiden τ . Vi ender da med følgende diagram:



Figur 80 Ikke-relativistisk partikel på roterende skive.

Bevægelsesligningerne for dette diagram er:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{p_1}{m} \quad ; \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_2}{mr} - \omega \\ \frac{dp_1}{dt} &= \left(\omega + \frac{d\phi}{dt} \right) p_2 \quad ; \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{p_2}{r} \frac{dr}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (375)$$

Ved elimination af de to impulser fås

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= r \left(\omega + \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2 \phi}{dt^2} &= -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \left(\omega + \frac{d\phi}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (376)$$

Heri findes en hastighedsuafhængig, radialet udadrettet acceleration $r\omega^2$, centrifugalaccelerationen, medens de øvrige, hastighedsafhængige led, tilsammen udgør Coriolis-accelerationen. Hvis vi indfører enhedsvektorer efter voksende radius og voksende azimuth, kan partiklens hastighedsvektor skrives på formen

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi \quad (377)$$

De indførte enhedsvektorer følger partiklens bevægelse:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi ; \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \vec{e}_r \quad (378)$$

Partiklens acceleration er så

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] \vec{e}_\phi \quad (379)$$

Når vi heri indfører udtrykkene (376) kan vi skrive accelerationen som sum af centrifugal- og Coriolis-acceleration, hvor

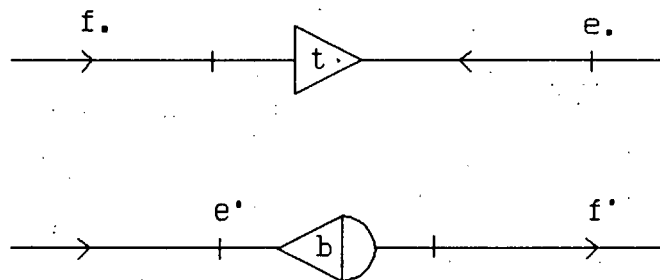
$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{cent} &= r\omega^2 \vec{e}_r \\ \vec{a}_{Cor} &= 2\vec{v} \times \vec{\omega} = 2r\omega \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_r - 2\omega \frac{dr}{dt} \vec{e}_\phi \end{aligned} \right\} \quad (380)$$

De ikke permanente gravitationsfelter, som karakteriserer accelererede koordinatsystemer til forskel fra inertialsystemerne, kan ifølge Machs princip forstås som egentlige gravitationsfelter, der skyldes bevægelsen af den kosmiske massebaggrund i forhold til det accelererede system. På lignende måde må man tænke sig, at den faktiske eksistens af inertialsystemer, hvor SRT gælder, skyldes denne kosmiske baggrund. Selve lyshastighedens universelle værdi må på en selvkonsistent måde kunne henføres til universets størrelse og massetæthed. Disse spekulationer, som er grundlæggende filosofi for GRT, kan dog ikke uden videre finde formalistiske udtryk med teoriens begrebssæt. Måske skyldes gravitationsteoriens og de forenede feltteoriens vanskeligheder, at man har set sig blind på den geometriske metafor og troet at tid og udvikling kunne reduceres til mønstre af verdenslinjer.

Opgaver.

(især til kapitel 6 og 7)

1. Vis, at de metrisk unitære transformere danner en gruppe. Vis endvidere, at den duale til en metrisk unitær tensor også er metrisk unitær. Hvad kan man ellers sige om en tensor, der både er metrisk unitær og metrisk hermitesk? Gennemgå derpå de samme spørgsmål, når "metrisk" erstattes med "1-".
2. Vis, at en selvdual spejlingstransformer er ikonsymmetrisk.
3. Udfyld nedenstående diagrammer i alle varianter



4. Vi betragter den todimensionale σ_z -standardmetrik

$$G_{..} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi lader symbolerne ξ , η og ζ betegne tensorer, hvis 1-varianter er de tre Pauli matricer

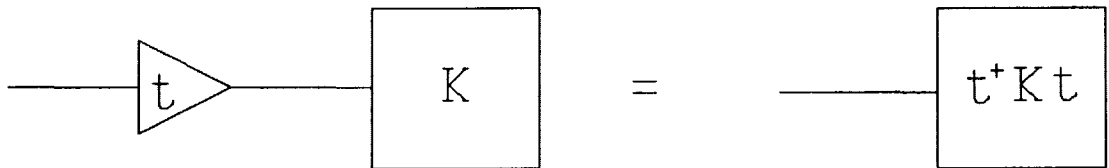
$$\xi_{..} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \eta_{..} = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \zeta_{..} = \sigma_z$$

Vi ser nu på mængden af transformere indeholdende tensorerne

$$\pm G, \pm h, \pm iG, \pm ih, \pm \xi, \pm \eta, \pm \zeta, \pm i\xi, \pm i\eta, \pm i\zeta$$

- a) Blandt disse 20 er der kun 16 forskellige. Hvilke?

- b) Hvilke af disse er metrisk hermiteske/ metrisk unitære/ ikonsymmetriske/ 1-unitære/ 1-hermiteske/ spejlinger (2-cykliske)/ 4-cykliske/ reversible/ antireversible?
- c) Hvilke af disse transformere er der i forvejen indført ikoner for i teksten. Lav passende ikoner for de resterende.
- d) De reversible elementer udgør en ikke-kommutativ undergruppe, som kaldes den dihedrale gruppe. Lav en multiplikationstabel for denne gruppe.
- e) Vis, at den i d) undersøgte gruppe er isomorf med gruppen af flytninger, hvorved et kvadrat bringes til at dække sig selv.
- 5) Vis, at en selvdual gyrator er ikonsymmetrisk og reciprok (reversibel), hvis den er metrisk antihermitesk, og at den er antireciprok, hvis den er metrisk hermitesk.
- 6) Lad K være response-tensoren for en 1-port med spændingsinput. Vis formelen



Lav derpå en tilsvarende formel, hvor transformeren t er erstattet med en metrisk transducer A . Kan denne formel begrunde, at K transformerer som en tensor ved koordinatskift?

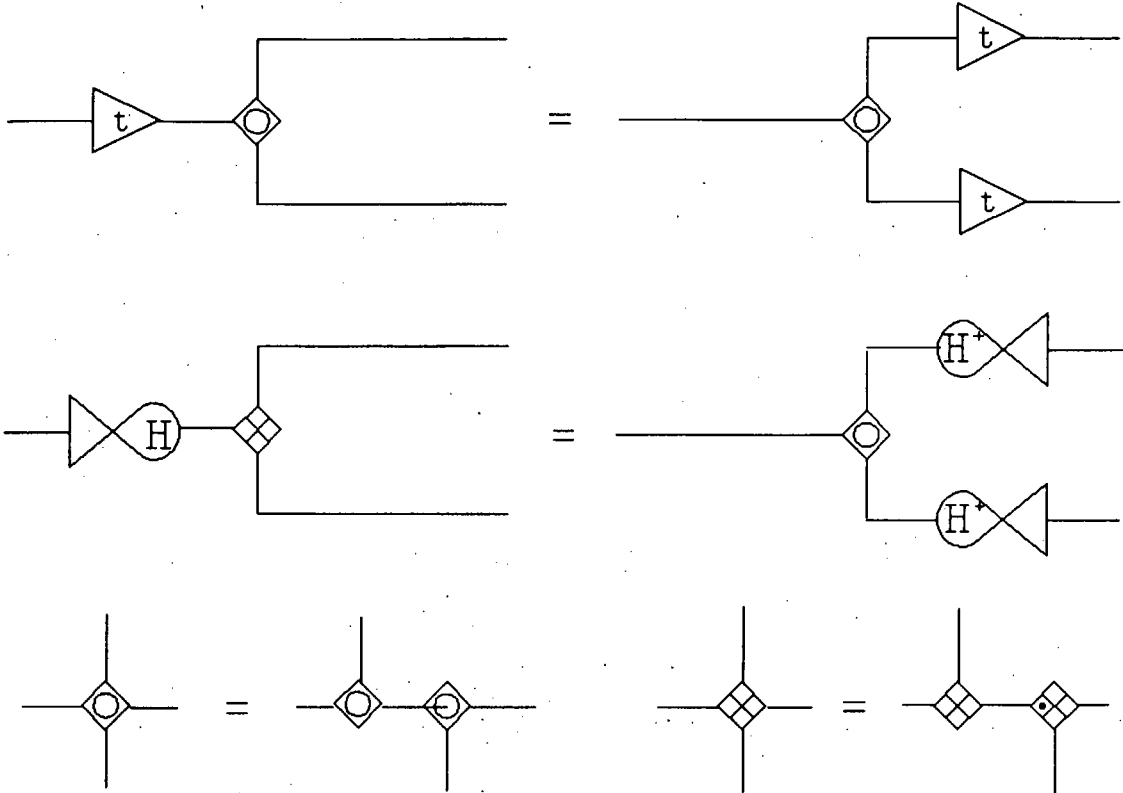
- 7) Lad t være en tensor og A en metrisk transducer, så t i det ændrede koordinatsystem er givet ved

$$t' = AtA^+$$

Vis, at den duale tensor transformerer efter den duale transducer

$$\check{t}' = \check{A}\check{t}\check{A}^+$$

8) Ret eventuelle fejl i nedenstående ikonformler



9) Bestem (alle varianter af) protensorerne h , H' og Δ for metrikken (63).

10) Bestem signaturen for metrikken

$$g_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestem protensorerne h , H' og Δ for denne metrik.

Litteratur.

- BRILLOUIN, L., (1946, 1953), Wave Propagation in Periodic Structures, Dover, New York.
- BUCHLER, J., (1940, 1955), Philosophical Writings of Peirce, Dover, New York.
- CALLEN, H. B., (1960), Thermodynamics, Wiley, New York.
- DRAMINSKY, P., (1964), Revision af relativitetsteorien, J.H. Schultz Forlag, København.
- GOLDSTEIN, H., (1959), Classical Mechanics, Addison-Wesley, London.
- GUNDERMANN, J. (1976), Energibandsmodeller i de grundlæggende fysikdiscipliner, Specialeafhandling, K. U.
- KARNOFF, D. and ROSENBERG, R.C., (1968), Analysis and Simulation of Multiport Systems - The Bond Graph Approach to Physical System Dynamics. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
- KRON, G., (1939, 1965), Tensor Analysis of Networks, MacDonald, London.
- MØLLER, C., (1952), The Theory of Relativity, Oxford University Press.
- PAYNTER, H. M., (1960), Analysis and Design of Engineering Systems, M.I.T. Class Notes.
- RUSSELL, B., (1953), On the Notion of Cause, with Applications to the Free-Will Problem. s. 387-407 i:
FEIGL, H. and BRODBECK, M. (eds), (1953), Readings in the Philosophy of Science.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
 Projekt rapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
 Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
 Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinø og Peter H. Lassen
 Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik.
 Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
 Af: Mogens Niss
 Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
 Af: Helge Kragh.
 Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
 Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
 Af: B.V. Gnedenko.
 Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum".
 Projekt rapport af: Lasse Rasmussen.
 Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
 Projekt rapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen,
 Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
 Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
 Af: Mogens Brun Heefelt.
 Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
 Projekt rapport af: Gert Kreinø.
 Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
 Af: Else Høyrup.
 Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
 Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
 Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
 Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
 Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
 Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
 Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
 Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
 Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
 Projekt rapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
 1-port lineært response og støj i fysikken.
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality".
 Af: Helge Kragh.
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE".
 a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
 Projekt rapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
 En projekt rapport og to artikler.
 Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".
 Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
 Projekt rapport af: Gert Kreinø.
 Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller".
 Projekt rapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
 Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
 Af: Oluf Danielsen.
 Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
 Projekt rapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
 Vejleder: Stig Andur Pedersen.
 Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER - MOSSBAUEREFFEKT MÅLINGER".
 Projekt rapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
 Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".
 ENERGY SERIES NO. I.
 Af: Bent Sørensen
 Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIETBORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projekt rapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projekt rapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projekt rapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projekt rapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projekt rapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER Gøres FOR AT AFHJÆLPE PICERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Højrup.
Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projekt rapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projekt rapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projekt rapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projekt rapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSAB - HISTORISK SET".
Projekt rapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Højrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Højrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Højrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projekt rapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?".
Projekt rapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projekt rapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i l.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFVLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTO - MATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgæt
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FUERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
-
- 90/84 "ENERGI I L.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.
-
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lillethorup.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDEREN".
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERIURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Elleftzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
 Projekt rapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
 Af: Jens Jøger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS REANSITION".
 Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
 Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
 Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI",
 - flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
 Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
 Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
 Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
 Projekt rapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kattler og Torben J. Andreassen.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
 Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
 Projekt rapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
 Projekt rapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
 Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".
 Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENTABELLER".
 Projekt rapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
 Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NIELDEL RULE".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
 Af: Jacob Mørch Pedersen.
 Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
 Af: Peder Voetmann Christiansen
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
 Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
 Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
 Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBYG - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".
 Projekt rapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
 Projekt rapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
 Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
 Projekt rapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
 Projekt rapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
 Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
 Lecture Notes 1983 (1986)
 Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"
 Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
 Projekt rapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
 Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNEELSE"
 Projekt rapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
 Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
 Af: Bent Sørensen.
-
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
 Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
 MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
 Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
 Projekt rapport af Frank Colding Ludvigsen
 Vejledere: Historie: Ib Thiersen
 Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
 Af: Jeppe Dyre
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST -- EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
 Af: Iben Maj Christiansen
 Vejleder: Mogens Niss.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"
Projektrapport af Finn C. Physant
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach"
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"
af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"
Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/87 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KREFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale
Af: Hans Hedal
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/87 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"
By: Jeppe Dyre
- 155/87 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"
by: Michael Pedersen
- 156/87 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 157/87 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."
by: Michael Pedersen
- 158/87 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"
by: Jeppe Dyre
- 159/87 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"
by: Bent Sørensen
- 160/87 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"
by: Jens Gravesen
- 161/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"
by: Michael Pedersen
- 162/87 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/87 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/87 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/87 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"
by: Jens Gravesen

- 166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"
Af: Jørgen Larsen
- 167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.
Fysikspeciale af:
Birger Lundgren
Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ
- 169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."
Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.
Introduktion og oversættelse:
Peder Voetmann Christiansen
- 170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988
- 171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"
af: Johnny Tom Ottesen
- 172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"
Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.
Fysikprojekt af:
Erik Lund og Kurt Jensen
Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen
-
- 173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"
af: Mogens Brun Heefelt
- 174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"
af: Peder Voetmann Christiansen
- 175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"
af: Michael Pedersen
- 176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"
af: Jeppe Dyre
- 177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"
af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"
af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden
vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen
- 179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"
by: Jeppe Dyre
- 183/89 "MATEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction"
by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)
- 184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmfylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"
af: Tage Emil Christensen
-
- 185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"
Et matematisk projekt
af: Steen Grode og Thomas Jessen
Vejleder: Jacob Jacobsen
- 186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen
- 187/90 "RSA - et kryptografisk system"
af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen
Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk
- 188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"
by: Jeppe Dyre
- 189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER"
af: Finn Langberg

- 190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"
by: Jeppe Dyre
- 191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C^* -ALGEBRAS"
by: Iain Raeburn and Dana P. Williams
- 192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"
by: Viggo Andreasen
- 193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"
by: Stig Andur Pedersen
- 194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af: Frank Olsen
- 194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport
Projektrapport af: Frank Olsen
- 195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.
Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:
Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatisk status i fysikken.
af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL"
af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale
af: Frank Olsen
- 199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen
- 200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss
- 201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraction"
af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Petr Višcor, Ole Bakander
- 202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.
af: Peder Voetmann Christiansen
- 203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990
afløser tekst 170/88
-
- 204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Višcor
- 205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)
- 206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Višcor
- 207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.
af: Helge Kragh
- 210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition."
by: Lars Kadison
- 211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"
- historien bag teorien for de komplekse tal.
af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.
Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek
- 212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"
by: Lars Kadison
- 213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host"
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

- 214|91 "Halløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.
Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager
Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal
- 215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters
by: A.Delong, M.Drsticka, K.Hladil, V.Kolarik, F.Olsen, P.Pavelka and Petr Viscor.
- 216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"
af: Thomas Jessen
-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology

af: Lars Kadison