

# **Vinklens tredeling**

**– et klassisk problem**

**Et matematik projekt af  
Karen Birkelund  
Bjørn Christensen**

**TEKSTER fra**

**IMFUFA**

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Vinklens tredeling - et klassisk problem

Et matematisk projekt af Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

IMFUFA tekst nr. 230/92

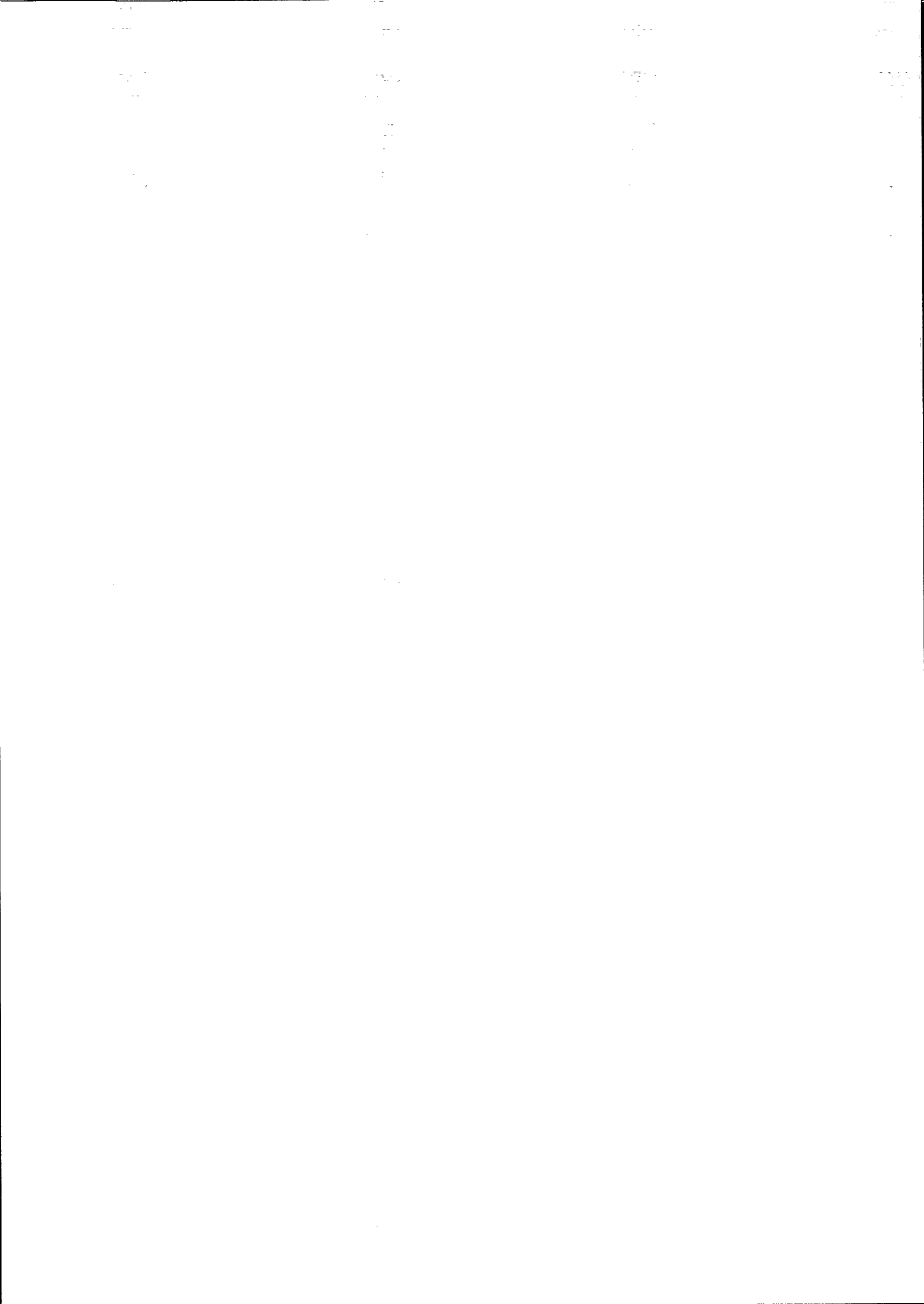
80 sider

ISSN 0106-6242

---

### Abstract

Man kan ikke dele en vilkårlig vinkel i tre lige store dele med passer og lineal. Vi gennemgår beviset for dette, og diskuterer hvilke vinkler, der faktisk kan tredeles. Endelig behandles og afvises et bud på en metode til tredeling af vinkler med passer og lineal.



Roskilde, Juni 1992.

## Forord

Denne rapport er et resultat af projektarbejdet udført af Karen Birkelund og Bjørn Christensen i foråret 1992. Projektet er et modul 1 projekt ved matematik-overbygningen på Roskilde Universitetscenter.

Vi takker vores vejleder Johnny Ottesen for inspirerende og engageret støtte i projektarbejdet.

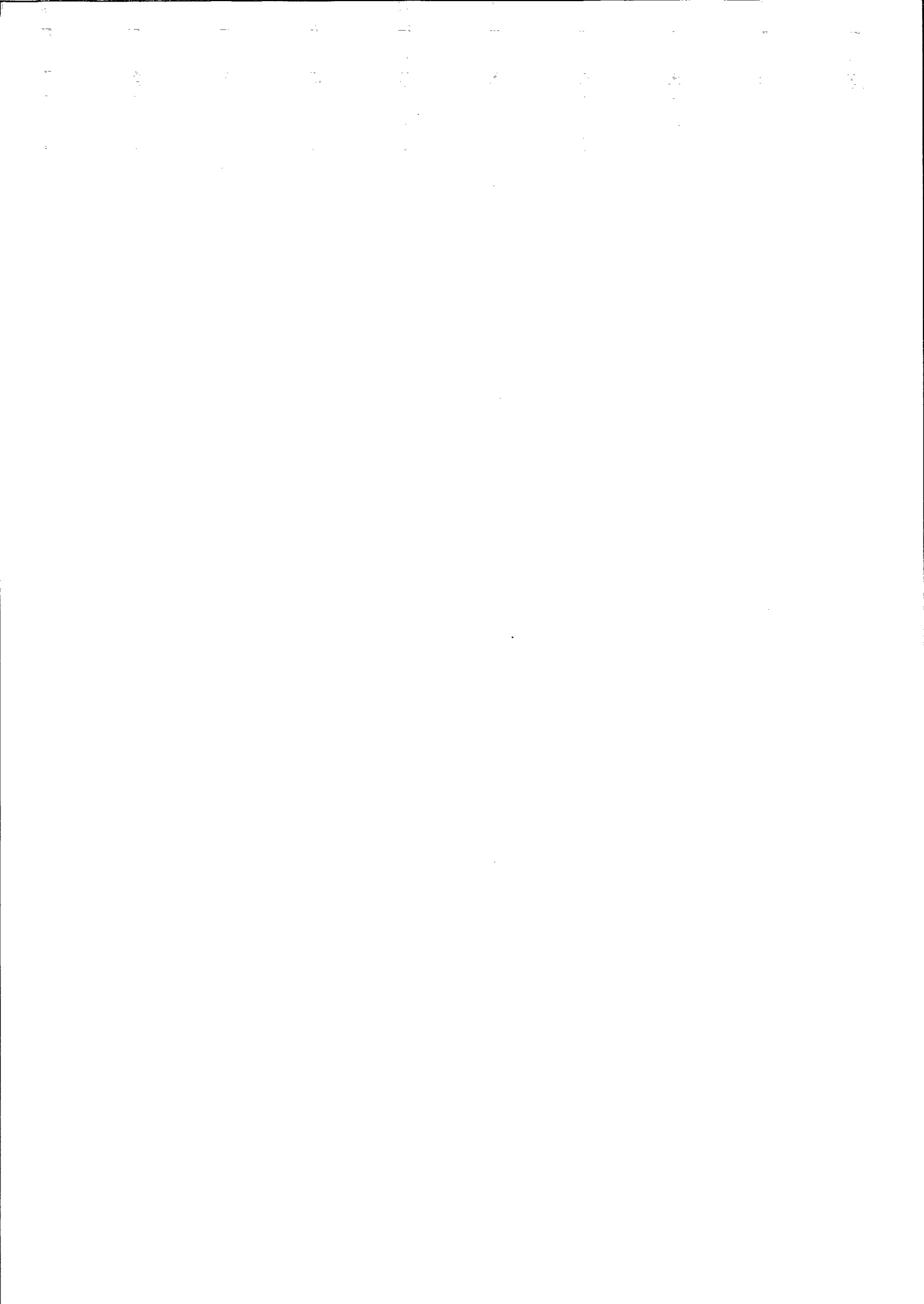
Karen Birkelund og Bjørn Christensen.

# Indhold

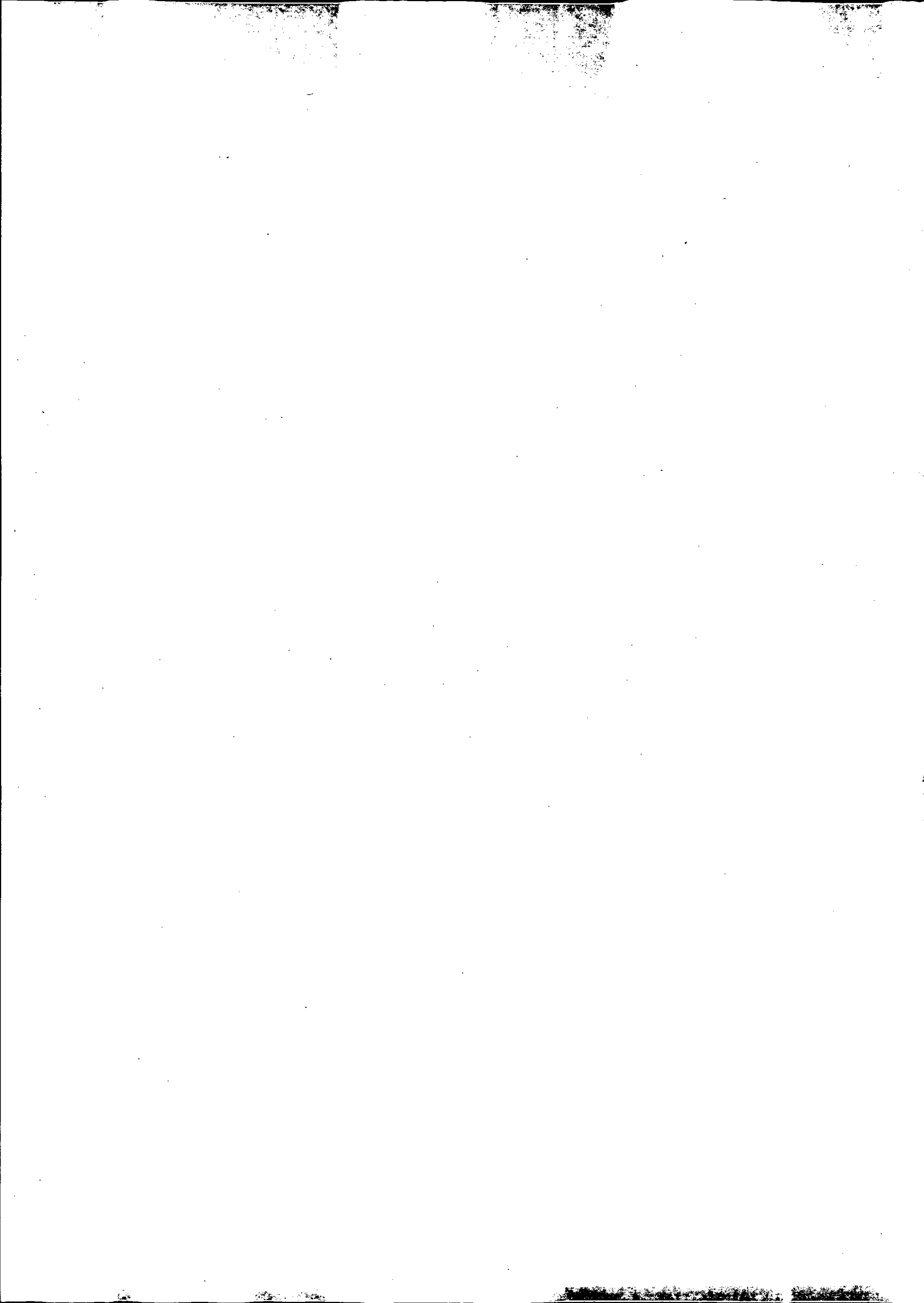
<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>1</b>
1.1	Vores motivation . . . . .	2
1.2	Problemformulering . . . . .	3
1.3	Besvarelse og Konklusion . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Historisk overblik</b>	<b>5</b>
2.1	Ægypterne og Babylonierne . . . . .	5
2.2	Græsk matematik . . . . .	7
2.3	Uløselige problemer . . . . .	9
2.4	Europæisk matematik . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Legemer</b>	<b>19</b>
3.1	Legemer . . . . .	19
3.2	Reelle tallegemer . . . . .	22
3.3	Legemsudvidelser . . . . .	24
3.4	Polynomier . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Konstruerbare punkter og tal</b>	<b>33</b>
4.1	Konstruerbare punkter . . . . .	33
4.2	Konstruerbare tal . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Vinklens tredeling - problemets uløselighed</b>	<b>45</b>
5.1	$60^\circ$ kan ikke tredeles . . . . .	45
5.2	Hvilke vinkler kan tredeles ? . . . . .	48



<b>6</b>	<b>John G. Jensens konstruktionsmetode</b>	<b>51</b>
6.1	Konstruktionsmetoden . . . . .	51
6.2	Analyse af konstruktionen . . . . .	53
6.3	Yderligere analyse af konstruktionsmetoden . . . . .	55
6.4	Numerisk analyse af konstruktionsmetoden . . . . .	59
<b>A</b>	<b>Tredeling af vinkler med andre hjælpemidler</b>	<b>63</b>
A.1	Tredeling ved brug af kvadratricen . . . . .	63
A.2	Tredeling ved indskydning . . . . .	65
<b>B</b>	<b><math>\cos(3x)</math> og <math>\sin(3x)</math></b>	<b>67</b>
<b>C</b>	<b>Lineær uafhængighed</b>	<b>69</b>
<b>D</b>	<b>Program til numerisk analyse</b>	<b>71</b>
<b>E</b>	<b>Oversigt over talmængder</b>	<b>73</b>
<b>F</b>	<b>Litteraturliste</b>	<b>75</b>







# Kapitel 1

## Indledning

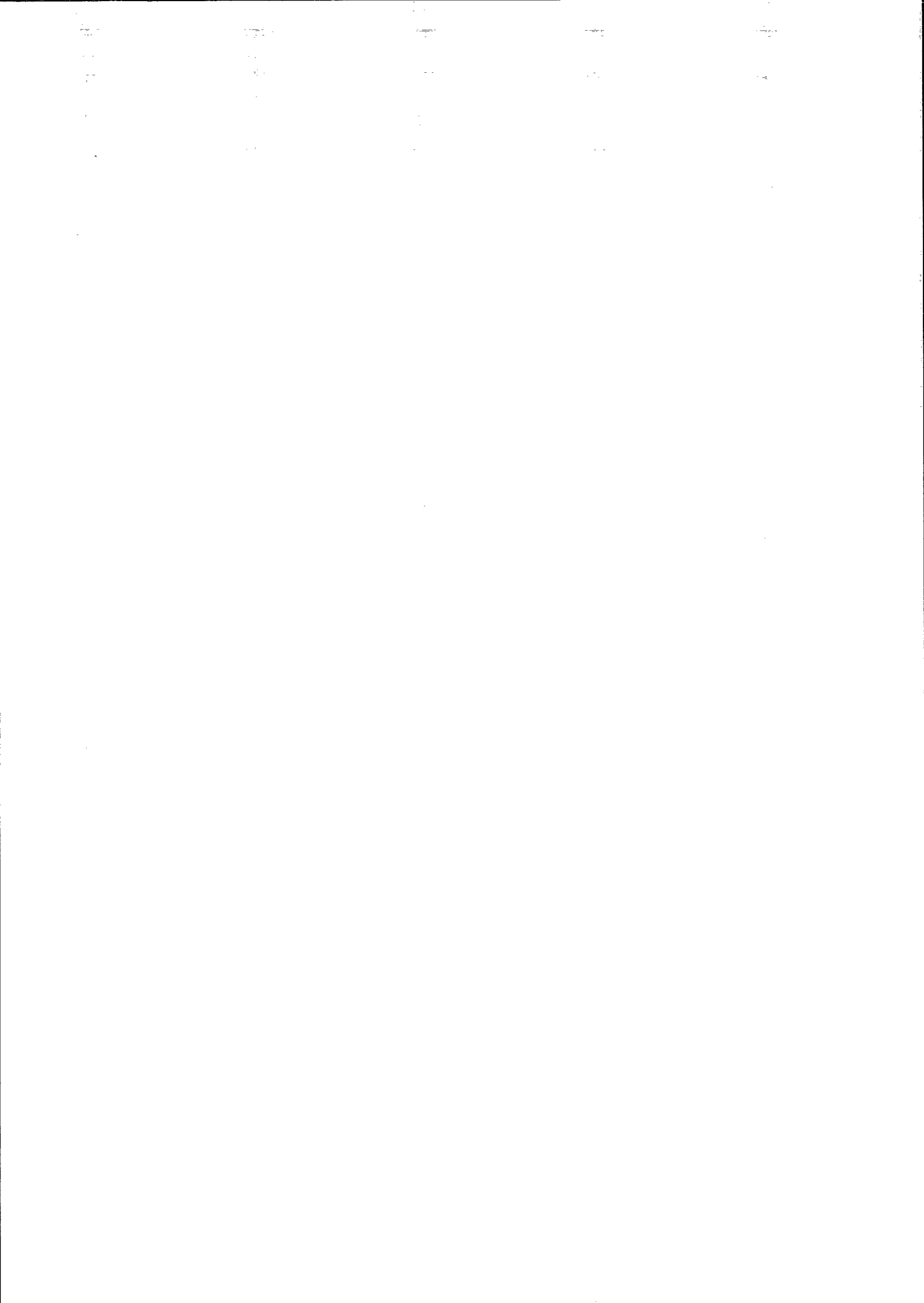
Enhver barnlig sjæl har moret sig med at tegne figurer af streger, cirkler og andre simple geometriske objekter. Hvad enten vi har brugt papir og blyant eller tegnet med en pind i sandet ved en strandkant, har vi alle været ude for i vores leg at skulle fordoble og dele liniestykker, og somme tider også vinkler.

De fleste af os har foretaget sådanne konstruktioner på øjemål og været tilfredse med det. Andre har imidlertid været mere nøjeregnende og interesseret i at lave så præcise konstruktioner som muligt. For disse mennesker er det en sport at finde frem til konstruktionsmetoder, der i princippet er korrekte, også selv om øjemålet i visse situationer ville være lige så anvendeligt.

Således er det kendt for de fleste, hvordan man præcist kan mangedoble længden af et liniestykke, mangedele længden af et liniestykke og halvere en vinkel. Alt dette kan nemlig udføres med en passer og en lineal, og det har mange mennesker selv prøvet i deres skoletid.

De nysgerrige er imidlertid løbet ind i et overraskende problem, når det gælder om at dele en vinkel i tre lige store dele. Det er aldrig lykkedes nogen at finde en metode, der tredeler en vilkårlig vinkel præcist - alene med passer og lineal. Alle forsøg herpå har enten været gode eller dårlige tilnærmelser til en tredeling, eller også har man været nødsaget til at anvende andre midler i en eller anden form.

Vinklens tredeling er et teoretisk problem. Ved praktiske anvendelser, hvor man har brug for at mangedele vinkler, findes gode approximationsmetoder, hvor man kan dele en vilkårlig vinkel inden for den tolerance, som opgaven fordrer.



## 1.1 Vores motivation

Da vi i foråret 1992 første gang hørte om vinklens tredeling, var det en overraskelse for os at høre, at man ikke kan tredele en vilkårlig vinkel præcist. Dette stred imod de forventninger, vi umiddelbart havde om deling af vinkler. Man kan jo let dele en vinkel i to, så hvorfor ikke også i tre ?

Med til historien hører også, at næsten alle store matematikere gennem tiden har forsøgt at løse tredelingsproblemet. Lige fra de gamle grækere, der for ca. 2000 år siden var de første, der beskrev problemet og frem til for 200 år siden, hvor problemets uløselighed endelig blev bevist.

Endnu i dag er der stadig mange lægfolk, der søger efter en konstruktionsmetode, der tredeler en vilkårlig vinkel præcist. Således er vi blevet præsenteret for en metode udarbejdet af John Gjerrow Jensen i 1989. Han hævder, at hans metode tredeler en vilkårlig vinkel præcist - alene med passer og lineal.

Hvad skal man så tro på ? På den ene side hævder det etablerede matematiske samfund, at tredeling af vinkler er umuligt. På den anden side står der en mand og siger, at han faktisk *har* løst tredelingsproblemet. Det er jo før set, at matematikere har fremført "bevis" for sætninger, der siden hen har vist sig at være falske. Og hvad John G. Jensens metode angår, kan det jo være, at den er rigtig.

Som matematikstuderende er vi selvsagt interesserede i det principielle i tredelingsproblemet. Det vælter frem med spørgsmål som: Hvad vil det sige at tredele en vinkel ? Hvordan defineres en vinkel ? Hvad kan man konstruere med en passer og en lineal ? Hvad er en passer ? og hvad er en lineal ?

Vi er heller ikke tilfredse med, at der i en bog står et bevis for uløseligheden af tredelingsproblemet. Det kræver en nøjere undersøgelse. Vi må gennemgå beviset fra ende til anden, for at undersøge om det er korrekt eller ej.

## 1.2 Problemformulering

Hovedproblemet under projektets forløb har været at få svar på følgende:

- 1 Hvordan er tredelingsproblemet historie - fra dets opståen hos grækerne til dets løsning af Gauss. Hvorfor skulle der gå over 2000 år før et tilfredsstillende bevis blev fremført.
- 2 Er beviset for uløseligheden af vinklens tredeling teknisk set i orden, og kan vi forstå det godt nok til selv at være overbeviste om det.
- 3 Er John G. Jensens konstruktionsmetode til tredeling af vilkårlige vinkler korrekt eller ej.  
Hvis JA, hvordan stemmer det med punkt 2.  
Hvis NEJ, hvilke vinkler kan John G. Jensens metode tredele korrekt, og hvor tæt kommer de resterende vinkler på at blive tredelt ?

## 1.3 Besvarelse og Konklusion

Problemformuleringens tre spørgsmål er i rapporten besvaret således:

Vi har undersøgt det historiske forløb af vinklens tredeling. Det er ikke vor hensigt at give en dybtgående fremstilling af matematikkens historie. Det er gjort udmærket i f.eks. "A history of mathematics" af Carl B. Boyer. Vi vil blot give nogle historiske højdepunkter om vinklens tredeling, nok til at forstå, hvorfor det har været uløst i 2000 år. Det er givet i rapportens næstfølgende kapitel.

Her ser vi, at datidens store matematikere ikke var i stand til at finde en metode til tredeling af vinkler ved geometrisk konstruktion - dvs. konstruktion alene ved anvendelse af cirkler og linier. Alle frembragte metoder, der kunne tredele vilkårlige vinkler, benyttede sig af mere komplekse kurver som f.eks. parabler.

Pappus klassificerede i år 320 tredelingsproblemet sammen med andre geometriske problemer. Her fik tredelingsproblemet plads blandt de 'rumlige' problemer, der var karakteriseret af at kunne løses ved hjælp af keglesnit. Dette var en af de første antydninger af, at vinklens tredeling ikke kan løses med passer og lineal.

I renæssancen udvikledes algebraen og blev sat på symbolsk form af blandt andre Viète og Descartes. Dette betød en operationalisering af algebraen, der gjorde det muligt, at lave algebraiske fortolkninger af gamle kendte problemer. Hemmeligheden bag beviset for uløseligheden af tredelingsproblemet er netop, at man hidtil havde opfattet det som et geometrisk problem. Ved at give tredelingsproblemet en algebraisk fortolkning, kunne man i 1800 tallet benytte de landvindinger, udviklingen af den abstrakte algebra havde givet inden for opfattelsen af talsystemet. Uløseligheden af tredelingsproblemet er netop nært knyttet til, at de konstruerbare tal ikke er fuldstændige.

- o -

I de næste tre kapitler giver vi et yderst udførligt bevis for uløseligheden af vinklens tredeling. Det er vor hensigt, at det skal kunne læses af alle, der har en baggrund svarende til matematisk studentereksamen. Dette har vi valgt, dels af hensyn til de lægfolk blandt vinkeltredelerne, der måtte læse vores rapport, dels for at uddybe beviset så meget, at vi selv blev overbevist om dets rigtighed.

I vores undersøgelse af hvilke vinkler, der kan tredeles med passer og lineal, konkluderede vi, at der er uendeligt mange, og at de ligger tæt i mængden af alle vinkler. Der er altså stadig håb for vinkeltredelerne om at finde en metode, der tredeler alle disse vinkler korrekt.

Endelig viser vi, at man kan tredele en vilkårlig vinkel, om end ikke præcist, så med vilkårlig stor nøjagtighed.

- o -

Behandlingen af John G. Jensens konstruktionsmetode gav følgende resultat. Metoden viste sig at være ukorrekt i den forstand, at den ikke kunne tredele en vilkårlig vinkel nøjagtigt.

Herefter undersøgte vi metoden nøjere for vinkler i intervallet  $]0, \pi]$ , og fandt, at den kun delte vinklerne  $\frac{\pi}{2}$  og  $\pi$  korrekt. Da vi samtidig ved, at der i dette interval findes uendeligt mange vinkler, der faktisk kan tredeles med passer og lineal, konkluderer vi, at metoden ikke bare fejler for vinkler, der ikke er tredelelige (hvad der jo er meget forståeligt), men også fejler for vinkler, der faktisk kan tredeles med passer og lineal.

Til slut undersøgte vi så, hvor tæt metoden kom på at tredele vinkler i intervallet  $]0, \pi]$ . Her fandt vi, at metoden kunne tredele en vinkel med en absolut afvigelse på op til 0.005 radianer.

# Kapitel 2

## Historisk overblik

Når man taler om matematikkens og naturvidenskabernes fædre, falder tanken på de gamle grækere. Men grækerne selv menes at have hentet megen af deres viden fra ældre kulturer, specielt gennem studierejser til Ægypten. Man har idag vidnesbyrd om at ikke kun ægypterne, men også babylonierne meget tidligt havde en veludviklet sans for matematik og naturfænomener, omend den var mere praktisk orienteret end teoretisk velbegrundet. Grækerne havde en mere filosofisk indgangsvinkel, og de forsøgte at trænge ind i tingenes inderste væsen. Den mere praktiske side overlod de til slaverne.

Bagerst i dette kapitel på side 17 findes en tidstavle, der giver et overblik over de historiske hændelser, som omtales i det følgende.

### 2.1 Ægypterne og Babylonierne

I begyndelsen af det 3. årtusinde f.kr. blev Øvre- og Nedre-Ægypten samlet i en enhedsstat, og omkring denne tid startede den ægyptiske kulturs økonomiske opblomstring. Ægypten var beskyttet af ørkenen til begge sider, hvilket betød en politisk stabilitet i ca. 2500 år.

I denne tid var der flere forhold, der var med til at fremme den matematiske udvikling. Administration af staten krævede embedsmænd med færdigheder i regning og skrivning. Den ægyptiske skrift blev da også til i denne periode. At ægypterne havde en veludviklet sans for praktisk geometri, bevidnes af monumentalarkitekturen, der kan ses den dag idag. Det er også fra Ægypten, man i dag har de ældste bevarede kilder til matematikkens historie. Dels findes der inskriptioner indhugget i tempelvægge, på gravmæler eller malet på sarkofager, dels

er der dokumenter skrevet på papyrus eller læder. Blandt de vigtigste matematiske dokumenter på papyrus skal nævnes *Papyrus Rhind*, der kan dateres til perioden 1800-1500 f.kr. Papyrus Rhind er den længste matematiske tekst, der kendes fra tiden før grækerne, og den betragtes som en matematisk lærebog. [Pedersen, side 17]

Ægypternes matematik fremstår dog som rent empirisk. Man kendte ikke til teoremer og beviser. Indlæring skete gennem numeriske eksempler ved brug af nogle standardprocedurer, der aldrig var teoretisk begrundet. I Papyrus Rhind fremgår det, at ægypternes matematik var meget praktisk orienteret. Heri findes over 100 gennemregnede eksempler, nogle tabeller samt en række opgaver, der blandt andet omhandler fordeling af brød blandt et vist antal personer, der får forskellige ratioer; det kvantum korn, der skal til for at fremstille en givet mængde brød og øl; arealbestemmelse af marker og rumfangsbestemmelse af kornmagasiner. [Pedersen, side 28]

En anden kultur, der var langt fremme i matematisk henseende, var den babyloniske i Mesopotamien. Det babyloniske samfund var mere uroligt end ægypternes. Det var ikke ligeså isoleret som Ægypten og havde derfor heller ikke den samme etnografiske ensartethed og stabilitet som herskede i Ægypten. De bevarede imidlertid deres økonomiske struktur, som var baseret på agerbrug. Agerbruget krævede et veludviklet vandingsystem og dermed en vis teknisk indsigt.

Kilder til babyloniernes matematik findes fra omkring år 1800 f. kr. og består af brændte lertavler. Af disse lertavler kan man finde information om deres talsystem. Babylonierne opererede med et positionssystem, som vi selv gør i dag, blot brugte de tallet 60 og ikke tallet 10 som grundtal. Et sådanne system kaldes for et sexagesimalsystem. [Lützen, side 13]

At de på nogle punkter kom længere med matematikken end ægypterne skyldes muligvis deres talsystem. Ægypterne havde ikke et positionssystem og var derfor babylonierne underlegne, specielt når det gjaldt brøkgregning. Babylonierne var faktisk også i stand til at løse andengrads ligninger og uddrage kvadratrødder.

I Babylon blev matematikken som i Ægypten varetaget af kongens embedsmænd, og matematikken fremstår også her som eksempler eller praktiske problemer. Der blev ikke formuleret sætninger, ligesom der heller ikke eksisterede stringent bevisførelse.



## 2.2 Græsk matematik

Mens ægypterne og babylonierne var meget praktisk orienteret i deres matematiske formulering, beskrives grækerne langt mere filosofiske. Omkring år 530 f.kr. opstod den pythagoræiske skole. Den skulle være grundlagt af Pythagoras, en halvt legendarisk, halvt historisk person, hvis eksistens der hersker tvivl om, [Rohde, bind 2 side 256]. Men sikkert er det, at pythagoræerne organiserede sig i noget, der lignede broderskaber eller sekter med et tydeligt religiøst mål. Deres mål med skolen var at finde en højere erkendelse om sjælens eksistens og tilværelsens sammenhæng og mening gennem studiet af de fire discipliner: aritmetik, geometri, astronomi og musik. Samlet gik de under betegnelsen matematik af græsk *máthema*.

Blandt pythagoræerne havde talteorien en vigtig placering. De opererede dog kun med hele positive tal. Pythagoræernes filosofiske grundsætning skulle have været at "alt er tal", hvormed der menes, at alle forhold i naturen kan udtrykkes ved forhold mellem naturlige tal. Dette siges at have sit udspring i musikken, hvor man havde iagttaget, at de harmoniske intervaller i musikken opnås ved at dele en vibrerende streng i bestemte talforhold; således fås  $\frac{1}{2} \sim$  oktav,  $\frac{2}{3} \sim$  kvint,  $\frac{3}{4} \sim$  kvart osv.

Pythagoræerne fordybede sig således i tallenes mystik og kom herved til at afsløre noget af deres væsen.

### 2.2.1 Geometriseringen

Pythagoræernes filosofiske grundsætning viste sig imidlertid at være uholdbar, hvorfor geometrien får en mere central rolle i matematikken. Dette skete ved opdagelsen af de inkommensurable tal.

#### Kommensurable og inkommensurable tal

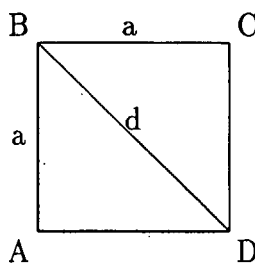
Man siger to størrelser  $a, b$  er kommensurable, hvis deres forhold kan beskrives som forholdet mellem to naturlige tal  $m, n$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Hvis dette ikke er tilfældet, siges størrelserne  $a, b$  at være inkommensurable.

Det siges, at det var pythagoræeren Hippasos (ca. år 470 f.kr.), der afslørede, at der fandtes inkommensurable størrelser. Herved forsvandt grundlaget for pythagoræernes filosofi. Legenden fortæller videre, at guderne blev så vrede på Hippasos, fordi han havde afsløret deres ufuldkomne opbygning af verden, at de lod ham omkomme ved et skibbrud.

I Euklids Elementer findes et indirekte bevis for, at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Beviset er givet af Aristoteles (år 384-322 f.kr.) [Lützen, side 20], og følger her i en moderne udgave:



Figur 2.1: Inkommensurable størrelser

Antag at diagonalen  $BD = d$  af et kvadrat  $ABCD$  er kommensurabel med siden  $AB = a$ , se figur 2.1. Så kan deres forhold skrives

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{n}$$

hvor  $m$  og  $n$  er indbyrdes primiske hele tal. Da gælder

$$\frac{d^2}{a^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

Af den pythagoræiske læresætning har vi at  $d^2 = 2a^2$  og derfor også at  $m^2 = 2n^2$ . Da må  $m^2$ , og derfor også  $m$  være et lige tal, der kan skrives på formen  $m = 2p$ , hvor  $p$  er et helt tal. Da haves

$$m^2 = 4p^2 = 2n^2 \quad \text{eller} \quad n^2 = 2p^2$$

heraf følger at også  $n^2$ , og dermed  $n$  må være lige, hvorfor  $m$  og  $n$  ikke kan være indbyrdes primiske. Modstriden kan kun hæves, ved at vi lader forudsætningen om at  $\frac{d}{a}$  kan skrives på formen  $\frac{m}{n}$  falde.

Det var rystende for pythagoræerne at erfare, at der fandtes simple geometriske størrelser som for eksempel siden og diagonalen i et kvadrat, hvis forhold ikke lod sig udtrykke i tal. Babylonierne ville dog ikke være

blevet så fornavset, for de havde længe arbejdet med approksimerede værdier, for eksempel for  $\sqrt{2}$ .

Denne opdagelse har sandsynligvis været medvirkende årsag til det pythagoræiske broderskabs opløsning omkring år 400 f.kr.

Allerede før opdagelsen af de inkommensurable størrelser var der hos grækerne en tendens til at geometrisere algebraen. Det vil sige, man benyttede sig af geometriske konstruktioner til løsning af problemer, som vi i dag ville løse algebraisk. Geometriseringen blev dog total ved opdagelsen af de inkommensurable tal. Resultatet heraf var, at den ordinære algebra blev lagt på hylden helt indtil Diophantes tid omkring år 300 e.kr.

## 2.3 Uløselige problemer

Den græske astronom Oinopides fra Chios (år 450 f.kr.) har haft en vis indflydelse på den græske matematiks udvikling, da det var ham, der har formulerede kravet om kun at tillade geometriske konstruktioner, der kan udføres med passer og lineal. Dette strenge krav tager Euklid helt til sig, og af hans postulater i hans værk Euklids Elementer fremgår det da også, at alle konstruktioner udelukkende udføres med cirkler og rette linier.

Kravet bevirker naturligvis, at der er mange problemer, der ikke kan løses ved brug af passer og lineal. Der opstod i denne tid da også mange "uløselige problemer", hvoraf de tre mest omtalte er:

- Terningens fordobling - at konstruere en terning med det dobbelte rumfang af en given terning.
- Cirkelns kvadratur - at konstruere et kvadrat med samme areal som en given cirkel.
- Vinklens tredeling - at konstruere en vinkel, der er en tredjedel af en given vinkel.

Fælles for de tre problemer er, at de alle blev formuleret af grækerne, at de let lader sig løse, hvis man lader kravet om passer og lineal falde, og at deres uløselighed først blev bevist over 2000 år senere.

### Terningens fordobling

Problemet om terningens fordobling skulle stamme fra en matematisk uskolet græsk tragedieskriver. Han lod et stykke opføre, hvor den mytiske kong Minos var utilfreds med størrelsen af hans søns Claucus gravkammer. Han beordrede derfor, at volumet af graven skulle fordobles uden at ødelægge dens form ved at fordoble hver dimension i graven.

Herved begik tragedieskriveren en fejl, for ved at fordoble siderne, ottedobledes rumfanget. Matematikerne begyndte derfor at undersøge, hvorledes man kan fordoble et givet legeme uden at ødelægge dets form. Dette problem blev kaldt terningens fordobling, da deres udgangspunkt var en terning. [Eves, side 83]

En tid senere blev nogle Delere stillet over for samme problem. De plagedes af en pest og spurgte Oraklet til råds. Dette svarede, at for at slippe af med pesten skulle de fordoble størrelsen af Appollons kubiske alter uden at ødelægge dets form. Anekdoten fortæller videre, at man fordoblede alterets sider, hvorved pesten blot blev værre. Det er på baggrund af denne historie, at problemet også kaldes det Deliske problem. [Eves, side 83]

Problemet blev studeret ved Platons akademi, og den første rigtige fremgang skete, da Hippokrates fra Chios (ca. år 440 f.kr.) reducerede problemet til konstruktion af to mellemproportionaler mellem to givne liniestykker.

Mellemproportionalen  $x$  mellem to givne liniestykker  $l$  og  $m$  er defineret ved at den opfylder relationen

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{m}$$

Har liniestykkerne, hvor imellem de to mellemproportionaler skal konstrueres, længderne  $l$  og  $m$ , og er de to mellemproportionaler betegnet ved  $x$  og  $y$ , så vil  $x$  og  $y$  opfylde relationen:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{m}$$

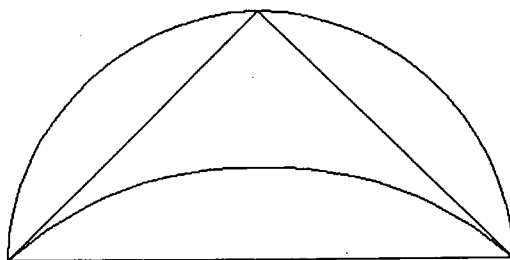
dette giver at  $x^2 = ly$  og  $y^2 = mx$ . Elimineres  $y$  finder vi at  $x^3 = l^2m$ . Sættes liniestykket  $m = 2l$  fås  $x^3 = 2l^3$ . Og så er  $x$  siden i en terning med dobbelt så stort rumfang som terningen med siden  $l$ . Problemet blev nu at konstruere to mellemproportionaler mellem to givne liniestykker ved brug af passer og lineal.

### Cirklens kvadratur

Den første græker, der forbindes med cirkelns kvadratur, er Anaxagoras (ca. år 425 f.kr.). Men man er ikke klar over i præcis, hvilken forbindelse problemet opstod.

I det 5. århundrede f.kr. kendte man til areallæren. Allerede i den førgræske matematik kendte man til formler for arealet af rektangler og trekanter. Det var imidlertid matematikeren Hippokrates fra Chios - en af Anaxagoras' samtidige - der bidrog til en noget mere avanceret areallære, idet han forsøgte at bestemme arealet af krumlinede figurer.

Baggrunden for Hippokrates' arbejde var erkendelsen af, at arealerne af lignedannede figurer forholder sig som kvadratet på det lineære forhold. Han beviste, at arealet mellem en halvcirkel og en kvartcirkel er det samme som arealet af en trekant med halvcirkelns diameter som grundflade og halvcirkelns radius som højde, se figur 2.2. [Knorr, side 31]



Figur 2.2: Areal mellem en halvcirkel og en kvartcirkel

Visheden om at arealet af visse krumlinede figurer kunne bestemmes eksakt, kan meget vel have været starten til en række problemer heriblandt cirkelns kvadratur.

De gamle ægyptere beskæftigede sig med problemet allerede omkring år 1800 f.kr., men dette skete på grundlag af tilnærmede værdier af  $\pi$ , hvilket de græske matematikere næppe havde stillet sig tilfreds med.

### Vinklens tredeling

Problemet at tredele en vinkel med passer og lineal opstod i forbindelse med geometriseringen. Man er ikke sikker på oprindelsen af problemet,

men det kan tænkes, at grækerne opdagede problemet i forbindelse med at mangedele en vinkel. Det kan også tænkes, at problemet opstod i forbindelse med at konstruere en regulær ni-sidet polygon. For at konstruere en sådan polygon, er det nødvendigt at tredele en vinkel på  $120^\circ$ . [Eves, side 85]

At todele vinkler og mangedele liniestykker med passer og lineal er en enkel sag - og det var det også for de gamle grækere. Tredeling af en vinkel falder da som en naturlig udvidelse af disse udfoldelser.

Beviset for problemernes uløselighed kom først mere en 2000 år efter problemernes formulering - og det skyldes at beviset herfor ikke findes inden for geometrien, men skal hentes i den gren af matematikken, der kaldes abstrakt algebra. En disciplin der først blev almindelig i midten af 1600-tallet.

Den Alexandrinske matematiker Pappus (år 320 e.kr.) inddelte geometriske problemer i tre klasser. Hans klassifikation findes i den tredje bog af hans værk "Collectiones". Problemerne blev inddelt i plane, rumlige og lineære problemer, således at de plane problemer kan løses med cirkler og linier, rumlige problemer kan løses med keglesnit, og lineære problemer kan løses med andre kurver end cirkler, linier og keglesnit.

De tre klassiske konstruktionsproblemer blev nu klassificeret så, vinklens tredeling og terningens fordobling hørte til de rumlige problemer, mens cirkelns kvadratur var et lineært problem.

Pappus hævdede her, at de tre klassiske problemer var uløselige med passer og lineal, da de ikke var plane problemer, men han førte ikke noget bevis herfor. [Boyer, side 205]

## Diophantes

Algebraen var underkastet en lang udvikling, som allerede startede så småt på Diophantes tid (ca. år 300 e.kr.). Diophantes betegnes ofte som algebraens fader, [Boyer, side 198] - men det, han reelt beskæftigede sig med, var snarere det, vi i dag kender som talteori.

Algebraen havde indtil da været retorisk, det vil sige at alt blev sprogligt formuleret uden brug af symboler. Diophantes væsentligste bidrag til matematikken var synkoperingen af den græske algebra, det vil sige, at han indførte forkortelser for de mest benyttede størrelser og operationer. Denne indførsel af symboler i matematikken er skyld i, at han har fået betegnelsen algebraens fader. [Eves, side 158]

I Europa forblev algebraen retorisk helt frem til det 15. århundrede, og den blev først symbolsk ved den franske matematiker François Viète's indførsel af symboler i slutningen af det 16. århundrede.

Efter Pappus og Diophantes gik det stødt ned ad bakke for græsk matematik. Det skyldes hovedsageligt at Romerriget vandt indpas, og praktiske som de var, interesserede de sig ikke for at støtte videnskaben i deres imperium. Centrum for videnskaberne var Alexandria i Ægypten, og her blev efterhånden oprettet et stort bibliotek. Men da romerne indtog Alexandria brændte store dele af biblioteket, og megen viden gik tabt. I slutningen af det 6. århundrede lukkede de sidste skoler, og flere matematikere drog øst på medbringende deres bøger. [Lützen, side 67]

Det var græsk matematiks tradition, at lærdom viderebragtes af de ældre til de yngre verbalt. Herigennem tilegnedes de veje, der førte til resultater. Men de forringede kår for videnskaben bevirkede, at denne mundtlige overlevering blev vanskelig, evnen til at finde nye resultater blev derfor også vanskelig. Et andet problem ved den græske matematik var, at der ikke var nogen generel notation, så alene læsningen af de matematiske værker var vanskelig.

## 2.4 Europæisk matematik

Efter den græske matematiks forfald, blomstrede den orientalske videnskab op. Inden for matematik skete de største fremskridt inden for algebra og trigonometri.

I middelalderens Europa (ca. år 500-1000) skete der ingen stor videnskabelig udvikling. Uddannelse eksisterede stort set ikke, kun munke og nogle få kultiverede lægmænd bevarede en smule græsk og latinsk lærdom. [Eves, side 206]

Først i renæssancen begyndte der atter at ske noget inden for det videnskabelige område i Europa. En væsentlig årsag til dette var, at europæerne i 1100-tallet fik kontakt med den orientalske verden. Det var i denne periode, at man fik oversat flere matematiske værker som for eksempel Euklid, Ptolemaios og al-Khwārizmī til latin, [Lützen, side 80]. Endvidere grundlagdes i det 13. århundrede universiteterne i Bologna, Paris, Oxford og Cambridge.

Dette var begyndelsen til en opblomstring af blandt andet naturvidenskaberne i Europa efter ca. 1000 års stilstand.

I 1440 opfandt tyskeren Guttenberg trykpressen. Der blev nu mulighed for spredning af den intellektuelle viden, som folk sad inde med rundt omkring i Europa.

### Cardano

I 1545 udviklede Cardano en generel formel til løsning af tredjegrads-ligningen

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0$$

samt en metode til at omskrive den generelle tredjegrads-ligning

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

til ovenstående form. Dette nedskrev han i sin bog "Ars Magna". Cardano løste ligningen ved brug af *radikaler*, der var datidens betegnelse for roduddragning.

### Viète

François Viète (1540-1603) var mere generel i sin notation og tankegang end tidligere matematikere inden for algebra. Han sagde at "matematik er en form for ræsonnering, og ikke en taske fuld af tricks, som Diophantes besad" [Boyer, side 334]. Med dette mente han, at tidligere beskæftigelser inden for algebra hovedsageligt havde bestået af speci-altilfælde med tal som koefficienter, som løstes afhængig af, hvordan problemet så ud.

Viète indførte symboler for kendte og ukendte størrelser. Således blev konsonanter symbol for kendte parametre, mens vokaler betegnede de ukendte størrelser. Han var derfor i stand til at opskrive generelle ligninger, hvor man kunne skelne mellem kendte og ukendte størrelser. Han benyttede sig også af tegnene + og -, men han kendte ikke til lighedstegn. Ligeledes kendte han ikke til potensopløftning, så skulle han skrive  $A$ ,  $A^2$  og  $A^3$ , benyttede han skrivemåden  $A$ ,  $A$  *quadratum* og  $A$  *cubum*, [Eves, side 223], så hans algebra var stadig delvis synkoperet.

Han bidrog til de tre klassiske problemer ved at vise, at kvadratrodsudragning kan konstrueres med passer og lineal. Han udledte formlerne for  $\cos nx$  og  $\sin nx$ . Endvidere viste han, at tredjegrads-ligninger kan løses ved vinkeltredeling eller terningfordobling. Omvendt havde de arabiske matematikere Abū'l-Jūd og Al-bīrūnī allerede omkring år



100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

1000 vist, at vinklens tredeling kan løses ved at løse en tredjegradslikning. Det fandt de i første omgang ud af ved et specialtilfælde, hvor de viste at siden  $x$  i en regulær 18-kant indskrevet i enhedscirklen opfylder ligningen:

$$x^3 + 1 = 3x$$

idet siden i polygonen er korden til  $20^\circ$ . Dette svarer til tredeling af en vinkel på  $60^\circ$ . Den generelle tredjegradslikning blev først opstillet af Al-Kāšī i 1400-tallet. Det skete i forbindelse med udarbejdelsen af trigonometriske tabeller. Man fandt herved  $\sin 1^\circ$  ud fra  $\sin 3^\circ$  ved at løse den tilhørende ligning.

Vinklens tredeling og terningens fordobling var nu et spørgsmål om konstruktion af rødderne til de tilhørende ligninger med passer og lineal.

### Descartes

En anden stor matematiker der bidrog til den abstrakte algebra var René Descartes (1596-1650). Han fik ideen, iøvrigt samtidig med og uafhængig af Pierre de Fermat, at knytte kurver i planen til ligninger. Det blev starten til den analytiske geometri.

Descartes opstiller i sin bog "La Geometrie" et program til løsning af geometriske konstruktionsproblemer. Programmet går ud på først at opstille en ligning, som konstruktionen skal opfylde. Denne ligning løses da ved skæring mellem to kurver, som udtrykkes ved en ligning mellem  $x$  og  $y$ , der er afsat i et koordinatsystem. Han pointerede at de to kurver skal være så simple som muligt, det vil sige kurvernes ligninger skal være af lavest mulige grad. [Lützen, side 86]

Descartes udbyggede i den forbindelse Pappus klassifikationssystem så plane problemer svarede til 1. og 2. gradsligninger og kunne løses ved skæring mellem cirkel og linie; rumlige problemer svarede til 3. og 4. gradsligninger og kunne løses ved cirkel, linie og keglesnit; en tredje klasse problemer var dem, der svarede til 5. og 6. gradsligninger, de kunne løses ved at medtage en højere ordens parabel. Således fortsatte han med at klassificere geometriske problemer og algebraiske ligninger.

Det geometriske problem cirkelns kvadratur hører ikke hjemme i nogen af hans klasser, da problemet ikke giver anledning til nogen polynomiumsligning. Han betegnede den slags problemer for mekaniske problemer, [Lützen, side 87]. Terningens fordobling og vinklens tredeling hører naturligvis til rumlige problemer, som Pappus også angav.

Descartes var klar over, at terningens fordobling og vinklens tredeling ikke kan løses ved brug af passer og lineal, men heller ikke han var i stand til at bevise det stringent.

Descartes var mere grundig end nogen tidligere i hans symbolsprog, ikke kun i hans algebra, men også i hans geometriske fortolkning af algebraen. Den formelle algebra kulminerede i Descartes "La Geometrie". Han benyttede alfabetets første bogstaver som kendte størrelser og alfabetets sidste bogstaver som ukendte størrelser, som vi gør det i dag. Han opererede også med eksponentiel notation for potensopløftning ( $A^2, A^3, \dots$ ), og benyttede notationen + og - for addition og subtraktion.

### Gauss

Der skulle dog stadig gå næsten 200 år, før algebraen var så udviklet, at man var i stand til at bevise uløseligheden af de tre klassiske problemer fra antikkens Grækenland.

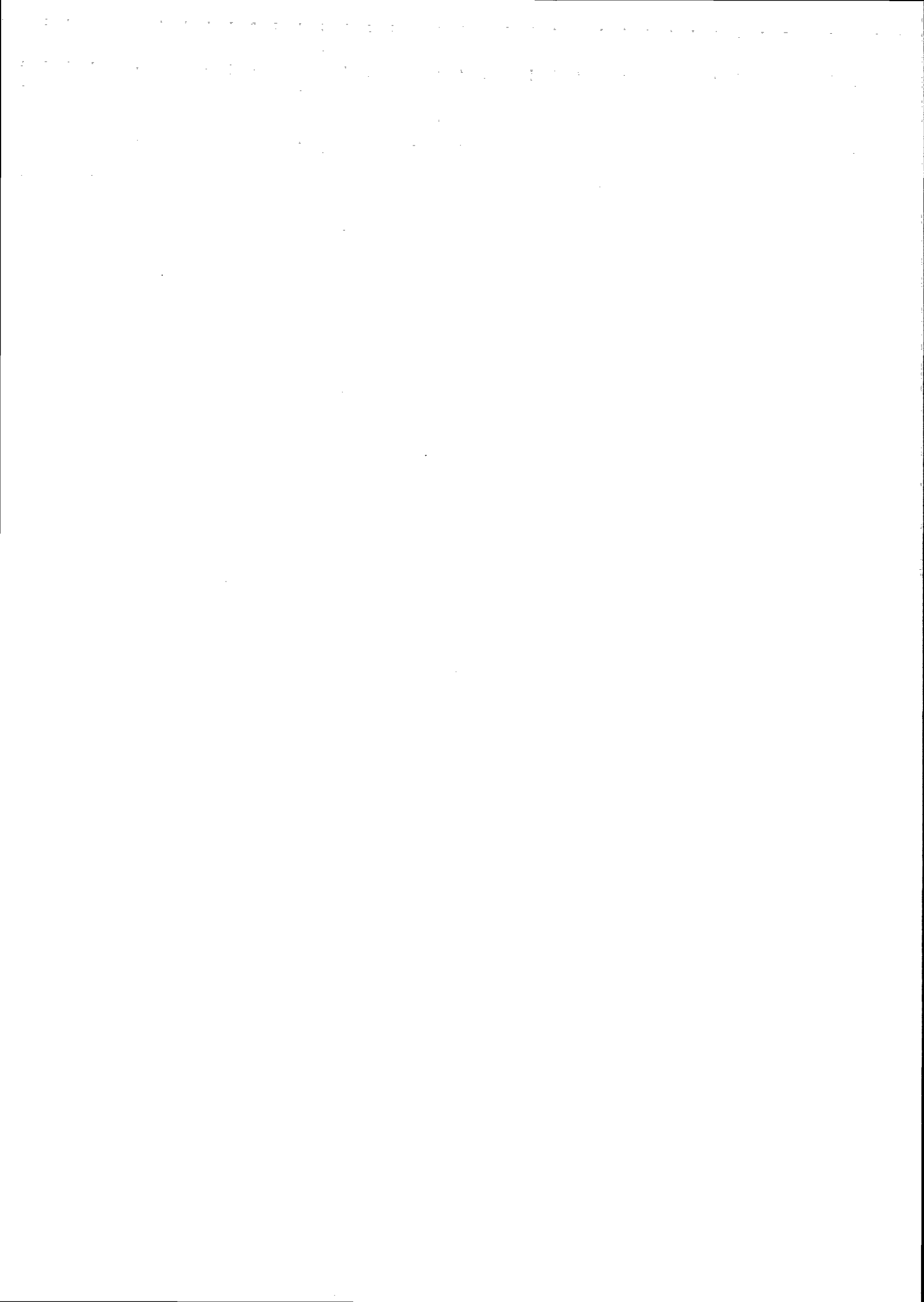
I 1801 løste Carl Friedrich Gauss (1777-1855) i sin bog "Disquisitiones arithmeticae" et andet af antikkens store matematiske problemer, nemlig hvilke regulære polygoner kan konstrueres med passer og lineal. Siden phytagoræerne havde man vidst, hvordan man konstruerer en regulær tre- og fem-kant, men ingen andre regulære polygoner med et antal sider, der er et primtal. I 1796 fandt Gauss en metode til at konstruere en regulær 17-kant, og herefter viste han, hvilke regulære polygoner, der kan konstrueres med passer og lineal og hvilke, der ikke kan. [Lützen, side 90].

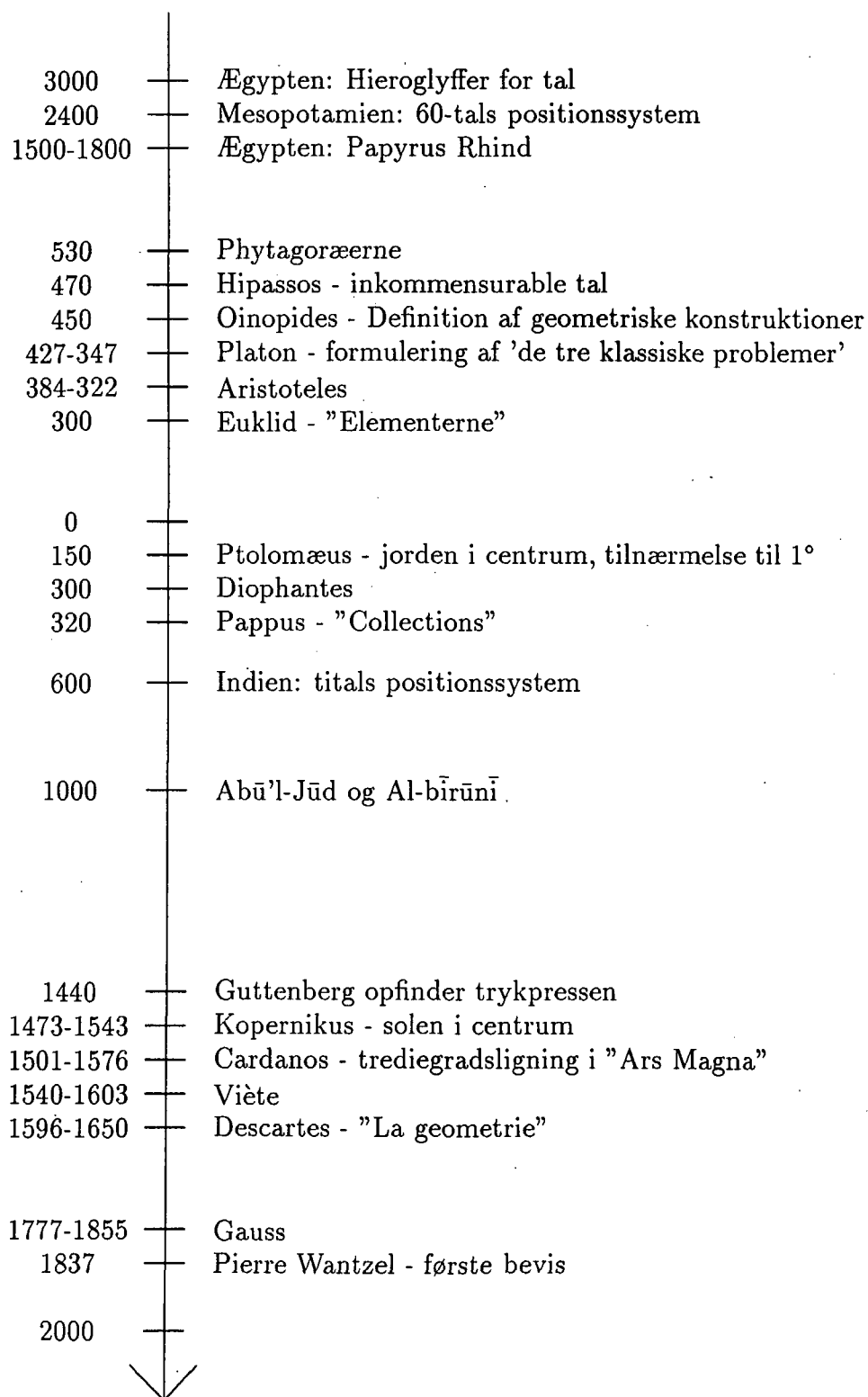
Specielt gælder der, at en regulær ni-kant ikke kan konstrueres. En konsekvens heraf er, at man ikke kan tredele vinklen på  $120^\circ$ . Gauss førte ikke bevis for dette, men af det øvrige indhold i hans bog ses, at det ville have været en let sag for ham.

Et bevis for terningens fordobling og vinklens tredeling blev første gang offentliggjort af en mindre kendt tysk matematiker Pierre Laurent Wantzel i 1837.

Uløseligheden af cirkelns kvadratur ved konstruktion blev bevist i 1882 af Lindemann (1852-1939). [Jones, side 2]

I de følgende kapitler vil vi udførligt gennemgå beviset for uløseligheden af vinklens tredeling med passer og lineal. Det vil dog ikke blive i den form Wantzel gav, men en moderne udgave.





Figur 2.3: Tidstavle



# Kapitel 3

## Legemer

Den algebraiske struktur legeme og legemsudvidelse er centrale begreber i beviset for uløseligheden af vinklens tredeling. Derfor vil vi i dette kapitel redegøre for disse begreber.

### 3.1 Legemer

**Definition 3.1** *En komposition i en mængde  $M$  er en afbildning  $\mu : M \times M \rightarrow M$*

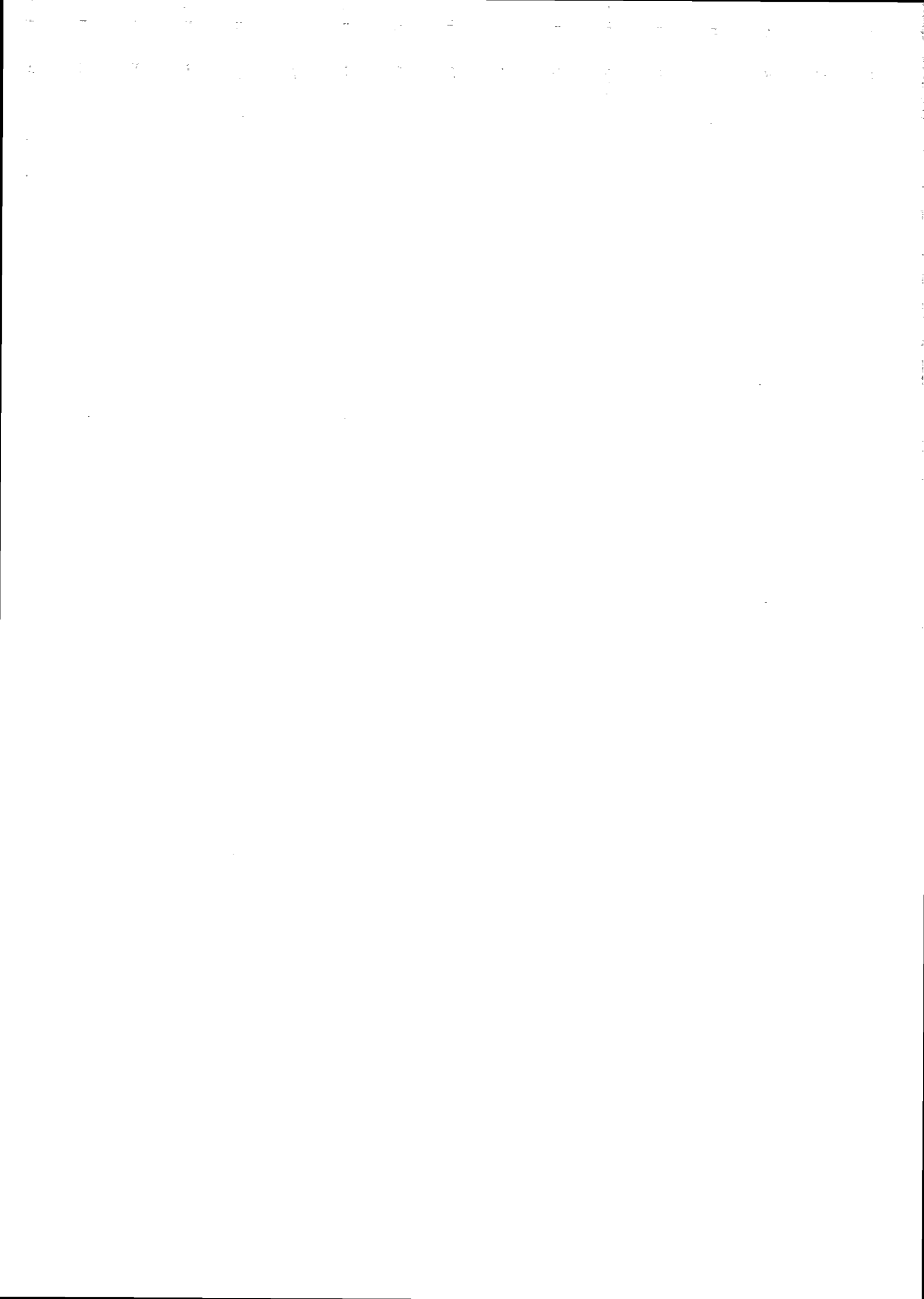
Vi benytter ofte et kompositionstegn  $\star$ , og skriver da  $a \star b$  istedet for  $\mu(a, b)$ . Det følger af definitionen, at  $\mu$  afbilder ind i  $M$ . Derfor har vi at  $\forall a, b \in M : a \star b \in M$  og  $b \star a \in M$

**Eksempel 3.1** Som et eksempel på en komposition i en mængde kan man tænke på addition  $+$  i de reelle tal  $\mathbb{R}$ .

**Definition 3.2** *Lad  $\star$  være en komposition i en mængde  $M$ . En delmængde  $A \subseteq M$  kaldes stabil overfor  $\star$  hvis*

$$\forall a, b \in A : a \star b \in A \text{ og } b \star a \in A$$

**Eksempel 3.2** Da summen af to hele tal er et helt tal, er mængden af hele tal  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  stabil overfor  $+$ .





**Definition 3.3** En komposition  $\star$  i en mængde  $M$  kaldes **associativ** hvis

$$\forall a, b, c \in M : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

og **kommutativ** hvis

$$\forall a, b \in M : a \star b = b \star a$$

**Definition 3.4** Lad  $\star$  være en komposition i  $M$ . Et element  $\epsilon \in M$  kaldes **neutralelement** for  $\star$  hvis

$$\forall a \in M : \epsilon \star a = a \star \epsilon = a$$

**Definition 3.5** Lad  $\star$  være en komposition i  $M$  med neutralelement  $\epsilon$ , og lad  $a \in M$ . Et element  $b \in M$  kaldes **inverst element** til  $a$  hvis

$$a \star b = b \star a = \epsilon$$

Hvis  $a \in M$  har et inverst element betegner vi det  $a^{-1}$ .

**Definition 3.6** En **gruppe**  $(M, \star)$  er en ikke-tom mængde  $M$  med en **associativ komposition**  $\star$ , hvor  $M$  indeholder neutralelementet for  $\star$  og ethvert element i  $M$  har et inverst element i  $M$ . Hvis  $\star$  er kommutativ, kaldes  $(M, \star)$  en **abelsk gruppe**.

**Eksempel 3.3**  $(\mathbb{Z}, +)$  er en abelsk gruppe med neutralelement  $0$ .

- o -

Hidtil har vi betragtet mængder med en enkelt komposition. Vi skal nu se på mængder med to kompositioner  $\star$  og  $\diamond$ .

**Definition 3.7** Lad  $\star$  og  $\diamond$  være kompositioner i en mængde  $M$ . Vi siger da, at  $\diamond$  er **distributiv** med hensyn til  $\star$  hvis

$$\forall a, b, c \in M : a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c) \text{ og } (a \star b) \diamond c = (a \diamond c) \star (b \diamond c)$$

**Eksempel 3.4** I de reelle tal er multiplikation distributiv med hensyn til addition.

**Definition 3.8** Et legeme  $(L, \star, \diamond, \epsilon, \omega)$  er en mængde med to kompositioner  $\star$  og  $\diamond$  således at:

- 1)  $(L, \star)$  er en abelsk gruppe, hvor neutralelementet kaldes  $\epsilon$
- 2)  $(L \setminus \{\epsilon\}, \diamond)$  er en abelsk gruppe, hvor neutralelementet kaldes  $\omega$
- 3)  $\diamond$  er distributiv med hensyn til  $\star$

**Eksempel 3.5**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  er et legeme. Dette vil blive godtgjort i næste afsnit.

- o -

**Sætning 3.1** Lad  $(L, \star, \diamond, \epsilon, \omega)$  være et legeme. Hvis en delmængde  $M$  af  $L$  er

- stabil overfor  $\star$  og  $\diamond$ ,
- $\{\epsilon, \omega\} \subset M$ ,
- alle elementer i  $M$  har et inverst element med hensyn til  $\star$  i  $M$  og
- alle elementer i  $M \setminus \{\epsilon\}$  har et inverst element med hensyn til  $\diamond$  i  $M$

så er  $(M, \star, \diamond, \epsilon, \omega)$  et legeme.

**Bevis:**

- Da  $M$  er stabil overfor  $\star$  og  $\diamond$ , udgør disse også kompositioner i  $M$ .
- Disse kompositioner vil således være kommutative, associative, og distributive i  $M$ , som de er det i  $L$ .  
Vi viser her at  $\star$  er kommutativ i  $M$ :  
Lad  $a, b \in M$ . Da  $M \subset L$  vil  $a, b \in L$ . Da  $\star$  er kommutativ i  $L$  har vi  $a \star b = b \star a$ , og dermed at  $\star$  er kommutativ i  $M$ .  
På tilsvarende måde vises de øvrige påstande.

- Derfor ses nu at  $(M, \star)$  er en abelsk gruppe med neutralelement  $\epsilon$ , og  $(M \setminus \{\epsilon\}, \diamond)$  er en abelsk gruppe med neutralelement  $\omega$ .

□

Skønt et legeme er defineret ved fem dele: En mængde  $L$ , to kompositioner og to udpegede elementer i  $L$ , vil vi ofte blot omtale mængden  $L$  som et legeme og lade kompositionerne og neutralelementerne være underforståede.

### 3.2 Reelle tallegemer

**Definition 3.9** *Et reelt tallegeme er et legeme  $(L, +, \cdot, 0, 1)$ , hvor  $L \subset \mathbb{R}$ ,  $+$  og  $\cdot$  er sædvanlig addition og multiplikation af reelle tal og  $0$  og  $1$  er neutralelementer for henholdsvis addition og multiplikation.*

**Eksempel 3.6**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  er et legeme. For at vise dette skal vi godtgøre

- 1) at  $+$  og  $\cdot$  er kompositioner i  $\mathbb{R}$ ,
- 2) at  $+$  og  $\cdot$  er associativ og kommutativ,
- 3) at  $\cdot$  er distributiv med hensyn til  $+$ ,
- 4) at  $0$  er neutralelement for  $+$ , og alle elementer i  $\mathbb{R}$  har et inverst element med hensyn til  $+$ ,
- 5) at  $1$  er neutralelement for  $\cdot$ , og alle elementer i  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  har et inverst element med hensyn til  $\cdot$ .

ad 1)  $+$  og  $\cdot$  er kompositioner i  $\mathbb{R}$  idet vi har:

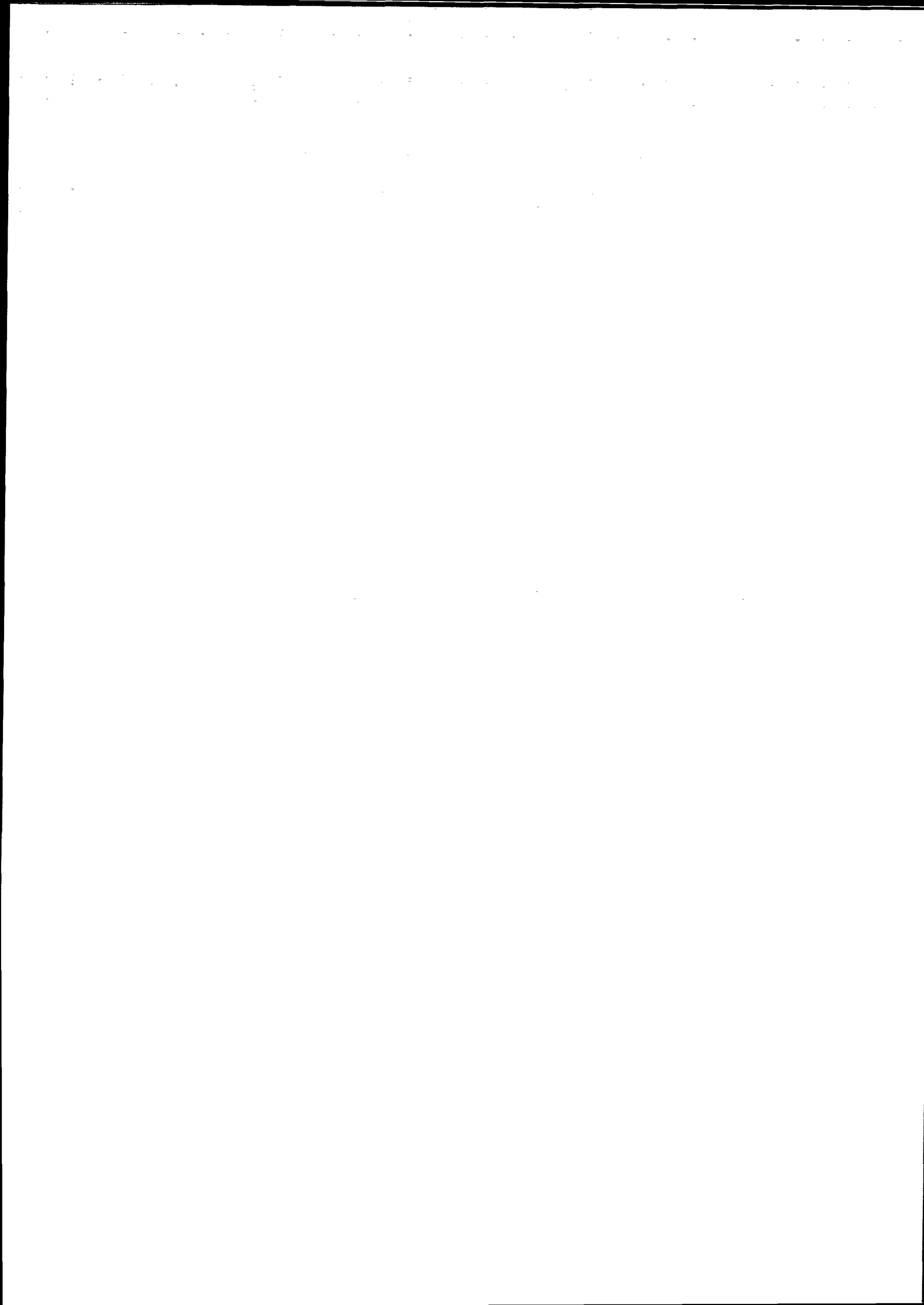
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R} \text{ og } y + x \in \mathbb{R} \text{ og } x \cdot y \in \mathbb{R} \text{ og } y \cdot x \in \mathbb{R}$$

ad 2 og 3) Velkendt. Beviset bygger imidlertid på en mere grundlæggende beskrivelse af de reelle tal end vi vil give her. Et komplet bevis findes i [Niss].

ad 4) :

$$\text{Neutralelement: } \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$$

$$\text{Inverst element: } \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0 \text{ og } y + x = 0, \\ \text{nemlig } y = -x$$



ad 5) :

Neutralelement:  $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Inverst element:  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$  og  $y \cdot x =$

1, nemlig  $y = \frac{1}{x}$

- o -

På tilsvarende måde vises at de rationale tal  $\mathbb{Q}$  er et legeme.

- o -

**Sætning 3.2** *Ethvert reelt tallegeme  $(M, +, \cdot, 0, 1)$  indeholder  $\mathbb{Q}$ .*

**Bevis:** Som udgangspunkt har vi at  $0, 1 \in M$ :

- da  $1 \in M$  og  $+$  er en komposition på  $M$  vil de naturlige tal  $\mathbb{N} \subseteq M$ .
- da alle elementer i  $M$  har et inverst element med hensyn til  $+$ , vil også alle hele negative tal tilhøre  $M$ . Vi har altså at  $\mathbb{Z} \subseteq M$ .
- da alle elementer i  $M \setminus \{0\}$  har et inverst element med hensyn til  $\cdot$ , vil også alle brøker tilhøre  $M$ . Det vil sige at  $\mathbb{Q} \subseteq M$ .

□

Da vi tidligere har godtgjort at  $\mathbb{Q}$  faktisk er et legeme, har vi at

**Sætning 3.3**  $\mathbb{Q}$  er det mindste reelle tallegeme med hensyn til  $\subseteq$ .

### 3.3 Legemsudvidelser

**Definition 3.10** Lad  $(L, *, \diamond, \epsilon, \omega)$  og  $(M, *, \diamond, \epsilon, \omega)$  være to legemer. Hvis  $L \subset M$  siger vi at  $M$  er en udvidelse af  $L$ .

Vi har allerede set, at  $\mathbb{R}$  er en udvidelse af  $\mathbb{Q}$ .

**Sætning 3.4** Lad  $L$  være et reelt tallegeme, og lad  $l \in L$ ,  $l > 0$  således at  $\sqrt{l} \notin L$ . Da vil  $M = \{(a + b\sqrt{l}) \mid a, b \in L\}$  være en udvidelse af  $L$ .

**Bevis:** Vi skal vise at  $L \subset M$ , og at  $M$  er et reelt tallegeme.

Når vi skriver  $(a + b\sqrt{l}) \in M$  mener vi samtidig at  $a, b, l \in L$ ,  $l > 0$  og  $\sqrt{l} \notin L$ .

Da  $L$  er et reelt tallegeme, indeholder det 0. Ethvert element i  $L$  kan nu findes i  $M$  ved at sætte  $b = 0$ , derfor er  $L \subset M$ .

Da  $L \subset \mathbb{R}$  vil  $(a + b\sqrt{l}) \in \mathbb{R}$ . Derfor er  $M \subset \mathbb{R}$ . For at vise at  $M$  er et tallegeme, godtgør vi nu, at  $M$  opfylder forudsætningerne i sætning 3.1.

$M$  er stabil overfor  $+$  og  $\cdot$  :

Lad  $(a + b\sqrt{l}), (c + d\sqrt{l}) \in M$ , så vil

$$(a + b\sqrt{l}) + (c + d\sqrt{l}) = ((a + c) + (b + d)\sqrt{l}) \in M$$

idet  $(a + c), (b + d) \in L$

$$(a + b\sqrt{l}) \cdot (c + d\sqrt{l}) = ((ac + bdl) + (ad + bc)\sqrt{l}) \in M$$

idet  $(ac + bdl), (ad + bc) \in L$

Neutralelementerne 0, 1 tilhører  $M$ , idet  $0, 1 \in L$  og  $L \subset M$ .

**Inverst element for  $+$  :** Lad  $(a + b\sqrt{l}) \in M$ .

Så vil

$$((-a) + (-b)\sqrt{l}) \in M$$

idet  $(-a), (-b) \in L$ , og vi har at

$$(a + b\sqrt{l}) + ((-a) + (-b)\sqrt{l}) = 0$$

Det vil sige, at  $((-a) + (-b)\sqrt{l})$  er inverst element til  $(a + b\sqrt{l})$  i  $M$  med hensyn til  $+$ .

**Inverst element for  $\cdot$ :** Lad  $(a+b\sqrt{l}) \in M \setminus \{0\}$ . Da er  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

Så vil

$$\frac{1}{a+b\sqrt{l}} = \frac{a-b\sqrt{l}}{(a+b\sqrt{l})(a-b\sqrt{l})} = \frac{a-b\sqrt{l}}{a^2-b^2l} = \frac{a}{a^2-b^2l} + \frac{-b}{a^2-b^2l}\sqrt{l} \in M$$

idet  $\frac{a}{a^2-b^2l}$  og  $\frac{-b}{a^2-b^2l} \in L$ , og vi har at

$$(a+b\sqrt{l}) \cdot \frac{1}{a+b\sqrt{l}} = 1$$

Det vil sige, at  $\frac{1}{a+b\sqrt{l}}$  er inverst element til  $(a+b\sqrt{l})$  i  $M$  med hensyn til  $\cdot$ .

□

Vi siger at  $M$  er en *kvadratisk legemsudvidelse* af  $L$  og betegner  $M$  med  $L(\sqrt{l})$ . Når vi i det følgende skriver at  $(a+b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$  mener vi samtidig at  $a, b, l \in L$ ,  $l > 0$  og  $\sqrt{l} \notin L$ .

- o -

Nu udvider vi  $\mathbb{Q}$  med  $\sqrt{l_0}$ , hvor  $l_0 \in \mathbb{Q}$ ,  $l_0 > 0$  og  $\sqrt{l_0} \notin \mathbb{Q}$ , og får det reelle tal-legeme  $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{l_0}) = \{(a+b\sqrt{l_0}) | a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

På samme måde udvider vi  $L_1$  med  $\sqrt{l_1}$ , hvor  $l_1 \in L_1$ ,  $l_1 > 0$  og  $\sqrt{l_1} \notin L_1$  og får  $L_2$  osv.

**Definition 3.11** *En hvilken som helst samling af reelle tallegemer*

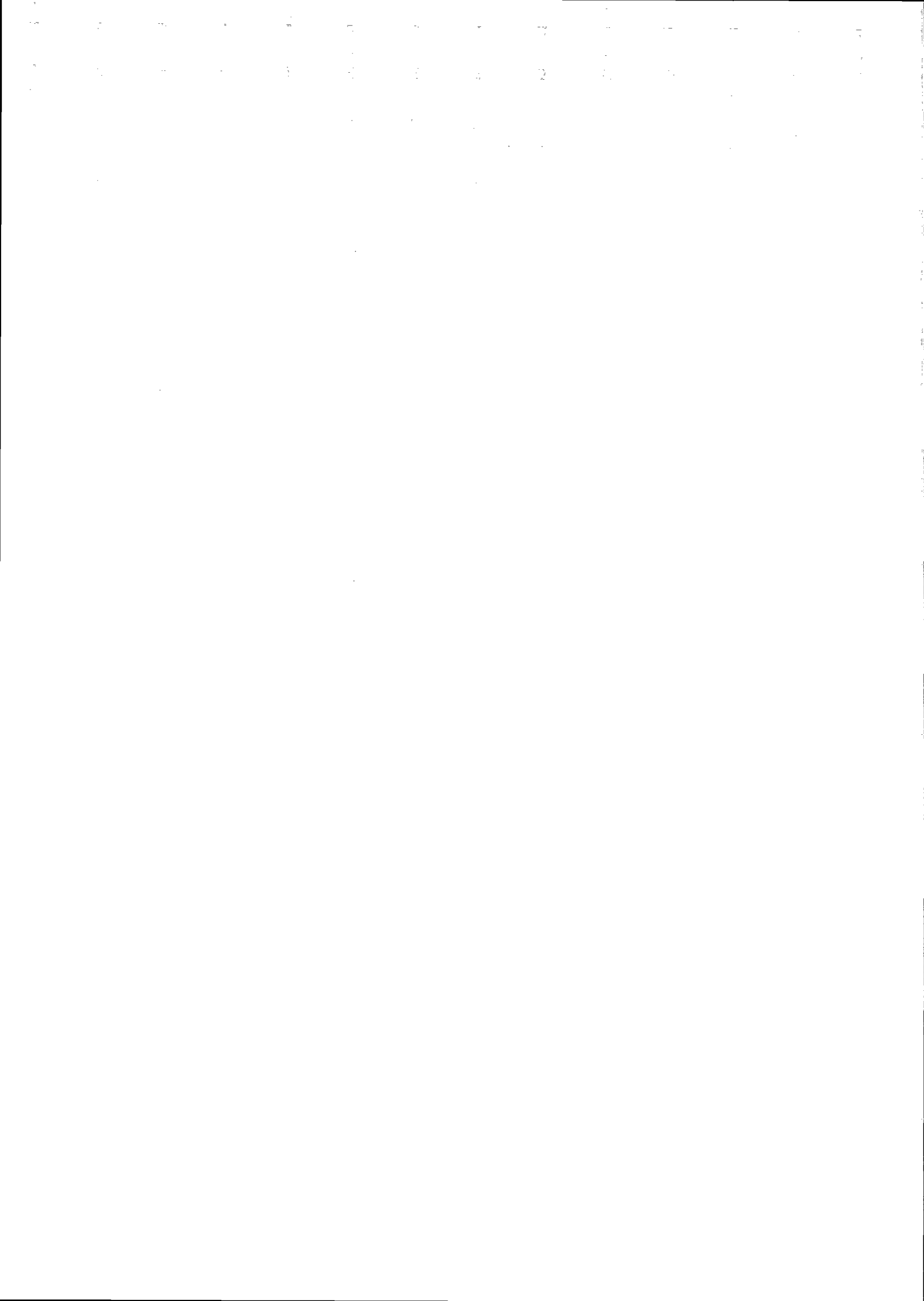
$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_i \subset \dots \subset \mathbb{R}$$

*frembragt på ovenstående måde, kalder vi for en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$ .*

**Eksempel 3.7** *Det reelle tal  $\sqrt{3+\sqrt{5}}$  er element i et legeme  $L$ , der er et led i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$ .*

Danner vi først udfra  $\mathbb{Q}$  legemet  $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , vil  $3+\sqrt{5} \in L_1$ , og  $\sqrt{3+\sqrt{5}} \notin L_1$

Danner vi dernæst legemet  $L_2 = L_1(\sqrt{3+\sqrt{5}})$ , vil  $\sqrt{3+\sqrt{5}} \in L_2$ .





**Sætning 3.5** Lad  $L(\sqrt{l})$  være en kvadratisk legemsudvidelse af  $L$ . Ethvert element i  $L(\sqrt{l})$  kan skrives entydigt på formen  $(a + b\sqrt{l})$ , hvor  $a, b \in L$ , og  $\sqrt{l} \notin L$ .

Vi viser først følgende lemma:

**Lemma 3.1** Lad  $a, b, l \in L$ ,  $l > 0$  og  $\sqrt{l} \notin L$ . Da gælder:

$$a + b\sqrt{l} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

**Bevis:**

$\Leftarrow$  : er trivielt.

$\Rightarrow$  : Lad  $a + b\sqrt{l} = 0$ , og antag at  $b \neq 0$ . Så vil  $\sqrt{l} = -\frac{a}{b} \in L$  hvilket strider mod at  $\sqrt{l} \notin L$ . Altså er  $b = 0$ , og dermed er  $a = -b\sqrt{l} = 0$ .

□

**Bevis:** (for sætning 3.5)

Lad  $(a + b\sqrt{l}), (c + d\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$ . Så vil

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{l} &= c + d\sqrt{l} \Leftrightarrow \\ ((a - c) + (b - d)\sqrt{l}) &= 0 \Leftrightarrow \\ a - c = 0 \quad \text{og} \quad b - d = 0 &\Leftrightarrow \\ a = c \quad \text{og} \quad b = d & \end{aligned}$$

□

**Definition 3.12** Lad  $(a + b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$ . Betragt afbildningen  $f : L(\sqrt{l}) \rightarrow L(\sqrt{l})$  givet ved

$$f(a + b\sqrt{l}) = (a - b\sqrt{l})$$

Da  $L$  er et legeme vil  $(a - b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$ . Vi kalder  $(a - b\sqrt{l})$  den adjungerede til  $(a + b\sqrt{l})$ , og i stedet for  $f(x)$  skriver vi  $\bar{x}$ .

**Sætning 3.6** *Afbildningen  $L(\sqrt{l}) \rightarrow L(\sqrt{l})$  givet ved  $x \rightarrow \bar{x}$  er lineær. Det vil sige  $\forall x, y \in L(\sqrt{l})$*

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

og  $\forall x \in L(\sqrt{l}), \forall \alpha \in L$

$$\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$$

**Bevis:** Lad  $x = (a + b\sqrt{l}), y = (c + d\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$ . Vi har da

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a + b\sqrt{l}) + (c + d\sqrt{l})} \\ &= \overline{((a + c) + (b + d)\sqrt{l})} \\ &= ((a + c) - (b + d)\sqrt{l}) \\ &= (a - b\sqrt{l}) + (c - d\sqrt{l}) \\ &= \overline{(a + b\sqrt{l})} + \overline{(c + d\sqrt{l})} \\ &= \bar{x} + \bar{y} \end{aligned}$$

Lad  $x = (a + b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$  og  $\alpha \in L$ . Vi har da

$$\begin{aligned} \overline{\alpha x} &= \overline{\alpha(a + b\sqrt{l})} \\ &= \overline{(\alpha a + \alpha b\sqrt{l})} \\ &= (\alpha a - \alpha b\sqrt{l}) \\ &= \alpha(a - b\sqrt{l}) \\ &= \overline{\alpha(a + b\sqrt{l})} \\ &= \alpha \bar{x} \end{aligned}$$

□

**Sætning 3.7** *Afbildningen  $L(\sqrt{l}) \rightarrow L(\sqrt{l})$  givet ved  $x \rightarrow \bar{x}$  er multiplikativ. Det vil sige  $\forall x, y \in L(\sqrt{l})$*

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

**Bevis:** Lad  $x = (a + b\sqrt{l}), y = (c + d\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$ . Vi har da

$$\begin{aligned} \overline{x \cdot y} &= \overline{(a + b\sqrt{l}) \cdot (c + d\sqrt{l})} \\ &= \overline{(ac + bdl + ad\sqrt{l} + bc\sqrt{l})} \\ &= \overline{(ac + bdl) + (ad + bc)\sqrt{l}} \\ &= (ac + bdl) - (ad + bc)\sqrt{l} \\ &= (a - b\sqrt{l}) \cdot (c - d\sqrt{l}) \\ &= \overline{(a + b\sqrt{l})} \cdot \overline{(c + d\sqrt{l})} \\ &= \overline{x} \cdot \overline{y} \end{aligned}$$

□

**Sætning 3.8** For afbildningen  $L(\sqrt{l}) \rightarrow L(\sqrt{l})$  givet ved  $x \rightarrow \overline{x}$  gælder for alle  $x \in L(\sqrt{l})$  og  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\overline{x^n} = \overline{x}^n$$

**Bevis:** Lad  $x \in L(\sqrt{l})$  og  $n \in \mathbb{N}$ . Vi viser sætningen ved induktion over  $n$ .

**Induktionsstart:** For  $n = 1$  fås

$$\overline{x} = \overline{x}$$

**Induktionsskridt:** Vi antager at  $\overline{x^n} = \overline{x}^n$  og får ved brug af sætning 3.7

$$\overline{x^{n+1}} = \overline{x^n \cdot x} = \overline{x^n} \cdot \overline{x} = \overline{x}^n \cdot \overline{x} = \overline{x}^{n+1}$$

hvor andet lighedstegn kommer af sætning 3.7, og tredje lighedstegn kommer af induktionsantagelsen. □

**Sætning 3.9** Afbildningen  $L(\sqrt{l}) \rightarrow L(\sqrt{l})$  givet ved  $x \rightarrow \overline{x}$  er en isomorfi.

**Bevis:** Vi har allerede set at afbildningen bevarer strukturen i  $L(\sqrt{l})$ . Vi mangler blot at vise, at afbildningen er surjektiv og injektiv, og dermed bijektiv.

Afbildningen er surjektiv da ethvert element  $(a + b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$  er et billede af  $(a - b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$

Af sætning 3.5 følger at  $(a - b\sqrt{l})$  på entydig måde beskriver et element i  $L(\sqrt{l})$ . Afbildningen er derfor injektiv. □



### 3.4 Polynomier

Vi betragter polynomiet

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

med koefficienter fra et reelt tallegeme  $L$ . Vi ønsker at undersøge eventuelle rødder fra  $L(\sqrt{l})$  i dette polynomium.

**Sætning 3.10** *Lad  $L(\sqrt{l})$  være en kvadratisk udvidelse af  $L$ , og lad*

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

*være et polynomium med koefficienter fra  $L$ . Da gælder*

$$\overline{P(x)} = P(\bar{x})$$

*for alle  $x \in L(\sqrt{l})$ .*

**Bevis:** Lad  $x \in L(\sqrt{l})$ . Vi har da

$$\begin{aligned} \overline{P(x)} &= \overline{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0} \\ &= \overline{\alpha_n x^n} + \overline{\alpha_{n-1} x^{n-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 x} + \overline{\alpha_0} \\ &= \alpha_n \overline{x^n} + \alpha_{n-1} \overline{x^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \overline{x} + \alpha_0 \\ &= \alpha_n \overline{x}^n + \alpha_{n-1} \overline{x}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \overline{x} + \alpha_0 \\ &= P(\bar{x}) \end{aligned}$$

□

**Sætning 3.11** *Lad  $L(\sqrt{l})$  være en kvadratisk udvidelse af  $L$ , og lad*

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

*være et polynomium med koefficienter fra  $L$ . Hvis  $x_0 \in L(\sqrt{l})$  er rod i  $P$ , er også den adjungerede  $\bar{x}_0$  rod i  $P$ .*

**Bevis:** Vi antager at  $x_0 \in L(\sqrt{l})$  er rod i  $P$ . Dvs  $P(x_0) = 0$ . Vi har da

$$P(\bar{x}_0) = \overline{P(x_0)} = \overline{0} = 0$$

Hvoraf ses at  $\bar{x}_0$  er rod i  $P$ . □

Hvis  $(a + b\sqrt{l})$  er rod i  $P$ , kalder vi  $(a - b\sqrt{l})$  den *adjungerede* rod.

- o -

Vi skal senere se, at tredjegradspolynomiet har en særlig betydning for uløseligheden af vinkeltredelingsproblemet. Vi vil derfor vise en sætning, der kun gælder for tredjegradspolynomier, men ikke polynomier i almindelighed.

**Lemma 3.2** *Lad  $L(\sqrt{l})$  være en kvadratisk udvidelse af  $L$ , og lad*

$$P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

*være et tredjegradspolynomium med koefficienter fra  $L$ , og hvor  $\alpha_3 \neq 0$ . Hvis  $P$  har en rod i  $L(\sqrt{l})$ , så har  $P$  også en rod i  $L$ .*

**Bevis:** Antag at  $(a + b\sqrt{l}) \in L(\sqrt{l})$  er rod i  $P$ .

Hvis  $b = 0$  vil  $(a + b\sqrt{l}) \in L$ , og sætningen er bevist.

Hvis  $b \neq 0$  benytter vi sætning 3.11, og får at også  $(a - b\sqrt{l})$  er rod i  $P$ . Vi faktoriserer nu  $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha_3(x - (a + b\sqrt{l}))(x - (a - b\sqrt{l}))(x - c) \\ &= \alpha_3 x^3 - \alpha_3(2a + c)x^2 + \alpha_3(2ac + (a + b\sqrt{l})(a - b\sqrt{l}))x \\ &\quad - \alpha_3(a + b\sqrt{l})(a - b\sqrt{l})c \end{aligned}$$

og ser at  $P$  har en tredje rod  $c$ . Ved at betragte koefficienten til  $x^2$  udregnes  $c$

$$\alpha_2 = -\alpha_3(2a + c)$$

⇕

$$c = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2a$$

Da  $a, \alpha_2, \alpha_3 \in L$  vil også  $c \in L$ . □

- o -

Lad os antage, at  $r$  er rod i et tredjegradspolynomium

$$P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

med koefficienter fra  $\mathbb{Q}$ , og at  $r \in L_i$ , hvor  $L_i$  er et legeme i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$ .

Af sætning 3.11 følger at  $P$  også har en adjungeret rod  $\bar{r} \in L_i$ , og lemma 3.2 giver at  $P$  har en rod  $c \in L_{i-1}$ .

$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset \dots \subset L_{i-1} \subset L_i \subset \dots \subset \mathbb{R}$$

Ved gentagende anvendelse af lemma 3.2 ses, at  $c \in \mathbb{Q}$ . Vi har nu vist følgende sætning:

**Sætning 3.12** *Hvis et tredjegradspolynomium med koefficienter fra  $\mathbb{Q}$  har en rod i et legeme, der er et led i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$ , så har det også en rod i  $\mathbb{Q}$ .*





# Kapitel 4

## Konstruerbare punkter og tal

Oinopides formulerede at geometriske konstruktioner, er konstruktioner udført alene med passer og lineal. Konstruktion af en vinkel, der er en tredjedel af en vilkårlig vinkel, skal altså udføres med passer og lineal. Lineal skal her forstås som et redskab, hvormed man kan tegne rette linier og intet andet. Dette er til forskel fra en målestok, der i daglig tale kaldes en lineal. Vi skal nu gøre klart, hvad der overhovedet er konstruerbart.

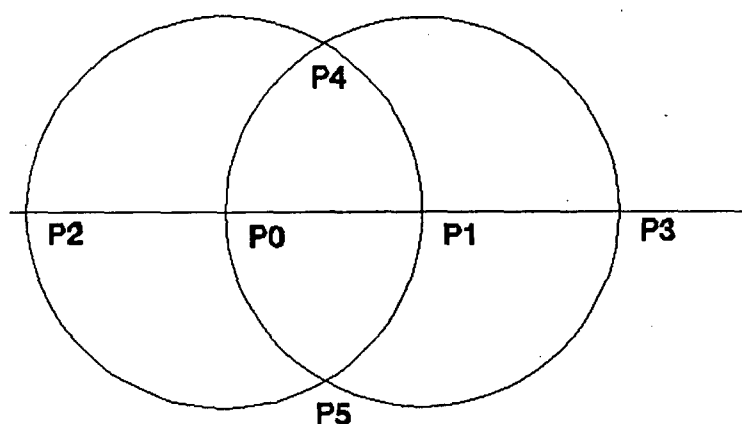
### 4.1 Konstruerbare punkter

De operationer, der kan udføres med passer og lineal, kaldes de *fundamentale konstruktioner* og er følgende:

- F1 Med en lineal kan man tegne en ret linie gennem to i forvejen fundne punkter.
- F2 Med en passer kan man tegne en cirkel med et allerede fundet punkt som centrum og afstanden mellem to i forvejen fundne punkter som radius.
- F3 Man kan finde skæringspunkter mellem allerede fundne rette linier og cirkler.

**Definition 4.1** Mængden af konstruerbare punkter  $U$  i planen  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  er de punkter, der kan konstrueres ved gentagen anvendelse af de fundamentale konstruktioner ud fra punkterne  $P_0 = (0,0)$  og  $P_1 = (1,0)$ .

De konstruerbare punkter er altså en delmængde af planen  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , og vi udpeger to punkter  $P_0$  og  $P_1$ , som vi kan konstruere alle andre konstruerbare punkter udfra.



Figur 4.1: Seks konstruerbare punkter

**Eksempel 4.1** De konstruerbare punkter kan findes ved successiv anvendelse af de fundamentale konstruktioner ud fra punkterne  $P_0$  og  $P_1$ , se figur 4.1

Først tegnes en linie gennem punkterne  $P_0$  og  $P_1$  (F1).

Dernæst tegnes en cirkel med centrum i  $P_0$  og  $|P_0P_1| = 1$  som radius (F2).

Derved dannes et nyt punkt  $P_2$  ved cirkelns skæring med linien (F3).

Ligeledes kan der tegnes en cirkel med centrum i  $P_1$  med radius 1 (F2).

Hvorved dannes endnu tre punkter, nemlig et punkt  $P_3$  hvor cirklen skærer linien, og to punkter  $P_4$  og  $P_5$  hvor de to cirkler skærer hinanden (F3).

Ud fra disse punkter kan igen tegnes linier og cirkler, hvorved nye skæringer og dermed punkter konstrueres.

**Sætning 4.1** Mængden af konstruerbare punkter  $U$  er tællelig.

**Bevis:** En mængde kaldes tællelig, hvis den kan bringes i enentydig korrespondance med mængden af naturlige tal  $\mathbb{N}$ .

Vi starter med at have to punkter  $P_0$  og  $P_1$ . For hvert par af fundamentale konstruktioner (F1 efterfulgt af F3 eller F2 efterfulgt af F3) dannes et *endeligt* antal punkter. Vi kan nummerere punkterne som vi har gjort det med de seks første punkter i eksempel 4.1.

Denne nummerering bringer de konstruerbare punkter i enentydig korrespondance med  $\mathbb{N}$ .  $\square$

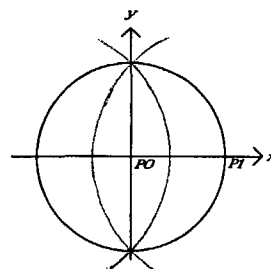
Da  $\mathbb{R}$  er overtællelig, er også  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  overtællelig. Derfor må der gælde

**Sætning 4.2** I planen findes der punkter, som ikke er konstruerbare.

- o -

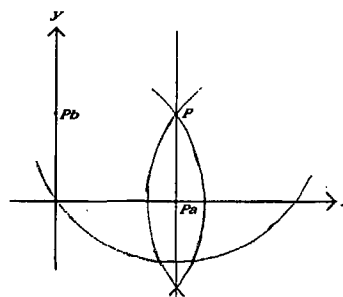
Her følger et par eksempler på hvad man kan konstruere i planen ud fra punkterne  $P_0 = (0,0)$  og  $P_1 = (1,0)$ .

**Eksempel 4.2** Udfra punkterne  $P_0 = (0,0)$  og  $P_1 = (1,0)$  kan man tegne  $x$ -aksen og  $y$ -aksen i et sædvanligt koordinatsystem i planen. Man kan tegne enhedscirklen med centrum i  $P_0$  og radius 1.

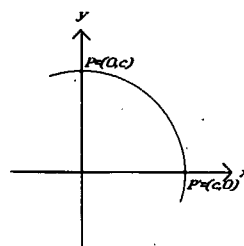


**Eksempel 4.3** Har man et konstruerbart punkt  $P = (a,b)$  i planen, kan man nedfælde den vinkelrette fra dette punkt til  $x$ -aksen, og dermed konstruere punktet  $P_a = (a,0)$ .

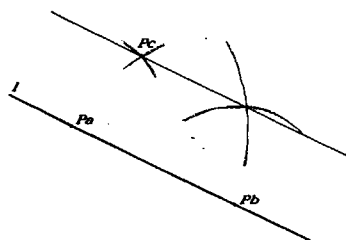
Tilsvarende kan man projicere punktet ind på  $y$ -aksen, og dermed konstruere punktet  $P_b = (0,b)$ .



**Eksempel 4.4** Udfra et givet punkt  $P = (0, c)$  på  $y$ -aksen kan man finde et punkt på  $x$ -aksen med koordinaterne  $P' = (c, 0)$ .



**Eksempel 4.5** Udfra en linie  $l$  gennem to konstruerbare punkter  $P_a$  og  $P_b$ , kan man tegne en linie gennem et tredje konstruerbart punkt  $P_c$  parallelt med  $l$ .



## 4.2 Konstruerbare tal

**Definition 4.2** Koordinaterne til konstruerbare punkter kaldes konstruerbare tal. Mængden af konstruerbare tal benævnes  $\mathbb{K}$ .

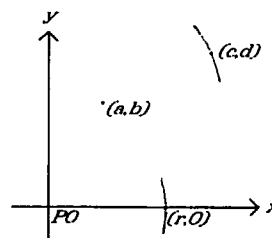
Da der findes punkter i planen, der ikke er konstruerbare, må der gælde:

**Sætning 4.3** Der findes tal i  $\mathbb{R}$ , der ikke er konstruerbare.

Vi ser altså at de konstruerbare tal er en ægte delmængde af de reelle tal.

- 0 -

**Eksempel 4.6** Givet to konstruerbare punkter  $(a, b)$  og  $(c, d)$  i planen vil afstanden  $r = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$  være et konstruerbart tal. Vi kan nemlig finde afstanden ved at sætte passerens ben i de to punkter, og derefter tegne en cirkel med denne radius med centrum i  $(0, 0)$  (F2). Skæringspunktet med  $x$ -aksen er da et konstruerbart punkt (F3) med koordinater  $(r, 0)$ .



I de foregående eksempler har vi set, dels at afstanden mellem to konstruerbare punkter er et konstruerbart tal, og dels at alle konstruerbare tal findes som abscisser på  $x$ -aksen.

- o -

Vi vil nu undersøge hvilke tal, der er konstruerbare.

Først vil vi i sætning 4.4 vise, at alle tal, der er dannet ud fra iforvejen kendte konstruerbare tal ved brug af operationerne  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$  og  $\sqrt{\quad}$ , er konstruerbare. Skal vi relatere dette resultat til udvidelseslegemerne i kapitel 3, betyder det, at ethvert legeme, der er et led i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$ , er en delmængde af de konstruerbare tal.

Dernæst vil vi i sætning 4.6 vise, at der ikke er andre konstruerbare tal end dem, der kan konstrueres ved gentagende anvendelse af ovenstående operationer. Husker vi på, at et kvadratisk udvidelseslegeme netop er fremkommet ud fra  $\mathbb{Q}$  ved brug af disse fem operationer, skal vi altså vise at:

$\forall a \in \mathbb{K} \exists L_i$  hvor:

$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_i \subset \dots \subset \mathbb{R}$$

så  $a \in L_i$

**Sætning 4.4** Hvis  $a, b \in \mathbb{K}$  så vil også

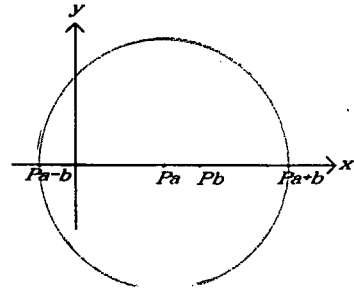
- 1)  $(a + b) \in \mathbb{K}$
- 2)  $(a - b) \in \mathbb{K}$
- 3)  $(ab) \in \mathbb{K}$
- 4)  $\frac{a}{b} \in \mathbb{K}$ , for  $b \neq 0$ ,
- 5)  $\sqrt{|a|} \in \mathbb{K}$

**Bevis:** Lad punkterne  $P_0 = (0, 0)$  og  $P_1 = (1, 0)$  være givet i planen, og lad  $a, b \in \mathbb{K}$



$$\underline{(a + b) \in \mathbb{K} \text{ og } (a - b) \in \mathbb{K}}$$

Da  $a, b \in \mathbb{K}$  findes konstruerbare punkter  $P_a = (a, 0)$  og  $P_b = (b, 0)$ . Med en passer udtages afstanden  $b$  ved at sætte passerens ben i punkterne  $P_0$  og  $P_b$ . Med  $b$  som radius tegnes en cirkel med centrum i  $P_a$  (F2).

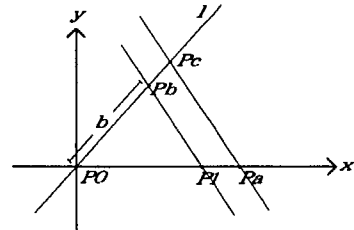


Herved dannes to skæringspunkter  $P_{a+b}$  og  $P_{a-b}$  med  $x$ -aksen (F3). Disse punkter har koordinaterne  $P_{a+b} = (a + b, 0)$  og  $P_{a-b} = (a - b, 0)$ .

Det følger nu af definitionen på konstruerbare tal, at  $(a + b) \in \mathbb{K}$  og  $(a - b) \in \mathbb{K}$

$$\underline{(ab) \in \mathbb{K}}$$

Tegn en linie  $l$  i planen gennem  $P_0$ , som vist på figuren. Da  $a, b \in \mathbb{K}$  findes konstruerbare punkter  $P_a = (a, 0)$  og  $P_b$  så  $P_b$  ligger på  $l$  og  $|P_b P_0| = b$ . Vi tegner nu linien gennem  $P_1$  og  $P_b$ , samt linien parallel hermed gennem  $P_a$ , og finder skæringspunktet  $P_c$ .



Bemærk, at alle punkterne er konstruerbare. Specielt er  $P_c$  konstruerbart, hvorfor afstanden  $|P_c P_0|$  er et konstruerbart tal (jævnfør eksempel 4.6).

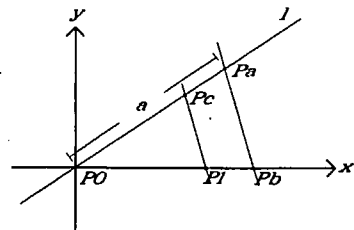
Da de to trekanter  $\triangle P_0 P_1 P_b$  og  $\triangle P_0 P_a P_c$  er ligedannede gælder:

$$\frac{|P_c P_0|}{|P_b P_0|} = \frac{|P_a P_0|}{|P_1 P_0|} \Rightarrow$$

$$|P_c P_0| = \frac{|P_a P_0|}{|P_1 P_0|} |P_b P_0| = ab \in \mathbb{K}$$

$$\underline{\frac{a}{b} \in \mathbb{K}}$$

Tegn en linie  $l$  i planen gennem  $P_0$ , som vist på figuren, og lad  $b \neq 0$ . Da  $a, b \in \mathbb{K}$  findes konstruerbare punkter  $P_b = (b, 0)$  og  $P_a$  så  $P_a$  ligger på  $l$  og  $|P_a P_0| = a$ . Vi tegner nu linien gennem  $P_a$  og  $P_b$ , samt linien parallel hermed gennem  $P_1$ , og finder skæringspunktet  $P_c$ .



Bemærk, at alle punkterne er konstruerbare. Specielt er  $P_c$  konstruerbart, hvorfor afstanden  $|P_c P_0|$  er et konstruerbart tal.

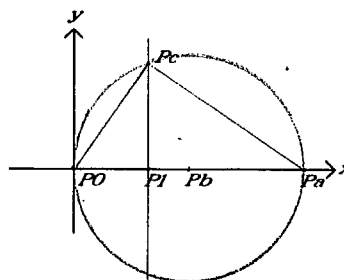
Da de to trekanter  $\triangle P_0 P_a P_b$  og  $\triangle P_0 P_c P_1$  er ligedannede gælder:

$$\frac{|P_c P_0|}{|P_a P_0|} = \frac{|P_1 P_0|}{|P_b P_0|} \Rightarrow$$

$$|P_c P_0| = \frac{|P_1 P_0|}{|P_b P_0|} |P_a P_0| = \frac{a}{b} \in \mathbb{K}$$

$$\sqrt{|a|} \in \mathbb{K}$$

Da  $a \in \mathbb{K}$  findes ifølge det ovenstående konstruerbare punkter  $P_a = (1 + a, 0)$  og  $P_b = (\frac{1+a}{2}, 0)$ , se figuren. Vi tegner en cirkel med centrum i  $P_b$  og radius  $\frac{1+a}{2}$ . Dernæst tegnes en linie parallelt med  $y$ -aksen gennem  $P_1$ , og skæringspunktet  $P_c$  findes.



Bemærk, at alle punkterne er konstruerbare. Specielt er  $P_c$  konstruerbart, hvorfor afstanden  $|P_c P_1|$  er et konstruerbart tal.

Da de to trekanter  $\triangle P_1 P_0 P_c$  og  $\triangle P_1 P_c P_a$  er ligedannede gælder:

$$\frac{|P_c P_1|}{|P_a P_1|} = \frac{|P_1 P_0|}{|P_c P_1|} \Rightarrow$$

$$|P_c P_1|^2 = |P_1 P_0| \cdot |P_a P_1| = 1 \cdot a = a \Rightarrow$$

$$|P_c P_1| = \sqrt{a} \in \mathbb{K}$$

□

Vi kan nu vise

**Sætning 4.5** De konstruerbare tal  $\mathbb{K}$  er et reelt tallegeme.

**Bevis:** Vi har allerede set, at  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ . Ifølge definitionerne 4.1 og 4.2 er neutralelementerne 0, 1 med i  $\mathbb{K}$ .

Endelig viser sætning 4.4 at  $\mathbb{K}$  er stabil over for kompositionerne  $+$  og  $\cdot$ , samt at  $\mathbb{K}$  indeholder invers elementerne for  $+$  og  $\cdot$ . □

Endvidere giver kvadratrodsoperationen at alle kvadratrødder af tal i  $\mathbb{K}$  er konstruerbare.

Spørgsmålet er nu, om der findes andre konstruerbare tal end de tal, man får ved at bruge operationerne  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$  og  $\sqrt{\quad}$  gentagne gange. Svaret på dette er nej. Og det vil nu blive godtgjort.



**Sætning 4.6** For alle konstruerbare tal  $k$  gælder, at der findes et reelt tallegeme  $L_n$  i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset \dots \subset \mathbb{R}$$

så  $k \in L_n$

**Bevis:** Da mængden  $U$  af konstruerbare punkter ifølge sætning 4.1 er tællelig, kan vi indeksere elementerne i  $U$  således at  $U = \{P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), \dots, P_i = (x_i, y_i), \dots\}, i \in \mathbb{N}$ .

Da de konstruerbare tal pr. definition er koordinaterne til punkterne i  $U$ , skal vi vise at sætningen gælder for alle koordinater  $(x_i, y_i) \in U$ . Dette gøres ved induktion over  $i$ .

Induktionsstart:

For  $i = 0$  og  $i = 1$  er  $P_0 = (0, 0)$  og  $P_1 = (1, 0)$ . Dette giver os to konstruerbare tal  $\{0, 1\} \in \mathbb{Q}$ .  $\mathbb{Q}$  er trivielt et led i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$  - nemlig den trivielle kæde:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Induktionsantagelse:

Antag at de konstruerbare punkter  $P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), \dots, P_i = (x_i, y_i)$  alle har koordinater, der opfylder sætningen.

Det vil sige at  $x_j, y_j \in L_n$  for  $0 \leq j \leq i$ , hvor

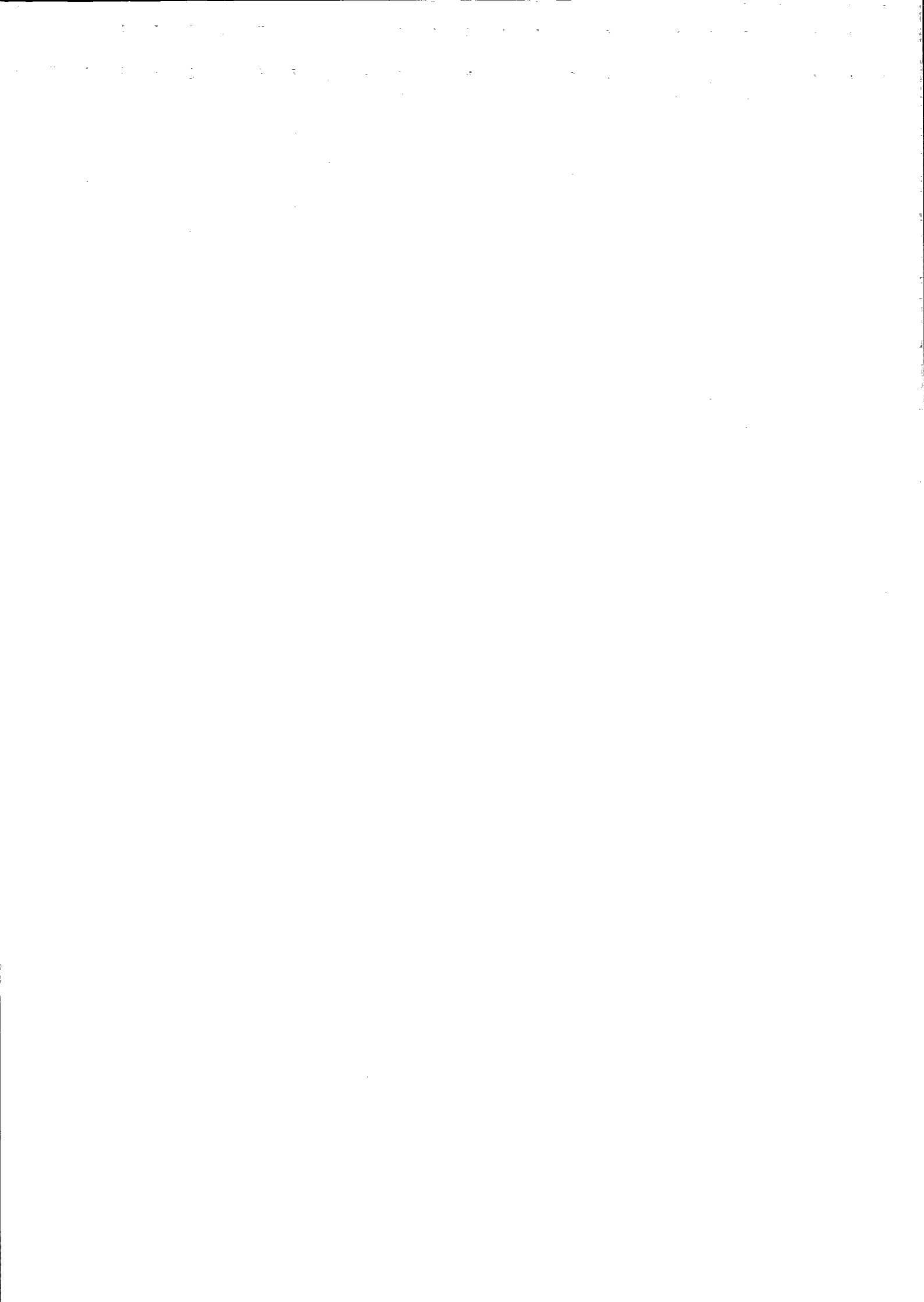
$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset \mathbb{R}$$

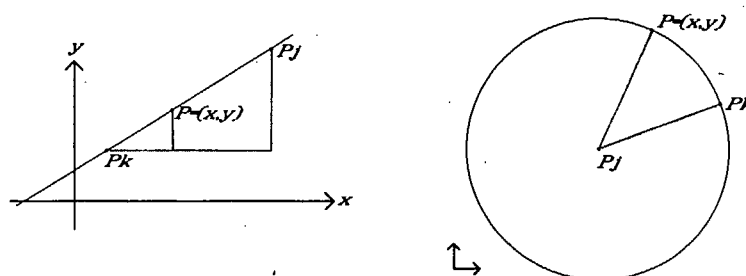
Vi skal da vise, at koordinaterne  $x_{i+1}, y_{i+1}$  til det  $i + 1$ 'te punkt  $P_{i+1}$  tilhører legemet  $L_n$  eller en kvadratisk legemsudvidelse  $L_n(\sqrt{l})$  af  $L_n$ , hvor  $l \in L_n, l > 0$  og  $\sqrt{l} \notin L_n$ .

Induktionsskridt:

Det  $i + 1$ 'te punkt  $P_{i+1}$  kan dannes ved de fundamentale konstruktioner ud fra de forrige punkter  $P_1, P_2, \dots, P_i$  på følgende tre måder:

- 1) som skæringspunkt mellem to linier
- 2) som skæringspunkt mellem en linie og en cirkel
- 3) som skæringspunkt mellem to cirkler





Figur 4.2: Liniens og cirkelns ligning

I de følgende regninger er pointen at lægge mærke til, hvilke tallegemer de forskellige variable viser sig at tilhøre.

Ligningen for en linie - se figur 4.2 - gennem to punkter  $P_j = (x_j, y_j)$  og  $P_k = (x_k, y_k)$ , hvor  $P_j \neq P_k$  er:

$$(x - x_k)(y_j - y_k) = (y - y_k)(x_j - x_k)$$

⇕

$$(y_j - y_k)x - (x_j - x_k)y - (y_j - y_k)x_k + (x_j - x_k)y_k = 0$$

⇕

$$ax + by + c = 0$$

hvor  $a = y_j - y_k$ ,  $b = -(x_j - x_k)$  og  $c = -(y_j - y_k)x_k + (x_j - x_k)y_k$ . Vi bemærker at  $(a, b) \neq (0, 0)$  idet  $P_j \neq P_k$ .

Hvis  $j \leq i$  og  $k \leq i$  vil  $x_j, y_j, x_k, y_k$  ifølge induktionsantagelsen tilhøre  $L_n$ , og da  $L_n$  er et legeme vil også  $a, b, c \in L_n$ .

Ligningen for en cirkel - se figur 4.2 - med centrum i  $P_j = (x_j, y_j)$  der går gennem  $P_k = (x_k, y_k)$ , hvor  $P_j \neq P_k$  er:

$$(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2$$

⇕

$$x^2 - 2x_jx + x_j^2 + y^2 - 2y_jy + y_j^2 = x_k^2 - 2x_kx_j + x_j^2 + y_k^2 - 2y_ky_j + y_j^2$$

⇕

$$x^2 + y^2 - 2x_jx - 2y_jy - x_k^2 + 2x_kx_j - y_k^2 + 2y_ky_j = 0$$

⇕

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

hvor  $d = -2x_j$ ,  $e = -2y_j$  og  $f = -x_k^2 + 2x_kx_j - y_k^2 + 2y_ky_j$ . Hvis  $j \leq i$  og  $k \leq i$  vil  $x_j, y_j, x_k, y_k$  ifølge induktionsantagelsen tilhøre  $L_n$ , og da  $L_n$  er et legeme vil også  $d, e, f \in L_n$ .



- o -

Vi kan nu finde koordinaterne til skæringspunktet  $P_{i+1}$  fremkommet af 1)-3):

ad 1) Skæring mellem to ikke parallelle linier med ligningerne:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{og}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

hvor  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in L_n$ , giver koordinaterne

$$P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}) = \left( \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

hvor  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , da linierne ikke er parallelle.

I dette tilfælde er  $x_{i+1}, y_{i+1} \in L_n$ .

- o -

ad 2) Skæring mellem en linie og en cirkel med ligningerne:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{og}$$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

hvor  $a, b, c, d, e, f \in L_n$ . Isoleres  $x$  af liniens ligning fås

$$x = \frac{-by - c}{a}, \quad \text{for } a \neq 0$$

som indsat i cirkelens ligning giver

$$\left( \frac{-by - c}{a} \right)^2 + y^2 + d \left( \frac{-by - c}{a} \right) + ey + f = 0$$

der er af formen:

$$Ay^2 + By + C = 0$$

hvor  $A, B, C \in L_n$ . Vi løser med hensyn til  $y$  og får

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{D}$$

hvor  $D \in L_n$ . Hvis  $D < 0$  er der ingen skæringspunkter, hvis  $D = 0$  er der et skæringspunkt, og hvis  $D > 0$  er der to skæringspunkter.

For  $D = 0$  får vi:

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = \left( \frac{bB}{a2A} - \frac{c}{a}, -\frac{B}{2A} \right)$$

hvoraf vi ser at  $x_{i+1}, y_{i+1} \in L_n$ .

For  $D > 0$  skal vi godtgøre, at begge de to skæringspunkter  $Q = (x_Q, y_Q)$  og  $R = (x_R, y_R)$  kan udnævnes til  $P_{i+1}$  og have koordinater, der opfylder sætningen. Vi får:

$$(x_Q, y_Q) = \left( \frac{bB}{2aA} - \frac{c}{a} - \frac{b}{2aA}\sqrt{D}, \frac{-B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{D} \right)$$

$$(x_R, y_R) = \left( \frac{bB}{2aA} - \frac{c}{a} + \frac{b}{2aA}\sqrt{D}, \frac{-B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{D} \right)$$

Hvis  $\sqrt{D} \in L_n$  så vil  $x_Q, y_Q$  og  $x_R, y_R$  og dermed  $x_{n+1}, y_{n+1} \in L_n$ .

Hvis  $\sqrt{D} \notin L_n$  så vil  $x_Q, y_Q$  og  $x_R, y_R$  og dermed  $x_{n+1}, y_{n+1} \in L_n(\sqrt{D})$ .

Bemærk her at begge koordinater  $x_{n+1}, y_{n+1}$  tilhører samme legeme  $L_n$  eller  $L_n(\sqrt{D})$ . For hvert nyt punkt vi konstruerer er det altså tilstrækkeligt, at udvide kæden en gang, selvom vi faktisk konstruerer to tal.

Hvis  $a = 0$  er  $b \neq 0$ , se side 41. Vi kan derfor isolere  $y$  af liniens ligning, og indsætte dette i cirkelns ligning. Da ligningerne for linien og cirklen er symmetriske i  $x$  og  $y$ , vil dette føre til udregninger og resultater, der er helt analoge til de netop opnåede for  $a \neq 0$ .

- o -

ad 3) Skæring mellem to cirkler med ligningerne:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \quad \text{og}$$

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

Trækkes de to ligninger fra hinanden fås

$$(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0$$

hvilket jo er ligningen for en linie. Skæring mellem de to cirkler kan altså reduceres til skæring mellem denne linie og den ene af cirklerne. Dette tilfælde er behandlet under ad 2).  $\square$

Vi har hermed vist, at ethvert nyt konstrueret tal vil tilhøre et legeme  $L_n$  eller en kvadratisk udvidelse heraf.

Ideen med at karakterisere de konstruerbare tal på denne måde, er at vi nu kan benytte sætningerne fra kapitel 3 om legemer på konstruerbare tal. Specielt ønsker vi at benytte sætning 3.12, der siger, at hvis et tredjegradspolynomium med rationale koefficienter har en rod i et kvadratisk udvidelseslegeme, så har det også en rod i  $\mathbb{Q}$ .

## Kapitel 5

# Vinklens tredeling - problemets uløselighed

Vi skal i dette kapitel fremføre beviset for, at det ikke kan lade sig gøre at tredele en vilkårlig vinkel i tre lige store dele ved brug af passer og lineal.

Vi bemærker, at det er muligt at tredele nogle vinkler f.eks.  $90^\circ$  og  $180^\circ$ , men det er ikke muligt at tredele *enhver* vinkel. For at bevise dette er det nok at finde een vinkel, der ikke kan tredeles. Traditionelt føres dette bevis for vinklen  $60^\circ$ , og det gør vi også her.

### 5.1 $60^\circ$ kan ikke tredeles

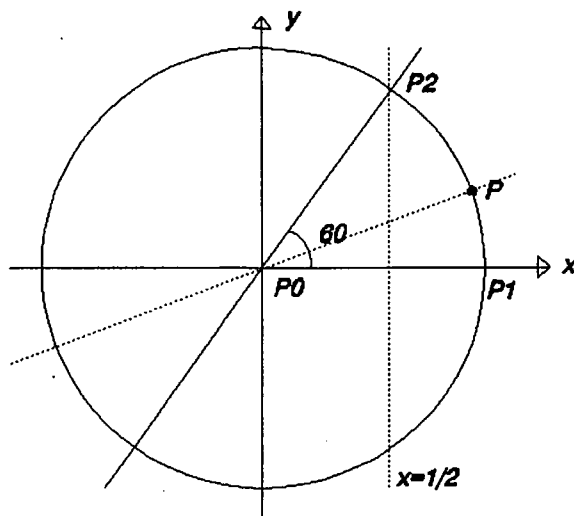
Lad os præcisere problemet lidt:

Vi betragter punkterne  $P_0 = (0,0)$  og  $P_1 = (1,0)$  i planen. Udfra disse konstruerer vi punktet  $P_2$  som skæring mellem linien  $x = \frac{1}{2}$  og enhedscirklen, se figur 5.1. Vi ser, at  $P_2$  har koordinaterne  $P_2 = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , og at linien gennem  $P_0$  og  $P_2$  danner en vinkel på  $60^\circ$  med  $x$ -aksen.

At tredele vinklen på  $60^\circ$  går ud på at trække en linie gennem  $P_0$ , der danner en vinkel på  $20^\circ$  med  $x$ -aksen.

**Sætning 5.1** *Vinklen  $60^\circ$  kan tredeles hvis og kun hvis  $\cos 20^\circ$  er et konstruerbart tal.*



Figur 5.1: Tredeling af  $60^\circ$ 

**Bevis:** Antag at vinklen  $60^\circ$  kan tredeles. Så kan punktet  $P = (\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$  konstrueres som skæring mellem tredelingslinien og enhedscirklen. Af definition 4.2 følger da, at  $\cos 20^\circ$  er et konstruerbart tal.

Antag at  $\cos 20^\circ$  er et konstruerbart tal. Så er punktet  $(\cos 20^\circ, 0)$  et konstruerbart punkt. Ifølge eksempel 4.5 kan vi tegne en linie parallelt med  $y$ -aksen gennem  $(\cos 20^\circ, 0)$ , der skærer enhedscirklen i punktet  $P = (\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ . Således kan vinklen  $60^\circ$  tredeles.  $\square$

- o -

Lad os nu undersøge om  $\cos 20^\circ$  er et konstruerbart tal. Ud fra additionsformlerne har vi følgende sammenhæng (se appendix B)

$$\cos 3v = 4 \cos^3 v - 3 \cos v \quad (5.1)$$

Vi indsætter  $\cos 3v = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  og  $\cos v = x$  og får

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

Dernæst ganges der gennem med 2:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad (5.2)$$

Denne tredjegradslikning har netop tre løsninger inden for de komplekse tal. Samtidig ved vi fra ligning (5.1) at  $\cos 20^\circ$  er løsning til (5.2).

Lad os antage, at en af løsningerne  $x_0$  til ligning (5.2) ligger inden for de konstruerbare tal  $\mathbb{K}$ . Så vil der ifølge sætning 4.6 findes et reelt tallegeme  $L_n$  i en kæde af kvadratiske legemsudvidelser fra  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset \dots \subset \mathbb{R}$$

så  $x_0 \in L_n$

Vi bringer nu sætning 3.12 fra kapitel 3 i spil overfor tredjegradspolynomiet i ligning (5.2). Da vi har antaget at  $x_0$  er rod og  $x_0 \in \mathbb{K}$  og dermed  $x_0 \in L_n$ , følger det af sætning 3.12, at ligning (5.2) har en rod i de rationale tal  $\mathbb{Q}$ .

**Sætning 5.2** *Lad  $P$  være et polynomium med heltallige koefficienter:*

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

hvor  $\alpha_n \neq 0$ .

*Hvis den uforkortelige brøk  $r = \frac{p}{q}$  - hvor  $p$  og  $q$  er hele tal - er rod i  $P$ , så går  $p$  op i  $\alpha_0$  og  $q$  går op i  $\alpha_n$ .*

Med denne sætning undersøger vi nu om ligning (5.2) har nogle rationale rødder. Ifølge sætningen skal eventuelle rationale rødder søges blandt tallene  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ . Ved indsættelse ses at ingen af disse er rødder i ligning 5.2.

- o -

Ligning (5.2) har altså ingen løsninger i  $\mathbb{Q}$  og dermed ingen løsninger i nogen kvadratisk udvidelseslegeme af  $\mathbb{Q}$ . Ligningen har altså ingen løsninger inden for de konstruerbare tal. Men da  $\cos 20^\circ$  faktisk er løsning til (5.2), kan  $\cos 20^\circ$  ikke være et konstruerbart tal.

Hermed har vi bevist:

**Sætning 5.3** *Det er ikke muligt at tredele en vinkel på  $60^\circ$  i tre lige store dele med passer og lineal.*

## 5.2 Hvilke vinkler kan tredeles ?

Vi skal nu undersøge lidt nærmere hvilke vinkler, der kan tredeles ved konstruktion, og hvilke der ikke kan. I denne sammenhæng skal vi generalisere sætning 5.1

**Sætning 5.4** *Vinklen  $v$  kan tredeles ved konstruktion, hvis og kun hvis  $\cos \frac{v}{3}$  er et konstruerbart tal.*

Beviset herfor er helt analogt med beviset for sætning 5.1.

**Sætning 5.5** *Der er uendeligt mange vinkler, der kan tredeles med passer og lineal.*

**Bevis:** For hvert konstruerbart tal  $k \in [-1, 1]$  findes en vinkel  $v = 3 \arccos k$ ,  $v \in [0, 3\pi]$ , så  $v$  kan tredeles med passer og lineal. Da  $3 \arccos x$  er bijektiv på intervallet  $[-1, 1]$ , er  $v \in [0, 3\pi]$  entydigt bestemt af  $k$  og omvendt.

Der er uendeligt mange konstruerbare tal. Specielt er der uendeligt mange konstruerbare tal  $k \in [-1, 1]$ . Da der til hvert af disse entydigt svarer en vinkel  $v \in [0, 3\pi]$ , der kan tredeles, følger sætningen.  $\square$

**Sætning 5.6** *Mængden  $\mathcal{U}$  af vinkler, der kan tredeles ved konstruktion ligger tæt i mængden  $\mathcal{V}$  af alle vinkler.*

*Det vil sige, at for alle vinkler  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  findes en vinkel  $u \in \mathcal{U}$ , så  $v_1 < u < v_2$ .*

**Bevis:** Lad  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  være vilkårlige vinkler hvor  $v_1 < v_2$ .

A) Antag først at  $v_1, v_2 \in [0, 3\pi]$ , så  $\frac{v_1}{3}, \frac{v_2}{3} \in [0, \pi]$ . Da funktionen  $\cos x$  er aftagende i  $[0, \pi]$  vil

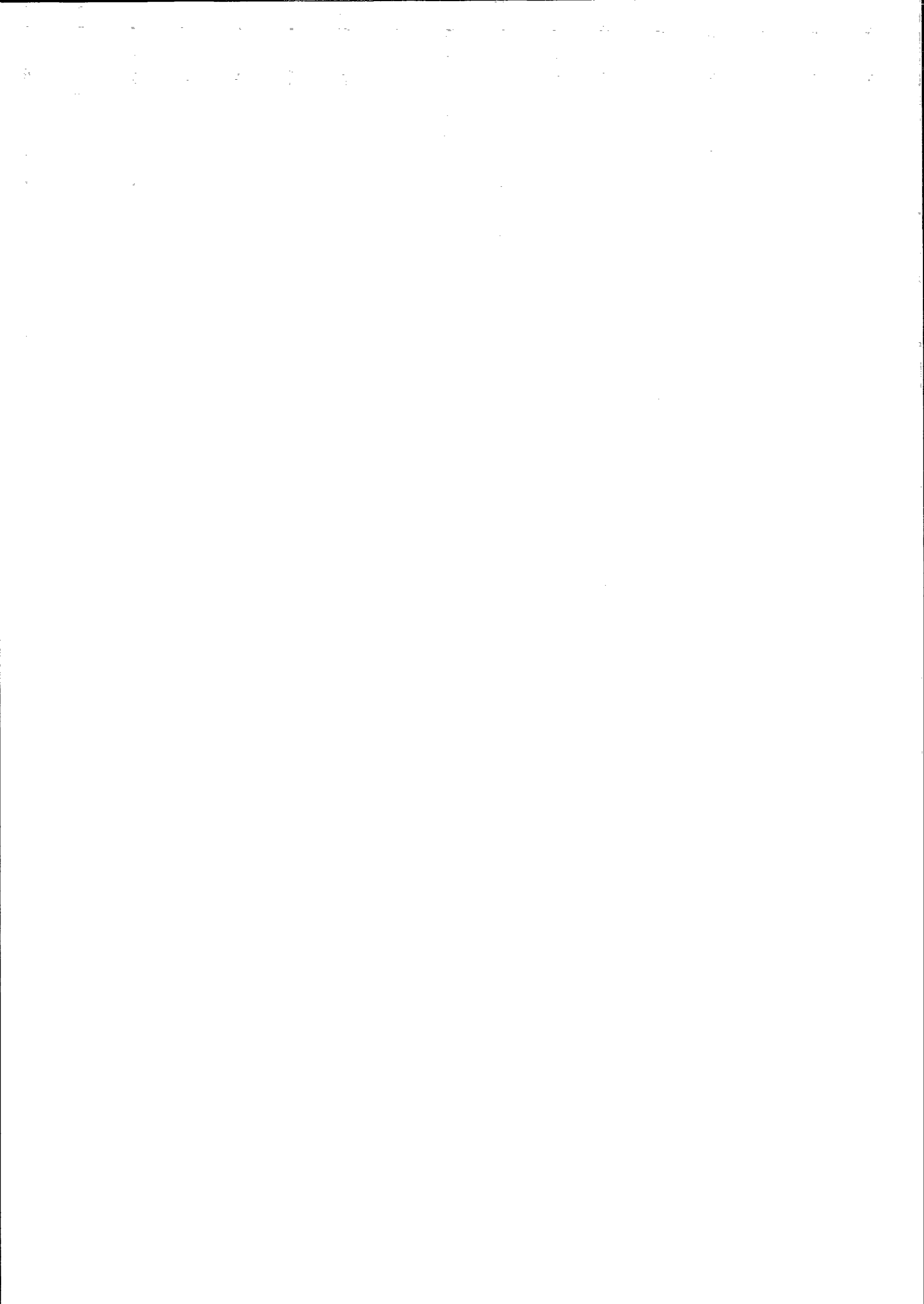
$$\cos \frac{v_1}{3} > \cos \frac{v_2}{3}$$

Vi sætter  $r_1 = \cos \frac{v_1}{3}$  og  $r_2 = \cos \frac{v_2}{3}$ . Da de rationale tal ligger tæt i de reelle tal, findes et  $q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$  så

$$r_2 < q < r_1$$

Af sætning 5.4 følger, at vinklen  $u = 3 \arccos q$  kan tredeles ved konstruktion. Da funktionen  $\arccos x$  er aftagende i  $[-1, 1]$  er

$$v_1 < u < v_2$$



B) Ovenstående argument holder for  $v_1, v_2$  tilhørende alle intervaller af formen  $[p3\pi, (p+1)3\pi], p \in \mathbb{Z}$ , dvs for  $\frac{v_1}{3}, \frac{v_2}{3} \in [p\pi, (p+1)\pi], p \in \mathbb{Z}$ . Blot benyttes at  $\cos x$  er aftagende for lige  $p$  og voksende for ulige  $p$ .

C) Hvis  $v_1, v_2$  tilhører hvert sit af disse intervaller, bemærker vi, at der findes en vinkel  $v^*$ , hvor  $v_1 < v^* < v_2$  så at  $v_1, v^*$  tilhører et af disse intervaller.

Punkt B viser, at sætningen er opfyldt for vinklerne  $v_1, v^*$ . Der findes altså et  $u \in \mathcal{U}$  så  $v_1 < u < v^*$ . Men da  $v^* < v_2$  vil også  $v_1 < u < v_2$ .  $\square$

- o -

Hvad gør vi nu med de vinkler, som vi ikke kan tredele? Det bedste vi kan gøre er at finde en tredelelig vinkel, der ligger 'meget tæt på'. Dette gøres med en følge af vinkler, der kan tredeles ved konstruktion.

Det er en konsekvens af opbygningen af de reelle tal, at for alle  $r \in \mathbb{R}$  findes en følge  $(q_n)_n$  af rationale tal, så  $q_n \rightarrow r$  for  $n \rightarrow \infty$ .

Da  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$  vil følgen  $(q_n)_n$  samtidig være en følge af konstruerbare tal. Vi har altså, at for alle  $r \in \mathbb{R}$  findes en følge  $(k_n)_n$  af konstruerbare tal, så

$$k_n \rightarrow r \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

**Sætning 5.7** *Lad  $v$  være en vilkårlig vinkel. Da findes der en følge af vinkler  $(v_n)_n$ , der alle kan tredeles med passer og lineal, som tilnærmer  $v$  vilkårligt godt.*

**Bevis:** Hvis  $v$  selv kan tredeles med passer og lineal, er sætningen trivielt opfyldt af den konstante følge  $(v)_n$ .

Antag nu at  $v$  ikke kan tredeles. Lad så  $v$  være en vinkel, hvor  $v \neq p\pi, p \in \mathbb{Z}$ , og sæt  $r = \cos \frac{v}{3} \in ]-1, 1[$ . Da findes ifølge (5.3) en følge af konstruerbare tal  $(k_n)_n$  så

$$k_n \rightarrow r \text{ for } n \rightarrow \infty$$

Fra et vist trin i denne følge vil alle  $k_n \in ]-1, 1[$ . For hvert af disse  $k_n$  findes ifølge sætning 5.4 en vinkel  $v_n$ , der kan tredeles ved konstruktion, så  $k_n = \cos \frac{v_n}{3}$ . Vi har derfor

$$\cos \frac{v_n}{3} \rightarrow \cos \frac{v}{3} \text{ for } n \rightarrow \infty$$

Da  $3 \arccos x$  er kontinuert på intervallet  $] -1, 1[$  vil

$$v_n \rightarrow v \text{ for } n \rightarrow \infty$$

Hvis  $v = p\pi, p \in \mathbb{Z}$ , har vi at

$$\cos \frac{v}{3} = \cos \frac{p\pi}{3} = \begin{cases} 1 & \text{for } p = 6n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{for } p = 1 + 6n, 5 + 6n, & n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{1}{2} & \text{for } p = 2 + 6n, 4 + 6n, & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{for } p = 3 + 6n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alle  $\cos \frac{p\pi}{3}, p \in \mathbb{Z}$  er altså konstruerbare, og dermed alle  $v = p\pi, p \in \mathbb{Z}$  tredelelige.  $\square$

- o -

Lad os til sidst filosofere lidt over, *hvorfor* der er vinkler, der ikke kan tredeles ved konstruktion. Vi ønsker at relatere dette fænomen til egenskaberne ved vort talsystem.

Vi bemærker først, at tredeling af en given vinkel, svarer til at løse en bestemt tredjegradslikning. Hvis tredjegradslikningen har løsninger inden for de konstruerbare tal, kan vinklen tredeles ved konstruktion - ellers ikke.

Nu ved vi samtidig, at enhver tredjegradslikning har mindst en løsning inden for de reelle tal. Hvis vi kunne konstruere alle reelle tal, ville vi altså kunne tredele enhver vinkel ved konstruktion.

I vort talsystem er de reelle tal fremkommet ved fuldstændiggørelse af de rationale tal. Vi har at afslutningen af  $\mathbb{Q}$  er lig  $\mathbb{R}$ , og skriver  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Da

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$$

får vi at

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{K}} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

Derfor må  $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$ . Hvis de konstruerbare tal var fuldstændige - hvis altså  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  - ville de være de samme som de reelle tal, og dermed ville alle vinkler kunne tredeles ved konstruktion.

Imidlertid ved vi, at de konstruerbare tal ikke er fuldstændige. For eksempel indeholder de ikke  $\pi$ . Dette gør, at ikke alle vinkler kan tredeles ved konstruktion.

# Kapitel 6

## John G. Jensens konstruktionsmetode

I dette kapitel vil vi gennemgå en konstruktionsmetode foreslået af John Gjerrow Jensen i 1989.

Metoden er beskrevet af John Gjerrow Jensen i hæftet "Tredeling af vinkler ved konstruktion". Her påstås det, at det efter denne metode er muligt at tredele en vilkårlig vinkel 100 procent nøjagtigt alene med passer og lineal.

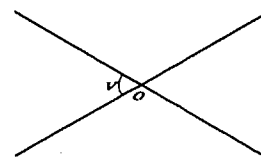
Vi vil nu først gennemgå konstruktionsmetoden, og derefter vise, at den ikke tredeler *enhver* vinkel korrekt.

De følgende udregninger gøres uden at skele til det allerede givne bevis for uløseligheden af tredelingsproblemet, og benytter alene John G. Jensens egne definitioner samt trigonometriske regneregler.

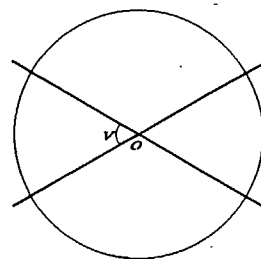
### 6.1 Konstruktionsmetoden

Nu gennemgås konstruktionsmetoden - med tilladelse fra John G. Jensen, der har Copyright på metoden.

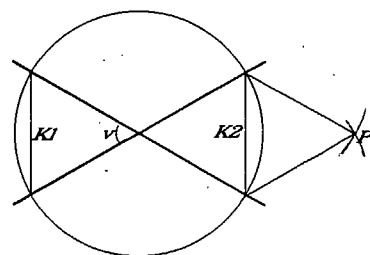
- 1) Med en lineal tegnes to rette linier, som skærer hinanden i et punkt  $O$ . Linierne danner den vinkel  $v$ , som skal tredeles.



- 2) Med passer tegnes en cirkel med centrum i  $O$  og vilkårlig radius.

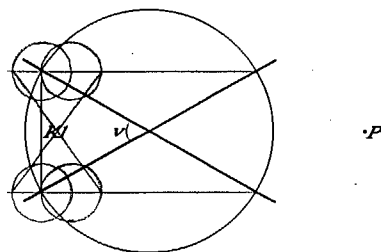


- 3) Der laves to korder  $K_1$  og  $K_2$ . Med en passer konstrueres en ligesidet trekant, der har  $K_2$  som den ene side, og modstående spids betegnes  $P$ .

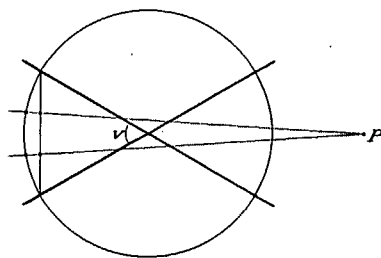


- 4) Korden  $K_1$  deles i tre lige store stykker på følgende vis:

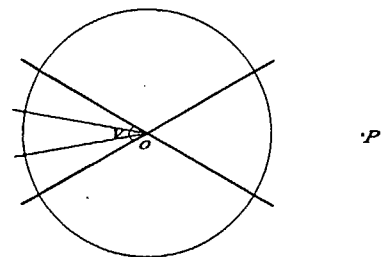
Gennem de to korders endepunkter tegnes to parallelle linier. Ud af hver af disse linier afsættes med passer en vilkårlig afstand  $a$  ud fra  $K_1$ 's endepunkter. På den ene side af korden afsættes endvidere den dobbelte afstand  $2a$ . Gennem disse punkter tegnes to linier, der skærer  $K_1$  og deler den i tre lige store dele.



- 5) Gennem punktet  $P$  tegnes to rette linier - en gennem hvert af  $K_1$ 's tredelingspunkter. Disse linier skærer cirkelbuen to steder.



- 6) Gennem hvert af disse to skæringspunkter tegnes en ret linie gennem punktet  $O$ . Disse linier deler  $v$  i tre lige store dele.



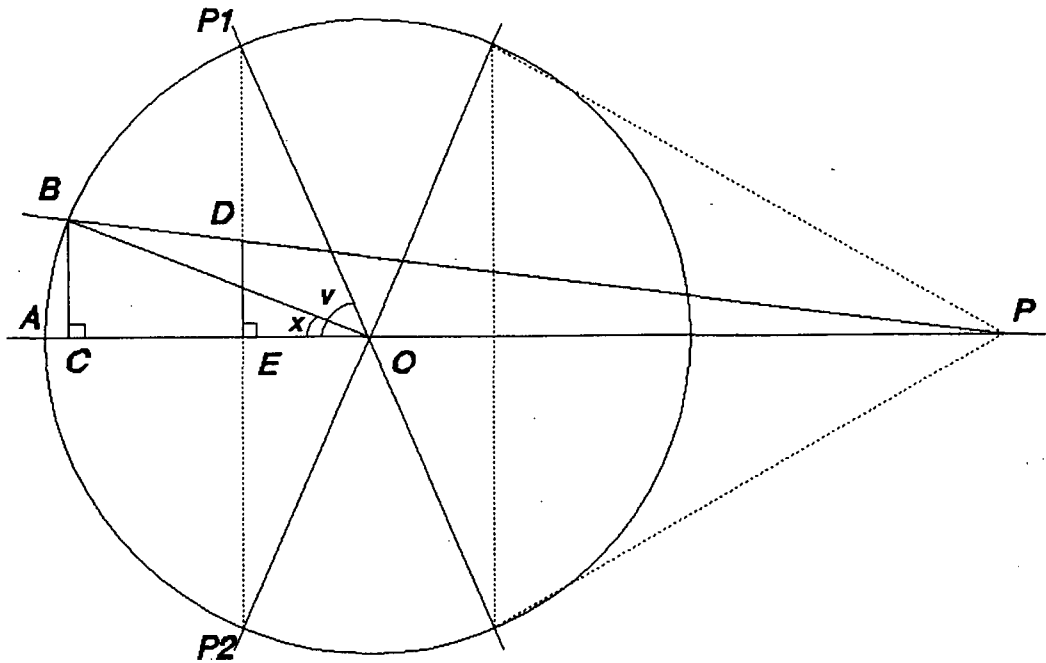




## 6.2 Analyse af konstruktionen

Af forrige afsnit ser man let, at konstruktionsmetoden kun benytter lovlige konstruktionstrin. Endvidere ser man at konstruktionsmetoden kun er defineret for vinkler i intervallet  $]0, \pi]$ .

Spørgsmålet er nu, om den faktisk tredeler en *vilkårlig* vinkel i dette interval.



Figur 6.1: Analyse af konstruktionsmetoden

Betragt figur 6.1, hvor John G. Jensens konstruktion er udført for at dele vinkelen  $\angle P_1OP_2$ . Vi lader cirkelns radius være 1.

Vi deler tegningen i to med linien  $OP$  og hævder, at tredeling af  $\angle P_1OP_2$ , er ækvivalent med tredeling af  $\angle P_1OA$  idet

$$\angle P_1OP_2 = 3\angle P_1OB \text{ hvis og kun hvis } \angle P_1OA = 3\angle BOA$$

Vi bemærker også, at  $|DE| = \frac{1}{3}|P_1E|$ .

I det følgende lader vi  $V = \angle P_1OP_2$ ,  $v = \angle P_1OA$  og  $x = \angle BOA$ . Vinklen  $V$  er altså givet, og vi skal undersøge om  $x = \frac{1}{3}v$ . Betragter vi de retvinklede lignedannede trekanter  $\triangle PBC$  og  $\triangle PDE$  gælder følgende

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|EP|}{|CP|} \quad (6.1)$$

indsættes

$$\begin{aligned} |DE| &= \frac{1}{3} \sin v \\ |BC| &= \sin x \\ |EP| &= \cos v + l \\ |CP| &= \cos x + l \\ l = |OP| &= \cos v + \sqrt{3} \sin v \end{aligned}$$

hvor alle disse længder er forskellige fra 0 - i ligning 6.1 fås

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{3} \sin v}{\sin x} &= \frac{\cos v + l}{\cos x + l} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{3} \sin v (\cos x + l) &= \sin x (\cos v + l) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Af denne ligning kan vi finde  $x$  ud fra den givne vinkel  $v$ . Dette er imidlertid en besværlig udregning at foretage, så vi antager istedet, at vinklen  $v$  bliver delt i tre, og indsætter  $3x = v$  i ligningen.

$$\frac{1}{3} \sin(3x)(\cos x + l) = \sin x(\cos(3x) + l)$$

$$\text{idet } \left[ \begin{array}{l} \sin(3x) = -4 \sin^3 x + 3 \sin x \\ \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{array} \right] \text{ (se appendix B) fås}$$

$$\frac{1}{3}(-4 \sin^3 x + 3 \sin x)(\cos x + l) = \sin x(4 \cos^3 x - 3 \cos x + l) \Leftrightarrow$$

$$\sin x \cos x + l \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x \cos x - \frac{4}{3} l \sin^3 x =$$

$$4 \sin x \cos^3 x - 3 \sin x \cos x + l \sin x \Leftrightarrow$$

$$0 = -4 \cos x + \frac{4}{3} \sin^2 x \cos x + 4 \cos^3 x + \frac{4}{3} l \sin^2 x$$

$$\text{idet } \left[ \begin{array}{l} l = \cos v + \sqrt{3} \sin v \\ = \cos(3x) + \sqrt{3} \sin(3x) \\ = 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3\sqrt{3} \sin x - 4\sqrt{3} \sin^3 x \end{array} \right] \text{ fås}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -4 \cos x + \frac{4}{3} \sin^2 x \cos x + 4 \cos^3 x \\
&\quad + \frac{4}{3} (4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3\sqrt{3} \sin x - 4\sqrt{3} \sin^3 x) \sin^2 x \\
&= -4 \cos x - \frac{8}{3} \sin^2 x \cos x + 4 \cos^3 x \\
&\quad + \frac{16}{3} \sin^2 x \cos^3 x + 4\sqrt{3} \sin^3 x - \frac{16}{\sqrt{3}} \sin^5 x
\end{aligned}$$

og idet  $[-4 \cos x + 4 \cos^3 x = -4 \cos x(1 - \cos^2 x) = -4 \cos x \sin^2 x]$  fås

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{20}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{16}{3} \sin^2 x \cos^3 x + 4\sqrt{3} \sin^3 x - \frac{16}{\sqrt{3}} \sin^5 x \Leftrightarrow \\
0 &= -\frac{20}{3} \cos x + \frac{16}{3} \cos^3 x + 4\sqrt{3} \sin x - \frac{16}{\sqrt{3}} \sin^3 x \quad (6.3)
\end{aligned}$$

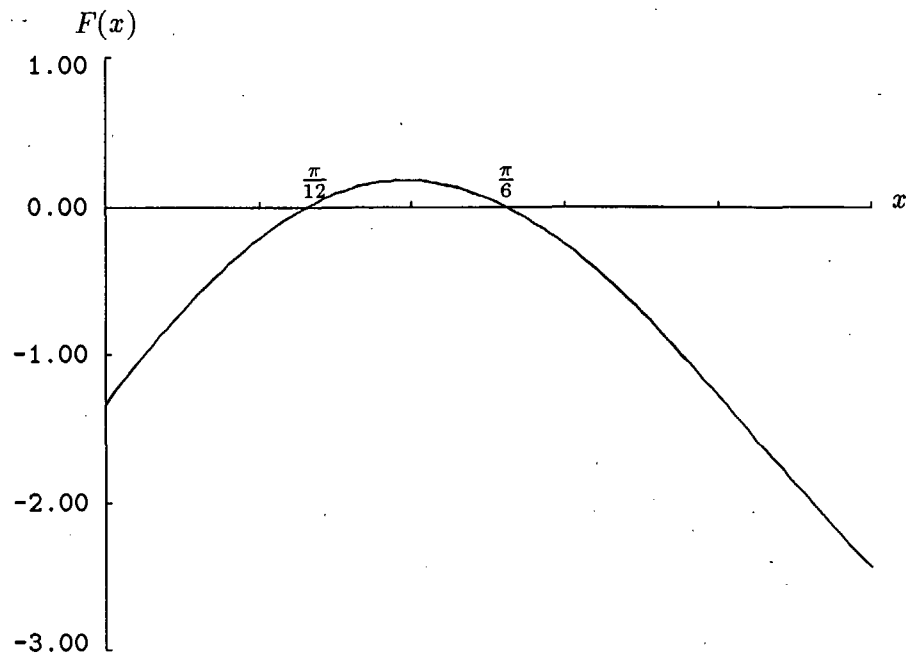
Da  $\cos x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sin x$  og  $\sin^3 x$  er lineært uafhængige (se appendix C), kan ligning (6.3) kun opfyldes for alle  $x$ , hvis koefficienterne  $-\frac{20}{3}$ ,  $\frac{16}{3}$ ,  $4\sqrt{3}$  og  $-\frac{16}{\sqrt{3}}$  alle er nul - og det er de jo ikke. Hermed har vi vist, at John G. Jensens tredelingsmetode ikke virker for *enhver* vinkel.

### 6.3 Yderligere analyse af konstruktionsmetoden

Vi vil nu undersøge om John G. Jensens konstruktionsmetode tredeler nogle vinkler korrekt, og hvis den gør - hvilke vinkler er det da.

For at besvare dette vil vi undersøge, for hvilke  $x$  ligning (6.3) er opfyldt.

John G. Jensens metode tredeler vinkler  $V \in ]0, \pi]$ . I vores analyse af metoden betragter vi den halve vinkel  $v = \frac{V}{2}$ , dvs.  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  og da  $x$  er en tredjedel af  $v$  må  $x \in ]0, \frac{\pi}{6}]$ .



Figur 6.2: Funktionen  $F(x)$

Ligning (6.3) er imidlertid ikke umiddelbar at løse med hensyn til  $x$ , men vi har ved indsættelse fundet at  $x = \frac{\pi}{6}$  og  $x = \frac{\pi}{12}$  opfylder ligningen. For at se om der er yderligere løsninger  $x \in ]0, \frac{\pi}{6}]$ , undersøger vi, hvor mange ekstrema funktionen

$$F(x) = -\frac{20}{3} \cos x + \frac{16}{3} \cos^3 x + 4\sqrt{3} \sin x - \frac{16}{\sqrt{3}} \sin^3 x$$

har i dette interval. Det gør vi ved at differentiere  $F(x)$  med hensyn til  $x$  og sætte lig nul.

Da  $\cos x$  er en kontinuert monoton funktion i intervallet  $]0, \frac{\pi}{6}]$ , kan vi foretage substitutionen  $y = \cos x, y \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1[$ , uden af ændre monotoni-forholdene for  $F$ . For overskuelighedens skyld benævnes koefficienterne med  $a, b, c$  og  $d$  så

$$F(y) = ay + by^3 + c\sqrt{1-y^2} + d(\sqrt{1-y^2})^3$$

Først differentieres  $F(y)$ :

$$F'(y) = a + 3by^2 + c \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} + 3d \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}$$

dernæst sættes  $F'(y)$  lig nul:

$$\begin{aligned} F'(y) = 0 &\Leftrightarrow \\ a + 3by^2 + c \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} + 3d \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} &= 0 \Leftrightarrow \\ a + 3by^2 = c \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + 3d(1-y^2) \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} &\Leftrightarrow \\ a + 3by^2 = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} (c + 3d(1-y^2)) &\Rightarrow \\ (a + 3by^2)^2 = \left( \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} ((c + 3d) - 3dy^2) \right)^2 &\Leftrightarrow \\ (a^2 + 9b^2y^4 + 6aby^2)(1-y^2) & \\ = y^2 ((c + 3d)^2 + 9d^2y^4 - 6d(c + 3d)y^2) &\Leftrightarrow \\ -9(b^2 + d^2)y^6 + (9b^2 - 6ab + 6d(c + 3d))y^4 & \\ + (6ab - a^2 - (c + 3d)^2)y^2 + a^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ Ay^6 + By^4 + Cy^2 + D = 0 & \end{aligned}$$

hvor

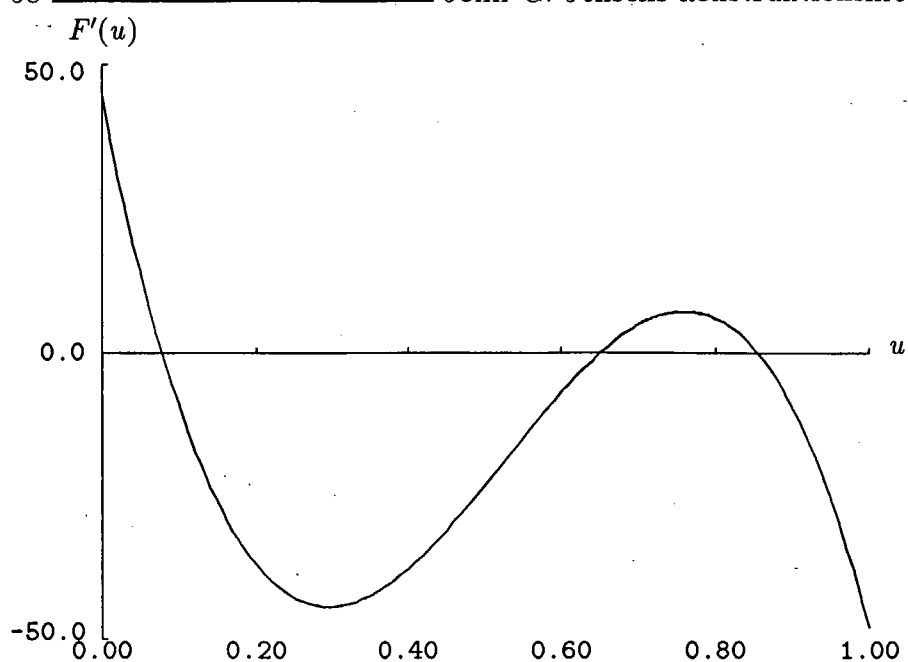
$$\begin{aligned} A &= -9(b^2 + d^2) \\ B &= 9b^2 - 6ab + 6d(c + 3d) \\ C &= 6ab - a^2 - (c + 3d)^2 \\ D &= a^2 \end{aligned}$$

Substitueres endnu engang med  $u = y^2$  haves tredjegradsligningen:

$$Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0$$

og vi er ude efter løsninger  $u \in [\frac{3}{4}, 1[$ . Indsættes koefficienterne fås

$$-1024u^3 + \frac{4864}{3}u^2 - \frac{6208}{9}u + \frac{400}{9} = 0 \quad (6.4)$$



Figur 6.3: Den afledede funktion  $F'(u)$

Ved hjælp af regneprogrammet Derive har vi fået følgende tre løsninger til ligning (6.4):

$$u_1 = \frac{\sqrt{70} \cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{211\sqrt{509}}{4581}\right)}{3} - \frac{\pi}{2}\right)}{18} + \frac{19}{36}$$

$$\approx 0.65$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{70} \cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{211\sqrt{509}}{4581}\right)}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}{18} + \frac{19}{36}$$

$$\approx 0.85$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{70} \cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{211\sqrt{509}}{4581}\right)}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)}{18} + \frac{19}{36}$$

$$\approx 0.08$$





Som det fremgår, er  $u_2$  den eneste løsning til (6.4), der tilhører intervallet  $[\frac{3}{4}, 1[$ .

Substitueres tilbage fås  $y = \pm\sqrt{u_2}$ , hvor kun  $y = \sqrt{u_2} \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1[$ .  $F'(y) = 0$  har altså kun een løsning i dette interval, og derfor har  $F(y)$  højst et ekstremum i intervallet.

Da  $F(y)$  og  $F(x)$  har samme monotoniforhold, har  $F(x)$  ligeledes højst et ekstremum i intervallet  $]0, \frac{\pi}{6}]$  og hermed højst to nulpunkter i dette interval.

Disse nulpunkter har vi allerede bestemt. De er nemlig  $x = \frac{\pi}{6}$  og  $x = \frac{\pi}{12}$ , der svarer til en korrekt tredeling af vinklerne  $V = 90^\circ$  og  $V = 180^\circ$ .

## 6.4 Numerisk analyse af konstruktionsmetoden

Som vi netop har set, tredeler John G. Jensen's konstruktionsmetode kun to vinkler korrekt. Vi stiller derfor spørgsmålet: Hvor meget afviger den konstruerede vinkel fra en ægte tredeling af vinklen?

Vi ønsker at undersøge metoden for vinkler  $V \in ]0, \pi]$ , det vil sige for  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

Med udgangspunkt i ligning (6.2), definerer vi for enhver fast vinkel  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  funktionen

$$f_v(x) = \frac{1}{3} \sin v \cos x - (\cos v + l) \sin x + \frac{1}{3} l \sin v$$

Ligning (6.2) er ækvivalent med

$$f_v(x) = 0 \tag{6.5}$$

Hvis  $f_v(\frac{v}{3}) = 0$  betyder det, at konstruktionsmetoden er korrekt for dette  $v$ .

- o -

Vi vil nu for fastholdt  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  opsøge rødder i ligning (6.5) for  $x \in ]0, \frac{\pi}{6}]$  og se hvor tæt rødderne  $x_0$  ligger på  $\frac{v}{3}$ .

Betragter vi den afledede af  $f_v(x)$  med hensyn til  $x$

$$f'_v(x) = -\frac{1}{3} \sin v \sin x - (\cos v + l) \cos x < 0$$

observerer vi at,  $f_v(x)$  er stærkt aftagende i intervallet  $]0, \frac{\pi}{6}]$ .

Vi undersøger nu fortegn for  $f_v(x)$  i endepunkterne 0 og  $\frac{\pi}{6}$ . Bemærk at vi godt kan beregne  $f_v$  i 0, selv om 0 ikke er med i det interval vi søger rødder i.

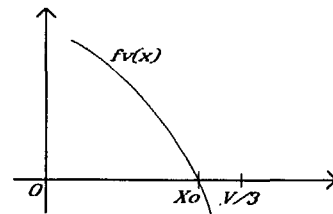
$$f_v(0) = \frac{1}{3} \sin v + \frac{1}{3}(\cos v + \sqrt{3} \sin v) \sin v > 0$$

for alle  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\begin{aligned} f_v\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{3} \sin v \frac{\sqrt{3}}{2} - (\cos v + \cos v + \sqrt{3} \sin v) \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{3}(\cos v + \sqrt{3} \sin v) \sin v \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin v - \cos v + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 v + \frac{1}{3} \cos v \sin v \\ &= (\sin v - 1) \frac{\sqrt{3}}{3} \sin v + \left(\frac{1}{3} \sin v - 1\right) \cos v \leq 0 \end{aligned}$$

for alle  $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

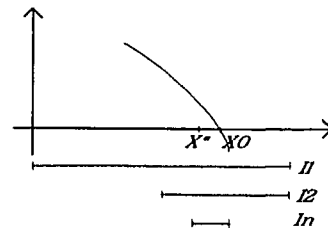
Da  $f_v(x)$  er en kontinuert og stærkt aftagende funktion, der har modsat fortegn i 0 og  $\frac{\pi}{6}$ , har  $f_v(x)$  netop en rod  $x_0$  i intervallet  $[0, \frac{\pi}{6}]$ .



- o -

Denne rod  $x_0$  opsøger vi ved *bisektion* [Heefelt, side 9] af intervallet  $[0, \frac{\pi}{6}]$ .

Metoden består i at halvere intervallet  $I$  omkring  $x_0$  gentagende gange, indtil vi har fundet et interval  $I_n$  med en passende lille intervalbredde  $\varepsilon$ . Da  $x_0 \in I_n$  har vi bestemt  $x_0$  med en tolerance mindre end  $\varepsilon$ . Vi lader intervallets midtpunkt  $x^*$  repræsentere  $x_0$ .



Den absolutte afvigelse  $\delta_v$  for vinklen  $v$  på konstruktionsmetoden er da

$$\delta_v = \left| x^* - \frac{v}{3} \right|$$

der er bestemt med en tolerance mindre end  $\varepsilon$ .

Den relative afvigelse for vinklen  $V$  er  $\frac{\delta_v}{V}$ .

- o -

Vi har udregnet absolut og relativ afvigelse for vinklerne  $\frac{n\pi}{48}$ ,  $n = 1 \dots 48$  i intervallet  $]0, \pi]$ . Beregningerne er foretaget på computer med et program skrevet i programmeringssproget C. Det er udskrevet i appendix D. For hver vinkel  $V$ , har vi fundet  $x^*$  med en tolerance  $\varepsilon$  på  $10^{-9}$  radian. De matematiske operationer er på computeren udført med en nøjagtighed på 15 betydende cifre.

Resultaterne foreligger i tabellen side 62. For hver af de undersøgte vinkler angives den absolutte afvigelse  $\delta_v$  samt den relative afvigelse  $\frac{\delta_v}{V}$ .

Vi bemærker, at for vinklerne  $\frac{\pi}{2}$  og  $\pi$  er afvigelsen 0, hvilket stemmer overens med den analytiske undersøgelse af konstruktionsmetoden.

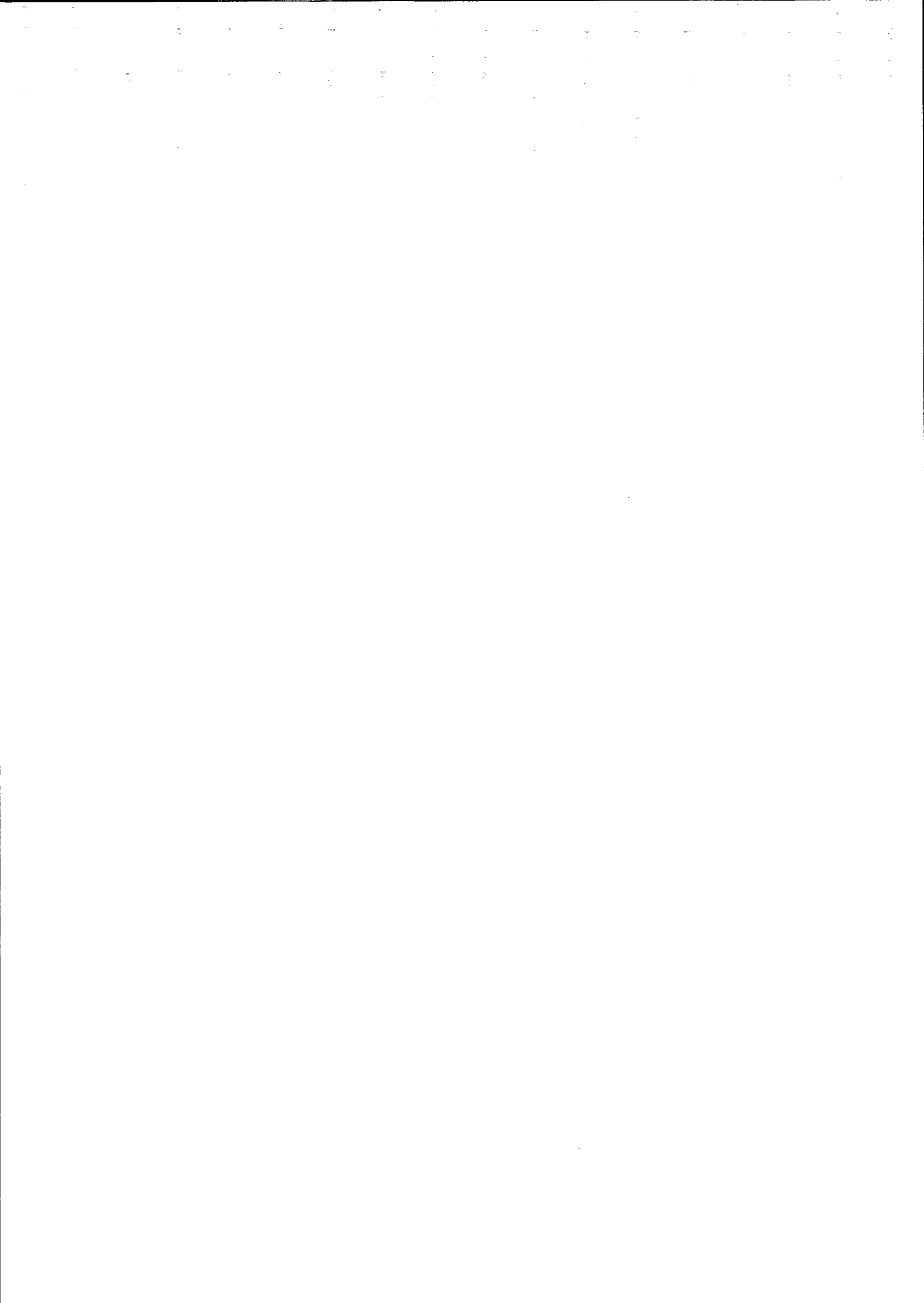
Den største afvigelse finder vi for  $V = \frac{5\pi}{6}$  med en absolut afvigelse på 0.005 radian og en relativ afvigelse på 0.2 %.

Endelig ser vi, at tolerancen  $\varepsilon$  højst er af størrelsesordenen  $10^{-3}$  i forhold til afvigelsen  $\delta_v$ . Den numeriske metode til at tilnærme  $x_0$  med  $x^*$ , har altså ingen indflydelse på beregningen af afvigelserne.

Pi=3.141592653589793

V= 1/48Pi	Afvigelse= 0.00000079	Relativ afvigelse= 0.001 %
V= 2/48Pi	Afvigelse= 0.00000583	Relativ afvigelse= 0.004 %
V= 3/48Pi	Afvigelse= 0.00001803	Relativ afvigelse= 0.009 %
V= 4/48Pi	Afvigelse= 0.00003911	Relativ afvigelse= 0.015 %
V= 5/48Pi	Afvigelse= 0.00006976	Relativ afvigelse= 0.021 %
V= 6/48Pi	Afvigelse= 0.00010986	Relativ afvigelse= 0.028 %
V= 7/48Pi	Afvigelse= 0.00015859	Relativ afvigelse= 0.035 %
V= 8/48Pi	Afvigelse= 0.00021457	Relativ afvigelse= 0.041 %
V= 9/48Pi	Afvigelse= 0.00027594	Relativ afvigelse= 0.047 %
V= 10/48Pi	Afvigelse= 0.00034049	Relativ afvigelse= 0.052 %
V= 11/48Pi	Afvigelse= 0.00040569	Relativ afvigelse= 0.056 %
V= 12/48Pi	Afvigelse= 0.00046881	Relativ afvigelse= 0.060 %
V= 13/48Pi	Afvigelse= 0.00052693	Relativ afvigelse= 0.062 %
V= 14/48Pi	Afvigelse= 0.00057705	Relativ afvigelse= 0.063 %
V= 15/48Pi	Afvigelse= 0.00061609	Relativ afvigelse= 0.063 %
V= 16/48Pi	Afvigelse= 0.00064100	Relativ afvigelse= 0.061 %
V= 17/48Pi	Afvigelse= 0.00064875	Relativ afvigelse= 0.058 %
V= 18/48Pi	Afvigelse= 0.00063640	Relativ afvigelse= 0.054 %
V= 19/48Pi	Afvigelse= 0.00060117	Relativ afvigelse= 0.048 %
V= 20/48Pi	Afvigelse= 0.00054046	Relativ afvigelse= 0.041 %
V= 21/48Pi	Afvigelse= 0.00045189	Relativ afvigelse= 0.033 %
V= 22/48Pi	Afvigelse= 0.00033338	Relativ afvigelse= 0.023 %
V= 23/48Pi	Afvigelse= 0.00018320	Relativ afvigelse= 0.012 %
V= 24/48Pi	Afvigelse= 0.00000000	Relativ afvigelse= 0.000 %
V= 25/48Pi	Afvigelse= 0.00021710	Relativ afvigelse= 0.013 %
V= 26/48Pi	Afvigelse= 0.00046844	Relativ afvigelse= 0.028 %
V= 27/48Pi	Afvigelse= 0.00075378	Relativ afvigelse= 0.043 %
V= 28/48Pi	Afvigelse= 0.00107216	Relativ afvigelse= 0.059 %
V= 29/48Pi	Afvigelse= 0.00142187	Relativ afvigelse= 0.075 %
V= 30/48Pi	Afvigelse= 0.00180027	Relativ afvigelse= 0.092 %
V= 31/48Pi	Afvigelse= 0.00220376	Relativ afvigelse= 0.109 %
V= 32/48Pi	Afvigelse= 0.00262757	Relativ afvigelse= 0.125 %
V= 33/48Pi	Afvigelse= 0.00306562	Relativ afvigelse= 0.142 %
V= 34/48Pi	Afvigelse= 0.00351038	Relativ afvigelse= 0.158 %
V= 35/48Pi	Afvigelse= 0.00395263	Relativ afvigelse= 0.173 %
V= 36/48Pi	Afvigelse= 0.00438123	Relativ afvigelse= 0.186 %
V= 37/48Pi	Afvigelse= 0.00478282	Relativ afvigelse= 0.198 %
V= 38/48Pi	Afvigelse= 0.00514153	Relativ afvigelse= 0.207 %
V= 39/48Pi	Afvigelse= 0.00543857	Relativ afvigelse= 0.213 %
V= 40/48Pi	Afvigelse= 0.00565178	Relativ afvigelse= 0.216 %
V= 41/48Pi	Afvigelse= 0.00575505	Relativ afvigelse= 0.214 %
V= 42/48Pi	Afvigelse= 0.00571771	Relativ afvigelse= 0.208 %
V= 43/48Pi	Afvigelse= 0.00550368	Relativ afvigelse= 0.196 %
V= 44/48Pi	Afvigelse= 0.00507055	Relativ afvigelse= 0.176 %
V= 45/48Pi	Afvigelse= 0.00436830	Relativ afvigelse= 0.148 %
V= 46/48Pi	Afvigelse= 0.00333793	Relativ afvigelse= 0.111 %
V= 47/48Pi	Afvigelse= 0.00190953	Relativ afvigelse= 0.062 %
V= 48/48Pi	Afvigelse= 0.00000000	Relativ afvigelse= 0.000 %

Figur 6.4: Den absolutte afvigelse  $\delta_v$  og den relative afvigelse  $\frac{\delta_v}{V}$ .



# Appendiks A

## Tredeling af vinkler med andre hjælpemidler

Det er muligt at tredele en vilkårlig vinkel, hvis man lader kravet om passer og lineal falde. Grækerne benyttede blandt andet forskellige former for kurver, som ikke kan konstrueres ved brug af passer og lineal. Af sådanne kurver kan nævnes Hippasos' *kvadratrice*, Nikomedes' *konkoid* og Archimedes' *spiral*. Archimedes tredelte ydermere vinkler ved indskydning.

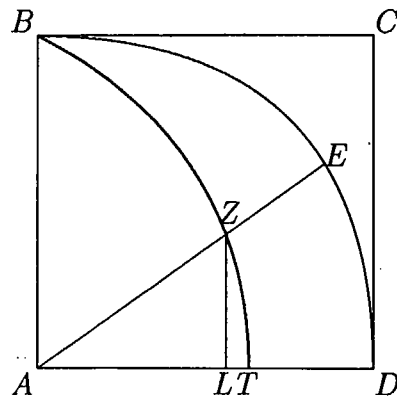
Vi skal her se, hvordan det er muligt at tredele en vinkel ved brug af 1) kvadratricen og 2) ved indskydning.

### A.1 Tredeling ved brug af kvadratricen

Det var Hippasos fra Elis (ca. år 420 f.kr) der indførte kvadratricen, som den første ikke-cirkulære kurve i den græske matematik. Det formodes, at han indførte kvadratricen i forbindelse med tredeling af vinkler, men det vides ikke med sikkerhed. Navnet kvadratrice kommer af, at Menaichmos (ca. år 350 f.kr.) benyttede kurven til at kvadrere cirklen. [Lützen, side 60]

Kurven fremkommer på følgende måde (se figur A.1):

Betragtes kvadratet  $ABCD$  med cirkelbuen  $BD$ , fremkommer kvadratricen ved at lade  $AB$  rotere om  $A$  med jævn vinkelhastighed samtidig med, at siden  $BC$  forskydes parallelt mod siden  $AD$  med jævn hastighed. Kvadratricen er da den kurve, der beskrives af skæringspunkterne mellem de to bevægede linier, [Lützen, side 61].

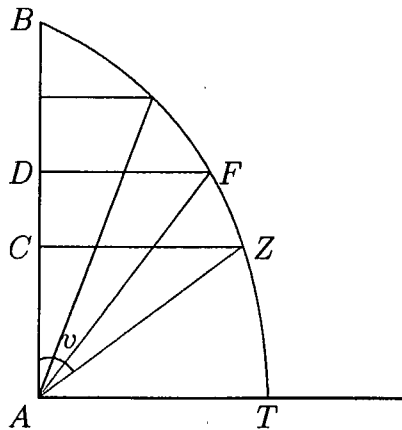


Figur A.1: Kvadratricen

Det følger da at

$$\frac{\text{arc } BD}{\text{arc } ED} = \frac{BA}{ZL}$$

Ved brug af kvadratricen kan en vilkårlig vinkel snildt tredeles:

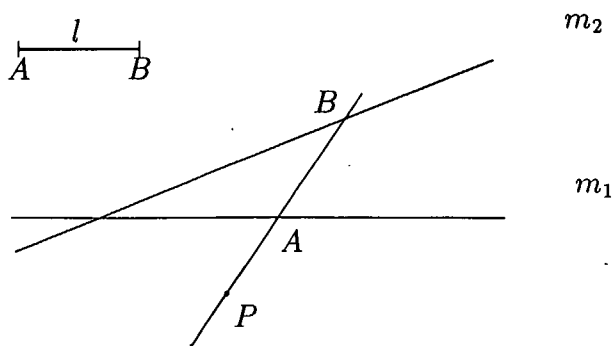


Figur A.2: Tredeling af en vinkel ved brug af kvadratricen

Lad vinklen  $v = \angle BAZ$  være den vinkel, der skal tredeles, (se figur A.2). Nedfæld den vinkelrette til  $AB$  gennem  $Z$ . Liniestykket  $BC$  tredeles, og den vinkelrette til  $D$  konstrueres. Vinklen  $FAZ$  er da lig  $\frac{1}{3}v$ .

## A.2 Tredeling ved indskydning

Indskydningskonstruktion går ud på at indskyde et liniestykke af en given længde mellem to rette linier og på en sådan måde, at det indskudte stykke går gennem et givet punkt. (Se figur A.3).



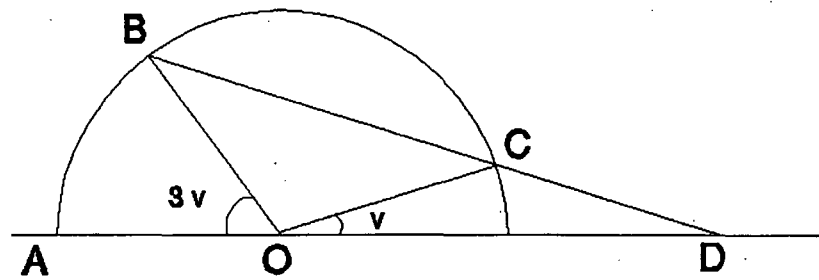
Figur A.3: Indskydningskonstruktion

Liniestykket  $l$  skal indskydes mellem linierne  $m_1$  og  $m_2$ , og forlængelsen af  $l$  skal gå gennem punktet  $P$ . På linealen afmærkes liniestykket  $l$  ved endepunkterne  $A$  og  $B$ . Linealen lægges, så den går gennem punktet  $P$ , og så punktet  $A$  ligger på linien  $m_1$ , og punktet  $B$  ligger på linien  $m_2$ .

Det er her værd at nævne, at en drejning af linealen om  $P$ , således at  $A$  bliver på  $m_1$  og  $B$  bliver på  $m_2$ , vil beskrive en konkoide.

Det var Archimedes, der som den første tredelte vinklen ved indskydning af et liniestykke mellem en cirkelbue og en ret linie. Tidligere tredelte man vinkler ved indskydning af et liniestykke mellem to linier.





Figur A.4: Tredeling af en vinkel ved indskydning

Lad  $\angle AOB$  være den vinkel, der skal tredeles (se figur A.4). Tegn en cirkel med centrum i  $O$  og vilkårlig radius. Indskydes liniestykket  $CD$  således, at  $CD$  er lig cirkelns radius og forlængelsen af  $CD$  går gennem  $B$ , da er  $\angle COD$  lig en tredjedel af  $\angle AOB$ .

At  $\angle COD$  virkelig er lig en tredjedel af  $\angle AOB$ , kan godtgøres på følgende vis:

Sæt  $\angle COD = v$ . Da  $\triangle ODC$  og  $\triangle OCB$  begge er ligebenede gælder der at  $\angle OCD = 180^\circ - 2v$ , men så må  $\angle OCB = 2v = \angle OBC$  og dermed  $\angle BOC = 180^\circ - 4v$ . Heraf ses at  $\angle AOB = 3v$ .

# Appendiks B

## $\cos(3x)$ og $\sin(3x)$

Vi skal i dette appendix udlede formlerne for  $\cos(3x)$  og  $\sin(3x)$ ,

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\sin(3x) = -4 \sin^3 x + 3 \sin x$$

som de er anvendt i teksten, ud fra additionsformlerne:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ved addition af disse ligninger fås

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(A + B) = 2 \cos A \cos B - \cos(A - B) \quad (\text{B.1})$$

Sættes nu  $A = B$  i (B.1) fås

$$\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 \quad (\text{B.2})$$

Sættes  $A = 2B$  i (B.1) fås

$$\begin{aligned} \cos 3B &= 2 \cos 2B \cos B - \cos B \\ &= 2(2 \cos^2 B - 1) \cos B - \cos B \\ &= 4 \cos^3 B - 3 \cos B \end{aligned}$$

- o -

Fra additionsformlerne for sinus fås

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

ved addition af disse ligninger fås

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin(A + B) = 2 \sin A \cos B + \sin(B - A) \quad (\text{B.3})$$

Sættes  $B = 2A$  i (B.3) fås

$$\sin 3A = 2 \sin A \cos 2A + \sin A \quad (\text{B.4})$$

Af (B.2) har vi

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2(1 - \sin^2 A) - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$$

der indsat i (B.4) giver

$$\begin{aligned} \sin 3A &= 2 \sin A(1 - 2 \sin^2 A) + \sin A \\ &= -4 \sin^3 A + 3 \sin A \end{aligned}$$

# Appendiks C

## Lineær uafhængighed

Det skal her godtgøres at funktionerne  $\cos x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sin x$  og  $\sin^3 x$  er lineært uafhængige. Et argument, der bliver benyttet til at vise at John G. Jensens metode ikke tredeler alle vinkler. Se kapitel 6 side 55  
Funktionerne  $\cos x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sin x$  og  $\sin^3 x$  siges at være lineært uafhængige hvis identiteten :

$$a \cos x + b \cos^3 x + c \sin x + d \sin^3 x = 0 \quad , \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

kun er opfyldt for  $a = b = c = d = 0$

Sæt  $x = 0$ , da haves

$$a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b$$

og sæt  $x = \frac{\pi}{2}$  da haves

$$c + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -d$$

dette giver ved indsættelse i (C.1):

$$\begin{aligned} a \cos x - a \cos^3 x + c \sin x - c \sin^3 x &= 0 \quad , \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ a \cos x(1 - \cos^2 x) + c \sin x(1 - \sin^2 x) &= 0 \quad , \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ a \cos x \sin^2 x + c \sin x \cos^2 x &= 0 \quad , \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ \cos x \sin x(a \sin x + c \cos x) &= 0 \quad , \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dette er kun opfyldt for

$$a = c = 0$$

hvilket medfører at også

$$d = 0 \quad \text{og} \quad b = 0$$

Funktionerne  $\cos x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sin x$  og  $\sin^3 x$  er altså lineært uafhængige.

# Appendiks D

## Program til numerisk analyse

Til beregningerne af, hvor præcist John G. Jensens konstruktionsmetode tredeler en vinkel, er følgende lille program benyttet.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define STEP 48

double Pi,A,B,C,l;
double f( double x ){ return A*cos(x)+B*sin(x)+C; }

int Sign( double x ){ if (x>=0) return 1; else return 0; }

double FindRod( double p1, double p2, double precision )
{
    double m=(p1+p2)/2; /* middle of interval [p1,p2] */
    if { f(p1)==0 } return p1;
    if { f(p2)==0 } return p2;
    if { precision>(p2-p1) } return m;
    if { Sign(f(p1)) != Sign(f(m)) }
        return FindRod( p1, m, precision);
    else
        return FindRod( m, p2, precision);
}

void main( void )
{
    double V,v,rod,d;
    int i;

    Pi=acos(-1);
    printf( "Pi=%15.15lf \n\n", Pi );
    for (i=1; i<=STEP; i++)
    {
        V = Pi*i/STEP;
        v = V/2;
        l = cos(v)+sqrt(3)*sin(v);
        A = sin(v)/3;
        B = -cos(v)-1;
        C = (l*sin(v))/3;
        rod = FindRod( 0, Pi/6, 0.000000001 );
        d = fabs(rod-v/3);
        printf( "V= %2i/%iPi Afvigelse= %8.8lf Relativ afvigelse= %3.3lf %% \n", i, STEP, d, (d*100)/V );
    }
}
```







# Appendiks E

## Oversigt over talmængder

Betegnelse	Navn	Definition	Eksempler på elementer i mængden der ikke ligger i mængden ovenfor	Mægtighed
$\mathbb{N}$	naturlige tal	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$		tællelig
$\mathbb{Z}$	hele tal	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	$-5, 0$	tællelig
$\mathbb{Q}$	rationale tal	$\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$	$\frac{1}{2}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{21}$	tællelig
$\mathbb{K}$	konstruerbare tal	længder der kan konstrueres ud fra 0 og 1 (eller $\mathbb{Q}$ ) ved hjælp af passer og lineal (side 94) dvs. tal der fremkommer ved gentagen brug af $+$ , $-$ , $\cdot$ , $:$ og $\sqrt{\quad}$ ud fra $\mathbb{Q}$ (side 97 og 104).	$\sqrt{2}, \sqrt{17 - \sqrt{3}}$	tællelig
$\mathbb{A}$	algebraiske tal	(reelle) tal der er rødder i polynomier med rationale koefficienter	$\sqrt[3]{2}$ alle (reelle) rødder i $x^3 - 3x - 1 = 0$	tællelig
$\mathbb{R}$	reelle tal	antages bekendte; ethvert punkt på en absicse akse svarer til et reelt tal	$\pi, e$	overtællelig
$\mathbb{C}$	komplekse tal	$\{a + \sqrt{-1}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ; svarer til punkterne $(a, b)$ i planen	rødderne i $x^2 = -1$ . Alle polynomier af n'te grad har n rødder i $\mathbb{C}$	som $\mathbb{R}$ .
	transcendente tal	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ (eller $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ ) i.e. tal der ikke er rod i noget rationalt polynomium	$\pi, e$ er transcendent	som $\mathbb{R}$

Indtil dobbeltstregen er talmængder ordnet i voksende rækkefølge, så at en talmængde er en delmængde i dem der står nedenunder.

(kilde: [Lützen])



# Appendiks F

## Litteraturliste



# Litteratur

[Andersen] Kirsti Andersen m.fl.  
"Nogle kapitler af matematikkens historie"  
Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1979.

[Boyer] Carl B. Boyer.  
"A history of mathematics"  
1968, John Wiley and sons.

[Courant] Courant, Robbins.  
"What is mathematics?"  
Oxford University Press, 1973.

[Elbrønd] Helge Elbrønd Jensen.  
"Matematisk Analyse", 9, 10. udgave  
DTH, Matematisk Institut, 1988

[Esrom] Mogens Esrom Larsen.  
"Konstruktion med passer og lineal"  
Københavns Universitet  
Matematisk institut 1977

[Eves] Howard Eves.  
"An introduction to the History of Mathematics"  
third edition, Holt, Rinehart og Winston, 1969

[Gjerrow] John Gjerrow Jensen.  
"Tredeling ved konstruktion!"  
1989, Rønne.

[Hansen] Johan P Hansen.  
"Algebra"  
Aarhus Universitet, 1991.

- [Heefelt] Mogens Brun Heefelt.  
"Numeriske Algoritmer"  
Matematiklærerforeningen 1990.
- [Herstein] I N Herstein.  
"Topics in Algebra"  
2.edition, John Wiley and sons, 1975.
- [Jones] Jones, Morris, Pearson.  
"Abstract algebra and Famous impossibilities"  
Springer-Verlag 1991
- [Knorr] Wilbur Richard Knorr.  
"The ancient tradition of geometric problems"  
Birkhäuser, Boston, 1986
- [Lützen] Jesper Lützen.  
"Cirkelns kvadratur, vinklens tredeling, terningens fordobling"  
Systeme, Herning, 1985
- [MAT 101] Noter til matematik: "Pakke 101A fra 1977-78" kap 6.  
Københavns Universitet, Matematisk Institut.
- [Niss] Mogens Niss.  
Tekst 100: "Talsystemets opbygning"  
Tekster fra IMFUFA, Roskilde UniversitetsCenter, 1985.
- [Niven] Ivan Niven.  
"Numbers: Rational and irrational"  
The Mathematical Association of America, 1961.
- [Pedersen] Olaf Pedersen.  
"Matematik og naturbeskrivelse i oldtiden"  
Akademisk forlag, 2. oplag, 1980
- [Rohde] Peter P. Rohde.  
"Den græske kulturs historie", bind 1-5.  
Thaning og Appel, 2.udgave, 1959
- [Tietze] Heinrich Tietze.  
"Famous problems of mathematics"  
Graylick Press, New York, 1965

# Stikordsregister

- Abū'l-Jūd 14  
absolut afvigelse 60, 61  
abstrakt algebra 12  
additionsformlerne 46, 67  
adjungerede 26  
afvigelse,  
- absolut 60, 61  
- relativ 61  
Al-bīrūnī 14  
Alexandria 13  
algebra,  
- abstrakt 12  
- ordinær 9  
- retorisk 12  
- symbolsk 13  
- synkopering af 12  
- algebraens fader 12  
Anaxagoras 11  
Aristoteles 8  
associativitet 20  
  
babylonierne 5  
  
Cardano 14  
cirkelns kvadratur 9, 11, 15  
Collectiones 12  
  
Deliske problem 10  
Descartes, René 15  
Diophantes 9, 12  
distributivitet 21  
  
Euklids Elementer 8  
  
fundamentale konstruktioner 33  
  
Gauss, Carl Friedrich 16  
  
geometriseringen 7, 11  
gruppe 20  
Guttenberg 14  
  
Hippasos 8  
Hippokrates 10, 11  
  
indskydningskonstruktion 63, 65  
inkommensurable tal 7  
inverst element 20  
  
klassifikationssystem 12, 15  
klassiske problemer 9  
kommutativitet 20  
komposition 19  
konstruerbare,  
- punkter 33, 43  
- tal 36  
krumlinede figurer 11  
kvadratisk legemsudvidelse 25, 43,  
47  
kvadratricen 63  
  
La Geometrie 15  
legeme 19  
legemsudvidelse 19, 24  
- kvadratisk 25, 43, 47  
Lindemann 16  
linearitet 26  
lineær uafhængighed  
- af  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos^3 x$  og  $\sin^3 x$  55,  
69  
  
mellemproportionaler 10  
Mesopotamien 6  
multiplikativitet 27

neutralelement 20

Oinopides 9  
overtællelig 35

Pappus 12  
Papyrus Rhind 6  
polynomier 29 ff  
potensopløftning 14  
problemer,  
- klassiske 9  
- plane, rumlige, lineære 12, 15  
pythagoræerne 7

radikaler 14  
relativ afvigelse 61  
retorisk algebra 12

sexagesimalsystem 6  
stabil 19

tallegeme,  
- mindste reelle 23  
- reelt 22  
- udvidelse af 24  
terningens fordobling 9, 15  
tredjegradslikning 46  
tællelig 35

Viète, François 13, 14  
vinkeltredeling 9 ff  
- approksimeret 49  
- bevis for uløselighed 45

Wantzel, Pierre Laurent 16

ægypterne 5