

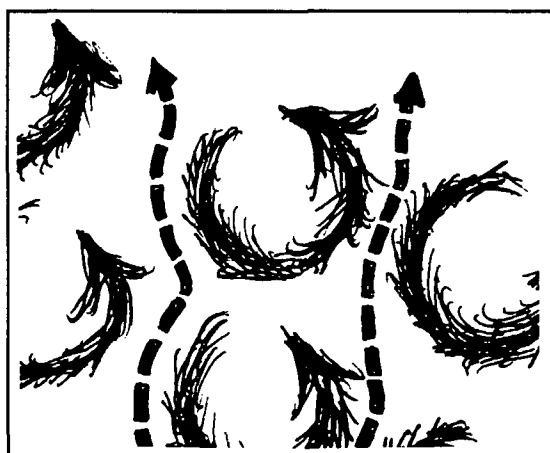
TEKST NR 236a

1993

**INTRODUKTION
TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN**

**Anja Boisen
Peter Bøggild**

Vejledere:
Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen



TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260
4000, Roskilde

INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

En introduktion til kvante Hall effekten for læsere med et vist forkundskab i kvantemekanik. Et generelt teoretisk billede (Hvirvelbilledet), der redegør for de fleste af kvante Hall effektens bemærkelsesværdige karakteristika, f.eks. kvantisering af Hall modstanden $R = h/ie^2$, $i=1,2,3\dots$, bliver præsenteret.

af : Anja Boisen og Peter Bøggild.

IMFUFA tekst nr. 236b/93

73 sider

ISBN 0106-6242

Abstract Kvante Hall effekten indebærer, at strømmen i en todimensional leder, placeret i et stærkt magnetfelt, kan løbe dissipationsløst, samtidig med at Hall modstanden $R_H(B)$ kvantiseres. Den grundlæggende kvantiseringsrelation er $R_H = h/ie^2$, hvor i er et positivt, helt tal. I nærværende tekst gives en teoretisk indføring i Kvante Hall effekten, hvilket blandt andet indebærer en nøjere, kvantemekanisk gennemgang af en elektron i et magnetfelt. Teksten er tænkt som et teoretisk fundament for det eksperimentelle projekt beskrevet i IMFUFA tekst nr. 236b-1993.

Indledning

Forord Kvant Hall fysik og metrologi er nærmest ukendt blandt studerende på RUC's fysikinstitut, og overraskende nok heller ikke særlig søgt af fysikstuderende på KU, på trods af det forskningsarbejde der her udføres indenfor området. Vi har derfor brugt en del kræfter på at skrive en bred introduktion til kvante Hall effekten. Dette kan læses af studerende uden forhåndskendskab til det specielle emne, men med et vist kendskab til elementær kvantemekanik. Af hensyn til disse læsere har vi vist mange af de udledninger, der ellers ville have været sprunget over, eller bragt i et appendiks.

Vores to "teoretiske" vejledere: Peder Voetmann (RUC) og Erland Brun Hansen (H.C.Ø) har været en stor hjælp under udarbejdelsen af rapporten.

Historisk oversigt I 1879 opdages Hall-effekten af E.H.Hall. Når en strøm sendes igennem en leder, der opholder sig i et magnetfelt vinkelret på lederen, afbøjes ladningsbærerne til siden af Lorentz kraften $F = q\vec{v} \times \vec{B}$. Herved opbygges på grund af ladningsforskydningerne et elektrisk felt, der efterhånden udbalancerer det magnetiske felt. Feltets retning afhænger af ladningsbærernes fortegn, idet det i nogle materialer ikke er elektroner, men positive "huller" i elektrontæppet, der leder strømmen.

Strømmen løber herefter gennem prøven parallelt med siderne, idet den resulterende kraft er nul. Den sædvanlige longitudinale modstand er givet ved $R_{xx} = V_{xx}/I$, mens en transversale modstand R_{xy} defineres som spændingsfaldet på tværs af prøven delt med strømmen: $R_{xy} = V_{xy}/I$ (Hall modstanden). Det kan let vises ud fra den klassiske Drude teori for ledningsevne, at den transversale modstand er lineært afhængig af magnetfeltstyrken $R_{xy} = B/en$, hvor n er elektrontætheden pr. flade.

I 1930 studerer Landau elektriske egenskabers oscillatoriske opførsel i stærke magnetfelter, indenfor den fri elektronteori, og samme år bliver sådanne svingninger i magnetomodstanden (Shubnikov deHaas oscillationer) og i den magnetiske susceptibilitet (deHaas-van Alphen oscillationer) observeret eksperimentelt.

De første realisationer af en to-dimensional elektrongas (2DEG) sker i 1966 med Si-MOSFETs. Dette er et ret afgørende skridt på vejen mod opdagelsen af kvante Hall effekten, idet kvantiseringen af Hall modstanden for en elektrongas er betinget af, at elektronernes bevægelse

afgrænses til et plan. Dette gøres ved at en i forvejen meget flad leder, som har stor afstand mellem energiniveauerne, anbringes i et stærkt magnetfelt (3 – 4 T) ved temperaturer mindre end 10K.

I midten af halvfyrdserne opdages klare afvigelser fra den klassiske Hall effekt i disse to-dimensionale elektrongasser. Efterhånden som prøvernes kvalitet forbedres kan Klitzing og Ebert i 1978 rapportere magneto-resistansens (R_{xx}) fald til 0, sammenfaldende med en plateaudannelse i Hall resistansen (R_{xy}), som for en 2DEG har samme dimension som resistiviteten ρ_{xy} . I 1980 opdager Klitzing (Klitzing, Dorda, Pepper) ved præcisionsmålinger af Hall-plateauerne, at kvante Hall resistiviteten er kvantiseret i overensstemmelse med:

$$R_H = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2}$$

hvor i er et helt, positivt tal. Dette resultat har Landau 50 år tidligere forudset for heltallige fyldningsgrader - det vil sige, hvor netop et helt antal energiniveauer er fyldt med elektroner.

Opdagelsen giver Klitzing Nobelprisen i fysik i 1985. I de første år efter gennembruddet forsøger man at forklare plateaudannelsen ved de heltallige fyldningsgrader med en simpel, fri-elektron model, hvor urenhedspotentialer tages i betragtning. Derfor kommer det som noget af en overraskelse, da Tsui, Störmer og Gossard i 1982 kan rapportere plateaudannelse ved ikke heltallige fyldningsgrader $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7} \dots$ og andre ν med ulige nævnere. Denne fraktionelle kvante Hall effekt (FQHE) bliver til at begynde med opfattet som et andet fænomen end den heltallige kvante Hall effekt (IQHE). Man er nu nødt til at overveje eksistensen af excitationer (kvasipartikler) med fraktionel ladning $\pm e/m$.

Den amerikanske teoretiker R.B. Laughlin er ikke sen til at foreslå en bølgefunktion for $\nu = \frac{1}{3}$ tilstanden som, sammen med en argumentering ikke ulig BCS teorien for superledere, kan bruges som udgangspunkt for at forklare rationelle fyldningsgrader med ulige nævnere. Men i 1987 kan Willet rapportere et $\nu = \frac{5}{2}$ plateau, og snart følger observationer af andre fyldningsgrader med lige nævnere. Dette giver teoretikerne store problemer, og status for den teoretisk QHE er mildest talt stadig uafklaret.

Tendensen idag er en bevægelse henimod en samlende teori for den heltallige og fraktionelle kvante Hall effekt, samtidig med at Laugh-

lins grundlæggende FQHE teori, som indebærer forestillingen om en inkompressibel elektronvæske, stadig benyttes som udgangspunkt.

Læsevejledning Vores arbejde er opdelt i to dele: en introduktion til kvante Hall effektens teoretiske status (tekst 236a) samt en gennemgang af vores eksperimentelle arbejde fra de indledende designovervejelser til præsentation og fortolkning af måledata (tekst 236b). Denne tekst indeholder følgende kapitler:

I kapitel 1 præsenteres de eksperimentelle og metrologiske aspekter af kvante Hall effekterne.

I kapitel 2 gennemgås den grundlæggende teori for en elektron i magnetfelt, samtidigt med at en række vigtige begreber og notationer indføres. Senere udvides teorien til at omfatte flere uafhængige elektroner i magnetfelt (den fri elektron model).

I kapitel 3 ses på forskellige, mulige, teoretiske forklaringer af kvante Hall effekten - både den heltallige og den fraktionelle. Mulighederne for en samlet teori betragtes.

I appendiks A findes en kort gennemgang af Drude-teoriens forklaring af den klassiske Hall effekt.

Indhold

1	Introduktion af den kvantiserede Hall-effekt.	3
1.1	Den klassiske Hall-effekt	3
1.2	Den kvantiserede Hall-effekt	5
1.3	Hall-prøven	6
2	Grundlæggende teori	13
2.1	Den fri elektronmodel	13
2.2	Landauniveauer	17
2.3	Gauge og randbetingelser	22
2.4	Elektron i magnetfelt (den symmetriske gauge)	26
2.5	Elektronsystem i magnetfelt	33
2.6	Den heltallige kvantehall effekt ?	42
3	Plateaudannelse	43
3.1	Lokaliseringsteorien	43
3.2	En usammentrykkelig elektronvæske	49
3.3	Plateaudannelse for FQHE	57
A	Drude-teorien for metaller	63

Kapitel 1

Introduktion af den kvantiserede Hall-effekt.

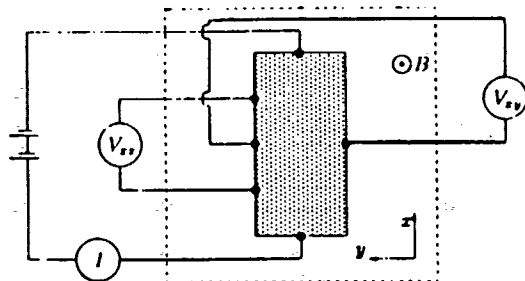
I det følgende vil forskellen på den klassiske og den kvantiserede Hall effekt blive forklaret. Forståelsen af kvante Hall effekten kræver en dybere indsigt i en elektrongas i et magnetfelt, hvorfor dette emne behandles nøjere i kapitel 2.

1.1 Den klassiske Hall-effekt

Vi betragter en rektangulær leder, hvorigennem der sendes en strøm I . Placeres lederen i et magnetfelt (B) vinkelret på strømmen, vil der vinkelret på både strøm og B -felt opstå en stationær potentialeforskel, V_{xy} (se figur 1.1). Spændingen V_{xy} kaldes Hall-spændingen, hvor indeks betegner, at strømmen måles i x -retningen og spændingen i y -retningen.

Fænomenet benævnes Hall-effekten og blev opdaget af E.H. Hall i 1879. En overskuelig forklaring gives bedst ved benyttelse af Drudes teori for en elektrongas, hvilket er gjort i appendiks A. Her skal blot de væsentligeste resultater fremhæves.

Når en leder placeres i et magnetisk felt, vil elektronerne grundet den magnetiske kraft-påvirkning, blive afbøjet ud til en af prøvens sider, hvorved et elektrisk felt E_y på tværs af prøven opstår. På grund af dette elektriske felt, påvirkes elektronerne nu også af en elektrisk kraft. Da den magnetiske og elektriske kraft er modsat rettede, vil en ligevægt indtræde, når de to kræfter udbalancerer hinanden. I en ligevægtssituation vil der eksisterer et stationært felt på tværs af prøven, også



Figur 1.1: Leder i magnetfelt. B -feltet virker vinkelret på strømmen I , og resulterer i Hall-spændingen, V_{xy} . (Bruus, 1989).

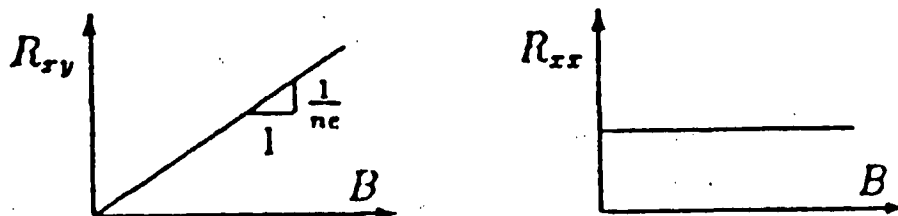
kaldet Hall-feltet, og elektronerne vil nu beskrive en retlinet bevægelse gennem prøven.

I den stationære tilstand kan man ved brug af Drude-teorien opstille udtryk for den longitudinale modstand (R_{xx}) også kaldet magneto-modstanden og for den transversale modstand (R_{xy}) også kaldet Hall-modstanden. Modstandene er defineret som: $R_{xx} = \frac{V_{xx}}{I}$, $R_{xy} = \frac{V_{xy}}{I}$, og er givet ved:

$$R_{xx} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{Wd} \quad (1.1)$$

$$R_{xy} = \frac{B}{en} \quad (1.2)$$

hvor størrelsen σ_0 er den såkaldte Drude-ledningsevne, der er uafhængig af B -feltet, og hvor n betegner fladeladningsbærer-desiteten. Prøvens længde, bredde og tykkelse benævnes henholdsvis L , W og d . Af ovenstående udtryk må det derfor, ifølge Drude-teorien forventes, at der findes en lineær sammenhæng mellem Hall-modstanden og B -feltets styrke, hvorimod magnetomodstanden må forventes at være konstant. Det skal dog bemærkes, at modellen er meget simpel, og at dens forudsigelser ikke altid holder. Modstandenes afhængighed af B -feltet er afbildet på figur 1.2.



Figur 1.2: Hall-modstanden og den longitudinale modstand som funktion af B -feltet. (Bruus, 1989).

1.2 Den kvantiserede Hall-effekt

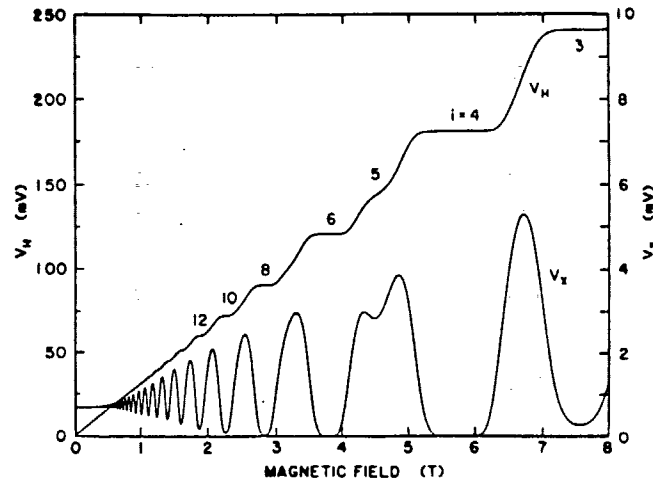
Den klassiske Hall-effekt må idag betegnes som et velkendt og veludforsket fænomen, med adskillige fysiske anvendelsesmuligheder. Men i 1980 kunne Klitzing, Dorda og Pepper vise, at teorien bag den klassiske Hall-effekt for visse prøver bryder sammen.

Placeres disse specielt fremstillede prøver i et stort magnetfelt ($\sim 10T$) ved lav temperatur ($\sim 4K$), bliver Hall-modstanden en trappeligende, voksende funktion, mens den longitudinale-modstand udviser store oscillationer (se figur 1.3).

Ud over at være et interessant fænomen, har Klitzings opdagelse fået stor betydning for metrologien. De enkelte niveauer på grafen for Hall-modstanden kan nemlig, indenfor en usikkerhed af 10^{-7} , bestemmes ved:

$$R_{xy} = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Plateauerne er altså kvantiserede, og ligger forskudt med et helt multiplum af $\frac{e^2}{h}$. Størrelsen $\frac{h}{e^2}$ har dimension af en modstand, og man indførte i januar 1990 et nyt mål for en standard-ohm; Hall-spændingen divideret med strømmen ved første niveau ($i = 1$), hvilket svarer til modstanden $25812,807 \pm 0,005\Omega$. Desuden kan den dimensionsløse finstruktur-konstant $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ udtrykkes i termer af modstandskvantet $\frac{h}{e^2}$, idet der gælder følgende relation:



Figur 1.3: Skitse af V_{xy} og V_{xx} ved den kvantiserede Hall-effekt. (Ebert, 1983).

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{h}{e^2} \frac{2}{\mu_0 c}$$

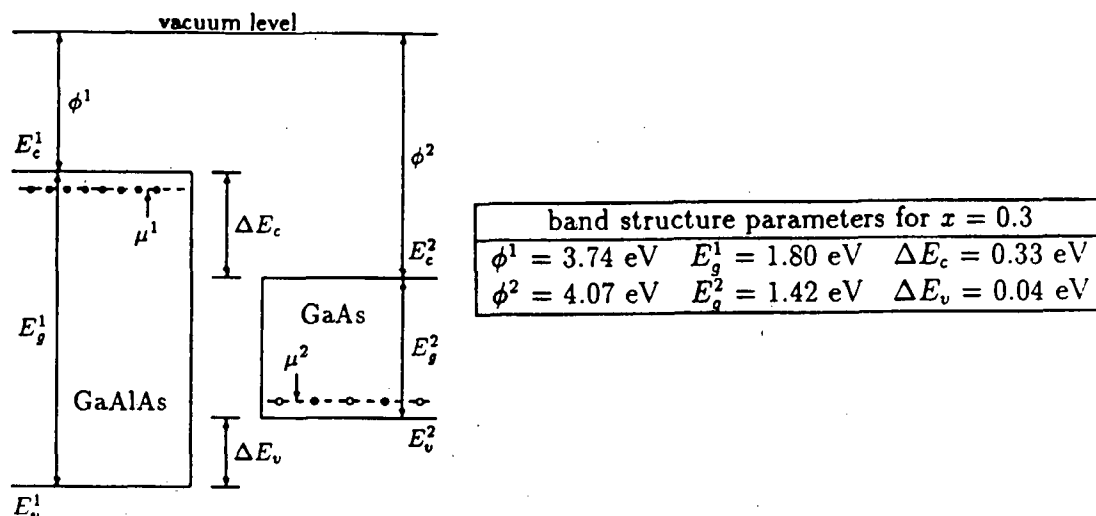
hvor μ_0 er vacuum-permabiliteten og c er lyshastigheden i vacuum.

Teorien bag den kvantiserede Hall-effekt (QHE) er dog stadig langt fra færdigudviklet. Et par år efter Klitzings store opdagelse, blev plateaudannelsen også observeret for visse fraktionelle værdier af i , der følgelig benævnes den Fraktionelle Kvant Hall-effekt (FQHE).

Både indenfor den heltallige kvante Hall-effekt (IQHE) og indenfor FQHE eksisterer der flere forskellige forklaringer på den observerede plateaudannelse. Teorierne er ikke umiddelbart sammenlignelige, og idag bruges der en del energi på at skabe en samlende teori for IQHE og FQHE. En af disse er det såkaldte hvirvel-billede, der skal diskuteres grundigt i kapitel 3.

1.3 Hall-prøven

For at kunne observere QHE, må den betragtede prøve indeholde en to-dimensional elektrongas (2DEG). Samtidigt skal elektronmobiliteten være stor. En såkaldt $\text{Ga}_{x-1}\text{Al}_x\text{As}$ -GaAs heterostruktur, hvor $x = 0.3$, besidder disse egenskaber. Det er muligt at frembringe en 2DEG ved brug af andre strukturer, eksempelvis Si-MOSFET, men GaAlAs-GaAs



Figur 1.4: Energibåndenes placering i de to krystaller. (Bruus, 1990).

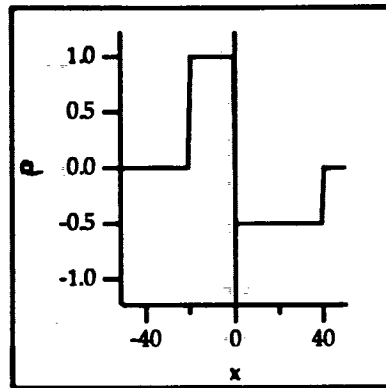
er den mest anvendte. Sammensætningen af en GaAlAs-krystal og en GaAs-krystal skal i det følgende diskuteres kvalitativt ved brug af en energibandsmodel.

1.3.1 Hall-prøvens båndstruktur

De betragtede krystaller er begge halvledere, og båndgabets størrelse i GaAlAs er $1,8 \text{ eV}$, mens det i GaAs er $1,42 \text{ eV}$. Båndenes placering i forhold til vacuum er illustreret på figur 1.4

Grundstofferne Ga og Al tilhører begge 3. hovedgruppe, mens As tilhører 5. hovedgruppe. Erstatte man under krystalgroningen nogle af Ga- eller Al-atomerne med Si-atomer fra 4. hovedgruppe fås en n-dopet GaAlAs-krystal. I prøverne er GaAlAs-krystallen stærkt Si-dopet, hvilket bevirker, at der umiddelbart under ledningsbåndet (E_c^1) ligger et donorbånd. Dette donorbånd er samtidig et mål for det kemiske potential μ_1 . GaAs-delen er gjort så ren som mulig, men er på grund af urenheder en anelse p-dopet. Dette bevirker, at der over valensbåndet E_v^2 ligger et acceptorbånd, hvis energi er et mål for μ_2 .

Føres de to krystaller sammen, vil elektroner fra donorbåndet i GaAlAs vandre over i GaAs. Nogle elektroner vil udfylde de få huller i valensbåndet, men de fleste vil ende i ledningsbåndet, E_c^2 . Dette bevirker iøvrigt, at μ_2 brat rykkes fra acceptorbåndet og op i ledningsbåndet,



Figur 1.5: Ladningsfordelingen i prøven. symbolet ρ betegner her ladningsdensiteten.

hvilket resulterer i et nyt kemisk potential $\tilde{\mu}_2$. Størstedelen af elektronerne vil følgelig opnå en energigevinst af størrelsen $\Delta\mu = \mu_1 - \tilde{\mu}_2$.

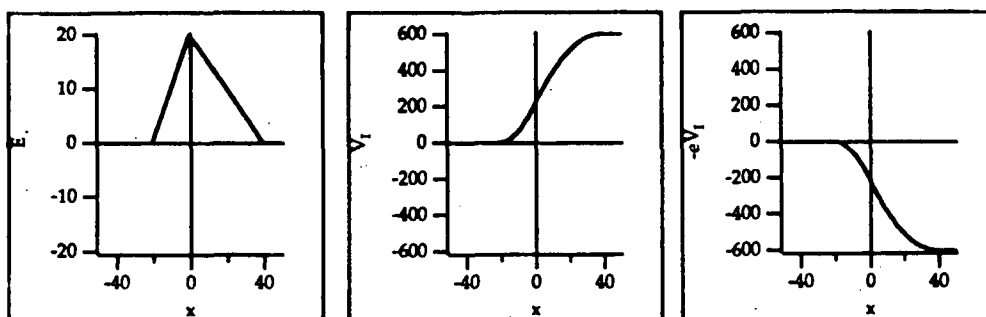
Men samtidig vil der på grund af denne ladningsforskydning dannes et elektrisk felt (E_I) i prøven. Dette bevirker, at de ekstra tilførte elektroner i GaAs får en potentiel energi givet ved $-eV_I$, hvor V_I er den indre spændingsforskel.

Når E_I er blevet tilstrækkelig stor, det vil sige, når tilstrækkelig mange elektroner er vandret fra GaAlAs til GaAs, vil elektronernes potentielle energi svare til krystallernes forskel i kemisk potential. Herved har elektronerne den fornødne energi til at hoppe tilbage i GaAlAs, hvorfor netto-ladningsvandringen ophører. Derudover vil ladningsforskydningen på grund af den elektriske tiltrækning mellem elektronerne i GaAs og de positive ioner i GaAlAs være begrænset til et tyndt overgangs-område - jævnfør figur 1.5.

Den skitserede ladningsfordeling giver som sagt anledning til et indre felt og potential i prøven. Dette kan indses ved at betragte følgende udtryk for stationære elektriske felter:

$$\begin{aligned}\vec{E}_I &= -\nabla\vec{V}_I \\ \nabla\vec{E}_I &= \frac{\rho}{\epsilon} \text{ (Gauss)} \\ \nabla^2\vec{V}_I &= -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ (Poisson)}\end{aligned}$$

hvor symbolerne ϵ og ρ betegner henholdsvis dielektricitetskonstanten og ladningsdensiteten. På integralform fås:



Figur 1.6: Skitse af E_I , V_I samt den ændrede energi $-eV_I$ i prøven.

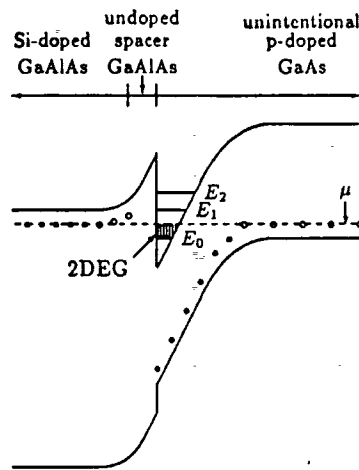
$$\vec{E}_I = \int \frac{\rho}{\epsilon} d\vec{r}$$

$$\vec{V}_I = - \int \int \frac{\rho}{\epsilon} d\vec{r}$$

På baggrund af disse ligninger, kan den til ladningsfordelingen hørende E_I - og V_I -kurve skitseres - se figur 1.6. Af denne figur fremgår iøvrigt, hvorledes energibåndene i overgangsområdet må justeres, som følge af en ændret potentiel energi, givet ved $-eV_I$. Efter sammenføringen af de to krystaller, og en ligevægt er indtrådt (det vil sige, når Ferminiveaueet er konstant i hele prøven), fås et energidiagram som vist på figur 1.7.

På GaAlAs-siden bøjer båndene opad, mens de på GaAs-siden tvinges nedad. Dette bevirker, at der i GaAs opstår en smal trekantformet potentialebrønd, hvori elektronerne fra GaAlAs opfanges. Ladningsbærerdensiteten i den dannede 2DEG afhænger derfor udelukkende af doperingsgraden, der kan kontrolleres meget nøjagtigt under krystalgroningen.

Ved $T=0$ K er en halvleder karakteriseret ved, at der ingen fri elektroner findes. De er alle fastlåst i enten valensbåndet eller donorbåndet. Men for GaAlAs-GaAs strukturen vil der stadig kunne ledes en strøm for $T=0$ K. Elektronerne i trekantbrønden kan i xy -planen opfattes som en fri elektrongas, med de for et metal karakteristiske lednings-egenskaber.



Figur 1.7: Energidiagram for de sammenførte krystaller. (Bruus, 1990).

Ved lave temperaturer er det derfor udelukkende disse elektroner, der bidrager til den elektriske transport, hvorfor overgangsområdet også betegnes *ledningskanalen*.

For at sikre en ekstrem stor mobilitet søger man under krystalgroningen at placere donoratomerne langt fra overgangsområdet. Denne metode kaldes modulationsdopering, og kan give mobiliteter på over $10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$

1.3.2 En 2-dimensional elektrongas

For at indse, at de indfangne elektroner kan opfattes som en 2DEG, må energiniveauerne i trekantbrønden beregnes.

Beregningerne er omtalt i (Bruus, 1990), og giver anledning til følgende diskrete energifordeling:

$$E_i = \left[\frac{9\pi^2}{32} \frac{1}{m^*} \left(\frac{\hbar e^2 n}{\epsilon} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(i + \frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

hvor m^* er elektronernes effektive masse. Denne størrelse er ved cyklotron ressonans målinger, blevet bestemt til $0,071m_0$, hvor m_0 er elektronens hvilemasse (Kristensen, 1991). Størrelsen n betegner en flade-ladningsbærerdensitet, der i ledningskanalen er af størrelsesordenen $5 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2}$. I resten af rapporten, hvor udelukkende todimensionale elektronsystemer behandles, benævnes den todimensionale n blot ladningsbærertæthed.

Indsættes denne værdi af m_0 i ovenstående udtryk fås:

$$E_0 = 43 \text{ meV} \quad E_1 = 76 \text{ meV}$$

Sammenlignes springet fra første til andet energiniveau (33 meV) med den termiske energi $K_B T = 0,086 \cdot T \text{ meV}$, må det konkluderes, at alle elektroner ved $T = 4 \text{ K}$ befinder sig i grundtilstanden. Elektronernes translations-frihedsgrad i z -retningen er hermed blevet frosset ud, hvorfor man kan tillade sig kun at betragte elektronernes bevægelse i xy -planen. Samlingen af elektroner i brønden er følgelig en 2DEG.

1.3.3 Elektrisk ledning i Hall-prøven

Da den elektriske ledning i QHE-regimet foregår i to dimensioner, vil den i appendiks A opstillede resistivitetstensor ($\bar{\rho}$) og ledningsevnetensor ($\bar{\sigma}$) reduceres til simple udtryk. For en ideel Hall-prøve vil der gælde, at $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$, når der måles på midtplateauet (se figur 1.3). Den målte transversale modstand vil i samme punkt være givet ved $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{h}{ie^2}$. På midtplateauet fås dermed resistivitets-tensoren

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{ie^2} \\ -\frac{h}{ie^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Komponenterne i ledningsevne-tensoren kan skrives som elementerne i den inverterede resistivitets-tensor, og er for to dimensioner følgelig givet ved:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \begin{pmatrix} \rho_{yy} & \rho_{yx} \\ \rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ie^2}{h} \\ \frac{ie^2}{h} & 0 \end{pmatrix}$$

Af denne relation følger det noget kontra-intuitive resultat, at resistivitets-komponenten bliver nul, hvis den tilsvarende komponent i ledningsevne-tensoren er nul. Et resultat, der er karakteristisk for en 2DEG i kvante Hall regimet. Normalt, det vil sige i tre-dimensionale systemer, måles resistans R og resistivitet ρ i enhederne Ω og $\Omega \text{ m}$. Bemærk for eksempel, at der i udtrykket for ρ_{xy} indgår ladningsbærerdensiteten, mens der i udtrykket for R_{xy} er tale om fladeladningsbærerdensiteten. For to-dimensionale systemer gælder der derimod, at resistiviteten ρ_{xx} og modstanden R_{xx} har samme dimension, idet:

$$R_{xx} = \frac{L}{W} \rho_{xx}$$

Kapitel 2

Grundlæggende teori

2.1 Den fri elektronmodel

I det følgende skal elektronens todimensionale opførsel og egenskaber i magnetfelt og elektrisk felt behandles kvantemekanisk. Derefter ses på tilfældet med flere elektroner uden vekselvirkninger. Udgangspunktet for en kvantemekanisk beskrivelse af den todimensionale gas, er at udskifte Hamiltonfunktionen for en elektron

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\vec{A})^2 + V$$

med kvantemekanikkens Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2 + V$$

Blandt de for QHE vigtige egenskaber finder vi, at energierne for en fri elektron i magnetfelt, kondenserer på de diskrete, men stærkt udartede Landauniveauer $\hbar\omega_c(n + 1/2)$. Hver af disse ($n = 0, 1, 2, \dots$) energier svarer til en ring i tilstandsrummet (basis k_x, k_y, k_z). Både udartningen og den strøm, der kan ledes af elektronerne, er ens for alle energiniveauerne. Specielt gælder, at strømmen for hvert Landauniveau er $I = (e^2/h) V_H$, hvor V_H er Hall-feltet. Vigtigst af alt er måske, at den fri elektronmodel i 2 dimensioner på grund af den manglende frihedsgrad i z -retningen har en egenskab, der minder om en væskes usammentrykkelighed. Dog vil en væske altid være lidt sammentrykkelig, hvilket ikke gælder om samlingen af elektroner. Disse kan på ingen måde presses sammen adiabatisk. Sidst i kapitlet bliver denne

egenskab særligt behandlet, da ideen om usammentrykkelighed er essentiel for Laughlins kvantevæske teori (Prange et al, 1987), der i dag er grundstenen i teorier for QHE.

2.1.1 Elektron i magnetfelt (lineær gauge)

En elektron har i det kvantemekaniske billede en kanonisk impuls givet ved operatoren $\vec{p} = -i\hbar\nabla$. Når et magnetfelt pålægges, vil den kinetiske impuls på grund af et felt-bidrag $\vec{p}_m = e\vec{A}$ være givet ved $m\vec{v} = -i\hbar\nabla + e\vec{A}$. \vec{A} er et vektorfelt som opfylder betingelsen $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Det er bemærkelsesværdigt, at en uendelig gruppe vektorpotentialer (gauges) opfylder denne betingelse. Vi beskæftiger os i dette kapitel med den lineære gauge (Landaugaugen) $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$ og den symmetriske gauge $\vec{A} = B/2(-y, x, 0)$, der begge giver anledning til et B -felt i z -aksens retning.

Begge gauges er nyttige. Den lineære fordi den er simpel at arbejde i og intuitivt ligner det klassiske billede af strømledning i en rektangulær leder. Den symmetriske, fordi den er rotationsinvariant og gør det lettere at regne på vekselvirkninger mellem elektroner, som det senere vil fremgå (kapitel 3). En anden fordel ved den cirkulære gauge er, at vi slipper for at bruge periodiske randbetingelser, der kan give besynderlige resultater. I første omgang opfatter vi elektronerne som ikke-vekselvirkende, spinløse partikler og bruger den lineære gauge til at udvikle et par grundlæggende begreber og formalismer.

2.1.2 Schrödingerligningen i lineær gauge

Impulsoperatoren bliver som nævnt $\vec{p} = (-i\hbar\nabla + e\vec{A})$, hvilket med $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$ giver Hamiltonoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{e^2 B^2 y^2}{\hbar^2} + 2i \frac{eBy}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(- \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{y^2}{l^4} + 2 \frac{y}{l^2} i \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

hvor l er den magnetiske længde $l = (\hbar/eB)^{1/2}$.

Hamiltonoperatoren (i den anvendte gauge) kommuterer med impulsoperatoren $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$. Det betyder, at vi kan finde fælles egentilstande for p_x og energien. Egentilstandene til p_x , er den plane bølge $\exp(ik_x x)$, med egenverdier $\hbar k_x$. Vi kan altså indtil videre skrive løsningen til Schrödingerligningen som $F = \exp(ik_x x)\varphi(y)$, hvor vi endnu ikke har bestemt $\varphi(y)$. Ved indsættelse fås nu :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\varphi(y) k_x^2 e^{ik_x x} - \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial^2 y} \frac{y^2}{l^4} \varphi(y) e^{ik_x x} - \frac{2y}{l^2} \varphi(y) k_x e^{ik_x x} \right) = E \varphi(y) e^{ik_x x}$$

Vi bortdividerer eksponentialfunktionerne, og får Schrödingerligningen for $\varphi(y)$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x^2 - \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{y^2}{l^4} - 2 \frac{y k_x}{l^2} \right) \varphi(y) &= E \varphi(y) \Rightarrow \\ \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{1}{l^4} (y - l^2 k_x)^2 \right) \varphi(y) &= E \varphi(y) \Rightarrow \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial^2 y} + \frac{m \omega_c^2}{2} (y - l^2 k_x)^2 \varphi(y) &= E \varphi(y) \quad (2.1) \end{aligned}$$

2.1.3 En forskudt harmonisk oscillator : energi-egenværdier og egentilstande

Dette ses at være Schrödingerligningen for en harmonisk oscillator, der er forskudt $k_x l^2$ fra nulpunktet. Ved at sammenligne med det generelle udtryk for energien af den harmoniske oscillator, $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \omega^2 m y^2$ ses det, at energien bliver

$$E_n = \hbar \omega_c (n + 1/2)$$

hvor ω_c er cyklotronfrekvensen givet ved $\omega_c = \frac{eB}{m}$. Egentilstandene for den harmoniske oscillator er de velkendte Hermite polynomier H_n gange en eksponentialfunktion $H_n \cdot \exp(-y^2 m \omega_c / 2\hbar) = H_n \exp(-y^2 / 2l^2)$, og kan skrives som:

$$\varphi(y) = N_n H_n (y - l^2 k_x) \exp \left(-\frac{(y - l^2 k_x)^2}{2l^2} \right)$$

hvor N_n er normeringskonstanten

$$N_n = \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n! l L_x}} \quad (2.2)$$

En elektrontilstand i et magnetfelt er dermed en fri bølge i x -retningen, men samtidigt fanget i et harmonisk oscillatorpotential i y -retningen, der forskydes afhængigt af magnetfeltets størrelse, idet $l^2 k_x = k_x \cdot \hbar / eB$. Dette er således strimmelformede bølgefunktioner - udstrakte i x -retningen, og begrænsede i y -retningen.

2.1.4 Udartning

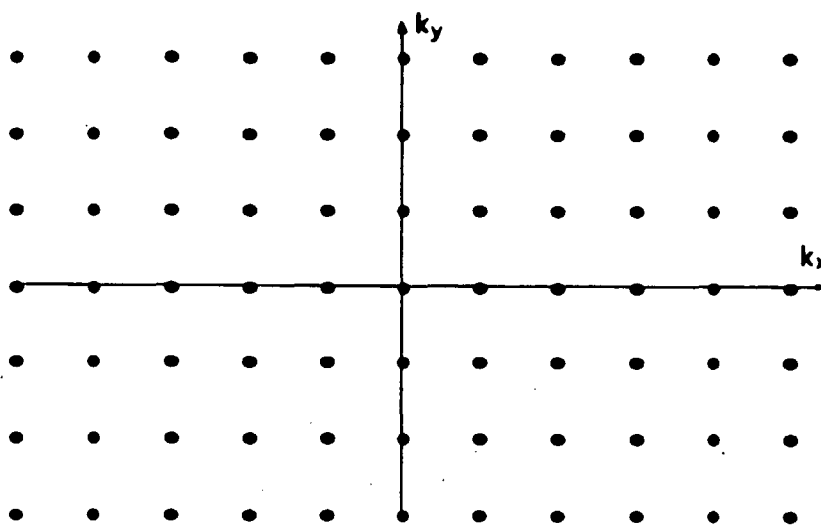
Vi vil gerne beregne udartningen - antallet af mulige tilstande i en prøve med længden L og bredden W . Bølgefunktionen skal ligge inden for prøven. Dette kan vi sikre os ved at forlange, at y -oscillatorens tyngdepunkt $y_0 = l^2 k_x$ ligger i intervallet $0 < l^2 k_x < W$, som er det samme som at sige, at k_x højst må blive W/l^2 . Dette er i al fald en god tilnærmelse, hvis prøven har væsentlig større dimensioner end bølgefunktionernes bredde. Hvis vi bruger periodiske grænsebetingelser på den fri bølge i x -retningen $\Psi(x, y) = \Psi(x + L, y)$, fås at

$$\exp(ik_x x) = \exp(ik_x(x + L)) = \exp(ik_x x) \cdot \exp(ik_x L) \Rightarrow k_x L = 2\pi p$$

hvor p er et helt tal. Når k_x har sin maksimale værdi W/l^2 , er antallet N af lineært uafhængige egentilstande hørende til en bestemt energi lig p

$$N = p = \frac{k_x L}{2\pi} = \frac{WL}{2\pi l^2} = \frac{WLB}{h/e}$$

Udartningen er netop den magnetiske flux $\Phi = BA = BWL$ divideret med fluxkvantet $\Phi_0 = h/e$. Det vil sige, at udartningen pr. energiniveau kan fortolkes som antallet af fluxkvanter gennem fladen med dimensionerne $L \times W$, eller som antallet af elementar arealer $a_0 = 2\pi l^2$ pr. areal LW . De to definitioner er tydeligvis ækvivalente.



Figur 2.1: Tilstandsrummet uden magnetfelt

2.2 Landauniveauer

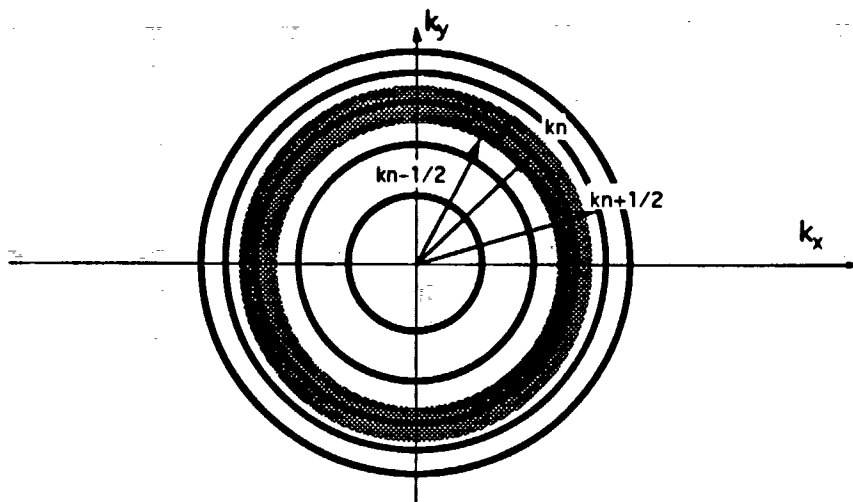
2.2.1 Ringe i tilstandsrummet

Hvordan skal energitilstandene $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, sammen med udartningen $N = \Phi/\Phi_0$ pr. energiniveau forstås? Uden magnetfelt vil egentilstandene for en fri elektron på en kvadratisk flade med længden L , være frie bølger i både x og y retningen. I tilstandsrummet (k -rummet) bliver egentilstandene homogent fordelte punkter $(k_x, k_y) = (2\pi/L \cdot p_x, 2\pi/L \cdot p_y)$, hvor p_x og p_y er hele tal (se figur 2.1)

Når et magnetfelt sættes over prøven, vil elektrontilstandene i k -rummet begynde at rotere om $(0,0)$. Ved et semiklassisk argument skal vi prøve at vise, at dette passer, og at omdrejningsfrekvensen bliver cyklotronfrekvensen ω_c . Punkterne i k -rummet påvirkes af Lorentzkraften, ligesom elektronerne i det fysiske rum, ifølge

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Da kraftvektoren roterer rundt sammen med og vinkelret på hastighedsvektoren, vil $\vec{k} = (k_x, k_y)$ også rotere rundt i samme frekvens ω_c . Dette kan ses ved at finde perioden $T = 2\pi/\omega_c$. Denne fås ved at dividere omkredsen af cirklen i k -rummet med den hastighed, hvormed \vec{k} ændrer sig



Figur 2.2: Tilstandene kondenserer på et antal Landauringe i k -rummet. Endvidere er arealet af ringen for Landauniveaueet $n = 2$ tegnet ind. Området der dækkes i tilstandsrummet, svarer til udartningen - det antal tilstande, der trækkes ind på ringen ved påsætning af magnetfelt. Sammenlign med forrige figur.

$$T = \frac{\oint dk}{dk/dt} = \frac{2\pi k}{evB/\hbar} = \frac{2\pi m}{eB} \cdot \frac{\hbar k}{mv} = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

I tilstandsrummet vil dette vise sig ved, at de før homogent fordelte punkter kondenserer på et antal diskrete, men udartede ringe - en for hvert energiniveau. De tilstande, der ligger på en sådan ring i tilstandsrummet, har samme energi

$$E_n = \hbar\omega_c (n + 1/2) = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad (2.3)$$

og kaldes Landauniveauer $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Størrelsen k_n angiver længden af k -vektoren i en given Landauring.

Man kan anskueliggøre denne "kondensering" ved følgende billede. Før magnetfelt er tilstandene jævnt fordelt som punkter i k -rummet. Efter magnetfeltet sættes på, er antallet af tilstande det samme, men de er "trukket" ind på et antal koncentriske ringe, der hver indeholder så mange tilstande, som, inden magnetfeltet blev sat på, lå mellem $k_{n-1/2}$ og $k_{n+1/2}$ i tilstandsrummet. Arealet af dette område er ifølge 2.3

$$\pi \Delta(k_n^2) = \pi \frac{2m\Delta E}{\hbar^2} = \frac{2\pi eB}{\hbar}$$

Afstanden mellem tilstandene i k -rummet er uden magnetfelt $2\pi/L$, svarende til arealet $4\pi^2/L^2$, og vi har følgelig en tilstand pr. $4\pi^2/L^2$. Antallet af tilstande i et Landauniveau kan derfor findes ved at dividere "arealet" som en Landauring dækker over med magnetfelt, med arealet per tilstand i k -rummet uden magnetfelt. Ad denne semiklassiske vej får vi udartningen

$$L' = \frac{2\pi eB/\hbar}{4\pi^2/L^2} = \frac{BS}{h/e} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (2.4)$$

hvor S betegner den kvadratiske prøves areal givet ved L^2 .

2.2.2 Fyldningsgrad

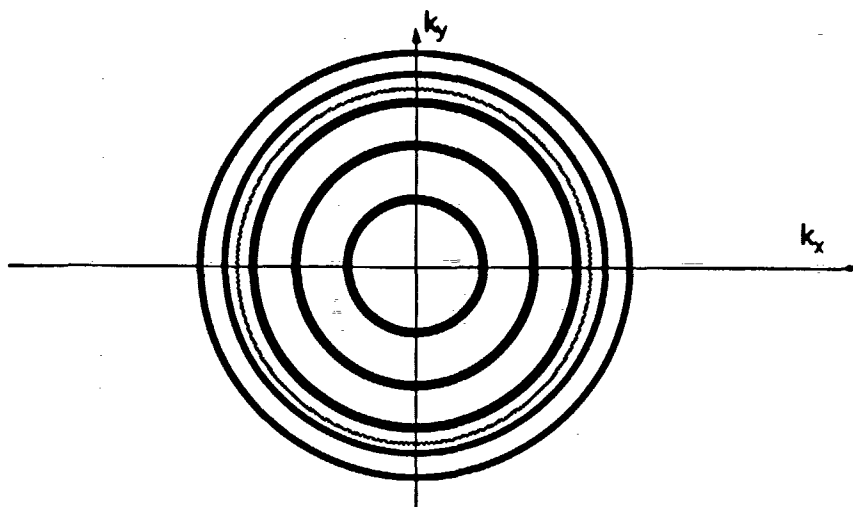
I det følgende indføres fyldningsgraden ν , som er helt centralt for opfattelsen af plateaudannelse i QHE. I det klassiske tilfælde er der ingen restriktioner på beliggenheden af centrene for elektronernes rotation i xy -planen. I det to-dimensionale tilfælde, hvor bølgefunktionen ved lav temperatur er låst fast i z -retningen, bliver centrene som vist kvantiseret i y -retningen, mens intet kan fastlægges om deres position i x -retningen (strimmelbølgefunktioner på langs i prøven). Schrödingerligningen for en fri elektron i et z -magnetfelt i Landaugaugen $(-By, 0, 0)$, er en harmonisk oscillator med centrum i $p \cdot h/eBL_x$, hvor p er et helt tal. Da centrene strækker sig i hele prøvens længde L_x , fylder hvert centrum derfor elementararealet

$$L_x \cdot h/eBL_x = 2\pi\hbar/eB = 2\pi l^2 \quad (2.5)$$

Antallet af tilladte centre i prøven med arealet S , er så $S/2\pi l^2$. Fyldningsgraden kan nu defineres som antallet af elektroner pr. tilladt center i prøven

$$\nu = \frac{N}{S/2\pi l^2} = \frac{N}{S/2\pi(\hbar/eB)} = \frac{Nh}{SeB} = \frac{nh}{eB} \quad (2.6)$$

Da antallet af cyklotroncentre er det samme som antallet af fluxkvanta i prøven ($\Phi/\Phi_0 = BS/(h/e) = BSe/h$), kan fyldningsgraden endvidere



Figur 2.3: Her ses tilstandsrummet ved fyldningsgraden 3. Fermiringen, som er en todimensional udgave af Fermifladen, befinder sig her mellem 3. og 4. Landauniveau.

defineres som $\nu = N/(\Phi/\Phi_0)$. I tilstandsrummet er fyldningsgraden et udtryk for antallet af fyldte Landauringe.

2.2.3 Schrödingerligning med elektrisk felt

I Hall-eksperimenterne frembringes et elektrisk felt over prøven, og det er derfor nødvendigt at undersøge, hvordan et elektrisk felt påvirker billedet. Hvis der påsættes et elektrisk felt \mathcal{E} i y -retningen, lægges et bidrag $-e\mathcal{E}y$ til Hamiltonfunktionen, hvorved Schrödingerligningen bliver

$$H\psi = \left(\frac{(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} - \mathcal{E}ey \right) \psi = E\psi \quad (2.7)$$

Feltet forskyder blot den harmoniske oscillator, idet bølgefunktionerne som før bliver

$$\varphi(y) = N_n H_n(y - y_0) \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{2l^2}\right) \quad (2.8)$$

med det nye tyngdepunkt

$$y_0 = k_x l^2 + \frac{\mathcal{E}}{\omega_c B}$$

Energiegenværdierne bliver også ændrede

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c - \mathcal{E}ey_0 + \frac{1}{2}m(\mathcal{E}/B)^2 \quad (2.9)$$

men energiniveauerne ligger med samme interval $\hbar\omega_c$ som uden elektrisk felt. På grund af leddet $-\mathcal{E}ey_0$ fås dog, at energien bliver lavere for høje værdier af bølgetallet k_x . Med et elektrisk felt kommer strømmen til at løbe i smalle kanaler helt analog til det klassiske billede af en ladningsbærers retliniede bevægelse i et kombineret magnetfelt og elektrisk felt (Hall-felt), hvor de to kræfter på ladningsbæreren netop udbalancerer hinanden.

2.2.4 Ledning i Landauniveauerne

Driftshastigheden v_x af elektronerne findes ved at udvikle hastighedsoperatoren $\hat{v}_x = \frac{1}{m}(\vec{p}_x - eBy\vec{e}_x)$ på energiegentilstandene Ψ_{np} hvilket giver

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{np} | \hat{v}_x | \Psi_{np} \rangle &= \frac{1}{m} \langle \Psi_{np} | \hat{p}_x - eBy\vec{e}_x | \Psi_{np} \rangle \\ &= \frac{1}{m} (p_x - eBy_0) \\ &= -\frac{\mathcal{E}}{B} \end{aligned} \quad (2.10)$$

idet tilstandene er normerede. Da antallet af strømbærende tilstande er N , bliver strømtætheden j_x

$$j_x = -nev_x = \frac{N}{L_x L_y} e \frac{\mathcal{E}}{B}$$

Da strømmen i x -retningen er givet ved relationen $j_x = I/L_y$, kan strømmen pr. fyldt Landauniveau findes

$$I = j_x L_y = \frac{N}{L_x} e \frac{\mathcal{E}}{B} = \frac{e^2}{h} L_y \mathcal{E} = \frac{e^2}{h} V_H$$

Vi har her benyttet sammenhængen $N = \frac{BL_xL_y}{h/e}$, der følger af formel (2.4). Med i fyldte Landauniveauer, er strømmen givet ved den velkendte Hall modstand h/ie^2

$$I = (ie^2/h)V_H \quad (2.11)$$

Da udartningen er proportional med B -feltet, og strømmen per tilstand er omvendt proportional med B -feltet, bliver den resulterende strøm dermed uafhængig af B -feltet. Dette gælder så længe Landauniveauet er fyldt, eller så længe fyldningsgraden er heltallig i det område af prøven, strømmen løber. Muligheden for en lokal heltallig fyldningsgrad, der opretholdes ved at lave såkaldte *pinnede* afvigelse i ladningsbærer-tætheden, omtales i kapitel 3.

2.3 Gauge og randbetingelser

2.3.1 Magnetisk moment i den lineære gauge

Grunden til at vi drager det magnetiske moment frem i denne sammenhæng, er at gøre opmærksom på nogle problemer, der optræder i forbindelse med de periodiske randbetingelser. Det magnetiske moment kan skrives

$$\vec{\mu} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial B} \quad (2.12)$$

hvor H er hamiltonoperatoren. Feynman-Hellman teoremet siger, at middelværdien af en operator A 's partielt afledede i λ er lig den partielt afledede af operatorens egenværdien $a_k(\lambda)$ med hensyn til λ :

$$A(\lambda) \zeta_k(\lambda) = a_k(\lambda) \zeta_k(\lambda) \Rightarrow \left\langle \frac{\partial A}{\partial \lambda} \right\rangle_k = \frac{\partial a_k}{\partial \lambda} \quad (2.13)$$

Bølgefunktionen betegnes her ζ . Ifølge dette teorem kan middelværdien af det magnetiske moment for tilstanden $n = 0$ bestemmes ved

$$\langle \hat{\mu} \rangle = -\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial B} \right\rangle = -\frac{\partial E_0}{\partial B} = -\frac{\hbar e}{2m} = -\mu_B \quad (2.14)$$

hvor energien E_0 er egenværdi til Hamiltonoperatoren \hat{H} . Operatoren $\hat{\mu} = -\frac{e}{2}\vec{r} \times \vec{v}$ for det magnetiske moment er lig μ_z , idet de to andre komponenter af $\hat{\mu}$ bliver nul. Middelværdien af det magnetiske moment skal kunne findes ved at indsætte $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} + e\vec{A})$ i operatoren, og udvikle på egentilstandene for energien på sædvanlig vis. Da tilstandene er ens, ækvidistante striber i et homogent magnetfelt, og da de bærer samme strøm, må de have samme magnetiske moment μ_z . For nemheds skyld nøjes vi med at udregne det magnetiske moment for tilstanden Ψ_{00} . Bølgfunktionen bliver herligt simpel:

$$\Psi_{00}(y) = \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/2}l}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2l^2}\right) \quad (2.15)$$

I den lineære gauge fås $m\vec{v} = \vec{p} + e\vec{A} = \vec{p} + eBy \cdot \vec{e}_x$, hvilket fører til, at operatoren for det magnetiske moment bliver

$$\begin{aligned} \mu_z &= -\frac{e}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= -\frac{e\hbar}{2m} \left(\frac{L_z}{\hbar} + \frac{eB}{\hbar} y^2 \right) \\ &= -\mu_B \left(\frac{L_z}{\hbar} + \frac{y^2}{l^2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

idet det benyttes, at impulsmomentet er $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ og at $\langle L_y \rangle = \langle L_x \rangle = 0$. Middelværdien af $\frac{y^2}{l^2}$ findes af følgende:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} \langle \Psi_n | y^2 | \Psi_n \rangle &= \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^{1/2}l} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{l^2}\right) y^2 dy \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}l} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) u^2 l du = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

hvor substitutionen $u = \frac{y}{l}$ er blevet benyttet. Idet det viser sig, at $\langle \Psi_0 | L_z | \Psi_0 \rangle = 0$, for den anvendte bølgfunktion, bliver det magnetiske moment $\bar{\mu} = -\frac{1}{2}\mu_B$. Hvis man udvikler μ_z på en af de andre bølgfunktioner $p > 0$, tager $\frac{L_z}{\hbar}$ de ekstra led, der kommer ud af integrationen af $\frac{y^2}{l^2}$, således at resultatet bliver det samme.

Dette er ret foruroligende, da så enten energien eller bølgfunktionerne må være forkerte; Feynman-Hellman teoremet er der ingen grund til

at betvivle. Det viser sig at være bølgefunktionerne, der er årsag til uoverenstemmelsen, idet der under udledningen af disse blev anvendt periodiske randbetingelser.

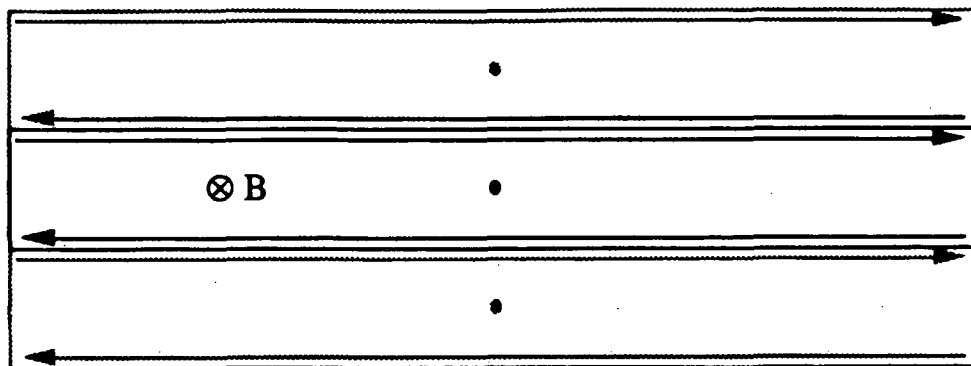
2.3.2 Problemet med periodiske randbetingelser

Standardmetoden til behandling af en "fri" elektron indespærret i en kasse - det vil sige en potentialbrønd med uendeligt stejle vægge - er at benytte periodiske randbetingelser. Egentilstandene for en fri partikel er den frie bølge $\exp(ik_x x)$. Det vil sige, at man forlanger, at bølgetilstanden har samme værdi på modsatstående sider af kassen til hver en tid, således at bølgen "bider sig selv i halen". Bølgetallet er da et helt antal gange $2\pi/L$, hvis L er længden af kassen. Derved kan vi finde energier, udartning etc.

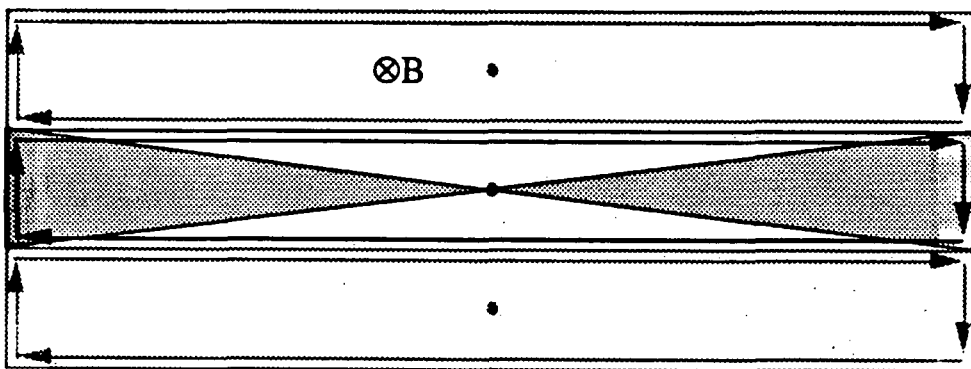
Problemet er, at periodiske randbetingelser er ufysiske - det er et kunstgreb, der gør det op for vores manglende evne til at løse et givent problem med de korrekte randbetingelser. For eksempel er det endnu ikke lykkedes at løse "en elektron i en potentialbox og i et magnetfelt" analytisk uden brug af periodiske randbetingelser. Gaugevalget må ikke få betydning for den forudsagte fysiske virkelighed. Løser man Schrödingerligningen for en rektangulær prøve i en anden gauge - f.eks. den cirkulære - får man strimmelformede bølgetilstande, uanset hvad. Besværet hermed er bare betydeligt større.

Et argument for den manglende halve Bohr magneton i udtrykket for det magnetiske moment, skal her kort skitseres. Man kan ved at gennemregne sandsynlighedsstrømtætheder for tilstande i den lineære gauge konstatere, at strømmen bevæger sig over tilstandens tyngdepunkt den ene vej, og under tilstandens tyngdepunkt den anden vej (se figur 2.4). Man kan også bare tage udgangspunkt i, at der er et magnetisk moment. Dette betyder, at en strøm må cirkulere og resultere i en værdi af $\vec{r} \times \vec{v}$ forskellig fra nul. Da strømbilledet er stationært, og da strømtilstandene strækker sig fra den ene ende til den anden, er der ikke andre muligheder, end at strømmen må cirkulere om tyngdepunktet som vist på figur 2.4. Periodiske randbetingelser giver løsninger, hvor strømmen fortsætter ud gennem endevæggene, nemlig plane bølger $\exp(ik_x x)$

Med periodiske randbetingelser fås bølgefunktioner, der svarer til, at strømmene fortsætter i pilenes retning. I virkeligheden kan strømmen naturligvis ikke fortsætte ud af prøven, idet vi betragter et isoleret



Figur 2.4: Her ses tre tilstande side om side. Strømmen bevæger sig over tilstandens tyngdepunkt den ene vej og under tyngdepunktet den anden vej.



Figur 2.5: Der er let at se, at det areal r -vektoren overstryger, er dobbelt så stort, når "vendingen" ved enderne tages i betragtning - selvom bredden af tilstanden er nok så lille.

system. Ladbingsbærerne kan ikke hobes op ved kanterne, og må derfor vende om ved endevæggene og løbe tilbage igen (se figur 2.5).

Det areal πl^2 der overstryges af stedvektoren \vec{r} for elektronen, som indgår i krydsproduktet i udtrykket for det magnetiske moment, bliver med periodiske randbetingelser kun halvt så stort, som det der i virkeligheden overstryges. Dette skyldes, at det lille ende-stykke, stedvektoren bevæger sig over, når strømmen vender for at løbe tilbage igen, nøjagtigt svarer til halvdelen af tilstandens samlede areal. Det betyder, at størrelsen af det magnetiske moment $\mu_z = -\frac{e}{2} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$ fundet ved periodiske randbetingelser også bliver halvt så stor, som den rigtige værdi $\bar{\mu} = -\mu_B$.

Den fri elektronmodel er i den lineære gauge intuitiv let at forstå, især i forhold til den eksperimentelle virkelighed og er samtidigt ukompliceret at analysere - ved brug af periodiske randbetingelser. Men ovenstående eksempel viser, at man må være opmærksom på de periodiske randbetingelsers ufysiske karakter, og på muligheden for misvisende teoretiske resultater, ved brug af ellers almindeligt anvendte fremgangsmåder. Schrödingerligningen i den cirkulære gauge løses (forholdsvis) let uden periodiske randbetingelser, og har derfor ikke de omtalte skavanker. I det følgende vil vi af hensyn til kommende afsnit, udlede bølgefunktionerne i den cirkulære gauge og vise, at den korrekte værdi af det magnetiske moment $\bar{\mu}$ fås ved at udvikle operatoren på de fundne bølgefunktioner.

2.4 Elektron i magnetfelt (den symmetriske gauge)

2.4.1 Schrödingerligningen i den symmetriske gauge

Der er tilsyneladende forskel på, hvilke resultater man får i de to gauges: i den lineære gauge får man strimmelformede bølgefunktioner, og i den symmetriske gauge får man ringformede. Dette er besynderligt, eftersom en løsning i den ene gauge skal kunne skrives som en linearkombination af løsninger fra den anden gauge. Det er da heller ikke gaugen, men randbetingelserne der er afgørende. Man vælger en gauge, der passer til randbetingelserne (prøvegeometrien) for ikke at rode sig ud i for komplicerede beregninger.

Vi viser endnu en gang de kendte resultater, denne gang i den symmetriske gauge (dvs. ved cirkulære randbetingelser), for blandt andet at kunne diskutere en elektronvæskes usammentrykkelighed. Den symmetriske gauge $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ giver Hamiltonoperatoren følgende udseende :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2m} \left(\frac{e^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) + \frac{eB\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) + \frac{eB}{2m} L_z$$

Dette ses at være Hamiltonoperatoren for en todimensional harmonisk oscillator, med energierne

$$E_{np} = \hbar \omega_c (n + 1/2)$$

Det viser sig, at bølgefunktionerne, der er løsninger til Schrödingerligningen $H\Psi = E\Psi$, kan skrives på formen (Prange og Girvin, 1987)

$$\Psi_{np} = N_{np} \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{4l^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^p \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2l^2}\right)$$

hvor N_{np} er en normeringsfaktor. Idet det komplekse tal $z = x - iy$ angiver stedkoordinaterne, kan bølgefunktionerne i det nederste Landau-niveau $n = 0$ skrives

$$\Psi_{0p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2 2^p p!}} \left(\frac{z}{l}\right)^p \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l^2}\right)$$

2.4.2 Middelværdi af r og r^2

Ved at beregne middelværdien af r og r^2 kan et udtryk for bølgefunktionernes bredde opstilles. Middelværdien af bølgefunktionenes radius findes ved

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{0p} | r | \Psi_{0p} \rangle &= \int_0^\infty \Psi_{0p}^* r \Psi_{0p} 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2\pi 2^p p! l^2} \int_0^\infty \left(\frac{r}{l}\right)^{2p} r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2^p p! l^2} \frac{1}{l^{2p}} \int_0^\infty r^{2p+2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) dr \\ &= \frac{(p + \frac{1}{2})!}{p!} \cdot l\sqrt{2} \\ &= l\sqrt{2p} \text{ for } p \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ligeledes findes middelværdien af kvadratet r^2 på radius

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{0p} | r^2 | \Psi_{0p} \rangle &= \int_0^\infty \Psi_{0p}^* r^2 \Psi_{0p} 2\pi r dr \\
&= \frac{1}{2\pi 2^p p! l^2} \int_0^\infty \left(\frac{r}{l}\right)^{2p} r^2 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) 2\pi r dr \\
&= \frac{1}{2^p p! l^2} \int_0^\infty 2^p R^2 \cdot 2l^2 \cdot R \cdot \exp(-R) dR \\
&= \frac{2l^2}{p!} \int_0^\infty R^{p+1} \exp(-R) dR \\
&= 2l^2(p+1)
\end{aligned}$$

hvor substitutionen $R = \frac{r^2}{2l^2}$ benyttes.

Vi kan danne et udtryk for bredden af bølgefunktionerne ved at betragte fluktuationskvadratet (spredningen) på radius r for $p \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = l\sqrt{2} \quad (2.18)$$

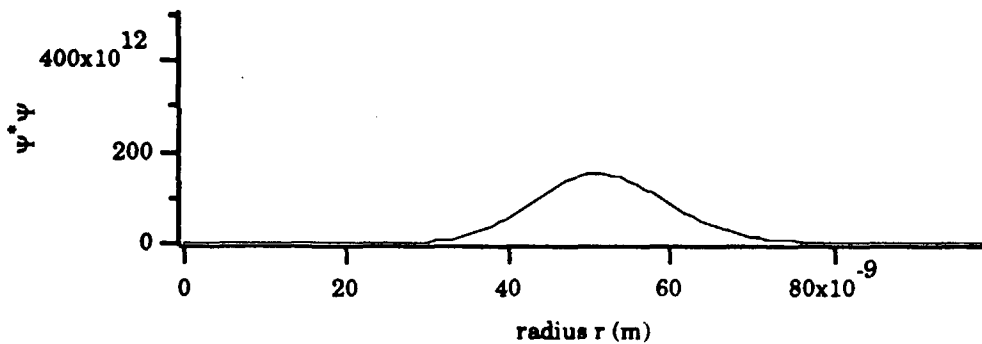
For en makroskopisk, ringformet prøve gælder at spredningen $l\sqrt{2} \ll R$. Dette viser, at vi i grænsen $p \rightarrow \infty$ får ringformede bølgetilstande, med tykkelse $l\sqrt{2}$. Udartningen findes som i den lineære gauge ved at stille et krav om, at middeleradius af bølgefunktionen skal ligge inden for prøven: $\langle r \rangle \leq R \Rightarrow l\sqrt{2p_{\max}} = R$. Det betyder, at $n = 0$ energiniveauet har udartningen

$$L = p_{\max} = \frac{R^2}{2l^2} = \frac{A/\pi}{2\hbar/eB} = \frac{BA}{h/e} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (2.19)$$

hvilket kan fortolkes således, at hver tilstand gennemstrømmes af det magnetiske fluxkvantum h/e .

2.4.3 Sandsynlighedsstrømtæthed og strøm i elektrontilstandene

Nu skal strømspørgsmålet i den fri elektronmodel behandles: om der løber en strøm, og i så fald hvor den løber. Da elektrontilstandene i den cirkulære gauge er stationære, kan strømmene kun have en azimutal komponent og ikke en radial. Først vil vi finde strømmen i den inderste



Figur 2.6: Her vises tilstanden $p = 10$ ved $B=5$ T i SI enheder. Radius er cirka 51nm og spredningen (et mål for tilstandens bredde) er omkring 16nm.

tilstand ($p = 0$). Den kan findes af sandsynlighedsstrømtætheden \vec{S}_{0p} , der er givet ved

$$\vec{S}_{0p} = \frac{\hbar}{2im} [\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] + \frac{e}{m} A \Psi^* \Psi \quad (2.20)$$

Denne ligning er ikke så grim som den ser ud, da bølgetilstanden i nederste Landauniveau heldigvis er simpel. Her skitseres udledningen af et udtryk for \vec{S} . Først ses, at den partielt afledede af Ψ med hensyn til x bliver

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{0p} \left(\frac{x - iy}{l} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{4l^2} (x^2 + y^2) \right) \right) \\ &= \left(\frac{p}{l} \cdot \frac{l}{x - iy} - \frac{x}{2l^2} \right) \Psi \\ &= \left(\frac{p}{z} - \frac{x}{2l^2} \right) \Psi \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ved således at bestemme de partielt afledede $\frac{\partial}{\partial x}$ og $\frac{\partial}{\partial y}$ af Ψ og Ψ^* fås gradienterne

$$\nabla \Psi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} p/z - x/2l^2 \\ -ip/z - y/2l^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (2.22)$$

$$\nabla \Psi^* = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Psi^* = \begin{pmatrix} p/z^* - x/2l^2 \\ ip/z^* - y/2l^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Psi^* \quad (2.23)$$

Indsættes disse resultater i formel(2.20) og anvendes vektorpotentialet $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ reduceres sandsynlighedsstrømtætheden \vec{S} til

$$\begin{aligned} \vec{S}_{0p} &= \frac{\hbar}{2im} \left[\begin{pmatrix} p/z - x/2l^2 \\ -ip/z - y/2l^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p/z^* - x/2l^2 \\ ip/z^* - y/2l^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Psi^* \Psi \\ &+ \frac{eB}{m2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Psi^* \Psi \Rightarrow \\ \vec{S}_{0p} &= \left[-\frac{\hbar p}{m} \begin{pmatrix} -y/(x^2 + y^2) \\ x/(x^2 + y^2) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{eB}{2m} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Psi^* \Psi \quad (2.24) \end{aligned}$$

Vi lader \vec{e}_θ betegne den azimutale enhedsvektor $(-y/r, x/r)$, der peger mod uret, og hvor r er givet ved $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dette giver så

$$\vec{S}_{0p} = \left[\frac{eBr}{2m} - \frac{\hbar p}{mr} \right] \Psi^* \Psi \cdot \vec{e}_\theta$$

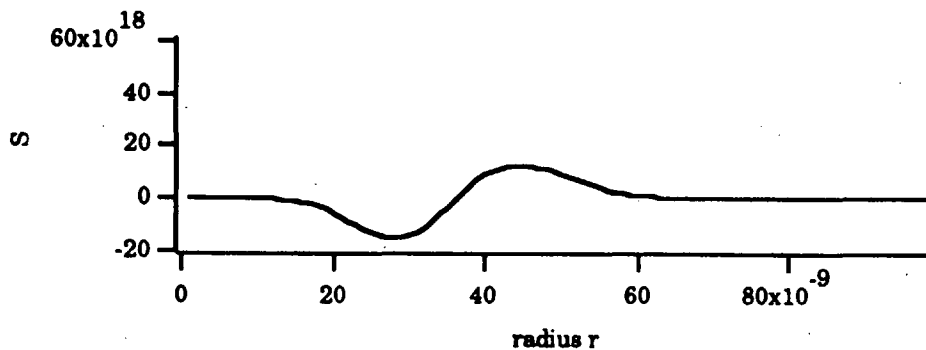
Sandsynlighedsstrømtætheden \vec{S} kan skrives

$$\vec{S}_{0p} = \Psi_{0p}^* \Psi_{0p} \left(\frac{1}{2} \omega_c r \right) \vec{e}_\theta - \Psi_{0p}^* \Psi_{0p} \left(p \omega_c \frac{l^2}{r} \right) \vec{e}_\theta \quad (2.25)$$

hvor det ses, at \vec{S} er nul for radii:

$$\frac{eBr}{2m} = \frac{\hbar p}{mr} \Rightarrow r = r_0 = l\sqrt{2p}$$

Den azimutale strøm I_{0p} fås ved at integrere sandsynlighedsstrømtætheden



Figur 2.7: Her ses sandsynlighedsstrømmen for tilstand $p = 10$. Strømmen findes ved at integrere S over r , og det kan næsten ses at det giver 0.

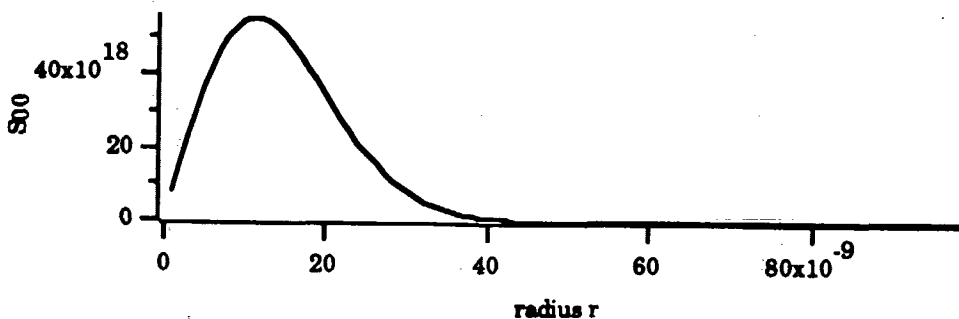
$$\begin{aligned}
 I_{0p} &= \int_0^{\infty} (-e) S_{0p} \cdot \vec{e}_\theta dr, \\
 &= \int_0^{\infty} (-e) \Psi_{0p}^* \Psi_{0p} \left(\frac{1}{2} \omega_c r \right) dr + \int_0^{\infty} (-e) \Psi_{0p}^* \Psi_{0p} \left(p \omega_c \frac{l^2}{r} \right) dr \\
 &= -\frac{\omega_c e}{4\pi} - \left(-\frac{\omega_c e}{4\pi} \right) = 0 \quad \text{for } p \neq 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

For en vilkårlig tilstand p med midtpunktet r_0 gælder det, at sandsynlighedsstrømtætheden er negativ for $r < r_0$ og positiv for $r > r_0$. Det vil sige, at strømmen flyder mod uret i området $r > r_0$ og med uret i området $r < r_0$. Ovenfor er vist, at den strøm $I_{r < r_0}$, der løber i området $r < r_0$, er af samme numeriske størrelse som $I_{r > r_0}$. Dette betyder, at hver tilstand giver anledning til lige stor sandsynlighedstrøm (og dermed strøm) den ene som den anden vej rundt. Alt i alt udligner hver tilstand sin egen sandsynlighedsstrøm! Nettostrømmen bliver åbenbart 0 i et radiale tværsnit.

Der er blot et symmetribrud på denne gensidige udligning af $I_{r > r_0}$ og $I_{r < r_0}$ strømmene. Den inderste tilstand $p = 0$, har en middelværdi for radius $r_0 = 0$, og har selvsagt kun et område $r > r_0$. Den inderste tilstand giver derfor anledning til en nettostrøm i retning med uret:

$$I_{00} = -\frac{\omega_c e}{4\pi} = -\frac{\mu_B}{2\pi l^2} \tag{2.27}$$

Dette kan kontrolleres ved indsættelse i formel (2.26).



Figur 2.8: Det ses, at tilstanden 00 kun har en positiv strømtæthed, svarende til en nettostrøm med uret.

2.4.4 Magnetisk moment i den cirkulære gauge

Operatoren for det magnetiske moment bliver ved indsættelsen af gauge $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ til

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} &= -\frac{e}{2}\vec{r} \times \vec{v}, \\
 &= -\frac{e}{2m} \left(\vec{r} \times (\vec{p} + e\vec{A}) \right), \\
 &= -\frac{e}{2m} \left(\vec{L} + e\vec{r} \times \vec{A} \right), \\
 &= -\frac{e\hbar}{2m} \left(\frac{\vec{L}}{\hbar} + \frac{eBr^2}{\hbar} \right) \\
 &= -\mu_B \left(\frac{\vec{L}}{\hbar} + \frac{r^2}{2l^2} \right) \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Da elektrontilstandene Ψ_{np} er egentilstande til impulsmomentoperatorens z -komponent ($L_x = L_y = 0$)

$$L_z \Psi_{np} = \hbar(n-p) \Psi_{np} \tag{2.29}$$

kan forventningsværdien af det magnetiske moment findes ved at benytte den tidligere fundne middelværdi af r^2

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_{0p} | \mu_z | \Psi_{0p} \rangle &= -\mu_B \left(\langle \Psi_{0p} | \frac{L_z}{\hbar} | \Psi_{0p} \rangle + \langle \Psi_{0p} | \frac{r^2}{2l^2} | \Psi_{0p} \rangle \right) \\
 &= -\mu_B \left(\frac{\hbar(0-p)}{\hbar} + \frac{2l^2(p+1)}{2l^2} \right) = -\mu_B \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Det magnetiske moment er altså det samme for alle tilstande i et Landau-niveau, i overensstemmelse med den lineære gauge. Men argumentet om topologisk ensartethed, der blev brugt for at indse, at de strimmelformede bølgefunktioner skulle have samme magnetisk moment, kan ikke benyttes for de ringformede bølgetilstande, da de ikke har samme radius. Det er derfor, der overhovedet er et magnetisk moment for hver tilstand på trods af, at hver tilstands radiale sandsynlighedsstrømtæthed totalt er nul (undtagen $p = 0$). Forklaringen er, at yderarealet ($r > r_0$) er større end inderarealet ($r < r_0$), hvorved strømmen i det ydre område yder et større bidrag til det magnetiske moment $-(e/2)\vec{r} \times \vec{v}$ end det indre områdes strøm. Denne forskel kan vises at give det netto magnetiske moment på $-\mu_B$ per tilstand (Hansen, 1984).

2.5 Elektronsystem i magnetfelt

Næste skridt er at betragte et antal frie elektroner, og se hvilke egenskaber de har tilsammen. Spørgsmålene er, hvilken netto elektrontæthed og strøm vi får for flere elektroner i et magnetfelt. For nemheds skyld regnes i det følgende med, at fyldningsgraden er $\nu = 1$, hvilket vil sige, at det nederste niveau er helt fyldt op.

2.5.1 Grundtilstandsbølgefunktion for elektron-systemet

Elektroner er fermioner (halvtalligt spin), og adlyder dermed Pauli princippet. En konsekvens af dette princip er, at to elektroner ikke kan opholde sig i identiske tilstande. Bølgefunktionen for to uskelnelige partikler i identiske tilstande er symmetrisk, hvilket vil sige, at man ved ombytning af to partikler ikke ændrer på bølgefunktionen. Dette indebærer omvendt, at en to-elektron bølgefunktion må være antisymmetrisk: når man permuterer to elektroner, skal bølgefunktionen

skifte fortegn. For et to-elektron system (Ψ_0, Ψ_1) kan en antisymmetrisk bølgefunktion $\Psi(\vec{r}_0, \vec{r}_1)$ opskrives

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}_0, \vec{r}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_0(\vec{r}_0)\Psi_1(\vec{r}_1) - \Psi_0(\vec{r}_1)\Psi_1(\vec{r}_0)) \quad (2.31) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \Psi_0(\vec{r}_0) & \Psi_0(\vec{r}_1) \\ \Psi_1(\vec{r}_0) & \Psi_1(\vec{r}_1) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

hvor $1/\sqrt{2}$ er en normeringskonstant. Det ses at:

$$\Psi(\vec{r}_0, \vec{r}_1) = -\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \quad (2.32)$$

Et system af fermioner i tilstandene $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N-1}$, har en antisymmetrisk N -partikel bølgefunktion, så ombytning af to vilkårlige elektroner skifter fortegn på bølgefunktionen. En sådan bølgefunktion kan, som det er anskueliggjort for $N = 2$ ovenfor, skrives som en determinant. Dette er den såkaldte Slaterdeterminant

$$\Psi_{\nu=1}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_0(\vec{r}_0) & \Psi_0(\vec{r}_1) & \dots & \Psi_0(\vec{r}_{N-1}) \\ \Psi_1(\vec{r}_0) & \Psi_1(\vec{r}_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N-1}(\vec{r}_0) & \dots & \dots & \Psi_{N-1}(\vec{r}_{N-1}) \end{vmatrix}$$

Byttes nu to elektroner om, f.eks. ved at \vec{r}_0 byttes ud med \vec{r}_1 , svarer det til, at to søjler i determinanten byttes om. Dette skifter fortegn på determinanten. Vi kan udtrykke grundtilstandsbølgefunktionen $n = 0$ for det nederste Landauniveau ved fyldningsgraden $\nu = 1$, som en Slaterdeterminant. En mere kompakt skriveform fås ved hjælp af antisymmetrioperatoren \tilde{A}

$$\Psi_{\nu=1} = \tilde{A}\Psi_{0,0}(r_0)\Psi_{0,1}(r_1)\dots\Psi_{0,N-1}(r_{N-1}) \quad (2.33)$$

2.5.2 Elektrontæthed

Det erindres fra tidligere, at elementararealet - arealet pr. tilstand - er $2\pi l^2$ i den frie elektronmodel. Da fyldningsgraden er $\nu = 1$, har vi derfor (i bulk) elektrontætheden $1/2l^2$ overalt. I det følgende skal vi forsøge at demonstrere, hvordan man kommer fra Slaterdeterminanten til et udtryk for den radiale elektrontæthed og derefter vise, at dette også giver $1/2\pi l^2$. Da fyldningsgraden $\nu = 1$ (en elektron per tilstand) kan den radiale elektrontæthed $n(r)$ skrives op som den samlede radiale tilstandstæthed.

Lad os først antage at elektronerne er skelnelige. Vi kan definere sandsynligheden P_{00} for at træffe elektron nr. 0 i afstanden r_0 som sandsynligheden for, at alle andre elektroner (1,2,3) opholder sig hvor som helst. Deres radii r_1, r_2, \dots, r_{N-1} , kan antage alle mulige værdier. P_{00} findes ved at integrere bølgefunktionens sandsynlighedstæthed over $dr_1, dr_2, \dots, dr_{N-1}$. I en analogi til den sædvanlige diskrete sandsynlighedsregning svarer denne integration til at "summere" det antal udfald hvor elektron nr. 0 er i afstanden r_0 , og dividere med det samlede antal udfald. Det samlede antal udfald findes ved at integrere bølgefunktionen over alle dr , hvilket giver 1, da elektronsystemets bølgefunktion er normeret.

Men elektronerne er uskelnelige. Vi kan ikke vide, hvilke elektroner der befinder sig i hvilke radii. Enhver af de N elektroner, kan altså "spille rollen" som elektronen nr. 0, og der er derfor N gange så mange muligheder for at finde en elektron i afstanden r_0 , som hvis elektronerne var skelnelige. Derfor må tilstandstætheden $n(r)$ blive N gange en vilkårlig af tæthedsfordelingerne, f.eks. $n(r_0)$. Denne er som nævnt integralet af absolutkvadratet på elektronsystemets bølgefunktion over $dr_1, dr_2, \dots, dr_{N-1}$:

$$\begin{aligned} n(r) &= N \cdot n(r_0) \\ &= N \cdot \int_0^\infty dr_1 \dots dr_{N-1} \Psi_{\nu=1}^*(r_0, \dots, r_{N-1}) \Psi_{\nu=1}(r_0, \dots, r_{N-1}) \end{aligned}$$

Her indgår den konjugerede Slaterdeterminant gange Slaterdeterminanten, og det ser umiddelbart temmeligt uoverkommeligt ud. Heldigvis går kryds-leddene ud ved integrationen, samtidigt med at andre belejligt giver 1. Vi ender derfor med det pæne og ikke særlig overraskende (mellem)resultat

$$n(r) = \sum_{i=0}^{N-1} \Psi_i^* \Psi_i \quad (2.34)$$

Det vil sige, at elektrontætheden er summen af de enkelte besatte tilstandes sandsynlighedstætheder ved fyldningsgraden $\nu = 1$. Krydsledene går ud, fordi tilstandene er ortogonale

$$\int_0^\infty \Psi_p(r_1) \cdot \Psi_q(r_1) dr_1 = 0, \text{ for } p \neq q \quad (2.35)$$

Dette giver tilbage integralet $\int_0^\infty dr_1 \dots dr_{N-1}$ af summen af $N!$ led

$$|\Psi_0(r_{\sigma(0)})|^2 |\Psi_1(r_{\sigma(1)})|^2 |\Psi_2(r_{\sigma(2)})|^2 \dots |\Psi_{N-1}(r_{\sigma(N-1)})|^2 \quad (2.36)$$

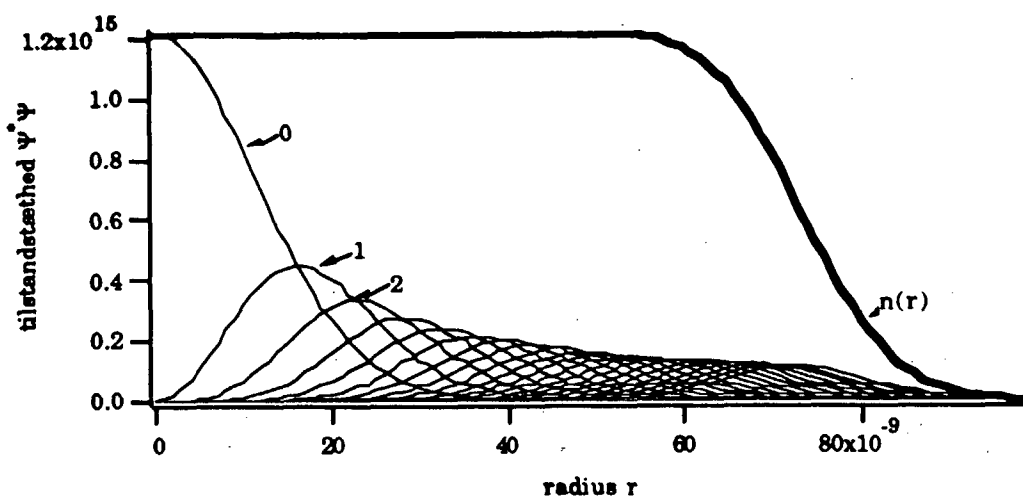
hvor σ er alle permuteringer af radierne: i hvert af de $N!$ led, er radiernes rækkefølge forskellig. Når disse $N!$ produkter af sandsynlighedskvadrater integreres over alt andet end dr_0 , vil i hvert led kun det i 'te sandsynlighedskvadrat $|\Psi_i(r_0)|^2$ blive forskellig fra 1

$$\int_0^\infty dr_1 \dots dr_{N-1} |\Psi_0(r_3)|^2 \dots |\Psi_i(r_0)|^2 \dots |\Psi_{N-1}(r_{27})|^2 \dots = |\Psi_i(r_0)|^2 \quad (2.37)$$

Da det i hvert led er en af N tilstandstætheder Ψ_i , der afhænger af r_0 , får vi en sum over $(N-1)!$ Ψ_p fra 0 til $N-1$

$$n(r) = N \cdot \frac{1}{(\sqrt{N!})^2} \cdot \sum_{p=0}^{N-1} (N-1)! |\Psi_p(r_0)|^2 = \sum_{p=0}^{N-1} |\Psi_p(r)|^2 \quad (2.38)$$

Det er nu vist, at den radiale elektrontæthed $n(r)$, der ved fyldningsgraden $\nu = 1$ bliver til en tilstandstæthed, kan skrives som summen af de enkelte bølgefunktioners absolutkvadrater, dvs. enkelt elektronernes sandsynlighedstætheder $\Psi_{0p}^* \Psi_{0p}$ for $0 \leq p \leq N-1$, og vi får nu det forventede resultat for $n(r)$



Figur 2.9: Magnetfeltet i denne simulering af en 20 tilstande stor prøve ved fyldningsgrad 1, er 5 T. Her ses at elektrontætheden falder hurtigt ved tilstanden $p = 20$, hvilket svarer til radius $r \approx l = 70 \text{ nm}$.

$$\begin{aligned}
 n(r) &= \sum_{p=0}^{N-1} |\Psi_{op}|^2 \\
 &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi l^2 2^p p!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2p} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi l^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(r/l)^{2p}}{2^p p!} \\
 &= \frac{1}{2\pi l^2} \exp(-b) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{b^p}{p!} \\
 &= \frac{1}{2\pi l^2} \text{ for } p < N - 1
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Elektrontætheden er konstant $1/2\pi l^2$ i prøven (i området $p < N$). Sandsynlighedstæthederne er på figur 2.9 vist, sammen med elektrontætheden (regnet som summen af enkelttilstandenes sandsynlighedstætheder) for en prøve med radius svarende til $N = 21$ elektrontilstande i nederste Landauniveau.

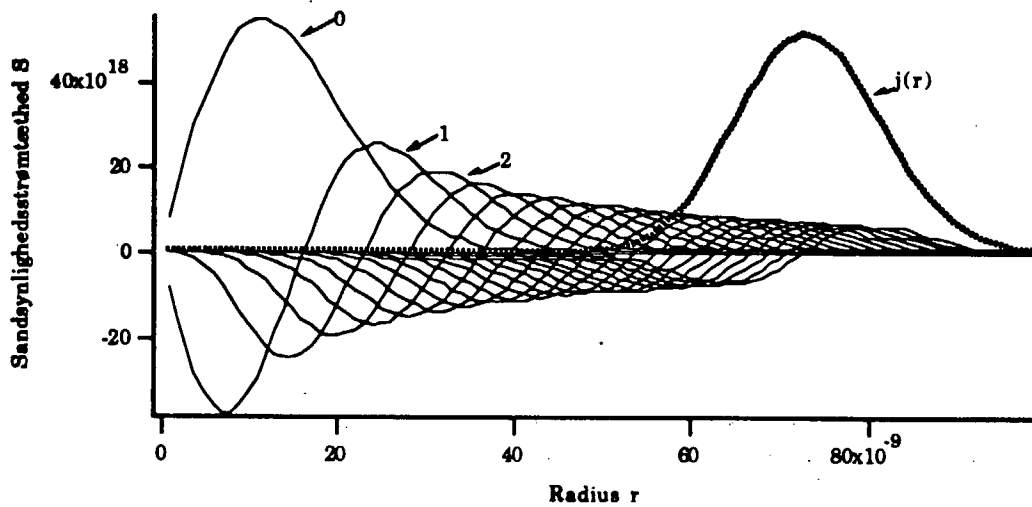
2.5.3 Strømtæthed i den fri elektronmodel

Sandsynlighedsstrømtæthederne er allerede regnet ud for en vilkårlig tilstand p i grundtilstanden $n = 0$ i afsnit (2.4.3). For at se hvordan vi kommer fra enkelt elektron sandsynlighedsstrømtæthed til den samlede strømtæthed, kan man gennemføre ovenstående program endnu engang. Der gælder (som før), at den globale strømtæthed findes ved at addere sandsynlighedsstrømtæthederne for de enkelte tilstande. Dette er illustreret på figur 2.10, der viser de 21 inderste sandsynlighedsstrømtætheder, sammen med den totale sandsynlighedsstrømtæthed, der for fyldningsgraden $\nu = 1$ bliver en "rigtig" strømtæthed. Et udtryk for strømtætheden kan udledes ved

$$\begin{aligned}
 j(r) &= -e \sum_{p=0}^{N-1} |\Psi_{0p}|^2 \left(\frac{1}{2} \omega_c r - p \omega_c \frac{l^2}{r} \right) \\
 &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi l^2 p!} b^p \exp(-b) \left(\frac{1}{2} \omega_c r - p \omega_c r \frac{1}{2b} \right) \\
 &= -e \cdot \exp(-b) \frac{\omega_c r}{4\pi l^2} \sum_{p=0}^{N-1} \left(1 - \frac{b^{-1}}{p^{-1}} \right) \frac{b^p}{p!} \\
 &= -\frac{1}{2\pi l^2} \frac{r}{l^2} \mu_B \frac{(r^2/2l^2)^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \exp\left(-\frac{r}{2l^2}\right)
 \end{aligned}$$

Denne funktion har en top omkring $r = \sqrt{2N-1} \approx R$. Der sker det, at den (mod uret) strøm som den inderste tilstand giver anledning til, i praksis bliver udlignet af nabolitstandenes $r < r_0$ strømme, der går den modsatte vej (med uret). Dette kan man anskueliggøre ved at beregne sandsynlighedsstrømtæthederne for et antal af de inderste ringe og dernæst lægge dem alle sammen. Den resulterende sandsynlighedsstrøm kommer til at løbe ved kanten. Her ses også, hvordan den relativt store overlapning af sandsynlighedstætheder den ene og den anden vej, nøjagtigt udligner hinanden hele vejen ud gennem prøven, bortset fra randen (se figur 2.10).

En numerisk integration af $p = 0$ tilstandens sandsynlighedsstrømtæthed (svarer til strømmen $I = -e \int_0^\infty \vec{S} dr$) giver med stor nøjagtighed samme værdi som integration af den resulterende kantstrømtæthed, hvilket understreger, at det er den inderste tilstands strøm, der løber i kantregionen.



Figur 2.10: Her ses sandsynlighedsstrømtætheden S afbildet som funktion af radius for de første 21 tilstande $p \in [0, 20]$ i Landauniveauet $n = 0$ ved et magnetfelt på 5 Tesla. Den kraftige kurve er summen af de enkelte tilstandes sandsynlighedsstrømtætheder, og svarer derfor til strømtætheden $j(r)$, på nær en faktor $(-e)$.

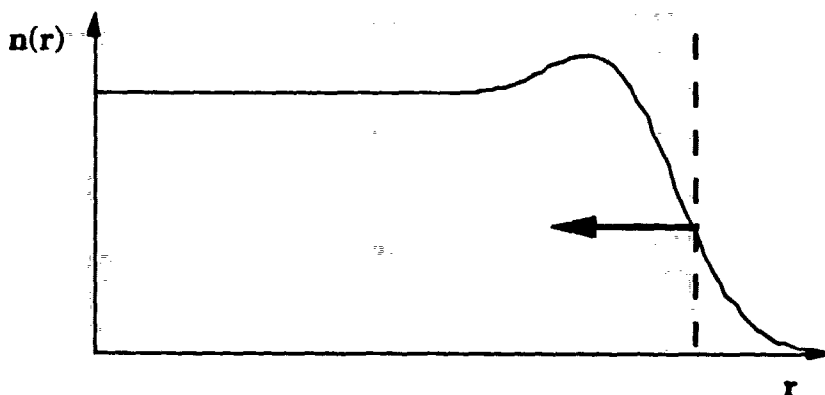
2.5.4 Usammentrykkelighed når $\nu = 1$

Vi betragter nu en cirkulær prøve, med en radius(r), der er lidt større end R . Størrelsen R er defineret som

$$N = \frac{\pi R^2}{2\pi l^2}$$

og beskriver således det areal, der netop kan rumme N enkelt-partikel-tilstande. For $\nu = 1$ befinder alle elektroner sig i nederste Landaubånd, hvor partikeldensiteten $n(r)$ som netop vist er konstant for $r < R$ og er givet ved $n = \frac{1}{2\pi l^2}$. Først når $r \approx R$, begynder n at klinge hurtigt af. Yderligere ved vi, at strømtætheden er nul i størstedelen af prøven. Kun i randområdet, dvs. for $r \approx R$, findes en cirkulerende strøm.

Vi forestiller os nu, at prøvens areal kan ændres adiabatisk, ved gradvist at mindske radius af prøven. I en stationær tilstand kan elektroner kun opholde sig i nærheden af væggen, hvis der i systemet dannes en kraft lige så stor og modsat rettet kraften fra væggen. En stadig større strøm løber derfor i prøvens yderste tilstande, hvorved en magnetisk kraft modsat rettet den ydre kraftpåvirkning skabes. Hermed vil antallet og energien af tilstande i bulk til at starte med være konstant.



Figur 2.11: Prøven sammentrækkes, hvorved partikeldensiteten ændres på randen. Den stiplede linie angiver væggen placering.

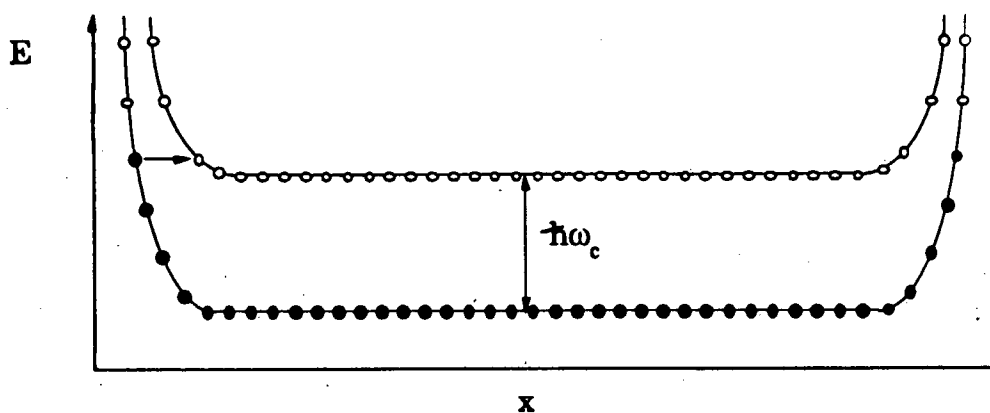
Det samme antal elektroner, N , skal befinde sig på et mindre areal - men antallet af bulktilstande er uforandret. Da der samtidig på grund af Pauli princippet kun kan være en elektron i hver tilstand, må tætheden i bulk altså ikke ændres, når arealet mindskes. Dette kan kun gøres ved at opmagasinere elektroner i de yderste tilstande, der ved sammentrækningen er blevet omdannet til kanttilstande - jvf figur 2.11. Denne opstabling af elektroner kan dog ikke vare ved.

Ved den gradvise sammentrækning øges samtidig den kinetiske energi af elektronerne i kanttilstandene, hvorfor disse efterhånden vil have en energi svarende til bulk-områdets næste energiniveau - det vil sige energien $\frac{3}{2}\hbar\omega_c$. Ved yderligere sammentrækning vil en af tilstandene i næste Landaubånd følgelig blive besat (se figur 2.12).

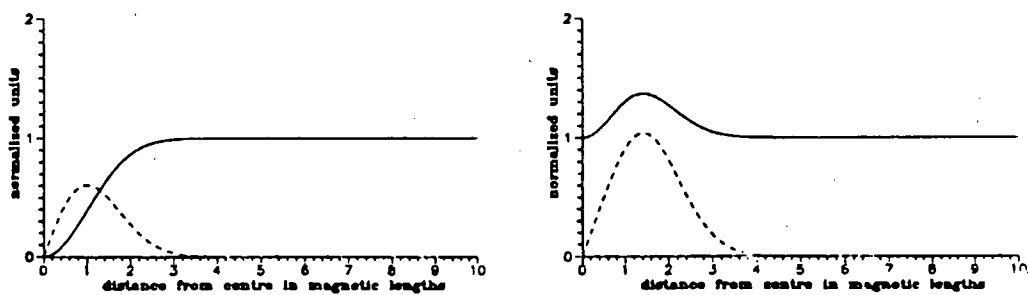
Lader vi den ene besatte tilstand i $n = 1$ være givet ved ψ_{10} kan bølgefunktionen for det sammentrukkede areal findes ved at beregne Slaterdeterminanten af ψ_{10} samt alle tilstandene i nederste Landauniveau. I bulk-området ser det altså ud som om systemet tilføjes en ekstra elektron--en elektron der tidligere befandt sig i en af kanttilstandene.

Havde vi i stedet betragtet en udvidelse af arealet ville først randtilstandene og siden en af bulktilstandene, eksempelvis ψ_{00} , blive affolket. Bølgefunktionen for det udvidede areal kunne på lignende vis skrives som Slaterdeterminanten af alle tilstande i nederste Landauniveau, med undtagelse af ψ_{00} .

De nye tilstande vil give anledning til en ændring i $n(r)$ og $j(r)$, der grafisk er illustreret på figur 2.13. Som man nok intuitivt ville forvente, skaber de nye tilstande lokalt store afvigelser i $n(r)$ og $j(r)$. Et resultat, der kan udledes matematisk, hvilket er gjort i (Bruus et al, 1988).



Figur 2.12: Kanttilstandenes ændring i energi, når prøve-arealet mindskes.



Figur 2.13: Den ændrede tæthed og strøm-tæthed (stiplet) i bulk-zonen, når prøvens areal henholdsvis mindskes og øges. For strøm-tætheden er den numeriske værdi indtegnet, idet der er tale om en strøm henholdsvis med og mod uret (Bruus, 1990).

For fyldningsgraden $\nu = 1$ har vi hermed givet en forklaring af begrebet usammentrykkelig væske. Når arealet mindskes vil systemet i første omgang udelukkende reagere ved ændringer på randen. Elektrongassen i bulk, er i ordets strengeste forstand usammentrykkeligt. Siden vil afvigelser fra bulkområdet (af samme type som på figur 2.13) opstå. I modsætning til en ideal-gas, eller en væske vil systemets tæthed ikke ændres gradvist, når arealet mindskes adiabatisk. Tætheden kan kun ændres i bratte spring svarende til energigabet i excitationsspektret ($\hbar\omega_c$). En kontinuert ændring af arealet giver en diskontinuert ændring af tætheden.

Pointen er, at de beskrevne afvigelser er lokaliserede, således at vi, når der ses bort fra defekterne, har en uforandret bulktilstand. Denne opførsel er i realiteten en naturlig følge af Pauliprincippet, og er derfor karakteristisk for alle heltallige fyldningsgrader. I kapitel 3 vil situationen blive beskrevet for fraktionelle fyldningsgrader.

2.6 Den heltallige kvantehall effekt ?

Hvad siger Landaubilledet om ledningsegenskaberne af en 2DEG? Hvis et Landauniveau er fyldt helt op (heltallig fyldningsgrad) vil Fermi-niveauet, ligesom i energibåndteorien for halvledere, ligge imellem det øverste fyldte og det nederst tomme Landauniveau. Der vil ikke være nogen mulighed for spredning, før temperaturen når en størrelse hvor $k_B T \approx \hbar\omega_c$.

Dette betyder, at middelvejlængden går mod uendelig og at resistiviteten går mod nul, ifølge den simpleste teori for ledningsevne (Drude modellen, se kapitel 1 eller appendiks A). Hvis den magnetiske flux hæves bare et fluxkvant Φ_0 , vil Landauniveauet synke en smule længere ned, samtidig med at udartningen øges med 1, iflg $N = \frac{\Phi}{\Phi_0}$. Nu er der 1 ledig-elektrontilstand i det øverste Landauniveau (og i hvert af de underliggende), og dermed mulighed for spredning - dette giver anledning til en resistivitet forskellig fra 0. I det ideale tilfælde ser det altså ud til, magnetomodstandens fald til 0 netop optræder, når et Landauniveau er fyldt helt op og det næste er helt tomt. Blot fluxen ændres et fluxkvant h/e , vil magnetomodstanden antage en værdi forskellig fra nul.

Da man eksperimentelt netop observerer store intervaller hvor magnetomodstanden er nul med tilsvarende plateauer i Hall-modstanden, som funktion af voksende magnetfelt, er den ideale model tydeligvis ikke tilstrækkelig. Den ideale model kan ikke forklare plateaudannelsen.

Kapitel 3

Plateaudannelse

Der har været fremsat adskillige teorier for plateaudannelse i QHE. De fleste knytter sig til tilstedeværelsen af urenhedspotentialer, der lokaliserer elektrontilstandene på den ene eller anden måde. Urenhedspotentialerne påvirker det ideale tilfælde på en sådan måde, at ændringer af magnetfeltet fra den ideale værdi, ikke ændrer den *effektive* fyldningsgrad. Vi vil præsentere to billeder, der hver især har deres berettigelse, uden at nogen af dem umiddelbart kan kanoniseres som "gældende".

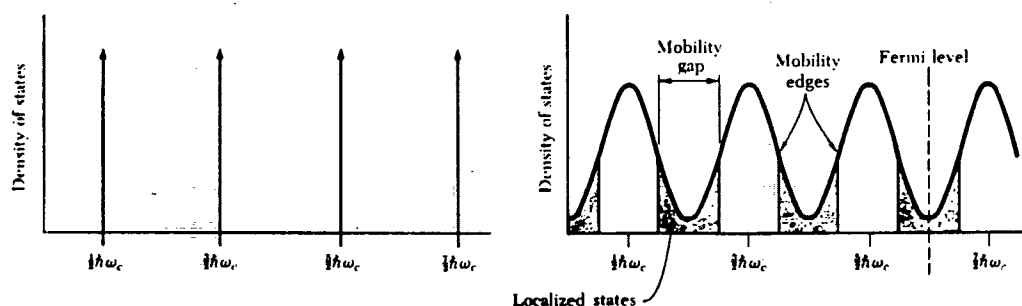
Det ene er et simpelt, men på flere punkter utilstrækkeligt billede, der kvalitativt forklarer den heltallige kvante Hall effekt. Det andet tager udgangspunkt i elektronernes vekselvirkninger, og kommer af den vej frem til et mere kompliceret billede, hvor elektrongassen opfattes som en usammentrykkelig væske, men hvor både den heltallige og den fraktionelle kvante Hall effekt tilsyneladende kan forklares.

3.1 Lokaliseringsteorien

Det der kræves af en generel teori for den heltallige kvante Hall effekt er dels, at forklare plateaudannelsen, og dels at redegøre for den eksakte kvantisering af plateauerne. Vi vil nu skitsere, hvordan dette falder ud indenfor rammerne af den "traditionelle" lokaliseringsteori.

De tre postulater i lokaliseringsteorien

En udbredt forklaring kan hentes i teorien om lokalisering for ikke vekselvirkende elektroner. Denne teori bygger på tre postulater:



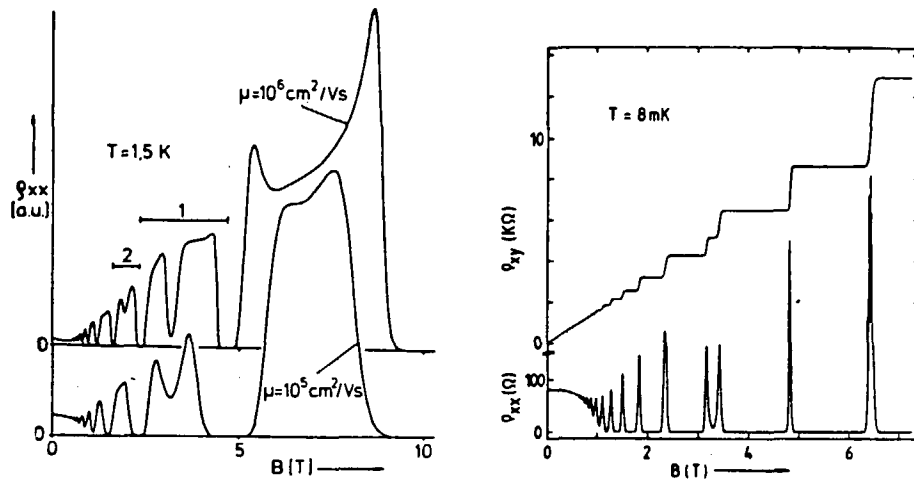
Figur 3.1: Tilstandstætheden med og uden lokalisering (Kittel, 1986)

1. I virkelige systemer er de diskrete, stærkt udartede Landau-niveauer, gjort bredere af urenheder og defekter i stoffet.
2. Der er mindst 1 strømbærende tilstand i hvert Landau-niveau (strømbærende tilstande kaldes udstrakte tilstande).
3. Landau-niveauerne er adskilt fra hinanden af mobilitetsgab, som udelukkende indeholder tilstande, der ikke leder strøm. Disse kaldes lokaliserede tilstande. Vi får en tilstandstæthed som vist på figur 3.1.

Når magnetfeltet øges, vokser Landau-energiene ifølge $E = \hbar\omega_c$, samtidigt med at udartningen øges. De yderste fyldte Landau-niveauer vil derfor tømmes i de underliggende niveauer, nøjagtigt som i det ideale tilfælde. Men hvis elektronerne istedet kan besætte lokaliserede (ikke-mobile) tilstande i mobilitetsgabet, således at elektronerne med højst energi ikke er strømførende, bliver Fermi-niveauet *pinnet* (holdt fast) i mobilitetsgabet.

Når Fermi-niveauet er i et mobilitetsgab, kræves der energier i størrelsesordenen $\hbar\omega_c$, for at: 1) sprede de strømførende elektroner ud af deres udstrakte tilstande under Fermi-niveauet, eller 2) sprede de lokaliserede elektroner ved Fermi-niveauet op i næste Landaubånd, som er de to mest oplagte dissipative processer, der kan give anledning til en elektrisk modstand.

Denne energi er ikke til rådighed ved temperaturer i størrelsen 5 K og nedefter, og for magnetfelter større end 1 T, hvor $\frac{k_B T}{\hbar\omega_c} < 0.26$.



Figur 3.2: Her ses magnetomodstanden ved $T = 1.5\text{ K}$ og $T = 8\text{ mK}$ for den samme prøve. Til venstre ses resistiviteten ρ_{xx} for to GaAlAs- GaAs heterostrukturer, som en funktion af magnetfeltet. De to prøver har samme ladningsbærertæthed, men forskellig mobilitet. Til højre ses hvordan lave temperaturer, gør overgangene mellem plateauerne meget bratte, samtidigt med at magnetomodstanden udviser skarpe spidser (Ebert, 1984).

Kun de udstrakte tilstande omkring de tidligere Landaniveauer kan lede strøm, og kun når Fermi-niveauet passerer kernen af udstrakte tilstande (f.eks. ved at magnetfeltet ændres), kan der ske spredning. Dette betyder, at resistiviteten ved lave temperaturer falder til 0.

Strømmen kan løbe dissipationsløst, ligesom i tilfældet med en perfekt 2DEG. Fyldningsgraden ν udtrykker antallet af ledningsbånd, der er fyldt op.

3.1.1 Strømkompensation

Man kan i lokaliseringsbilledet direkte tolke afstanden mellem plateauerne, som udtryk for antallet af udstrakte tilstande, idet "der skiftes plateau", når Fermi-niveauet passerer de udstrakte tilstande.

Når temperaturen sænkes, bliver afstanden mellem plateauerne mindre og mindre samtidigt med, at magnetomodstanden kommer til at ligne deltafunktioner mere og mere. (Se figur 3.2).

Dette indikerer, at Fermi-niveauet ved en gradvis forøgelse af magnetfeltet, kun i et meget lille interval passerer de udstrakte tilstande, og

det meste af tiden opholder sig i mobilitetsgab. Med andre ord betyder det, at kun en lille del af tilstandene er udstrakte.

En fortolkning af mellemrummet mellem plateauerne som udtryk for antallet af udstrakte tilstande viser, at mængden af udstrakte tilstande i forhold til det samlede antal af elektrontilstande i hvert Landauniveau, falder for $T \rightarrow 0$ (Ebert, 1984). Mobilitetsgabets vokser på bekostning af de strømførende tilstande.

Vi mangler stadig at forklare plateaudannelsen - at Hall plateauerne er eksakt kvantiseret som $\frac{h}{ie^2}$, selvom antallet af strømførende tilstande, ifølge lokaliseringsteorien, kan blive så lav som et par procent af antallet af tilstande, i det ideale tilfælde.

Dette kan forklares ud fra en kompensations-effekt, der bevirker, at de relativt få udstrakte tilstande i den kontaminerede prøve, leder den samme strøm som samtlige tilstande i det ideale tilfælde ved eksakt heltallig fyldningsgrad.

En klassisk forklaring er Laughlins gauge invarians argument, der går som følger: en 2DEG tænkes foldet rundt til en cylinder som vist på figur 3.3. Det bemærkes, at enderne på de udstrakte tilstande herved forbindes, så vi her har "ægte" periodiske randbetingelser. Tilstandene har virkelig samme værdi på modstående kanter af Hall prøven, idet disse kanter fysiske rører hinanden.

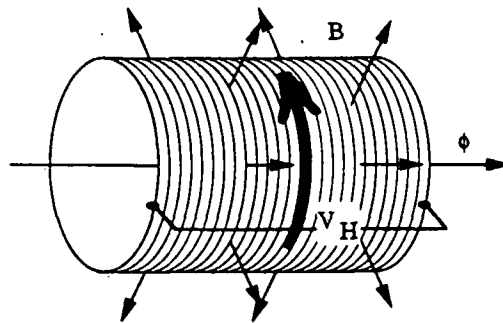
Radialt ud gennem prøven går et stærkt, homogent magnetfelt B , samtidigt med at strømmen I cirkler rundt i cylinderen. Magnetfeltet påvirker elektronerne i strømmen med en Lorentz kraft, der afstedkommer et Hall-potential fra kant til kant af cylinderen. En lille magnetisk flux ϕ gennemstrømmer cylinderen i længdeaksens retning.

Først ser vi på Faradays induktionslov, som kan skrives på en måde, der relaterer systemets totale energi U til strømmen I , for et modstandsløst system:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = I \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.1)$$

Det kan vises at strømmen da kan skrives $I = \frac{\partial U}{\partial \phi}$ (dette er *ikke* et trivielt resultat, idet $\frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial G}{\partial b} \neq \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial G}{\partial a}$).

Nu skal det vises, at denne størrelse $\frac{\partial U}{\partial \phi}$ er lig $\frac{V_H}{ie^2/h}$, så kvantiseringsrelationen $R_H = \frac{h}{ie^2}$ opfyldes.



Figur 3.3: Geometri for Laughlins tankeeksperiment.

Fluxen gennem cylinderen øges med $d\phi = \Phi_0 = \frac{h}{e}$, hvor Φ_0 er fluxkvantet (se kapitel 2). Dette medfører, at hele elektrongassen - det vil sige alle mobile elektrontilstande - forrykkes 1 gitterkonstant $\frac{hk}{eB}$.

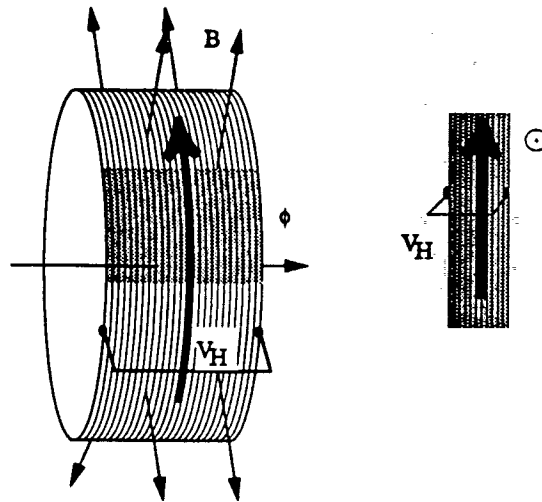
Alle elektrontilstandene skifter simpelthen plads, så de kommer til at ligge der hvor deres nabo lå før. Hvis fyldningsgraden er $\nu = 1$, betyder det, at der ved den ene kant af cylinderen skubbes 1 fyldt elektrontilstand ud, mens der i den anden ende skubbes 1 ubesat elektrontilstand ind. For fyldningsgrad $\nu = i$, vil i elektrontilstande blive skubbet ud hhv. ind i cylinderen.

Dette svarer til, at i elektroner er transporteret tværs over potentialet V_H , hvilket betyder en energiændring $dU = ieV_H$ for hele systemet. Da systemet ikke kan exciteres, kan dette kun lade sig gøre ved at ændre den cirkulerende strøm, og vi får ved hjælp af formel (3.1), at strømmen bliver

$$I = \frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{ieV_H}{h/e} = \frac{ie^2}{h} V_H \Rightarrow$$

$$R_H = \frac{h}{ie^2}$$

Denne sammenhæng mellem strøm og spænding er uafhængig af antallet af udstrakte tilstande i forhold til det samlede antal tilstande. Samtidig har det ingen betydning, om det er det elektriske felt eller strømmen, der kontrolleres. Det eneste, der er afgørende, er, at Fermi-niveauet kan blive pinnet i et mobilitetsgab, så systemet ikke kan



Figur 3.4: Laughlins tænkte geometri er i grænsen $r \rightarrow \infty$ ækvivalent med Hall geometrien.

ændre sin energi på anden vis end ved at svare på fluxændringen med en strøm.

Måske er det vanskeligt at acceptere, at det der gælder for en så usædvanlig og urealistisk geometri som Laughlin geometrien, uden videre gælder for rektangulære prøver. Men man kan tænke sig en meget stor cylinder, hvorpå der betragtes et meget lille, rektangulært stykke. Denne prøve kan tilnærmes vilkårligt til en Hall geometri, hvis blot stykket bliver lille nok. I denne geometri er antallet af tilstande, der overføres fra kant til kant, herved det samme som for hele cylinderen. (Se figur 3.4).

Der mangler stadig en forklaring på, at elektrontilstandene netop rykkes en tilstands bredde $\frac{\hbar k}{eB}$.

Stokes teorem anvendt på den omtalte geometri giver

$$\oint d\vec{A} \cdot d\vec{x} = d\phi$$

idet man skal tænke sig, at x -aksen følger med cylinderen rundt. Når fluxen ϕ ændres med $d\phi$, fås så et tilsvarende bidrag $d\vec{A}$ i x . Hvis vi benytter Landaugaugen $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$ til at beskrive systemet, svarer fluxændringen til en gaugetransformation af \vec{A} :

$$\vec{A} = (-By + d\vec{A}, 0, 0)$$

Ved at løse egenværdiligningen $H\Psi = E\Psi$ med dette vektorpotential fås, ganske som i kapitel 2, strimmelformede bølgefunktioner, men nu med nulpunktet :

$$y_0 = \frac{p_x}{eB} + \frac{d\vec{A}}{B}$$

Elektrontilstandene er altså forskudt $\frac{d\vec{A}}{B}$, ved fluxændringen $d\phi$. Ved brug af Stokes teorem, fås ved en integration af vektorfeltbidraget $d\vec{A}$ "rundt langs" x -aksen, at $d\phi = L_x d\vec{A}$ og dermed

$$\frac{d\vec{A}}{B} = \frac{h/e}{BL_x} = \frac{\hbar k_x}{eB} = l^2 k_x$$

hvor $l = \sqrt{\hbar/eB}$ og $k_x = \frac{2\pi}{L_x}$.

De lokaliserede tilstande påvirkes ikke af fluxændringen, da de i sigens natur ikke omspænder cylinderen, som gennemtrænges af fluxen ϕ . Kun de udstrakte tilstande mærker fluxændringen. Hvis Fermi-niveauet ligger i et mobilitetsgab, vil alle de udstrakte tilstande under Fermi-niveauet, både være fyldt før og efter fluxændringen. Kun de udstrakte tilstande kan lede strømmen, og da den fundne strøm, jævnfør ovennævnte argument, ikke afhænger af antallet af udstrakte tilstande, men af antallet af fyldte Landau-niveauer, må den strøm, de leder, være den samme uanset graden af lokalisering i prøven.

3.2 En usammentrykkelig elektronvæske

I forbindelse med forståelsen af den fraktionelle kvante Hall effekt foreslog den amerikanske fysiker Robert B. Laughlin i 1983 (se eventuelt Prange og Girvin, 1987), at elektronernes vekselvirkning må inddrages i beskrivelsen af den 2 dimensionale elektrongas. Denne opfattelse er siden blevet meget anerkendt, og kun få fysikere tror i dag, at FQHE kan forklares ved egenskaber af en ideal 2DEG.

Laughlin har blandt andet udviklet en matematisk beskrivelse af denne samling af vekselvirkende partikler, der også benævnes en usammentrykkelig væske. Siden har en del fysikere med udgangspunkt i Laughlins teori, søgt at give en uddybende fortolkning/forståelse af kvante

Hall effektens fysiske mekanismer. En af disse viderebygninger på Laughlins teori er hvirvel-billedet, der beskrives nærmere i slutningen af kapitlet.

Da Laughlins teoribygning og også hvirvelbilledet forudsætter tilstedeværelsen af en usammentrykkelig elektronvæske, skal dette begreb diskuteres mere indgående for fraktionelle fyldningsgrader. Men først en kort introduktion af Laughlins 'berømte' bølgefunktion.

3.2.1 Laughlins bølgefunktion

I Laughlins teori beskrives grundtilstanden ved:

$$\psi_{\nu=\frac{1}{m}} = \prod_{k<j}^N (z_k - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4l^2} \sum_{n=1}^N |z_n|^2\right) \quad (3.2)$$

Bølgefunktionen, der i dag er kendt som Laughlins bølgefunktion, er en god approksimation for fyldningsgrader $\nu = \frac{1}{m}$, hvor m er ulige. Det komplekse tal $z = x - iy$ er en angivelse af den enkelte partikels stedkoordinater, og funktionen udtrykker således, hvordan den j 'te partikel vekselvirker med de resterende partikler i systemet. Man kan også formulere det sådan, at vi i bølgefunktionen betragter alle par af elektroner (e_k, e_j) .

Laughlin har yderligere foreslået, at grundtilstandsbølgefunktionen, formel 3.2, kan exciteres til nye tilstande separeret fra grundtilstanden af et energigab af størrelsesorden $1 \text{ K} \sim 10^{-4} \text{ eV}$ (Bruus, 1990). Excitationerne er givet ved:

$$\psi_h = \exp\left(-\frac{1}{4l^2} \sum_{n=1}^N |z_n|^2\right) \prod_{i=1}^N (z_i - z_0) \prod_{k<j}^N (z_k - z_j)^m \quad (3.3)$$

$$\psi_e = \exp\left(-\frac{1}{4l^2} \sum_{n=1}^N |z_n|^2\right) \prod_{i=1}^N \left(2 \frac{\partial}{\partial z_i} - z_0^*\right) \prod_{k<j}^N (z_k - z_j)^m \quad (3.4)$$

Disse bølgefunktioner udtrykker positiv eller negativ afvigelse i ladningsfordelingen omkring z_0 . Afvigelser der kan fortolkes som om en mængde positiv eller negativ ladning er blevet exciteret. Ganske pudsig kan det vises (Hansen, 1984), at denne excitationssladning afhænger

af fyldningsgraden, og er givet ved $\pm \frac{e}{m} = \pm e\nu$. Da vi betragter fraktionelle fyldningsgrader, beskriver formel 3.3 og 3.4 følgende excitationer af fraktionelt ladede partikler - også kaldet kvasipartikler. En udledning af bølgefunktionen og excitationerne skal ikke gives her, men kan findes i eksempelvis (Prange og Girvin, 1987)

3.2.2 Usammentrykkelighed for fraktionelle fyldningsgrader, $\nu = \frac{1}{m}$

For fyldningsgraderne $\nu = \frac{1}{m}$, hvor $m \neq 1$, vil vi i det følgende vise, at systemet ifølge Laughlins teori reagerer på samme vis som det usammentrykkelige system for heltallig fyldningsgrad diskuteret i forrige kapitel. Dog kan vi ikke her argumentere ud fra Pauli-princippet, men må udføre en mere detaljeret analyse af Laughlins bølgefunktion. Men først en kort kvalitativ forklaring af systemets reaktion på en adiabatisk sammentrækning.

Trækkes arealet sammen vil en kantstrøm, for at beskytte bulkområdet, opstå. Dette kan tolkes som en opslemning af elektronvæsken i randområdet. Snart er energien af visse rand-elektroner dog så stor, at det er energetisk fordelagtigt at transportere en bestemt mængde ladning, $q = -\frac{e}{m}$, til bulkområdet.

Denne overførsel af ladning kan forstås som Laughlins excitationer af kvasipartikler. Men da excitationerne af ladning samtidig medfører, at den oprindelige tilstand tilføres afvigelser i densitet og strømtæthed, kan ligningerne 3.3 og 3.4 også opfattes som en beskrivelse af de grundtilstande, for hvilke $\nu \neq \frac{1}{m}$. Det vil sige for grundtilstandene indeholdende lokaliserede defekter.

Denne sidste fortolkning er, som Bruus påpeger det, essentiel for forståelsen af det såkaldte hvirvel-billede, og vil blive benyttet senere.

Egenskaber ved Laughlins bølgefunktion

I undersøgelsen af Laughlins bølgefunktion, viser det sig fordelagtigt at beregne hastighedsfeltet for en enkelt partikel, med de andre partikler fastholdt. Er denne partikel eksempelvis elektron 1, vil hastighedsfeltet, \vec{v}_1 , være givet ved

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{S}_1}{\psi_{\nu=\frac{1}{m}}^* \psi_{\nu=\frac{1}{m}}} \quad (3.5)$$

hvor sandsynlighedsstrømtætheden \vec{S}_1 , der skal opfylde kontinuitetsligningen $\frac{dP}{dt} + \text{div} \vec{S}_1 = 0$, som nævnt i kapitel 2 er givet ved

$$\vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2im^*} \left(\psi_{\nu=\frac{1}{m}}^* \nabla_1 \psi_{\nu=\frac{1}{m}} - \psi_{\nu=\frac{1}{m}} \nabla_1 \psi_{\nu=\frac{1}{m}}^* \right) + \frac{e}{m^*} \vec{A} \psi_{\nu=\frac{1}{m}} \psi_{\nu=\frac{1}{m}}^* \quad (3.6)$$

Når vi skal beregne \vec{S}_1 , er det praktisk først at beregne $\nabla_1 \psi_{\nu=\frac{1}{m}}$, hvor $\psi_{\nu=\frac{1}{m}}$ er givet ved formel (3.2). Da vi kun betragter elektron nummer 1, fås $j = 1$. Beregningen opdeles i to trin. Først produktdelen:

$$\begin{aligned} \nabla_1 (z_k - z_1)^m &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (z_k - z_1)^m, \frac{\partial}{\partial y_1} (z_k - z_1)^m \right) \\ &= \frac{m}{z_k - z_1} (-1, i) (z_k - z_1)^m \end{aligned}$$

Hvilket når vi tager gradienten af produktet giver:

$$\nabla_1 \prod_{k=1}^N (z_k - z_1)^m = \sum_{k=2}^N \frac{m}{z_k - z_1} (-1, i) \prod_{k=2}^N (z_k - z_1)^m$$

Rigtigheden af ovenstående ligning indses nok nemmest ved at betragte tilfældet $N = 3$. Da $\nabla_1 \prod_{k>j}^N (z_k - z_j)^m = 0$, når $j > 1$, kan udtrykket mere generelt skrives som:

$$\nabla_1 \prod_{k>j}^N (z_k - z_j)^m = \sum_{k=2}^N \frac{m}{z_k - z_1} (-1, i) \prod_{k>j}^N (z_k - z_j)^m \quad (3.7)$$

Endelig beregnes gradienten af den eksponentielle del af bølgefunktionen:

$$\nabla_1 \exp \left(- \sum_{n=1}^N \frac{|z_n|^2}{4l^2} \right) = \exp \left(- \sum_{n=1}^N \frac{|z_n|^2}{4l^2} \right) \left(- \frac{x_1}{2l^2}, - \frac{y_1}{2l^2} \right) \quad (3.8)$$

Gradienten af den samlede bølgefunktion findes nu ved benyttelse af (3.7) og (3.8):

$$\begin{aligned}\nabla_1 \psi_{\nu=\frac{1}{m}} &= \left[\sum_{k=2}^N \left(\frac{m}{z_1 - z_k} \right) (1, -i) + \left(\frac{-x_1}{2l^2}, \frac{-y_1}{2l^2} \right) \right] \\ &\quad \prod_{k>j}^N (z_k - z_j)^m \exp \left(- \sum_{n=1}^N \frac{|z_n|^2}{4l^2} \right) \\ &= \left[\sum_{k=2}^N \left(\frac{m}{z_1 - z_k} \right) (1, -i) + \left(\frac{-x_1}{2l^2}, \frac{-y_1}{2l^2} \right) \right] \psi_{\nu=\frac{1}{m}}\end{aligned}$$

Dette resultat indsættes nu i udtrykket for \vec{S}_1 (formel 3.6), hvorved vi efter bortdividering af $\psi^* \psi$ ifølge formel (3.5) finder:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{\hbar}{2im^*} \left(\sum_{k=2}^N \frac{m}{z_1 - z_k} (1, -i) + \left(\frac{-x_1}{2l^2}, \frac{-y_1}{2l^2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\hbar}{2im^*} \left(\sum_{k=2}^N \frac{m}{z_1^* - z_k^*} (1, -i) + \left(\frac{-x_1}{2l^2}, \frac{-y_1}{2l^2} \right) \right) + \frac{e}{m^*} \vec{A} \\ &= \frac{\hbar m}{m^*} \sum_{k=2}^N \frac{1}{z_1 - z_k} (-i, -1) - \frac{1}{z_1^* - z_k^*} (-i, 1) + \frac{e}{m^*} \vec{A} \\ &= \frac{\hbar m}{m^*} \sum_{k=2}^N \left[\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1 - z_k} \right), -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_1 - z_k} \right) \right] + \frac{e}{m^*} \vec{A} \\ &= \vec{v}_{para} + \vec{v}_{dia}\end{aligned}\tag{3.9}$$

For at diskutere hvirvel-billedet er det nødvendigt at beregne cirkulationen af ovenstående hastighedsfelt. Vi integrerer således formel (3.9) rundt langs cirklen Γ med centrum i origo og radius r . Bidraget fra sidste led giver blot

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}_{dia} ds_1 = \oint_{\Gamma} \frac{e}{m^*} \vec{A} ds_1 = \frac{e}{m^*} \phi_r = \frac{\hbar}{m^*} \frac{\phi_r}{\phi_0}\tag{3.10}$$

hvor $\frac{\phi_r}{\phi_0}$ er antallet af fluxkvanter omsluttet af cirklen Γ . Første led kræver derimod lidt hjælp fra den komplekse analyse, idet integralet

$\int f(z)dz$, hvor $f(z) = \sum_{k=2}^N \frac{1}{z-z_k}$, må evalueres ved brug af residue-regning. Da man i den komplekse analyse benytter stedkoordinaten $z = x + iy$, skal det betragtede udtryk kompleks konjugeres. Herefter fås i den nye stedkoordinat

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}_{para} ds_1 = \frac{\hbar m}{m^*} \oint_{\Gamma} -Im(f(z)dx) - Re(f(z)dy)$$

der, når vi nøjes med at betragte realdelen, kan skrives som:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar m}{m^*} Re \left(\oint_{\Gamma} -Im f(z)dx - Re f(z)dy + i[Re f(z)dx - im f(z)dy] \right) \\ &= \frac{\hbar m}{m^*} Re \left(\oint_{\Gamma} [-Im f(z) + i Re f(z)] dz \right) \\ &= \frac{\hbar m}{m^*} Re \left(i \oint_{\Gamma} f(z) dz \right) \end{aligned}$$

Funktionen $f(z)$ har $N - 1$ simple poler - en for hver værdi af z_k . Dette antal poler svarer til antallet af elektroner (N_r) indenfor cirklen Γ , hvorved vi, idet $Res(f(z)) = 1$, får:

$$\oint v_{para} ds_1 = \frac{\hbar m}{m^*} \cdot Re \{ i 2\pi i \sum Res(f) \text{ for poler i } \Gamma \} = \frac{\hbar m}{m^*} (-2\pi N_r) \quad (3.11)$$

Herefter er det muligt, ved hjælp af (3.10) og (3.11), at opskrive det søgte udtryk for cirkulationen af \vec{v}_1 :

$$\oint \vec{v}_1 d\vec{s} = \frac{h}{m^*} \left(-m N_r + \frac{\phi_r}{\phi_0} \right) \quad (3.12)$$

De to led i dette udtryk kaldes henholdsvis det paramagnetiske og det diamagnetiske bidrag.

- Det paramagnetiske bidrag hidrører fra elektronens banebevægelse, og ses at afhænge af antallet af poler i \vec{v}_1 , hvilket er ensbetydende med antallet af nulpunkter i Laughlins bølgefunktion. Af Laughlins bølgefunktion følger endvidere, at der til hver enkelt elektron er knyttet m nulpunkter, hvilket vil sige, at der for hver betragtet elektron fås m paramagnetiske bidrag.

- Det diamagnetiske bidrag stammer fra elektronens rotation induceret af det ydre felt, og bestemmes af antallet af fluxkvanter i prøven. Jo flere fluxkvanter, desto større diamagnetisk bidrag.

Denne fortolkning af nulpunkters og fluxkvanter bidrag til para- og diamagnetiske egenskaber er essentiel i den følgende diskussion af hvirvelbilledet.

Hvirvler og antihvirvler

Ved beregninger af samme type som gennemgået ovenfor kan man for ligningerne for ψ_h og ψ_e (formel (3.3) og (3.4)) finde at

$$\oint \vec{v}_1 d\vec{s}_1 = \begin{cases} -\frac{h}{m^*} & \text{for } \psi_h \\ \frac{h}{m^*} & \text{for } \psi_e \end{cases}$$

når $r \ll l$. Formlerne for ψ_h og ψ_e beskriver altså hvirvellignende tilstande, der roterer henholdsvis med og mod uret (i den komplekse analyse regnes bevægelsen mod uret for positiv.) I stedet for betegnelserne kvasihul og kvasielektron indføres derfor begreberne hvirvel og antihvirvel.

I hvirvel-billedet skal det nu forklares, hvorledes systemet kan fastholde en given fyldningsgrad ($\nu = \frac{1}{m}$), når magnetfeltet ændres. Da systemets gennemsnitlige fyldningsgrad ν_G er givet ved

$$\nu_G = \frac{Nh}{AeB} \quad (3.13)$$

er en ændring af B -feltet ækvivalent med den tidligere omtalte ændring af arealet A . I det følgende vil B være den ydre kontrolparameter, hvilket i praksis er en del nemmere at have med at gøre. Vi betragter nu B -feltets styrke midt på et plateau, det vil sige for $\nu_G = \frac{1}{m}$

$$B_0 = \frac{mhN}{eA}$$

og antager, at vi her har en homogen elektrontæthed n_0

$$n_0 = \frac{1}{m} \frac{eB_0}{h} \quad (3.14)$$

I dette tilfælde kan det gennemsnitlige antal elektroner indenfor cirklen Γ , skrives som $\langle N_r \rangle = \frac{1}{m} \frac{\phi_r}{\phi_0}$. Indsættes dette udtryk i (3.12) fås

$$\left\langle \oint \vec{v}_1 d\vec{s}_1 \right\rangle = 0 \quad (3.15)$$

Herved kan det ses, at systemet på midtplateauet er i indre ligevægt. Det paramagnetiske og det diamagnetiske bidrag til hastighedsfeltet ophæver fuldstændig hinanden.

Det magnetiske felt ændres nu gradvist. Antager vi, at tætheden er konstant, må også nulpunktstætheden være konstant. Men er dette tilfældet, kan ligevægten ikke opretholdes, idet antallet af fluxkvanter vil blive enten større eller mindre end antallet af nulpunkter. Det parallel- eller dia-magnetiske bidrag vil dominere og dermed danne et hastighedsfelt proportionalt med r . Ved blot en lille ændring af fluxen, dannes der følgelig makroskopiske strømme i prøven.

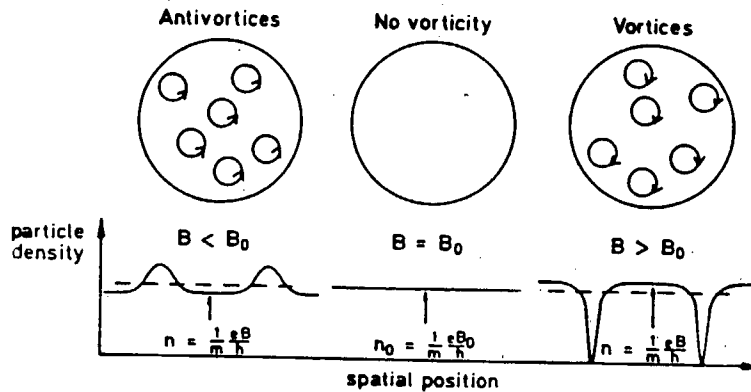
Har vi for eksempel mindsket B -feltet, må systemet for at undgå disse makroskopiske strømme, etablere en ny tæthed, således at antallet af fluxkvanter stadig kan udbalancere antallet af nulpunkter.

I første omgang kan dette sikres ved at bølgefunktionen fastholdes, mens systemet ekspanderer. Men efterhånden vil randområdet være overbefolket, hvorefter en balance kun kan opretholdes ved dannelsen af et nyt nulpunkt. Et nulpunkt, der når Laughlins excitations-bølgefunktion fortolkes som en defekt grundtilstand, kan beskrives ved en antihvirvel. I et stykke tid vil antallet af para- og diamagnetiske bidrag igen ophæve hinanden, hvorefter endnu et nulpunkt opstår - og så fremdeles.

Hver gang B -feltet mindskes med et helt fluxkvant, må en antihvirvel dannes, for at få regnskabet til at passe. Hvirvelstrømmene vil ganske vist inducere en magnetisk flux, men denne kan vises at være negligabel i forhold til den ydre flux, således at vi stadig har ligevægtstilstanden $\langle \oint v_1 ds \rangle = 0$.

Havde vi i stedet øget B -feltet, havde systemet trukket sig sammen og siden dannet hvirvler - en hvirvel for hvert fluxkvant (se figur 3.5).

I modsætning til situationen hvor arealet ændres er det her nødvendigt, at tætheden kan ændres gradvist. Dog kan systemets respons på varierende B -felt, stadig tolkes som egenskaber ved en usammentrykkelig elektron-væske. Blot er det ikke tætheden, men derimod fyldningsgraden, der fastholdes. Dette kan efter diskussionen af hvirvel/fluxudbalanceringen forstås på følgende måde:



Figur 3.5: Tætheden i prøven under variation af B -feltet. (Bruus, 1990).

Når magnetfeltet B ændres i forhold til værdien B_0 på midtplateauet, vil den gennemsnitlige fyldningsgrad ν_G være forskellig fra $\frac{1}{m}$. Hvis $\nu = \frac{1}{m}$ skal sikres, må elektronsystemet danne et antal fraktionelt ladede hvirvler, således at fyldningsgraden lokalt afviger fra $\nu = \frac{1}{m}$. Hermed vil fyldningsgraden være bevaret, når der ses bort fra defekterne, hvorimod tætheden kun er konstant, når vi betragter prøvens gennemsnitlige partikeldensitet. Imellem defekterne vil n afhænge af B som

$$n(B) = \frac{eB}{mh}$$

For at forklare, at hvirvlerne netop har den fraktionelle ladning $\pm \frac{e}{m}$ er det nemmest at betragte ovenstående udtryk for ladningstæthed. For hvirvler vil denne tæthed lokalt dykke til nul, hvilket i forhold til det omgivende system vil virke som om, en positiv ladning med ladningen $\frac{e}{m}$ er blevet indplaceret. For antihvirvler fås tilsvarende ladningen $-\frac{e}{m}$.

3.3 Plateaudannelse for FQHE

Hvorledes hvirvel-billedet kan forklare den observerede plateaudannelse for fraktionelle fyldningsgrader, ses ved at sende en strøm I igennem en rektangulær prøve.

På midtplateauet fås driftshastigheden $v_0 = -\frac{E}{B_0}$ og dermed strømtætheden:

$$j = n_0(-e)v_0 = \frac{e^2 E}{mh}$$

Bevæger vi os lidt væk fra midtplateauet ($B > B_0$), vil billedet variere alt efter om prøven indeholder urenheder eller ej.

Har prøven ingen urenheder vil hvirvelmønsteret blot flyde med strømmen, og vil derfor give, at tætheden i et vilkårligt punkt midlet over tiden er $n_0 = \frac{eB_0}{mh}$. Da væske og dermed også hvirvler i det stationære tilfælde har driftshastigheden $-\frac{E}{B}$ fås sammenhængen

$$j = n(-e)v = \frac{en_0}{B} E$$

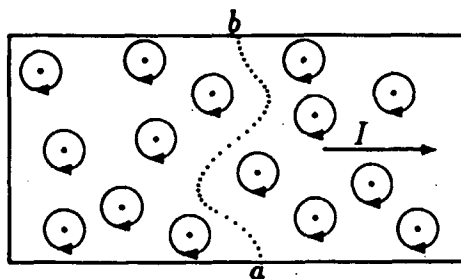
der svarer til udtrykket for strømtætheden i fri elektronmodel, og som ikke implicerer nogen form for plateaudannelse.

Har vi derimod uorden i prøven, kan hvirvlerne pines til bestemte steder i prøven. I en pæn afstand fra alle pinnede hvirvler vil densiteten være $n = \frac{1}{m} \frac{eB}{h}$, der resultere i strømtætheden for midtplateauet:

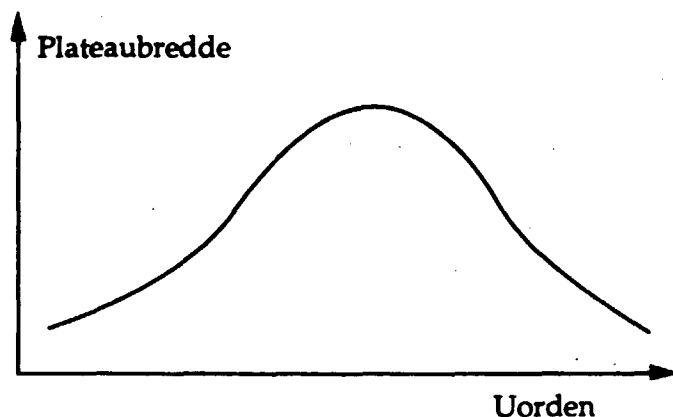
$$j = n(-e)v = \frac{e^2 E}{mh}$$

Hall-spændingen er defineret som $V_H = -\int_A^B \vec{E} d\vec{s}$, hvor A og B er punkter på hver sin side af prøven. Plateauet vil derfor eksistere, så længe det er muligt at danne en integrationsvej på tværs af prøven, der går uden om alle urenheder. Da vil strømtætheden være givet ved ovenstående ligning (se figur 3.6). Ved udelukkende at koncentrere sig om området uden om urenhederne, kan der altså gives et simpelt billede på plateaudannelsen.

Ved hjælp af de to begreber *lokalisering* og *pinning* er det muligt at forklare, hvorledes fyldningsgraden kan fastholdes, og dermed give en konstant Hall-modstand på et helt interval af B -værdier. Tilstedeværelsen af urenheder er essentiel for denne forklaring, da plateaudannelsen vil ophøre, hvis de lokaliserede afvigelser ikke kan pines. Dog vil for mange urenheder også hindre plateaudannelse, idet det i hvirvelbilledet er nødvendigt, at den transversale integrationsvej har mulighed for at sno sig uden om urenhederne - jævnfør figur 3.6. Er antallet af hvirvler for stort, er det umuligt at finde en vej i det 'uberørte' bulkområde,



Figur 3.6: En mulig integrationsvej på tværs af prøven



Figur 3.7: Skitse af plateau-bredde som funktion af graden af uorden i prøven.

hvorved plateauet ikke længere kan eksistere. Dette kan også forstås således, at elektronernes bevægelse ikke længere er korreleret, hvilket giver, at elektronsystemet nu ikke kan opfattes som usammentrykkeligt. Det formodede forhold mellem plateaubredde og uorden er gengivet på figur 3.7.

Sluttelig skal det bemærkes, at Laughlins teori kun kan forklare fyldningsgraderne $\frac{1}{m}$. I nederste Landau-niveau har man dog indenfor de seneste år observeret plateaudannelse for flere rationelle fyldningsgrader, $\frac{p}{q}$. For at forklare disse tilstande er den såkaldte hierakiske teori blevet udviklet. Teoriens grundide er, at de dannede kvasipartikler med ladningen $\pm \frac{e}{m}$ igen kan kondensere i nye Laughlinlignende tilstande med fyldningsgraden $\frac{p}{q}$, hvor q er ulige. For nøjere gennemgang (Prange og Girvin, 1987).

3.3.1 En samlet teori?

Det må konkluderes, at der indenfor QHE teorien eksisterer to overordnede, separate fremstillingsformer. I den heltallige kvante Hall effekt ser man bort fra elektronernes vekselvirkning, mens teorien for FQHE fokuserer på elektronernes korrelerede bevægelse. Ved fremkomsten af den fraktionelle kvante Hall effekt var mange fysikers første reaktion, at dette måtte være et fænomen af en helt anderledes natur end IQHE. Men i de seneste par år har flere ytret formodninger om, at der eksisterer en fundamental relation mellem de to teorier. Den amerikanske fysiker J.K.Jain er overbevist om eksistensen af en samlet teori, og mener selv, at denne har en ganske simpel struktur. Vi vil ikke gå nærmere ind i Jains teori, men blot fremhæve et par interessante resultater.

I Jains teori kan alle FQHE-tilstande skrives i termer af IQHE-tilstande og alle FQHE-excitationer kan skrives i termer af IQHE-excitationer. Endvidere vil en tilstand arve egenskaberne fra de tilstande, af hvilke den er skabt. Usammenhængigheden af IQHE-tilstandene vil derfor nedrives til de følgende FQHE-tilstande. Herved er det sikret, at også de nydannede tilstande kan udvise plateaudannelse.

Laughlins bølgefunktion kan for fyldningsgraden $\nu = 1$ skrives som produktet af N enkelt-partikeltilstande. Produktbølgefunktionen, der netop ikke inddrager elektronernes vekselvirkning, kan derfor skrives som:

$$\chi_1 = \prod_{k < j}^N (z_k - z_j) \exp \left(-\frac{eB}{4\hbar} \sum_{n=1}^N |z_n|^2 \right)$$

På grund af denne sammenhæng kan Laughlins bølgefunktion, nu betegnet $\chi_{\frac{1}{m}}$, skrives som:

$$\chi_{\frac{1}{m}} = \prod_{k < j}^N (z_k - z_j)^{m-1} \chi_1 \quad (3.16)$$

Dette giver matematisk set det rigtige resultat, men hvorledes skal (3.16) fortolkes? Ifølge resultaterne fra forrige afsnit kan multiplikationen af $\prod_{k < j}^N (z_k - z_j)^{m-1}$ forstås som en tilføjelse af $m - 1$ fluxkvanter til hver enkelt elektron. Da B -feltet ikke ændres i eksponentialfunktionens argument, kan antallet af fluxkvanter kun forøges ved en udvidelse af arealet.

Jain generaliserer nu (3.16) til alle usammentrykkelige tilstande med heltallig fyldningsgrader (χ_{p_1}). Herved kan en ny, usammentrykkelig tilstand skrives som:

$$\chi_p = \prod_{k < j}^N (z_k - z_j)^{m-1} \chi_{p_1} \quad (3.17)$$

med fyldningsgraden:

$$p = \frac{p_1}{(m-1)p_1 + 1} \quad (3.18)$$

Ved at opfatte fyldningsgraden som antallet af fluxkvanta pr. elektron fås ovenstående ligning, idet antallet af fluxkvanter for tilstanden χ_{p_1} er $\frac{1}{p_1}$.

Jain kan ved brug af den skitserede metode, danne alle rationelle fyldningsgrader, og kan på lignende vis finde tilstandenes excitationer. Med udgangspunkt i IQHE-excitationerne, finder Jain blandt andet en bølgefunktion, der er identisk (bortset fra en normeringskonstant) med Laughlins exciterede tilstand, ψ_h . Derimod findes der ikke overensstemmelse med Laughlins tilstand ψ_e . Jains exciterede tilstand passer dog bedre med numeriske løsninger, og generelt giver Jains bølgefunktioner en bedre forudsigelse af elektronsystemets opførsel.

Appendiks A

Drude-teorien for metaller

Mange metal-egenskaber kan med held forklares ved at opfatte de ledende elektroner (valens-elektronerne) som en fri ideal elektrongas. En af disse gasteorier, Drude teorien, beskriver stort set elektrongassen ved hjælp af den kinetiske gasteori. Modellen er en af de simpleste og bygger blandt andet på følgende antagelser:

- For en enkelt elektron negligeres vekselvirkningen med andre elektroner og ioner i gitteret.
- Kollisioner er øjeblikkelige, og efter hvert sammenstød reduceres elektronens hastighed til nul.
- Tiden mellem to kollisioner kaldes relaxationstiden(τ). Der eksisterer kun en relaxationstid i systemet, og denne er uafhængig af elektronernes hastighed.

På baggrund af disse antagelser er det muligt at opskrive en bevægelsesligning for en enkelt ledningselektron. Påvirkes elektronen af et ydre elektrisk felt(E), fås bevægelsesligningen:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{mv}{\tau} = -eE \quad (\text{A.1})$$

hvor v er elektronens gennemsnitlige hastighed og hvor størrelsen $\frac{mv}{\tau}$ er et friktionsled, der forhindrer en evig acceleration af elektronen. En detalieret gennemgang findes i eksempelvis (Ashcroft og Mermin, 1988). Bemærk at der i denne formulering ikke er taget hensyn til kollisionernes

art, det antages blot, at der foregår en eller anden form for spredning med sandsynligheden $\frac{1}{\tau}$ pr. tidsenhed.

Når en stationær tilstand er indtrådt, det vil sige, når elektronerne ikke længere accelereres, kan elektronernes driftshastighed beregnes ved brug af ligning A.1:

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{e \vec{E} \tau}{m}$$

Hvorefter den elektriske strømtæthed (\vec{j}) kan beregnes som:

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau\vec{E}}{m}$$

hvor n er ladningsdensiteten pr. volumen. Den elektriske konduktivitet (σ) er defineret som $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, hvorved DC-ledningsevnen for frie elektroner i et konstant \vec{E} -felt (σ_0) kan skrives som:

$$\sigma_0 = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (\text{A.2})$$

Dette udtryk for DC-ledningsevnen kaldes undertiden Drude-ledningsevnen.

Hall effekten

En leder placeres nu i et B -felt pegende i z -aksens retning. Den enkelte elektron påvirkes nu udover de viskøse og elektriske kræfter også af en magnetisk kraft, F_m , givet ved:

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Bevægelsesligningen (A.1) må følgelig tilføjes et ekstra led, der repræsenterer det ekstra kraftbidrag:

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.3})$$

Endnu en gang kan elektronernes driftshastighed beregnes ved at betragte ovenstående ligning i det stationære tilfælde, hvilket giver:

$$\frac{m\vec{v}}{\tau} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{e\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

For at bestemme strømtætheden i x -, y - og z -retningen beregnes først de tre hastighedskomponenter:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{e\tau}{m}(E_x + v_y B) \\ v_y &= -\frac{e\tau}{m}(E_y - v_x B) \\ v_z &= -\frac{e\tau}{m}E_z \end{aligned}$$

Indsættes udtrykket for v_y i første ligning fås et eksplicit udtryk for hastighedskomponenten, v_x :

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{e\tau}{m}\left[E_x - \frac{Be\tau}{m}(E_y - v_x B)\right] \Leftrightarrow \\ v_x &= -\frac{e\tau}{m}(E_x - \omega_c \tau E_y + \omega_c \tau v_x B) \Leftrightarrow \\ v_x &= -\frac{\frac{e\tau}{m}(E_x - \omega_c \tau E_y)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \end{aligned}$$

hvor vi her har indført cyklotronfrekvensen $\omega_c = \frac{Be}{m}$. På tilsvarende vis findes:

$$v_y = -\frac{\frac{e\tau}{m}(E_y + \omega_c \tau E_x)}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

Strømtæthederne kan nu umiddelbart findes ved indsættelse i relationen $\vec{j} = -nev$:

$$\begin{aligned} j_x &= -nev_x = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{(E_x - \omega_c \tau E_y)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) \\ j_y &= -nev_y = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_y + \omega_c \tau E_x) \\ j_z &= -nev_z = \sigma_0 E_z \end{aligned}$$

Vælges en matrix-repræsentation af ovenstående ligningssystem fås:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Da der gælder sammenhængen $\vec{j} = \bar{\sigma}\vec{E}$ har vi hermed fået opstillet den tredimensionelle ledningsevnetensor ($\bar{\sigma}$) for systemet. Ved matrix-invertering findes resistivitetstensoren $\bar{\rho}$, hvilket gør det muligt at udtrykke \vec{E} som funktion af \vec{j} :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & -\frac{B}{ne} & 0 \\ \frac{B}{ne} & \frac{1}{\sigma_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

I Hall-prøven vil elektronerne på grund af den magnetiske kraft afbøjes ud til en af prøvens sider, hvorved et elektrisk felt (E_y) på tværs af prøven opstår. Efterhånden vil den elektriske kraft ($F_e = -eE_y$) ophæve den modsat rettede magnetiske kraft ($f_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$), hvilket i ligevægtssituationen vil give, at $j_y = 0$. Det indre felt E_y , også kaldet Hall-feltet E_H , kan følgelig findes ved:

$$j_y = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (\omega_c \tau E_x + E_y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$E_H = E_y = -\omega_c \tau E_x$$

Hvilket indsat i udtrykket for j_x giver den simple sammenhæng:

$$j_x = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x + E_x \omega_c^2 \tau^2) = \sigma_0 E_x$$

Med kendskab til denne størrelse kan den såkaldte Hall-koefficient, der er defineret som $R_H = \frac{E_H}{j_x B}$ beregnes:

$$R_H = \frac{E_H}{j_x B} = -\frac{\omega_c \tau E_x}{\sigma_0 E_x B} = -\frac{1}{ne} \quad (\text{A.4})$$

Denne konstant afhænger kun af materialeparameteren n , der således teoretisk set burde kunne bestemmes ved eksperimentelle målinger af R_H . I praksis er dette ikke altid tilfældet, idet n findes at afhænge af B -feltet. En faktor som den simple Drude-teori ikke tager højde for.

Da vi for Hall-prøven ved, at $j_y = 0$, kan R_{xx} - også kaldet magnetomodstanden - og R_{xy} den transversale modstand (Hall-modstanden) bestemmes. Dette gøres ved i matrix-fremstillingen af $\vec{E} = \bar{\rho}\vec{j}$ at indsætte $j_y = 0$, hvilket giver en enkel fremstilling af de relevante komponenter af E -feltet:

$$E_x = \frac{1}{\sigma_0} j_x$$

$$E_y = \frac{B}{en} j_x$$

Ved brug af disse ligninger kan resistiviteterne ρ_{xx} og ρ_{xy} bestemmes som:

$$\frac{E_x}{j_x} = \rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma_0} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{E_y}{j_x} = \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{en} \quad (\text{A.6})$$

I et tre-dimensionalt system gælder at:

$$R_{xx} = \rho_{xx} \frac{L}{W d}, \quad R_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{d}$$

hvor L , W og d betegner henholdsvis prøvens længde, bredde og tykkelse. De søgte modstande kan følgende skrives som:

$$R_{xx} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{W d}$$

$$R_{xy} = \frac{B}{en d} = \frac{B}{en_f}$$

hvor n_f betegner fladeladningsbærer-densiteten defineret som

$$n_f = n \cdot d.$$

Da vi har fundet sammenhængen $v_x = -\frac{E_x}{\rho_{xx} n e}$ kan elektron-mobiliteten (μ), der er defineret som forholdet mellem elektronernes drifthastighed og det elektriske felt samtidig beregnes:

$$\mu = \frac{v_x}{E_x} = -\frac{1}{\rho_{xx} n e} = -\frac{\sigma_0}{en} \quad (\text{A.7})$$

Litteraturliste

1. N.W.Ashcroft og N.D.Mermin, *Solid State Physics*, CBS Publishing, 1988
2. H.Bruus et al, *J. Phys. C*, **21** 375 (1988)
3. H.Bruus, *Gamma*, nr.75, 1989
4. H.Bruus, *Ph.D-afhandling*, HCØ Tryk, 1990
5. M.E.Cage, *Phys. Rev. B*, **51** 1374 (1983)
6. M.E.Cage, *Phys. Rev. B*, **30** 2286 (1984)
7. F.Delahaye, *Metrologia*, **25** 73 (1988)
8. G.Ebert, *J. Phys. C*, **16** 5441 (1983)
9. G.Ebert, s.178 i *Localization, Interaction and Transport phenomena*, Springer Verlag (Berlin), 1984
10. S.M.Girvin, *Phys. Rev. B*, **30** 3016 (1984)
11. S.M.Girvin, *Phys. Rev. B*, **51** 1374 (1983)
12. S.M.Girvin, *Phys. Rev. B*, **30** 3016 (1984)
13. R.Johnston og L.Schweitzer, *Z.Phys. B*, **72** 217 (1988)
14. E.B.Hansen, *Physica B*, **123** 183 (1984a)
15. E.B.Hansen, *Pair ordering in the FQHE*, HCØ Tryk, 1984b
16. J.K.Jain, *Phys. Rev. B*, **41** 7653 (1990)
17. C.Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons inc, 1986
18. Jean-Marc Lévy-Leblond og Françoise Balibar, *Quantics II*, HCØ Tryk, 1992
19. A.Kristensen og O.P.Hansen, *Speciale fra HCØ*, HCØ Tryk, 1991
20. H.P.Meyers, *Introduction to Solid State Physics*, Taylor & Francis, 1990

21. R.E.Prange og M.Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer Verlag (New York), 1987
22. J.R.Reitz, *Foundation of Electromagnetic Theory*, Addison Wesley, 1979
23. R.N.Sacks, *Phys Rev. Lett*, **64** 677 (1990)
24. H.Smith, *Indledning til Kvantemekanik*, HCØ Tryk, 1990
25. P.Streda og K.Klitzing, *J.Phys. C*, **17** 483 (1984)
26. C.Weisbuch, *Semiconductors and semimetals (vol.24)*, Academic Press INC, San Diego

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projekt rapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss. Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum". Projekt rapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "THERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projekt rapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KREFTFORSKNINGEN". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMAL OG KONSEKVENSER". Projekt rapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality". Af: Helge Kragh.
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.C'ERE". a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projekt rapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projekt rapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS". Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DILEMMATISK RELAXATION: - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller". Projekt rapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MØNGDELERE". Projekt rapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMER STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MØSSBAUDEREFFKTALINGER". Projekt rapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen. Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projekt rapport af: Erik Gade, Hans Heddal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgæet.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projekt rapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projekt rapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-1+1 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projekt rapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showki.
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILDEDER".
Projekt rapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Højrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projekt rapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projekt rapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgæet.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projekt rapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projekt rapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projekt rapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Højrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Højrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Højrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projekt rapport af: Per Hødegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projekt rapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Friedahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?".
Projekt rapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Høefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projekt rapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hvid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORLØBSEJNINGER I FYSIK"
- en test i l.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Age Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFVLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDERUG"
- Økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Age Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Heddal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig ledningsevne i amorft germanium".
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialrapport af: Per Hødegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FUERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 90/84 "ENERGI I L.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.
-
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lillethorup.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSAlderEN".
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klinton.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSystEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSKIFNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habelkost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
 Projekt rapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
 Af: Jens Jøger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS TRANSITION".
 Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
 Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
 Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
 - flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
 Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
 Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
 Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
 Projekt rapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kattler og Torben J. Andreasen.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
 Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
 Projekt rapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
 Projekt rapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Pfyraant.
 Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".
 Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
 Projekt rapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
 Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING".
 Af: Jacob Mørch Pedersen.
 Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFELDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
 Af: Peder Voetmann Christiansen
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
 Af: Iben Maja Christiansen
 Vejleder: Mogens Niss.
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
 Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
 Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
 Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY, 8 - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".
 Projekt rapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
 Projekt rapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen.
 Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
 Projekt rapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅRYB" - om ikke-standard analyse.
 Projekt rapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
 Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
 Lecture Notes 1983 (1986)
 Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"
 Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingelser.
 Projekt rapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
 Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
 Projekt rapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
 Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
 Af: Bent Sørensen.
-
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM".
 Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen,
 Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
 MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
 Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
 Projekt rapport af Frank Colding Ludvigsen
 Vejledere: Historie: Ib Thiersen
 Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
 Af: Jeppe Dyre
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"
Projektrapport af Finn C. Physant
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach"
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"
af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"
Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale
Af: Hans Hedal
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"
By: Jeppe Dyre
- 155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"
by: Michael Pedersen
- 156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 157/88 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."
by: Michael Pedersen
- 158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"
by: Jeppe Dyre
- 159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"
by: Bent Sørensen
- 160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"
by: Jens Gravesen
- 161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"
by: Michael Pedersen
- 162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"
by: Jens Gravesen

- 166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"
Af: Jørgen Larsen
- 167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mossbauerspektroskopi.
Fysikspeciale af:
Birger Lundgren
Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ
- 169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."
Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.
Introduktion og oversættelse:
Peder Voetmann Christiansen
- 170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988
- 171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"
af: Johnny Tom Ottesen
- 172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"
Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.
Fysikprojekt af:
Erik Lund og Kurt Jensen
Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen
-
- 173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"
af: Mogens Brun Heefelt
-
- 174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"
af: Peder Voetmann Christiansen
- 175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATIONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"
af: Michael Pedersen
- 176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"
af: Jeppe Dyre
- 177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"
af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"
af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jørgen
vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen
- 179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 179b/89 "ELEVHEFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"
by: Jeppe Dyre
- 183/89 "MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction
by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)
- 184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmfylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"
af: Tage Emil Christensen
-
- 185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"
Et matematisk projekt
af: Steen Grode og Thomas Jessen
Vejleder: Jacob Jacobsen
-
- 186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabens udvikling"
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen
- 187/90 "RSA - et kryptografisk system"
af: Annetette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen
Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk
- 188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"
by: Jeppe Dyre
- 189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER
af: Finn Langberg

- 190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"
by: Jeppe Dyre
- 191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C^* -ALGEBRAS"
by: Iain Raeburn and Dana P. Williams
- 192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"
by: Viggo Andreasen
- 193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"
by: Stig Andur Pedersen
- 194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af : Frank Olsen
- 194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport
Projektrapport af: Frank Olsen
- 195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.
Projektrapport for 1. modul på fysikkuddannelsen, skrevet af:
Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.
af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL"
af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale
af: Frank Olsen
- 199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen
- 200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss
- 201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraction"
af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Petr Višćor, Ole Bakander
- 202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.
af: Peder Voetmann Christiansen
- 203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990
afløser tekst 170/88
- 204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Višćor
- 205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)
- 206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Višćor
- 207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.
af: Helge Kragh
- 210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Separable Subalgebras with Unitality Condition."
by: Lars Kadison
- 211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"
- historien bag teorien for de komplekse tal.
af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.
Vejledere: Jesper Larsen og Bernheir Booss-Bavnbek
- 212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"
by: Lars Kadison
- 213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host"
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

- 214|91 "Halleløj i østeren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.
Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager
Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal
- 215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters
by: A.Delong, M.Draticka, K.Hladil, V.Kolarik, F.Olsen, P.Pavelka and Petr Viscor.
- 216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"
af: Thomas Jessen
-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
-
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krySTALLINSK silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt
-
- 233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility"
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-