

PEDER VOETMANN
CHRISTIANSEN

SEMIOTIK OG
SYSTEMEGENSKABER

(1)

1-port lineært response
og støj i fysikken

TEKSTER fra

Albert Chr. Paulsen
IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Postbox 260,
DK-4000 Roskilde
tel: 4675 77 11
fax: 4675 5065
E-mail ACP@mmf.ruc.dk

priv.: Næsbyvej 40
DK-4171 Glumso
tel: 5364 6645

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

-
- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinø og
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss
- 3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og
videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.
- 6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik,
og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "Matematikens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.
- 12/79 "Lineære differentiaalligninger og differentiaalligningssystemer"
Mogens Brun Keefelt.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinø.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "Books about Mathematics: History, Philosophy, Education, Models, System
Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor
termodynamisk ligevægt" Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

Forord.

Denne fremstilling af fysikkens lineære responseteori på grundlag af bond-graph semiotikken er en direkte fortsættelse af teksten "Dynamik og diagrammer", som udkom sidste efterår (ref.I). Disse tekster henvender sig til specialestuderende i fysik på overbygningen og til andre med interesse i faglige og meta-faglige problemer omkring modeldannelse i fysikken.

Af tekniske og tidsmæssige grunde indeholder denne tekst kun første kapitel af den oprindeligt afstukne stofmængde. Diskussionen i dette kapitel er centreret om de responseegenskaber, som kan behandles matematisk uden brug af matrix-algebra, d.v.s. 1-port responsefunktioner. De to næste kapitler, som er planlagt til en senere tekst i serien vil omhandle lineære multiporte (kap.2) og rumligt kontinuerte lineære systemer (kap.3). I det her trykte kapitel 1 refereres mange steder til de to kommende kapitler. Kapitlerne er opdelt i paragraffer, som igen er opdelt i afsnit. Nummereringen af ligninger og figurer starter forfra inden for hvert afsnit. En henvisning til ligning x.y.z.t refererer til ligning t i afsnit z i paragraf y i kapitel x. ($x=1$). Siderne er nummereret fortløbende, og hver side i hovedteksten er desuden mærket med afsnittets betegnelse x.y.z. Litteraturfortegnelsen er opdelt i hovedreferencer, nummereret med romertal og baggrundsreferencer, nummereret med arabertal; en henvisning fra teksten til litteraturfortegnelsen kan altså have følgende udseende: (ref. III) eller (ref. 15).

Den væsentligste forudsætning for at forstå teksten er kendskab til energibåndsformalismen, helst opnået ved læsning og opgaveregning efter "Dynamik og diagrammer"

(ref. I), som leder direkte op til sin fortsættelse i denne tekst. Andre introduktioner til diagramteknikken kan dog også benyttes, først og fremmest Jesper Gundermanns "Grundlæggende energibåndsteknik" (ref. II), som i øvrigt indeholder meget af det stof, som behandles her og i de endnu ikke udsendte kapitler 2 og 3. Udover diagramteknikken og dens overbygning, semiotikken, er der en del matematik, som ikke er helt simpel. Det drejer sig først og fremmest om teorien for komplekse analytiske funktioner af én variabel, Fourier- og Laplacetransformationer. Jeg har ikke forudsat, at læseren i forvejen er fortrolig med denne matematik og har gjort temmelig meget ud af at introducere den i sammenhæng med anvendelserne. Jeg er klar over, at jeg i kraft af min fysikerholdning til disse emner (som i øvrigt er præget af stor respekt) måske har forsyndet mig mod de krav til præcision, som er gældende for matematisk faglitteratur, men jeg håber, at mine matematiske kolleger med interesse for matematikkens anvendelser i responseteorien vil bære over med disse mangler og måske endda hjælpe mig til at finde bedre formuleringer. Jeg finder det i øvrigt ret væsentligt, at den indsigt i dybtliggende sammenhænge, som den matematiske analyse kan give, ledsages af en mere "håndværksmæssig" kvalificering i talbehandling, og jeg har derfor flere steder i teksten og de ledsagende appendices anført eksempler, som kræver brug af en regnemaskine, helst programmerbar.

Andre matematiske teorier, som også bruges i teksten, har jeg ikke gjort så meget ud af at introducere. Det drejer sig bl.a. om sandsynlighedsregning og om operatorregning, som den bruges i kvantemekanikken. Disse hjælpemidler tages dog først i brug på et forholdsvis sent sted i teksten (paragraf 4, teorien for støj).

Jeg har haft både et "konvergent" og et "divergent" sigte med denne og den foregående tekst. Det konvergente går

i retning af væskedynamikken og er kraftigt motiveret af mit samarbejde med Niels Boye Olsen om fortolkningen af de af ham og de specialestuderende udførte målinger af Mössbauereffekt i seje væsker, samt disses termiske og dielektriske egenskaber. Selv om væskedynamikken ikke spiller nogen stor rolle i teksten har det alligevel været et af mine væsentligste formål, at de studerende efter aktiv læsning af teksten skulle være i stand til at forstå og vurdere videnskabelig frontlitteratur inden for væskedynamikken.

Mit divergente sigte er tænkt som en slags modvægt til "det eksemplariske princip" i fysikundervisning, selv om jeg mener, at dette princip nødvendigvis må være vejledende, specielt i den relativt korte fysikuddannelse her på RUC. Værdien af den eksemplariske undervisning er betinget af, at den opnåede viden kan overføres til andre områder, og derfor mener jeg ikke det er nok at udvælge et tilfældigt hjørne som eksempel på hele den moderne fysik. Man må gøre et ekstra stykke arbejde med at afdække den indre logik i naturbeskrivelsen, og man må kritisk vurdere, hvilke teknikker og arbejdsmetoder, som i særlig grad er paradigmatisk og tværdisciplinære. Med hensyn til afdækning af den indre logik mener jeg, at semiotikken er det mest velegnede værktøj, selv om den mest har været anvendt i sprogvidenskaben og endnu ikke har vundet udbredt anerkendelse inden for fysikken. Energibåndsteknikken er i dag den mest formaliserede og løfterige anvendelse af semiotisk logik på fysiske problemstillinger. Den har vist sig anvendelig i en grad, som har slået dens opfindere og udøvere med undren, heriblandt undertegnede, som i begyndelsen troede, at det blot var endnu én diagramteknik til modelbygning blandt mange andre. Med hensyn til det paradigmatisk og tværdisciplinære har jeg udvalgt den lineære responseteori som centrum for fremstillingen. Denne teori har

i de senere år vundet stadigt mere terræn inden for væskedynamikken, især i forbindelse med van Hove's teori for spredning af neutroner m.m. Derudover har responsteorien stor betydning både inden for tekniske discipliner som rheologi og elektronik og i højteoretiske områder som elementarpartikelfysik og mangelegemeteori. Responsteorien har endvidere den store pædagogiske force, at den let lader sig demonstrere med elektromagnetiske og mekaniske komponenter, som findes i ethvert skolefysiklaboratorium, og gennemgangen af dette stof i dette og det foregående efterår er da også i stor udstrækning blevet suppleret med undervisningsforsøg, udført af de specialestuderende.

Dette arbejde er som nævnt i høj grad inspireret af mit samarbejde med Niels Boye Olsen, som jeg gerne vil takke herfor, ikke mindst for hans intuitivt klartseende evne til at sætte teorien på rette spor og hans kritiske gennemlæsning af manuskriptet. Desuden vil jeg takke Ib Høst Pedersen for udbytterige samtaler om netværksanalyse. Flere af instituttets matematikere, bl.a. Mogens B. Heefelt og Anders H. Madsen har givet råd og teknisk bistand, som jeg herved takker for. Jeg vil også takke S. Andur Petersen for filosofisk vejledning og kritik af enkelte passager og de specialestuderende i væskedynamikgruppen for deres arbejde med stoffet, inden det var færdigskrevet, hvilket har betydet meget for den endelige udformning. Helt uden for instituttets kreds har jeg haft udbytte af samtaler med Ib Damgaard Petersen og Benny Karpatschhof, som har betydet meget for den vægt, jeg i teksten har lagt på begrebet skalainvarians. Endelig vil jeg takke instituttet IMFUFA for de gode arbejdsvilkår, det har budt mig i de ca. 1½ år, jeg har været ansat her som vikar, og især institutsekretæren Inger Grethe Christensen for det store arbejde med maskinskrivning af teksten og de mange formler.

RUC, oktober 1979,

Peder Voetmann Christiansen.

Indholdsfortegnelse.

Kapitel

<u>1.</u>	<u>Simple responsefunktioner (1 port)</u>	side 1
-----------	---	--------

Paragraf

<u>1.1</u>	<u>Tidsafhængige responsefunktioner</u>	2
------------	---	---

Afsnit

1.1.1	Semiotik og semantik	3
1.1.2	Generelle egenskaber og sammenhænge . . .	20
1.1.3	Tidshomogene systemer	25
1.1.4	Regneregler og eksempler	31
1.1.5	Tidseksponenter og indre systemtid	47

Paragraf

1.2	Komplekse, frekvensafhængige response- -----funktioner	59
-----	---	----

Afsnit

1.2.1	Tidshomogene standardsignaler	60
1.2.2	Fourier- og Laplace-transformationer . . .	71
1.2.3	Generelle egenskaber af komplekse response- funktioner	84
1.2.4	Konturintegraler og residuer	98
1.2.5	Eksempler	113

Paragraf

<u>1.3</u>	<u>Spektralopløsning og kædebrøks-reticulation</u>	132
------------	--	-----

Afsnit

1.3.1	Spektraltæthed og dispersionsrelationer .	133
1.3.2	Retarderet og avanceret response	141
1.3.3	Reticulation af diskrete systemer	159

Paragraf		
1.4	<u>Fluktuations-dissipationsteoremet</u>	182
Afsnit		
1.4.1	Matematisk beskrivelse af termisk støj . .	183
1.4.2	Symmetrisk dæmpede oscillatorer	192
1.4.3	Støjens spektrum	203
1.4.4	Tidslig beskrivelse af klassisk støj . . .	209
1.4.5	Breddefunktion og selvdiffusion	219
1.4.6	Hopdiffusion	234
1.4.7	Dimensionsfunktioner og væskedynamik . . .	253
1.4.8	Kvantestøj	268
Appendix		
A.	<u>Komplekse tal og funktioner</u>	284
Appendix		
B.	Resumé af de vigtigste formler fra den komplekse responseteori (paragraf 1.2 og 1.3)	291
Appendix		
C.	Lommeregner (HP25) program vedrørende den dæmpede harmoniske oscillator	299
Referencer		303

Kapitel 1.

Simple responsefunktioner (1 port).

I dette kapitel koncentrerer vi os om de egenskaber af lineære og reaktive systemer, som knytter sig til en enkelt port, hvor igennem systemet kan vekselvirke med omverdenen. Det er de såkaldte "driving point" responsefunktioner, som her introduceres gennem en semiotisk analyse af forholdene i stimulus-responseporten.

Den første paragraf, som omhandler tidsafhængige responsefunktioner, er tildels en repetition af stoffet i ref. I, kap.9, men det gøres mere udførligt, og der introduceres en del nyt stof, bl.a. betragtningerne over skalainvarians i femte afsnit. Paragraf 2 indfører de komplekse responsefunktioner med den hertil nødvendige matematik (Laplace transformation, residueregning, etc.) og slutter med en grundig diskussion af den dæmpede harmoniske oscillator. Paragraf 3 har et pragmatisk sigte med henblik på reticulation og energibåndssyntese af givne responseegenskaber, men knytter også an til teori og kontrafaktiske spekulationer over reversibilitet og irreversibilitet i den fysiske virkelighed. I paragraf 4 diskuteres støjens statistiske egenskaber og forskellige formuleringer af fluktuations-dissipationsteoremet, bl.a. med henblik på problemstillinger i væskedynamikken.

1.1. Tidsafhængige responsefunktioner.

De tidsafhængige responsefunktioner har den mest direkte fysiske betydning, da de er reelle funktioner af tiden. Eksperimentelt er de ret lette at få overblik over, f.eks. med et oscilloskop, men de kan være svære at digitalisere, da de som regel beskriver indsvingningsforløb af ret kort varighed. I fysiklitteraturen negligeres de ofte til fordel for de frekvensafhængige funktioner, som også teoretisk er lettere at have med at gøre.

Lineære systemer beskrives som passive, hvis relationen mellem strøm og spænding er simultan. Hvis strømmen afhænger af de tidligere spændingsværdier, er systemet reaktivt med spændingsinput, og hvis spændingen er givet ved de tidligere værdier af strømmen, er systemet reaktivt med strøminput. Relationen mellem strøm og spænding er i almindelighed givet ved en lineær integralrelation, hvor integral-kernen er den såkaldte standard-responsefunktion ($F(t)$ for spændingsinput, $G(t)$ for strøminput), der udtrykker systemets hukommelse for fortidige stimuli. Den egentlige standardresponsefunktion, som svarer til den faktiske kausalitet, kan kun have integrable singulariteter, herunder en δ -funktions singularitet for $t=0$, hvorimod den uegentlige standard responsefunktion, som beskriver en formel omvendning af kausaliteten, vil have en ikke integrabel singularitet for $t=0$. De øvrige responsefunktioner, som diskuteres i denne paragraf, bestemmes ud fra $F(t)$ og $G(t)$ ved integration.

1.1.1. Semiotik og semantik.

Den vigtigste forudsætning for at begribe den lineære responseteori er, at man forstår den fysiske betydning af de ord, som bruges. Den fysiske semantik (betydningslære) vil ofte bestå i en nærmere redegørelse for den eksperimentelle praksis, der ligger bag definitionen af et begreb; f.eks. at masse måles med skålvægt og lodder, medens tyngde måles med en fjedervægt. Indenfor den generelle systemteori kan det dog ofte være svært at gennemføre en sådan operationalistisk definition, idet de indførte begreber har en sådan bredde, at en opremsning af relevante måleopstillinger kunne blive ret omfattende uden dog at komme på skudhold af den bagved liggende abstraktion.

Selv om den eksperimentelle praksis i sidste instans er bestemmende for fysiske begrebsdannelser, vil en rent operationalistisk begrebsdefinition i reglen være for snæver og føre til manglende forståelse. Man må gøre sig klart, at den eksperimentelle praksis på et givet niveau i den historiske udvikling i sig selv er et tegn på et tilsvarende niveau i begrebsudviklingen. Der foregår et dialektisk spil mellem teori og praksis, og i begge ender af dette modsætningspar arbejdes med tegn, som kun kan forstås i lyset af modsætningens eksistens.

Et fysisk begreb må snarere opfattes som et tegn for en forestilling om et objekt. En definition af begrebet er så et forsøg på redegørelse for den bagved liggende forestilling, og selv om denne kan repræsentere en fysisk måleopstilling, hvori objektet indgår, er den stadig blot et tegn for objektet og ikke selve objektet.

Selv om vi tror på, at fysiske objekter er virkelige og har deres egen mere eller mindre uafhængige eksistens, så er vi altid, når vi vil beskrive dem, henvist til at benytte os af tegn, og når vi vil forklare tegnenes betydning, kan

vi kun gøre det ved at sætte dem i relation til andre tegn. Når vi taler om en fysisk egenskab som f.eks. trægheden (massen) af en mursten, så kan vi gøre rede for betydningen af denne egenskab ved at henvise til forskellige situationer, som murstenen kan indgå i, og de tegn som udspringer heraf: f.eks. at den bevæger sig jævnt og retlinet, når man giver den et puf ud på isen, og at den (i modsætning til en tom cigarkasse af samme størrelse) nemt kan slå benene væk under en skøjteløber. Vi løber altså ind i et netværk af relationer mellem tegn, når vi skal forklare, hvad træghed er for noget, og der er ingen vej ud af dette netværk, som fører til selve sagen.

Vi må slå os til tåls med det faktum, som filosofen Kant har gjort rede for, at "das Ding an sich" ligger hinsides den menneskelige udtryksevne, og at egenskaber ved en ting kun kan forstås via virkelige eller mulige relationer til andre ting. Og vi kan supplere med en anden filosof, C.S. Peirce: det vi faktisk kan udtrykke, og det vi beskæftiger os med, både teoretisk og eksperimentelt, er tegn og tegnrelationer.

Mange vil måske synes, at det hele bliver sært uvirkeligt på denne måde, og at eksistensen af fysiske objekter fortaber sig i det uvisse. Vi behøver imidlertid ikke at fornægte objekternes virkelighed, men kan udmærket tro på deres eksistens, selv om vi erkender, at de er transcendent, d.v.s. hinsides det, vi kan udtrykke. På den anden side slipper vi ikke uden om at betragte begrebsdannelser og abstraktioner som virkelige i den udstrækning de er bestemmende for (virker på) vores praksis. Hvis ikke begreber som elektrisk modstand og selvinduktion var virkeligt eksisterende, så ville f.eks. elektronikindustrien heller ikke eksistere, og hvis ikke matematiske abstraktioner som cirkler og rette linjer var virkelige, ville der ikke være nogen mening i at fremstille og anvende passere og linealer.

Vi kan derfor roligt forlade os på, at det er tegn, vi beskæftiger os med, uden af den grund at føle stoffet mindre virkeligt og vedkommende. Studiet af den fysiske semantik (betydningslære) kommer derfor til at hvile på semiotik (tegnlære). For at opnå virkelighedstilknytning må vi blot sikre os, at de tegn, vi arbejder med, har en stærk og veldefineret relation til eksperimentalfysisk praksis. Inden for den generelle systemteori er det også yderst vigtigt, at tegnenes bredde er stor, således at en given semiotisk struktur kan anvendes til design af eksperimenter inden for alle de områder, hvor de omhandlede begreber er relevante.

Det er med henblik på sådanne formål at den specielle semiotik i bond-graph formalismen er udviklet og skal benyttes i det følgende. Lad os kort repetere de vigtigste spille-regler og begreber, som er udførligt gennemgået i ref.I.

Der opereres med tre kategorier af grafiske tegn:

(efter C.S.Peirce)

a) Ikoner, som er en slags idealiserede billeder af visse standardfunktioner i stil med færdselstavler. For at et tegn kan kaldes et ikon må dets form være afgørende for dets tydning. Ikonerne for de såkaldte basale elementer er faste tegn, medens andre ikoner kan opfindes frit til specielle formål. Det vigtigste basale ikon er energibåndet, som beskriver en elementær vekselvirkning mellem to dele af et system. Andre basale ikoner beskriver aktiv adfærd (kilderne), reaktiv adfærd med oplagring af energi (lagrene), passiv adfærd med spild af energi (lækkene), forgrening af energistrømme (samlerne) og forskellige slags omformning af energien uden spild og oplagring (transformatorer, transducere og gyраторer).

b) Symboler, i reglen bogstaver, hvis form ikke spiller nogen rolle for deres tydning. Et symbol henviser altid

til en konvention, som er afgørende for tydningen. F.eks. hvis vi ser et tegn af form som en fisk og i overensstemmelse med formen afgør, at tegnet hentyder til en fisk, så er det ikke et symbol, men et ikon. Hvis vi derimod, i overensstemmelse med en historisk overleveret konvention fra det gamle Rom, afgør, at tegnet hentyder til Kristendommen, så har det samme tegn for os fungeret som et symbol. I princippet kunne de kristne have brugt et tegn med en hvilken som helst anden form som symbol, idet det afgørende for symbolets tydning er den fælles konvention. I energibandsformalismen afgøres betydningen af et symbol som regel ved, at det befinder sig tæt op ad et ikon, som således kommer til at levere den nødvendige konvention. Adskillige af de basale ikoner har således tilknyttet parametre, f.eks. omsætningsforholdet for en transformator, som kræver et symbol.

c) Indices, som er en slags mærker, der bruges til at udpege et objekt eller skelne mellem forskellige objekter af samme type. Tydningen af et index afhænger ikke af konventioner, men i reglen kun af det sted på papiret eller i det fysiske univers, hvor det befinder sig.

Et givet tegn hører sjældent helt éntydigt hjemme i én af de tre kategorier. F.eks. kan man hævde, at de basale bond-graph ikoner i virkeligheden snarere er symboler, da man jo kun kan forstå dem, hvis man har fået dem defineret, og ikke alene ud fra deres form. Dette er selvfølgelig rigtigt, men på den anden side er disse elementers definitioner faste, og tegnenes form hænger tæt sammen med definitionerne. I modsætning hertil, kan et symbol, f.eks. et A , betyde hvad som helst, afhængigt af sammenhængen. Modsætningen mellem symboler og ikoner eksisterer derfor helt klart inden for formalismen, selv om den kan være svær at få øje på for en udenforstående.

Når det drejer sig om indices kan der være god grund til at skelne mellem forskellige overgangsformer. Rene indices optræder f.eks. som numre på energibåndene eller på symboler (L_1, L_2 , o.s.v.). Nogle specielle tegn, krydset (x) og bollen (o), samt pilen ($>$) og strengen ($|$) må opfattes som ikoniske indices, da de på afgørende måde indgår i definitionerne af de basale ikoner. Endelig kan man tale om symbolske indices, idet f.eks. strømsymbolet " f " og spændingssymbolet " e " kan bruges til erstatning for de ikoniske signalindices (pilen og strengen).

Man kan forestille sig de tre kategorier af tegn afmærket som de tre vinkelspidser af en ligesidet trekant. Et vilkårligt tegn kan så repræsenteres ved et punkt på eller indenfor trekantens omkreds og vil i reglen ligge nærmest ved én af vinkelspidserne, svarende til at tegnet i overvejende grad er enten ikon, symbol eller index.

Ifølge Peirce indgår et tegn altid i en såkaldt ægte triadisk relation med et objekt (som tegnet hentyder til) og en fortolker (som tyder tegnet). D.v.s. i almindelighed er alle tre faktorer nødvendige, for at vi kan tale om en tegnrelation. En triadisk relation kan imidlertid udarte til en dyadisk relation (med kun to faktorer) ved at én af de indgående tre faktorer svinder i "betoning". Tegnrelationen kan derfor udarte på tre forskellige måder, og dette er forklaringen på, at vi opererer med tre forskellige "rene" tegnkategorier. Et ikon svarer således til en tegnrelation, hvor objektets betoning er underordnet, idet tegnet vil være et ikon, hvadenten objektet har en fysisk eksistens eller ej. (Man kan f.eks. tænke på Salvador Dali's billede af den brændende giraf). For et symbol er tegnets betoning underordnet og det afgørende er den relation mellem objekt og fortolker, som leveres af en konvention. Endelig er for et index fortolkeren underbetonet, f.eks. vil et støvleaftryk i sandet indicere, at her har gået en person, selv om der ikke er nogen til at se aftrykket. (ref.1)

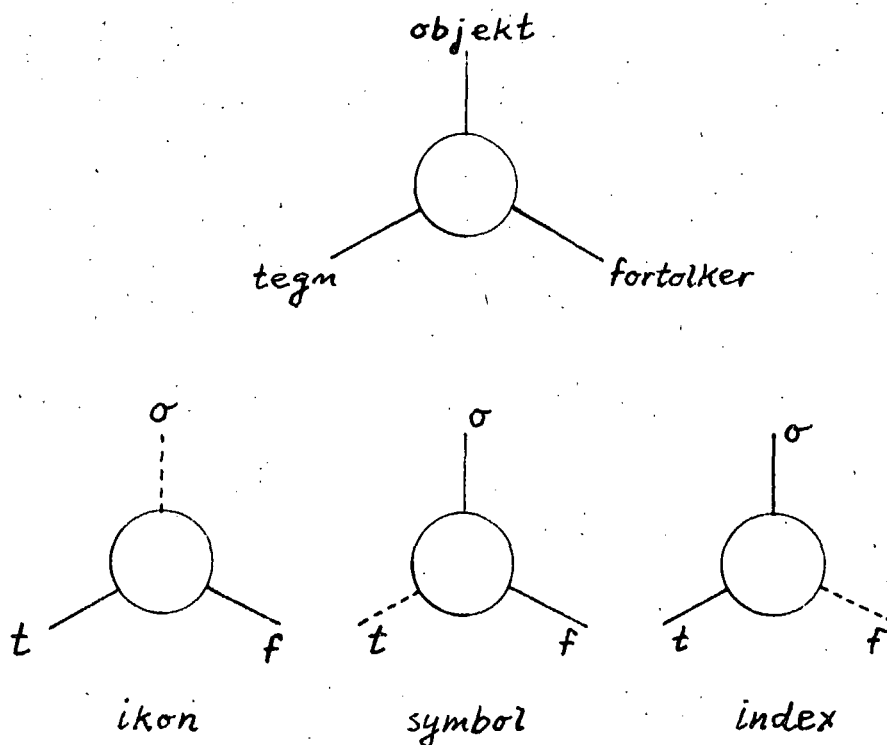


Fig.1. Tegnrelationen og dens tre udartede former.

De rent fysiske tegn, som ligger til grund for fysiske begreber, kan karakteriseres som indices, der (ligesom fodsporet) refererer til deres objekt ved en faktisk kontiguitet, d.v.s. en slags "af-smitning", der ikke involverer nogen fortolker. Fysikerens opgave er så at foretage en irreversibel oversættelse af disse indices, dels til ikoner, der har en faktisk lighed med objektet, og dels til symboler, der har en tillagt kontiguitet med objektet. I modsætning hertil opererer sprogforskeren med reversible oversættelser af tegn, som i hovedsagen er symbolske, men har vigtige ikoniske og indeksikale islat.

Den russisk-amerikanske sprogforsker Roman Jakobson (ref.2) mener at Peirce's semiotik kan tjene som et fælles udgangspunkt for både naturvidenskaber og humaniora. Selv om han fuldt ud accepterer Peirce's tredeling af tegnene, mener han dog i almindelighed at måtte basere en inddeling i kategorier på dikotomier, d.v.s. duale modsætningspar. De to grundlæggende dikotomier i semiotikken er efter hans mening kontiguitet/lighed og faktisk/tillagt. Ved kombination af disse dikotomier opstår fire forskellige tegnkategorier og ikke, som hos Peirce, kun tre. Den manglende kategori "tillagt lighed" får ifølge Jakobson kun betydning for sprog, der savner et ydre objekt og "kun betegner sig selv", såsom musik og abstrakt billedkunst.

Ideen om at alle inddelinger skal foretages på grundlag af dikotomier er meget gammel og kommer til udtryk i forskellige varianter af den dialektiske filosofi. I modsætning hertil lægger Peirce afgørende vægt på tallet tre og på studiet af triadiske relationer, fordi disse er de simpleste byggesten, der kan tjene til opbygning af vilkårligt indviklede relationer.

I energibåndsformalismen er vekselvirkningsbegrebet og inddelingen af de dynamiske variable baseret på dikotomier (level-rate og x-o), medens tegninddelingen er Peirce's triadiske, og de elementer, som i højere grad end nogen andre giver formalismen dens "ansigt" og store anvendelighed, nemlig samlerne, repræsenterer grundlæggende triadiske relationer. Bond-graph filosofien er således i overensstemmelse med moderne strømninger inden for sprogvidenskaben, bl.a. repræsenteret ved Roman Jakobson, i det synspunkt at videnskabelig systematik i begreberne bør baseres på en kombination af dialektik og semiotik.

Energibåndsformalismen opererer med fire kategorier af dynamiske variable, defineret ved to modsætningspar:

level-rate og x-o. Level variablene er knyttet til lagrene og rate variablene til båndene. Medens denne opdeling kan genfindes i andre systemdynamiske formalismer, er x-o opdelingen speciel for energibåndsformalismen.

Til grund for x-o opdelingen ligger en betragtning om vending af tidens retning. Visse variable, nemlig x-va-

riablene er knyttet til tidsmålet og tidsretningen: de skifter fortegn, hvis tidsretningen vendes, og forsvinder, når tiden går i stå; det gælder f.eks. strømme og hastigheder. Andre variable, o-variable, er uafhængige af tidens retning, f.eks. rumlige positioner, masser og fjeder-sammentrykninger m.m. Medens level-rate opdelingen kun omfatter de dynamiske variable, omfatter x-o systemet alle typer af variable, parametre og konstanter i formalismen. For de dynamiske variable får vi altså fire kategorier: x-levels (impuls- eller fluxoidvariable), o-levels (forskydningsvariable) x-rates (strømme) og o-rates (spændinger).

Betragtningen om "vending af tidens retning" er et heuristisk princip, som kan være svært at anvende, hvis ikke systemets variable er anskuelige "med det blotte øje". For et anskueligt system kan man blot optage en film af dets udvikling og så bagefter i ro og mag køre filmen både forlæns og baglæns. Ser vi på en bestemt scene i filmen, for eksempel en måge, der flyver forbi et tårn, og sammenligner forlæns- og baglæns-versionen, vil vi straks se, at mågens hastighed skifter fortegn, og derfor er en x-variabel, medens positionen er uændret og derfor en o-variabel. Hvis filmen sættes i stå, forsvinder alle x-variable. Et af antikkens berømte paradokser, formuleret af Zenon: "pilen kan aldrig nå sit mål, da den hviler i hvert punkt af sin bane" kan ses som udtryk for, at man på den tid ikke havde opdaget x-variablene som en nødvendig ingrediens i beskrivelsen af dynamiske forløb.

For ikke anskuelige systemer kan filmmetoden ikke uden videre anvendes, men man kan som regel bygge videre på sammenhængen i systemet. Når man f.eks. er overbevist om, at en elektrisk strøm er en x-rate, kan man ved hjælp af Maxwell's ligninger straks karakterisere ladninger som o-levels, spændinger som o-rates og magnetiske fluxe som x-levels. Da ingen fysiske fænomener er uden sammenhæng med

andre fysiske fænomener, kan man ved at bygge på konsistensen komme rundt i hele fysikken med x-o systemet.

Energibandsformalismen lægger stor vægt på kausaliteten i en dynamisk struktur, d.v.s. den orden hvori nogle variable fastsætter værdierne af andre. Den gængse metode til angivelse af kausaliteten er indicering af ratevariablene på energibåndene med en pil for strømmen og en streg for spændingen. Reglen er den, at spændingsstregen anbringes nærmest ved den systemkomponent, som har spændingsinput og dermed længst væk fra den komponent, som har spændingsoutput. For strømvariablen vil input-output forholdene så være de modsatte, i overensstemmelse med den dialektiske opfattelse af "vekselvirkning", som ligger til grund for formalismen. En anden metode til kausalitetsangivelse, som er mindre detaljeret og giver et hurtigere overblik, er at tegne de såkaldte signalspor (skiftespor-diagrammer), som kun blev sporadisk omtalt i ref. I (men grundigt i ref. II). Vi skal komme nærmere ind på anvendelsen af signalspor-metoden i kap. 2.

Orienteringen af energibåndene er den sidste ting vi skal komme ind på i denne korte repetition. Det er et punkt, som erfaringsmæssigt ofte volder nybegyndere vanskeligheder, måske fordi det virker banalt, og fordi spørgsmål om orientering og de tilhørende fortegnskonventioner ofte "fejles ind under gulvtæppet" i fysiklærebøger. En afgørende forudsætning for at forstå betydningen af orienteringskonventioner er, at man har forstået den semiotiske inddeling af tegnene i tre kategorier. Orienteringen må betragtes som en konvention, der vælges af modelbyggeren, uden af dette valg på nogen måde influerer på objektet. Orienteringskonventionerne har ingen betydning for den ikoniske del af en energibandsmodel, men de angives ved hjælp af indices (pile) og afspejles i den symbolske del af modellen. Måden, denne afspejling foregår på, er defineret i den såkaldte strøm-orienteringsregel:

Den samme fysiske situation kan beskrives med to forskellige orienteringer af et hvilket som helst energibånd. Når man skifter fra den ene orientering til den anden, skal man samtidigt skifte fortegn på det symbolske udtryk for strømmen.

Strøm-orienteringsreglen bryder den ellers perfekte dualsymmetri mellem strømme og spændinger i formalismen. Den er tilsyneladende universelt gyldig for de typer af energibånd, hvor man har veldefinerede måleforskrifter for strøm og spænding, såsom elektriske ledninger, roterende aksler og hydrauliske rør. I andre situationer, hvor energibåndene ikke er direkte tilgængelige for måling, må vi postulere reglens gyldighed for at redde konsistensen i formalismen.



Fig.2. Illustration af strøm-orienteringsreglen. De to diagrammer fremstiller samme fysiske situation. Energistrømmen i pilens retning er i begge tilfælde produktet af de symbolske udtryk for strømmen og spændingen.

Vi skal nu anvende formalismen til at beskrive et stimulus-response forsøg med et lineært "black-box" system, som kan "kildes" via et enkelt energibånd.

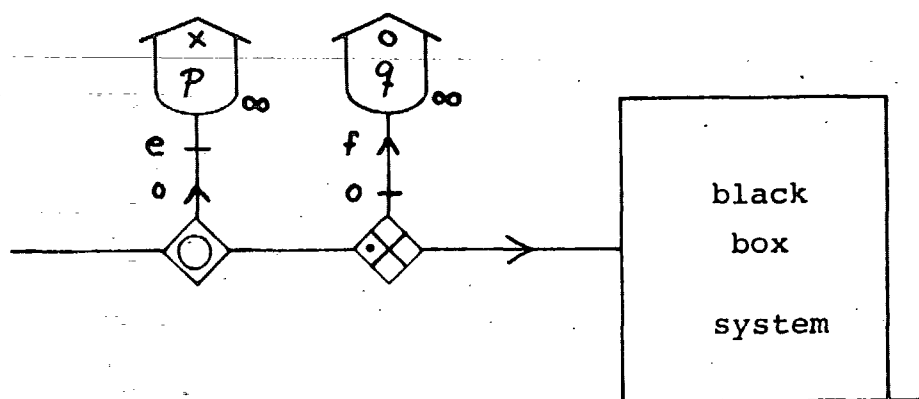


Fig.3. Stimulus-response forsøg. Diagrammet definerer de fire relevante variable: strøm (f , med orientering ind mod systemet), spænding e , samt de to cykliske level variable knyttet til båndet: impuls p og forskydning q .

Selve energibåndet, som tænkes orienteret ind mod systemet, beskrives udtømmende ved de to rate variable, strømmen f og spændingen e . Der er således kun to mulige former for kausalitet i vores vekselvirkning med systemet: Enten har systemet strøminput, d.v.s. stimulus er en strøm og responset en spænding, eller også har systemet spændingsinput og det er strømmen som er response.

For at definere de tidsafhængige responsefunktioner tænker vi os, at systemet er uforstyrret og i ligevægt fra tiden $t = -\infty$ og frem til $t=0$, og at vi så fra kl.0 og fremefter giver stimulusvariablen en konstant værdi. Responsefunktionen er så defineret som forholdet response/stimulus for $t>0$. Når vi holder os til strøm og spænding som stimulus-response variable, kan vi kun definere to forskellige responsefunktioner, nemlig impedansen (modstanden) $Z(t)$, som hører til strøminput og har dimensionen spænding/strøm, samt admittansen (ledningsevnen, bevægeligheden) $Y(t)$, som hører til spændingsinput og har dimensionen strøm/spænding.

Imidlertid er der jo fire forskellige kategorier af dynamiske variable, nemlig foruden de to slags rate variable

strøm og spænding (hhv. x-rate og o-rate) også de to slags level variable impuls og forskydning (hhv. x-level og o-level). Der er ikke spor i vejen for, at vi til et givet energibånd kan indføre såkaldt cykliske levels ved simpelt hen at integrere rate variablene over tid. Altså for impulsens vedkommende:

$$p(t) = \int_{-\infty}^t e(t') dt' \quad (1)$$

hvor e er spændingen. Og for forskydningen:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(t') dt' \quad (2)$$

På fig.3 er regneoperationerne i lign. (1) og (2) angivet diagrammatisk ved hjælp af såkaldt cykliske lagre (uendelig kapacitet), indsat med samlere på stimulus-response energibåndet. Disse lagre må have uendelig kapacitet for at output rate-variablene fra dem ikke skal forstyrre værdierne f og e af strøm og spænding på båndet via de konservative samlere relationer. Bemærk, at x-samlere er forsynet med en prik på den side, som vender væk fra systemet. Dette forhold sikrer, at den variabel f, som integreres i lign. (2), er lig med strømvariablen på båndet, når dettes orientering peger ind mod systemet.

Når vi på denne måde opererer med fire stimulus-response variable i stedet for to, kan vi indføre mere end to responsefunktioner. Der er jo imidlertid stadig kun to matematisk uafhængige båndvariable på grund af relationerne (1) og (2). Disse fire variable falder i to kausale klasser: på den ene side f og q, og på den anden side e og p. D.v.s. hvadenten vi opfatter f eller q som stimulus variabel, svarer det til, at systemet har strøminput, og både e og p kan så med lige stor ret opfattes som responsevariable, da systemet har spændingsoutput (og p er givet ved e i lign.(1)).

For en given kausalitet kan vi så definere fire forskellige responsefunktioner. F.eks. for spændingsinput kan vi lade spændingen e være nul op til kl.0, og konstant (e_0) derefter, $e(t) = e_0 E(t)$, hvor $E(t)$ er Heavisides enhedsfunktion, og vi siger da, at spændingen er stimulus. Responset kan så enten være f eller q , og de tilhørende responsefunktioner for $t > 0$ er f/e (rate-) bevægeligheden eller admittansen, og q/e , føjeligheden eller krybefunktionen. Eller vi kan lade impulsen p være nul op til kl.0 og derefter konstant, svarende til at spændingens afhængighed af tiden er givet ved en Dirac-deltafunktion.

$$p(t) = p_0 \cdot E(t) \quad ; \quad e(t) = p_0 \delta(t) \quad (3)$$

Vi siger da, at impulsen er stimulus. De tilhørende responsefunktioner er så f/p , lethed, og q/p , (level-) bevægeligheden eller admittansen. Hvis systemet har strøminput, kan vi på tilsvarende måde definere fire responsefunktioner, nemlig e/f , (rate-) modstanden eller impedansen, p/f , trægheden eller inertansen, samt e/q , stivheden, og p/q , (level-) modstanden eller impedansen.

Af de fire response-funktioner i en kausal klasse, kan der højst være tre med forskellig dimension, idet level-forholdet p/q altid har samme dimension som rate-forholdet e/f . Uafhængigt af de konkrete fysiske forhold og det konkrete enhedssystem, kan vi formelt altid regne med netop tre forskellige uafhængige dimensioner knyttet til et bestemt energibånd, svarende f.eks. til enhederne for spænding, strøm og tid. Ser vi på en energibandsmodel som en helhed, kan hver transducer og gyrator i princippet introducere en ny dimension, således at det maksimalt mulige antal uafhængige dimensioner i en ikonisk struktur er lig med antallet af transducere plus antallet af gyratorer plus tre. For et simpelt response-system (med kun én port), betragtet som en black box, kan der imidlertid kun optræde de tre uafhæn-

gige dimensioner, som defineres ud fra stimulus-response porten.

Vi kan nu vende os til responsefunktionernes semantik. Vi har set, at de simple responsefunktioner falder i to kausale klasser (spændingsinput eller strøminput) og at der inden for hver klasse optræder fire forskellige kombinationer af stimulus og response, men højst tre forskellige dimensioner af de tilhørende responsefunktioner. Når disse funktioner skal navngives, er det fornuftigt at lade dimensionsovervejelserne være afgørende, således at funktioner, som i princippet kan have forskellige dimensioner også får forskellige navne, selv om de eventuelt i et bestemt enhedssystem kan have identiske dimensioner. Som eksempel kan nævnes, at cgs-enhedssystemet lader kapaciteten af en kondensator have dimensionen "længde" (cm). Alligevel ville ingen finde på at sige, at en given kondensator har længden 100cm, når det er kapaciteten, der menes. Sammenfaldet af dimensioner i dette tilfælde er noget specielt for cgs-systemet og ophæves i mksa-systemet. Man kan altså ikke lade dimensionerne i et tilfældigt enhedssystem være afgørende for navngivningen af fysiske observable (men nok for deres enheder). Med brug af bond-graph semiotikken har vi imidlertid et mere generelt værktøj, hvormed dimensionsanalyser kan foretages uafhængigt af enhedssystemer.

Navngivning på grundlag af kausaliteten og de "principelt forskellige dimensioner" fører således til seks forskellige betegnelser for de simple responsefunktioner, tre inden for hver af de kausale klasser. I praksis bliver der dog flere navne, idet der kan være flere betegnelser for den samme funktion, f.eks. en dansk betegnelse og en fremmedords betegnelse. Funktionerne p/q og e/f skal til gengæld have samme betegnelse (impedans), da de har samme dimension. Imidlertid kan disse to funktioner godt være matematisk forskellige, og vi kan derfor få brug for at præcisere sagen ved at tale om level-impedansen (p/q) eller rate-impe-

dansen (e/f). På tilsvarende måde finder vi i den anden kausale klasse en level-admittans (q/p) og en rate-admittans (f/e). Visse forfattere har foreslået betegnelsen "memri-stans" for level-funktionerne p/q og q/p. Vi vil dog ikke benytte denne betegnelse, især fordi det viser sig, at der for tidshomogene systemer ingen forskel er på level-impedans og rate-impedans (eller ℓ -admittans og r-admittans).

I nedenstående skema gives en oversigt over de seks navnegrupper og de tilhørende symboler. Skemaet er en semiotisk matrix med rækker og søjler svarende til de fire stimulus-response variable. Da disse falder i to kausale klasser, bliver matricen delt op i fire "vinduer" med hver fire "ruder". De to "vinduer" langs diagonalen er tomme, fordi stimulus- og responsevariablen ikke kan tilhøre samme kausale klasse.

re- sponse sti- mulus	forskydning q (o-l)	strøm f (x-r)	spænding e (o-r)	impuls p (x-l)
forskydning q (o-l)			stivhed modulus G	level- modstand impedans Z_ℓ
strøm f (x-r)			rate- modstand impedans Z_r	træghed inertans M
spænding e (o-r)	føjelighed krybefunktion J	rate- bevægelighed ledningsevne admittans Y_r		
impuls p (x-l)	level- bevægelighed ledningsevne admittans Y_ℓ	lethed F		

Fig.4. Semiotisk-semantisk skema over de simple response-funktioner.

De tre (evt. fire) forskellige funktioner i en kausal klasse vil have hver deres karakteristiske matematiske egenskaber, som vi skal studere i de følgende afsnit. For de fleste systemer gælder, at de i et stimulus-response forsøg kun kan optræde med én form for kausalitet. De (tre eller fire) responsefunktioner, som hører til den eksperimentelt mulige kausalform, kaldes de egentlige responsefunktioner, og det er kun for disse, at en egentlig matematisk responseteori kan formuleres. Imidlertid kan man ofte, hvis systemet er af en kendt dynamisk struktur (en "white box", f.eks. et kendt elektrisk netværk eller en fuldt reticuleret energibandsmodel) rent formelt behandle bevægelsesligningerne, som om kausaliteten var den modsatte, og på denne måde få bestemt de øvrige funktioner, som så kaldes de uegentlige responsefunktioner. Dette kan dog kun gøres ved at tillade en "funktion", som er endnu mere singular end Dirac's deltafunktion $\delta(t)$, nemlig den afledede af deltafunktionen $\delta'(t)$. Omvendt: hvis vi har givet udtryk for f.eks. F , Y og J og kan konstatere, at de er ikke-singulære, så kan vi være sikre på, at den rigtige kausalform er spændingsinput, og at der vil optræde en δ' -funktion i én af de tre uegentlige funktioner G , Z og M (faktisk altid i G , medens Z vil indeholde en deltafunktion $\delta(t)$ og M en diskontinuitet $E(t)$, som vi skal se i et senere afsnit). Vi vil så kunne definere et dualt system med strøminput, for hvilket G , Z og M er de egentlige funktioner og har samme forløb som F , Y og J for det oprindelige system, medens F , Y og J for det duale system er uegentlige og har samme forløb og grad af singularitet som G , Z og M for det oprindelige system. I en ikonisk energibandsmodel foretages dualitetstransformationen ved ombytning af krydser og boller og vending af transformatorer (den symmetriske transformator eller "prikken" er det eneste selvduale element). I skemaet fig.4. går fra én responsefunktion til den duale ved spejling i skemaets midtpunkt. En anden symmetriegenskab ved skemaet er, at man ved spejling i diagonalen (den punkterede) finder responsefunktioner med reciprokke dimensioner. Det ses f.eks. at Y og

Z er duale og har reciprokke dimensioner (f.eks. hvis Z måles i ohm, måles Y i ohm^{-1}). Stivheden G og føjeligheden J har reciprokke dimensioner, men er ikke duale, medens lethed F er den duale til stivheden G og er dimensionsmæssigt den reciprokke af trægheden M.

Med hensyn til semantikken i skemaet fig.4 kan man hæfte sig ved, at responsefunktionerne for spændingsinput betegner "positive" eller "gode" egenskaber: "lethed", "bevægelighed" og "føjelighed", medens funktionerne for strøminput betegner "negative" eller "dårlige" egenskaber: "stivhed", "modstand" og "træghed". D.v.s. de menneskelige vurderinger af godt og dårligt, som afspejles i dagligsproget, bryder den duale symmetri mellem strømme og spændinger i det semiotiske system.

For at forstå dette må vi gøre os klart, at stimulus-response problematikken som fremstillet i dette afsnit blot er en idealiseret udgave af en uhyre dagligdags problemstilling, nemlig det at udføre arbejde på et materielt system med henblik på fremstilling af et produkt eller en vare. Arbejderen repræsenterer det subjektive element i processen og svarer i vores formalisme til det ikke afbillede aktive element som sørger for stimulus i energibåndet, medens det integrerede output, d.v.s. den level variabel, der kan betragtes som response repræsenterer det fremstillede produkt, eller varens nytteværdi.

Prøver vi at kategorisere forskellige "varer" fra dagliglivet (f.eks. franskbrød eller personkilometre) efter x-o systemet, så er det klart, at langt de fleste må betegnes som o-levels. D.v.s. når vi bruger bond-graph semiotikken til at beskrive den sædvanlige arbejdsproces, er det variabelen q , som repræsenterer varens nytteværdi, og de kausale forhold må svare til spændingsinput til systemet, således at f og q er output. Selve arbejderen må så karakteriseres ved en spændingskilde med en styrke $e(t)$, som er den differentielle arbejdsindsats (kraft, ikke arbejde), medens level variabelen p er den integrerede arbejdsindsats.

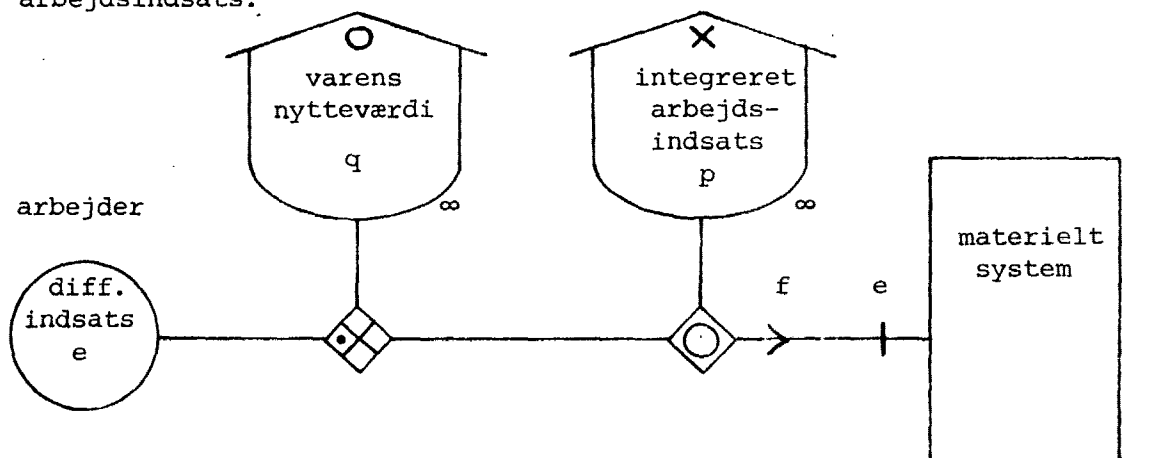


Fig.5. Reticulation af vareproduktion.

Det er nu klart, at en response-egenskab ved det materielle system må betragtes som god, når den beskriver, hvor meget der produceres for en given arbejdsindsats, d.v.s. de egentlige responsefunktioner F, Y og J bliver de gode, og de uegentlige G, Z og M bliver udtryk for materialets genstridighed, som er noget dårligt.

Bemærk i øvrigt, at bond-graph semiotikken lægger op til en mere nuanceret beskrivelse af arbejdsprocessen end f.eks. den marxistiske arbejdsværdilære, som ikke skelner mellem "værdien" (q) og "indsatsen" (p).

De fleste fra dagliglivet kendte arbejdsprocesser er for sammensatte til, at den simple reticulation på fig.5 kan give et rimeligt billede. Dette udelukker dog ikke, at man kan øve sig i at tænke i energibåndstermer i forbindelse med hverdagens forskellige opgaver, og specielt prøve at opdyrke en fornemmelse for, hvad energibåndskausalitet er for noget, og hvordan den føles, når energibåndet udgøres af ens egne hænder.

En del arbejdsopgaver kræver strøminput til det materielle system. Kriteriet er, at spændingen e eller dens integral p betragtes som det positive udbytte af processen. Det er f.eks. tilfældet, når man trækker et ur op. I sådanne tilfælde er "varens nytteværdi" givet ved x -level variabelen p , og den vil have en noget mere u håndgribelig karakter end q , der måler udbyttet af den normale vareproduktion med spændingsinput. Slibe og polerearbejde kræver strøminput, medens flyttemandens job er sammensat af opgaver, der kræver spændingsinput.

1.1.2. Generelle egenskaber og sammenhænge.

Vi har hidtil defineret de tidsafhængige responsefunktioner som systemets response på en stimulus, der er givet ved Heavisides' enhedsfunktion $E(t)$. Denne definition er simpel, men ikke videre anvendelig; Vi har brug for at udtrykke systemets response på en vilkårlig tidsafhængig stimulus.

I det følgende vil vi ofte, mere eller mindre stiltiende, indskrænke os til systemer med spændingsinput, således at de egentlige responsefunktioner er lethedens F , bevægeligheden Y og føjeligheden J . Den duale symmetri mellem strømme og spændinger (x og o) i energibandsformalismen sikrer så, at de generelle egenskaber af funktionerne F , Y og J kan overføres til funktionerne G , Z og M for systemer med strøminput.

Vi starter med at betragte impulsen $p(t)$ som stimulus. For et lineært, reaktivt system kan strømresponset $f(t)$ udtrykkes som en funktional af impulsverdier til alle mulige tidspunkter t' , der ligger før tiden t ved et Stieltjes-integral:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t F(t, t') dp(t') \quad (1)$$

Funktionen $F(t, t')$ er så pr. definition systemets lethedsfunktion (sml. skemaet fig.1.1.1.4), der altså i almindelighed afhænger af to tidsargumenter t og t' og kun er defineret for $t' \leq t$. Hvis impulsen $p(t')$ er en differentiabel funktion af tiden, har vi

$$dp(t') = e(t') dt' \quad (2)$$

hvor $e(t')$ er spændingen kl t' , der jo også kan opfattes som stimulus i det samme forsøg. Selv hvis $p(t')$ ikke er

differentiabel overalt på tidsaksen, men har diskontinuiteter, kan vi benytte (2), idet vi så tillader $e(t')$ at indeholde deltafunktions-singulariteter (sml. lign. 1.1.1.3). F.eks. kan vi have:

$$p(t') = p_0 E(t'-t_0) \quad (3)$$

$$e(t') = p_0 \delta(t'-t_0)$$

og vi får så af ligning (1):

$$f(t) = p_0 \cdot F(t, t_0) \quad (4)$$

Specielt finder vi, at den i afsnit 1 definerede lethedsfunktion er lig med $F(t, 0)$.

Den vigtigste klasse af systemer er de tidshomogene for hvilke responset i ligning (4) ikke direkte afhænger af t_0 , men kun af tidsforskellen $t-t_0$. For tidshomogene systemer afhænger lethedsfunktionen $F(t, t')$ (og de øvrige responsefunktioner) kun af forskellen $\tau = t-t'$ og er defineret for $\tau \geq 0$. I første omgang vil vi dog ikke antage, at systemet er tidshomogent, men vil tillade en explicit tidsafhængighed, svarende til at en energibånds-reticulation af systemet kan indeholde tidsafhængige lække og transformatorer.

For rent passive systemer har vi en simultan (samtidig) relation mellem spændingsinput og strømoutput svarende til en lethedsfunktion af typen

$$F_{\text{passiv}}(t, t') = F_0(t) \cdot \delta(t-t') \quad (5)$$

Vi vil her opfatte den passive adfærd som et grænsetilfælde af reaktiv adfærd og i overensstemmelse hermed forvente, at singulære bidrag af typen (5) kan indgå i lethedsfunktionen $F(t, t')$. Deltafunktionen er så også den værste form for singularitet, som kan forekomme. Med andre ord: hvis

$F(t, t')$ indeholder den afledede af deltafunktionen $\delta'(t-t')$ er det et sikkert tegn på, at $F(t, t')$ er en uegentlig responsefunktion, og at systemet i virkeligheden har strøminput.

Svarende til ligning (1) kan vi benytte Stieltjes integralformen og skemaet fig. 1.1.1.4 til definition af de øvrige responsefunktioner:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t Y_r(t, t') de(t') \quad (6)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t Y_l(t, t') dp(t') \quad (7)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t J(t, t') de(t') \quad (8)$$

Ved benyttelse af (2) i (1) fås ved delvis integration og sammenligning med (6):

$$f(t) = \int_{-\infty}^t F(t, t') \cdot e(t') dt' = \int_{-\infty}^t Y_r(t, t') de(t')$$

hvor
$$\frac{\partial Y_r(t, t')}{\partial t'} = -F(t, t')$$

og
$$Y_r(t, t) = 0$$

D.v.s. rate-admittansen $Y_r(t, t')$ fås af lethedsfunktionen $F(t, t')$ ved integration over andet argument (t'):

$$Y_r(t, t') = \int_{t'}^t F(t, t'') dt'' \quad (9)$$

Den anden admittansfunktion, level-admittansen $Y_l(t, t')$, findes (ved integration af ligning (1) og sammenligning med (7)) at fremgå af lethedsfunktionen ved integration over det første argument

$$Y_l(t, t') = \int_{t'}^t F(t'', t') dt'' \quad (10)$$

Endelig finder vi ved delvis integration af (7), eller direkte integration af (6) og sammenligning med (8), at føjelighedsfunktionen $J(t, t')$ fremgår af $Y_\ell(t, t')$ ved integration over andet argument, eller af $Y_r(t, t')$ ved integration over første argument:

$$J(t, t') = \int_{t'}^t Y_\ell(t, t'') dt'' = \int_{t'}^t Y_r(t'', t') dt'' \quad (11)$$

Relationerne (9), (10) og (11) kan også fremstilles på differentialform:

$$\begin{aligned} Y_r(t, t') &= \frac{\partial J(t, t')}{\partial t} \\ Y_\ell(t, t') &= - \frac{\partial J(t, t')}{\partial t'} \\ F(t, t') &= - \frac{\partial^2 J(t, t')}{\partial t \partial t'} \end{aligned} \quad (12)$$

Integralrelationerne indeholder imidlertid mere information end differentialrelationerne, idet de bl.a. viser, at funktionerne $Y_r(t, t')$ og $Y_\ell(t, t')$ må være nul for $t=t'$, medmindre lethedsfunktionen $F(t, t')$ har en deltafunktions-singularitet for $t=t'$ (sml. lign. (5)). Lethedsfunktionen rummer al information om systemets responseegenskaber, og det vil i almindelighed være en fornuftig strategi at starte en systembeskrivelse med at bestemme denne funktion og derefter finde de øvrige ved integration. Vi siger derfor, at $F(t, t')$ er standard-responsefunktionen for et system med spændingsinput. For et system med strøminput er det stivhedsfunktionen $G(t, t')$, som er standard-responsefunktion, og de øvrige (Z_ℓ , Z_r og M) findes af G ved integrationer, svarende til (9), (10) og (11).

Ser vi nu på hele samlingen af stimulus-response variable q, f, e og p , så kan vi udvælge en vilkårlig af disse, ϕ , til stimulus og en vilkårlig anden, γ , til response. Den tilsvarende responsefunktion $R(t, t')$, er så defineret ved

Stieltjes integralformen

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t R(t, t') d\phi(t') \quad (13)$$

Funktionen $R(t, t')$ siger kun noget om systemets fysiske egenskaber, hvis ϕ og γ hører til forskellige kausale klasser, altså f.eks. $\phi=f$, $\gamma=e$, $R=Z_r$. Derimod, hvis ϕ og γ står for den samme variabel eller tilhører samme kausale klasse, f.eks. $\phi=f$, $\gamma=q$, er R en rent matematisk funktion, som kun afspejler definitionen (13) og level-rate relationen mellem de to variable. Vi kan nu levere en fuldstændig udfyldt version af det semiotiske skema, hvor de matematiske sammenhænge mellem funktionerne er angivet ved "integrationspile":

$\phi \backslash \gamma$	q	f	e	p
q	$E(t-t')$	$2\delta(t-t')$	$G(t, t')$	$Z_\ell(t, t')$
f	$t-t'$	$E(t-t')$	$Z_r(t, t')$	$M(t, t')$
e	$J(t, t')$	$Y_r(t, t')$	$E(t-t')$	$t-t'$
p	$Y_\ell(t, t')$	$F(t, t')$	$2\delta(t-t')$	$E(t-t')$

Fig.1. Skema over funktionerne $R(t, t')$ (lign. (13)) og deres matematiske sammenhænge. De vandrette pile angiver integration (fra t' til t) over første argument (t), og de lodrette pile angiver integration (fra t' til t) over andet argument (t').

1.1.3. Tidshomogene systemer.

I anvendelserne af responsefunktionerne skal vi næsten udelukkende beskæftige os med tidshomogene systemer, for hvilke responsefunktionerne af t og t' kun kan afhænge af tidsdifferensen

$$\tau = t - t' \quad (\tau \geq 0) \quad (1)$$

For sådanne systemer vil både de lodrette og de vandrette pile i fig. 1.1.2.1. simpelthen angive integration (fra 0 til τ) over τ -variablen. Endvidere gælder ved differentiation:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t-t') = - \frac{\partial}{\partial t'} J(t-t')$$

d.v.s. ifølge ligning 1.1.2.12:

$$Y_r(\tau) = Y_l(\tau) = \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \quad (2)$$

For tidshomogene systemer er der altså ingen grund til at skelne mellem level- og rate-admittanser, eller mellem level- og rate-impedanser, og vi vil derfor betegne disse funktioner $Y(\tau)$ og $Z(\tau)$. Altså:

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= \int_0^{\tau} F(\tau') d\tau' \\ Z(\tau) &= \int_0^{\tau} G(\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (3)$$

og ved integration af Y og Z fås henholdsvis føjeligheds- eller krybefunktionen $J(\tau)$ og træghedsfunktionen $M(\tau)$. I det følgende vil vi, når ikke andet nævnes, antage at systemerne er tidshomogene.

Indtil nu har diskussionen været rent semiotisk-matematisk

og de afdækkede sammenhænge og egenskaber af responsefunktionerne er uden fysisk indhold. Vi skal nu bringe fysikken ind i billedet ved at benytte os af, at funktionerne er knyttet til et energibånd og beskriver forholdene ved en elementær arbejdsproces.

I termodynamikken sammenfattes de grundlæggende betingelser for arbejdsprocesser i to aksiomer, kaldet første og anden hovedsætning. Stort set udtaler de to hovedsætninger sig om den samme sag, nemlig om umuligheden af at lave en evighedsmaskine (perpetuum mobile), d.v.s. en cyklisk arbejdende maskine, som i løbet af en kredsproces kan overføre en positiv energimængde til et arbejdsreservoir, uden at der afsættes andre spor i universet end evt. en forsvinding af en tilsvarende mængde varmeenergi fra et varmereservoir. Hvis et varmereservoir er involveret i processen, således at den samlede energi er bevaret, siges evighedsmaskinen at være af anden art og umuligheden af den beskrives i anden hovedsætning. Hvis der ikke optræder noget varmereservoir, er det en evighedsmaskine af første art, hvis umulighed er beskrevet i første hovedsætning.

De fleste systemer, som beskrives i den lineære response-teori, forudsættes mere eller mindre stiltiende at indeholde eller være i kontakt med et varmereservoir. D.v.s. hvis der kan gennemføres en kredsproces med systemet og et arbejdsreservoir, som ikke involverer andre systemer, og hvorved der netto overføres energi til arbejdsreservoiret, så vil systemet være en slags evighedsmaskine, men vi kan ikke afgøre, om den er af første eller anden art.

Forudsætningen for, at vi kan diskutere muligheden af en evighedsmaskine med responseteoriens begrebsapparat er så for det første, at der kan defineres en kredsproces mellem et arbejdsreservoir og det reaktive system, og for det andet, at energioverførselen fra system til arbejdsreservoir kan beskrives alene ved stimulus-response variable. Begge

disse betingelser kan udtrykkes ved at forlange, at systemet er ergodisk.

At systemet er ergodisk er ensbetydende med (sml. ref.I, kap.9), at dets output kan karakteriseres som rent response på de anvendte stimuli, plus et tilfældigt støjbidrag, som i de fleste makroskopiske sammenhænge er ubetydeligt. For de ikke ergodiske systemer kan output signalet indeholde et ekstra bidrag, konstant, periodisk, eller næsten periodisk, som afspejler systemets egen indre tilstand og bevægelse, der fortsætter uanfægtet, selv om systemet ikke har været udsat for stimuli i uendelig lang tid. Da systemet er reaktivt (og ikke aktivt) kan man imidlertid altid opfatte det ikke-responsive signal som anslået af en stimulus i den uendeligt fjerne og ukendte fortid, og det er altid muligt at udslukke signalet for tid og evighed ved hjælp af en passende stimulus udefra. En evt. ikke-ergodisk karakter af et reaktivt system må derfor altid vise sig i standardresponsefunktionen $F(t)$ ved at denne udtrykker uendelig lang hukommelse om fortiden, d.v.s. ikke går mod nul for $t \rightarrow \infty$. Omvendt er ergodicitet ensbetydende med, at

$$F(t) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad t \rightarrow \infty \quad (4)$$

Når et ergodisk system har været i kontakt med et arbejdsreservoir og derefter overlades til sig selv, vil dets outputstrøm i løbet af en vis tid aftage til nul på grund af betingelsen (4). Systemet er da i samme tilstand som før kontakten med arbejdsreservoiret, d.v.s. det er faktisk muligt at gennemføre en kredsproces med systemet.

Situationen hvor det ergodiske system er sammenkoblet med arbejdsreservoiret er vist på fig.1. Arbejdsreservoiret kan f.eks. være et lod, som hænger i en snor og hvis højde h over underlaget kan varieres kontinuert. Det skildres da ved et aktivt o-lager med energifunktionen

$$E(h) = mgh \quad (5)$$

hvor m er loddets masse og g er tyngdeaccelerationen. Når koblingen etableres gennem en transducer med konstant omsætningsforhold, får systemet et konstant spændingsinput e_0 .

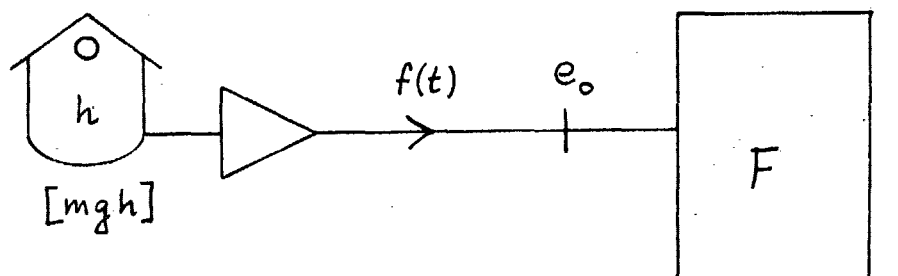


Fig.1. Ergodisk system med lethedsfunktionen F koblet til et arbejdsreservoir.

Lad os nu betragte en kredsproces, hvor systemet er uforstyrret for $t < t_1$, sammenkoblet med arbejdsreservoirret for $t_1 < t < t_2$ og uforstyrret igen for $t > t_2$. Den samlede energimængde, som overføres fra arbejdsreservoirret til systemet i løbet af denne proces er så

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} e(t) f(t) dt \\ &= e_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = e_0 \cdot [q(t_2) - q(t_1)] \\ &= e_0^2 \cdot J(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Denne størrelse må være positiv eller nul, da vi i modsat fald ville kunne overføre energi til arbejdsreservoirret fra systemet i løbet af en kredsproces og derved realisere en evighedsmaskine. D.v.s. for alle ergodiske systemer må krybefunktionen $J(t)$ være ikke-negativ

$$J(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \quad (7).$$

Vi kan tænke os på lignende måde at koble systemet til et arbejdsreservoir med strømoutput (selv om et sådant er sværere at etablere i praksis). Det følger så, at inertansfunktionen er ikke-negativ

$$M(t) \geq 0 \quad \text{for } t \geq 0 \quad (8).$$

Begge ulighederne (7) og (8) må være opfyldt for samme system, selv om den ene af funktionerne J og M er uegentlig. Da arbejdsreservoirer er aktivt, vil det altid "vinde over" det reaktive system i en kausal konflikt, og den uegentlige responsefunktion optræder da som en egentlig responsefunktion (dog ikke for vilkårligt små tider).

Disse uligheder er altså en responseteoretisk udgave af termodynamikkens grundlæggende axiom (umuligheden af en evighedsmaskine). Vi har kun vist sætningernes rigtighed for ergodiske systemer, men det kan antydes, at de også er rigtige for ikke-ergodiske systemer. Et ikke-ergodisk system kan altid gøres ergodisk ved tilkobling af en læk, som vist på fig.2 for et system med spændingsinput.

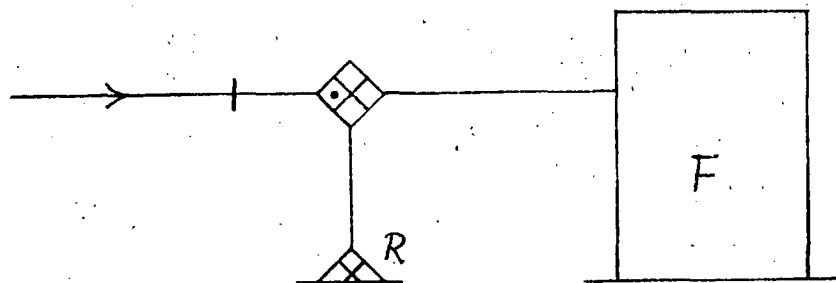


Fig.2. Tilføjelse af en læk (R) til et ikke-ergodisk system med lethedsfunktionen F , hvorved totalsystemet bliver ergodisk.

At totalsystemet på denne måde gøres ergodisk er indtil

videre en ubevist påstand, som vi skal tage op i paragraf 2. For totalsystemet vil betingelsen (7) være opfyldt. Når vi så lader lækstørrelsen R gå mod nul, vil $J(t)$ for totalsystemet gå mod krybefunktionen for det ikke ergodiske system, og da (7) er opfyldt under hele denne grænseovergang, vil den også være opfyldt i grænsen for $R = 0$.

I energibåndsformalismens aksiomer modsvares termodynamikkens postulat om umuligheden af en evighedsmaskine af det såkaldte lækaxiom: læk-parametre er altid positive (ref. I, kap. 7). Når et system er beskrevet med en energibåndsmodel, hvori der indgår lække men ingen kilder, kan det ifølge lækaxiomet dissipere energi, men ikke afgive energi til et arbejdsreservoir i en cyklisk proces. Heraf følger, at betingelserne (7) og (8) automatisk vil være opfyldt for fuldt reticulerede systemer, som er lineære og reaktive (eller passive).

Termodynamikkens hovedsætninger medfører, at et reaktivt eller passivt system i ligevægt (med outputtet nul) ikke kan afgive energi til et arbejdsreservoir, når det sammenkobles med et sådant. I nogle lærebøger gøres denne egenskab til en definition på passivitet, hvilket tyder på en vis begrebsforvirring. Semantisk er der ingen direkte forbindelse mellem et systems passivitet eller reaktivitet og dets manglende evne til at afgive energi; når denne forbindelse alligevel eksisterer, er det i kraft af fysikkens love. Et system, som kan afgive energi uden at være stimuleret på forhånd, må altså være aktivt, men omvendt kan vi ikke slutte, at et aktivt system altid vil afgive energi. En spændingskilde er nok en kilde for spænding, men ikke nødvendigvis en kilde for energi.

1.1.4. Regneregler og eksempler.

Den vigtigste opgave for energibåndsteknikken i forbindelse med den lineære responseteori er at "simulere" et forelagt black box system ved en passende kombination af de basale ikoner. Med andre ord, det gælder om at konstruere en "white box" i form af en fuldt reticuleret energibandsmodel som i henseende til stimulus-response egenskaber er identisk med den forelagte black box.

At denne opgave altid kan løses ved hjælp af de standardfunktioner som defineres af de passive og reaktive basale ikoner er en hovedsætning, som i høj grad ligner matematiske resultater vedrørende approksimation af funktioner ved standardfunktioner, såsom polynomier (Taylor rækkeudvikling) og trigonometriske rækker (Fourier opløsning). Vi skal gradvist skyde os ind på et bevis for denne hovedsætning og formulere nogle forskellige metoder til praktisk gennemførelse af reticulationen, og undervejs får vi brug for en del teknikker og sætninger fra den matematiske analyse og algebra.

Den første opgave er så at finde responsefunktionerne af de simple elementer og dernæst at opstille regler for, hvordan disse funktioner kobles sammen matematisk, når elementerne kobles sammen med energibånd og samlere m.m.

Lad os starte med at se på et x -lager med inertansen m . Dette element kan f.eks. beskrive bevægelsen af en partikel med massen m i én dimension, og de fire dynamiske variable for stimulus-response porten, q, f, e og p , er så henholdsvis partiklens position (regnet fra det punkt, hvor den ligger stille til at begynde med), partiklens hastighed, kraften på partiklen og partiklens impuls. Da x -lagret har spændingsinput, sætter vi $e = e_0 \cdot E(t)$ og får så for $t > 0$:

$p(t) = e_0 \cdot t$ og $f(t) = e_0 \cdot t/m$. Da admittansen er defineret som f/e for $t > 0$, får vi

$$Y(t) = \frac{t}{m} \quad (1)$$

De to andre egentlige responsefunktioner er så simple at bestemme: lethedens $F(t)$ fås ved differentiation af Y og fjøjeligheden $J(t)$ ved integration af Y :

$$F(t) = \frac{1}{m} \quad ; \quad J(t) = \frac{t^2}{2m} \quad (2)$$

Da lethedens er konstant, vil en impuls-stimulus $p_0 E(t)$ give et hastighedsresponse, som også er proportionalt med Heaviside funktionen: $f(t) = (p_0/m) \cdot E(t)$. Vi kan da lige så godt betragte hastigheden som stimulus og impulsen som response, og vi får derved bestemt træghedsfunktionen $M = p/f$:

$$M(t) = m \quad (3)$$

De to andre uegentlige responsefunktioner Z og G kan så findes ved differentiation. Her skal man imidlertid passe lidt på. For det første gælder udtrykket (3) kun for $t > 0$. Egentlig burde man skrive

$$M(t) = m \cdot E(t) \quad (4)$$

Træghedsfunktionen har altså en diskontinuitet for $t=0$, hvor den springer fra 0 til m . Normalt ville man ved differentiation af Heaviside funktionen få en deltafunktion: $E'(t) = \delta(t)$, men den form for differentiation, vi her skal udføre, skal resultere i en funktion, som integreret fra 0 til t giver os $M(t)$ igen. Når man integrerer deltafunktionen fra 0 til t får man kun "halvdelen af singulariteten" med, d.v.s.

$$\int_0^t \delta(t') dt' = \frac{1}{2} E(t) \quad (5)$$

Impedansfunktionen $Z(t)$ er derfor givet ved

$$Z(t) = 2m\delta(t) \quad (6)$$

Når vi videre skal bestemme stivhedsfunktionen $G(t)$ ved differentiation af $Z(t)$ støder vi på endnu større vanskeligheder. Rent formelt skriver vi

$$G(t) = 2m\delta'(t) \quad (7)$$

som om der var tale om en simpel differentiation af en deltafunktion, men i virkeligheden burde vi i stedet for $\delta'(t)$ skrive noget i retning af $\delta'(t) + 2\delta(0) \cdot \delta(t)$, nemlig en funktion, som integreret fra 0 til t giver $\delta(t)$. Denne skrivemåde er imidlertid så langt væk fra gængs matematik, at vi vil droppe den og holde os til udtrykket (7).

Eksemplet med x -lageret viser, at den uegentlige standard-responsefunktion (i dette tilfælde G) for et reaktivt system har en ikke integrabel singularitet for $t=0$. D.v.s. ved en enkelt integration fås en funktion som stadigvæk er singular for $t=0$. Der skal to integrationer til at ophæve singulariteten, og den responsefunktion, som står højest i integrationshierakiet (M eller J) vil derfor altid være en egentlig matematisk funktion, selv om den som responsefunktion betragtet er uegentlig.

For et o -lager, f.eks. en elektrisk kondensator med kapaciteten C genfinder vi de samme funktioner af tiden som for x -lageret, men på de "dualt spejlede" pladser i den semioptiske matrix. De egentlige responsefunktioner er altså

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{C} \\ Z(t) &= \frac{t}{C} \\ M(t) &= \frac{t^2}{2C} \end{aligned} \quad (8)$$

og de uegentlige:

$$F(t) = 2C\delta'(t)$$

$$Y(t) = 2C\delta(t) \quad (9)$$

$$J(t) = C$$

Dernæst betragter vi de passive komponenter under ét: en x-læk med modstanden R og en o-læk med ledningsevnen K . Hvis $K=1/R$ vil de to lække have identiske responsefunktioner. For de passive komponenter kan vi derfor ikke angive nogen foretrukken kausalitet, og der er ingen grund til at skelne mellem egentligt og uegentligt reponse. Da lækelementet altid har simpel proportionalitet mellem strøm og spænding (Ohms lov), har vi

$$Z = R \quad , \quad Y = \frac{1}{R} \quad (10)$$

ved differentiation (jfr. (5)) fås

$$G(t) = 2R\delta(t) \quad , \quad F(t) = \frac{2}{R}\delta(t) \quad (11)$$

og ved integration af (10) fås

$$M(t) = R \cdot t \quad , \quad J(t) = \frac{1}{R} \cdot t \quad (12)$$

I nedenstående skema gives en oversigt over de fundne funktioner. Ikonerne er vist i skemaet på samme side som de tilhørende egentlige responsefunktioner.




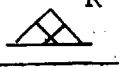
	lethed F(t)	bevægelighed Y(t)	føjelighed J(t)	stivhed G(t)	modstand Z(t)	træghed M(t)	
	$\frac{1}{m}$	$\frac{t}{m}$	$\frac{t^2}{2m}$	$2m\delta'(t)$	$2m\delta(t)$	m	
	$2C\delta'(t)$	$2C\delta(t)$	C	$\frac{1}{C}$	$\frac{t}{C}$	$\frac{t^2}{2C}$	
	$\frac{1}{R} \delta(t)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{t}{R}$	$2R\delta(t)$	R	$R \cdot t$	

Fig.1. Skema over de tidsafhængige responsefunktioner for simple komponenter.

De simpleste regneregler vedrørende kombination af ikoner skildrer indvirkningen af en transducer/transformator eller en gyrator, som indsættes i stimulus-responsé porten. Det er nok at angive regnereglen for én af funktionerne inden for hver af de kausale klasser, da de basale ikoner, som tilføjes systemerne i det følgende, repræsenterer tidsafhængige relationer mellem strømme og spændinger i portene, som ikke interfererer med de integrations- og differentiationsoperationer, som forbinder responsefunktionerne inden for en klasse. For systemet på fig.2a, hvor en transformator eller transducer med omsætningsforholdet T er indskudt i porten til et system med admittansen Y_1 finder vi

$$Y = T^2 \cdot Y_1 \tag{13}$$

og tilsvarende findes F og J for totalsystemet ved at gange F_1 og J_1 med T^2 . For den anden funktionsklasse findes

$$Z = \frac{1}{T^2} \cdot Z_1 \tag{14}$$

ligesom G og M findes ved at dividere G_1 og M_1 med T^2 .

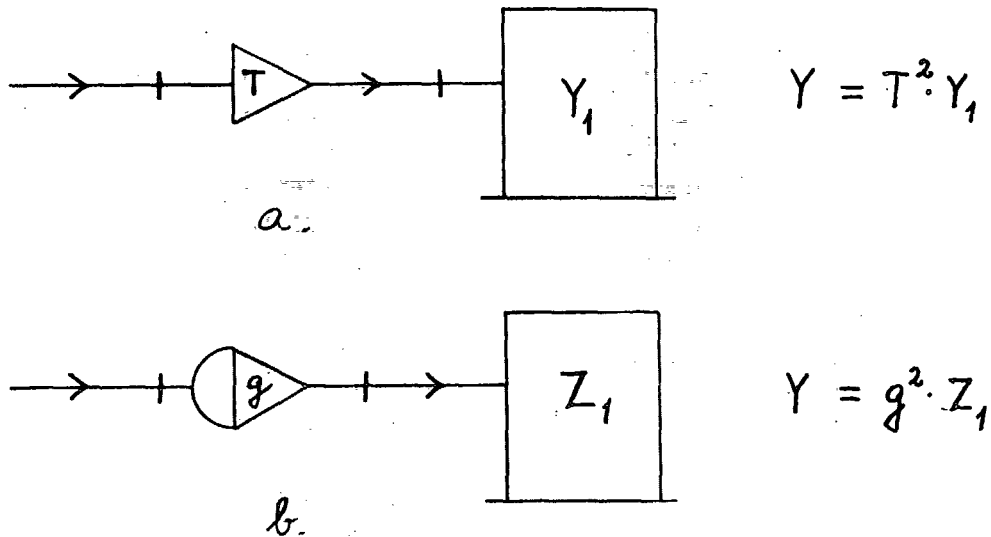


Fig.2. Indskydning af basale toporte.

Når der indsættes en gyrator i systemporten som på fig 2b, vendes kausaliteten, hvorved admittansen for totalsystemet bliver proportional med impedansen Z_1 for delsystemet

$$Y = g^2 \cdot Z_1 \quad (15)$$

og for den anden funktionsklasse:

$$Z = \frac{1}{g^2} \cdot Y_1 \quad (16)$$

idet o-gyratoren med omsætningsforholdet g bliver til en x-gyrator med omsætningsforholdet $1/g$, når kausaliteten vendes.

Når to systemer forbindes til samme ydre port via en samler, får vi en simpel additionsregel for de funktioner, som svarer til stærk kausalitet i den ydre port, d.v.s. spændingsinput til en o-samler og strøminput til en x-samler. Som vist på fig.3 får vi samme input til de to delsys-

stemer på grund af de distributive samlerrelationer, og totalsystemets output bliver summen af delsystemernes output på grund af de konservative samlerrelationer.

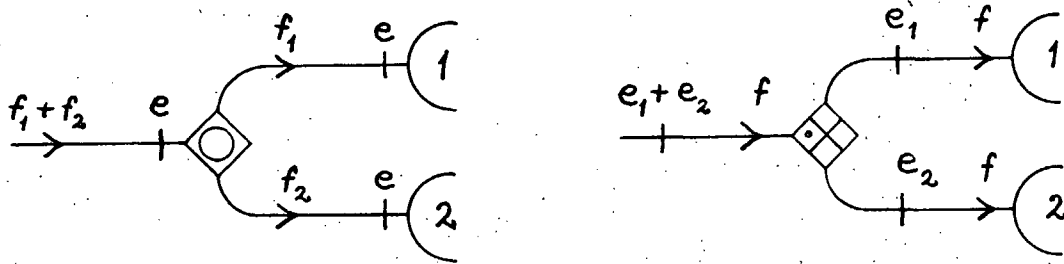


Fig.3. Kobling af to delsystemer til fælles ydre port.

Når samleren er af o-typen får vi derfor

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad (17)$$

og samme additionsregel for F og J. Med en x-samler gælder

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (18)$$

og tilsvarende for G og M.

Den viste samler på fig.3. er forsynet med en prik ved den ydre port, fordi dette giver de simpleste samlerrelationer for de givne orienteringer. Imidlertid er additionsreglen (18) fuldstændig uafhængig af tilstedeværelsen af prikker og deres position i x-samleren. En prik står jo for en symmetrisk transformator med omsætningsforholdet -1, og ifølge (13) og (14) er det kun kvadratet på omsætningsforholdet, som har betydning for responsefunktionerne.

Desværre er det ofte de uegentlige responsefunktioner, som kan findes ved brug af de simple additionsregler, og der er i almindelighed ingen simpel vej over til funktionerne i den modsatte klasse. Hvis vi skal bestemme en egentlig re-

sponsefunktion for et sammensat system med svag kausalitet i den ydre port, kommer vi i almindelighed til at løse en integralligning.

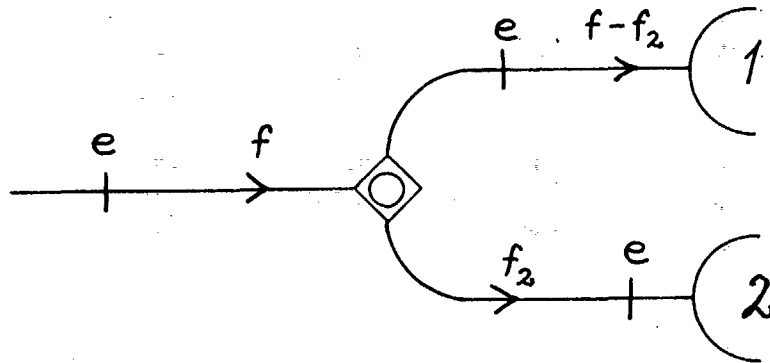


Fig.4. Sammensat system med svag kausalitet i ydre port.

For systemet på fig.4 har vi

$$e(t) = \int_{-\infty}^t G_1(t-t') \cdot [f(t') - f_2(t')] dt' \quad (19)$$

og

$$f_2(t') = \int_{-\infty}^{t'} F_2(t'-t'') e(t'') dt'' \quad (20)$$

Hvis vi sætter $f(t) = q_0 \delta(t)$, bliver $e(t) = q_0 G(t)$, og vi får derfor ved kombination af (19) og (20):

$$G(t) = G_1(t) - \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} F_2(t'-t'') G(t'') dt'' \quad (21)$$

altså en lineær integralligning for stivhedsfunktionen $G(t)$ af det sammensatte system. Teorien for løsning af sådanne ligninger involverer teknikker som Fourier- og Laplace-transformationer og brugen af analytiske funktioner af en kompleks variabel, og er den væsentligste årsag til, at vi i næste paragraf kommer til at beskæftige os med de komplekse, frekvensafhængige responsefunktioner.

Når delsystemerne er fuldstændigt reticulerede, kan vi imidlertid opstille bevægelsesligninger for dem, og herved bliver de egentlige responsefunktioner bestemt som løsninger

til en lineær differentiaalligning med konstante koefficienter. En sådan ligning er som regel ret let at løse (ref.IV), og vi skal i dette afsnit indskrænke os til eksempler, som kan klares på denne måde.

Som første eksempel på et sammensat system ser vi på Maxwell elementet (fig.5), som i rheologien svarer til en serieforbindelse af en fjeder og et stempel og i elektriske netværk til en parallellforbindelse af en kondensator og en modstand.

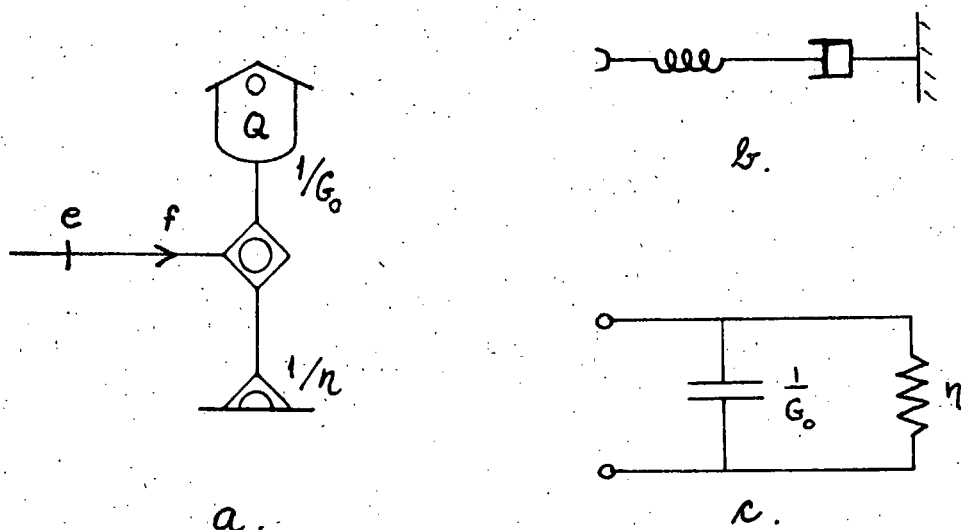


Fig.5. Maxwell elementet. a: eb diagram. b: rheologisk diagram. c: elektrisk netværksdiagram.

Da o-lageret i Maxwell elementet har spændingsoutput og er forbundet til en o-samler, får vi også spændingsoutput i den ydre port. D.v.s. de egentlige responsefunktioner er G , Z og M . Ved brug af skemaet fig.1 og additionsreglen (17) finder vi umiddelbart de uegentlige funktioner F , Y og J , af hvilke vi kun angiver krybefunktionen

$$J(t) = \frac{1}{G_0} + \frac{t}{\eta} \quad (22)$$

For at bestemme de egentlige funktioner opskriver vi de dynamiske ligninger for diagrammet, som bestemmer outputspændingen $e(t)$ ud fra inputstrømmen $f(t)$. For lagerets level

variabel $Q(t)$ (ikke at forveksle med input variabelen $q(t)$) har vi:

$$\frac{dQ}{dt} = f - \frac{1}{\eta} \cdot e$$

og da spændingen er givet ved

$$e = G_0 \cdot Q$$

fås differentiaalligningen

$$\frac{de}{dt} = G_0 \cdot f - \frac{G_0}{\eta} \cdot e \quad (23)$$

Den løsning til (23), som forsvinder for $t = -\infty$ er (saml. ref IV, s.8):

$$e(t) = \int_{-\infty}^t G_0 \cdot f(t') \cdot e^{-\frac{G_0}{\eta}(t-t')} dt'$$

og da stivhedsfunktionen $G(t)$ er defineret ved

$$e(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') f(t') dt'$$

har vi altså for Maxwell elementet

$$G(t) = G_0 \cdot e^{-\frac{G_0}{\eta} t} \quad (24)$$

Vi ser, at systemet har en eksponentielt aftagende "hukommelse" om fortidige stimuli. Den karakteristiske tid

$$\tau_M = \frac{\eta}{G_0} \quad (25)$$

kaldes Maxwell-relaxationstiden. Da standardresponsefunktionen går mod nul for $t \rightarrow \infty$, er systemet ergodisk.

Ved integration fra 0 til t af (24) findes impedansen

$$Z(t) = \eta \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_M}} \right) \quad (26)$$

og yderligere en integration giver inertansen

$$M(t) = \eta \cdot \left[t - \tau_M \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_M}} \right) \right] \quad (27)$$

Vi bemærker, at G har grænseværdien G_0 for små tider, og svarende hertil har Z et lineært forløb $Z \approx G_0 \cdot t$ og M et kvadratisk forløb $M \approx \frac{1}{2} G_0 t^2$ for $t \ll \tau_M$. For store tider, $t \gg \tau_M$, får Z den konstante grænseværdi η , og M vokser lineært: $M \approx \eta \cdot t$. D.v.s for små tider er det o-lageret, som gør sig gældende, og for store tider er det lækken.

Det næste eksempel er Voigt-elementet (fig.6) som i rheologien fremtræder som en parallelforsindelse af en fjeder og et stempel og i elektriske netværk som en serieforbindelse af en kondensator og en modstand. I modsætning til Maxwell-elementet kan Voigt elementet både optræde med strøminput og med spændingsinput.

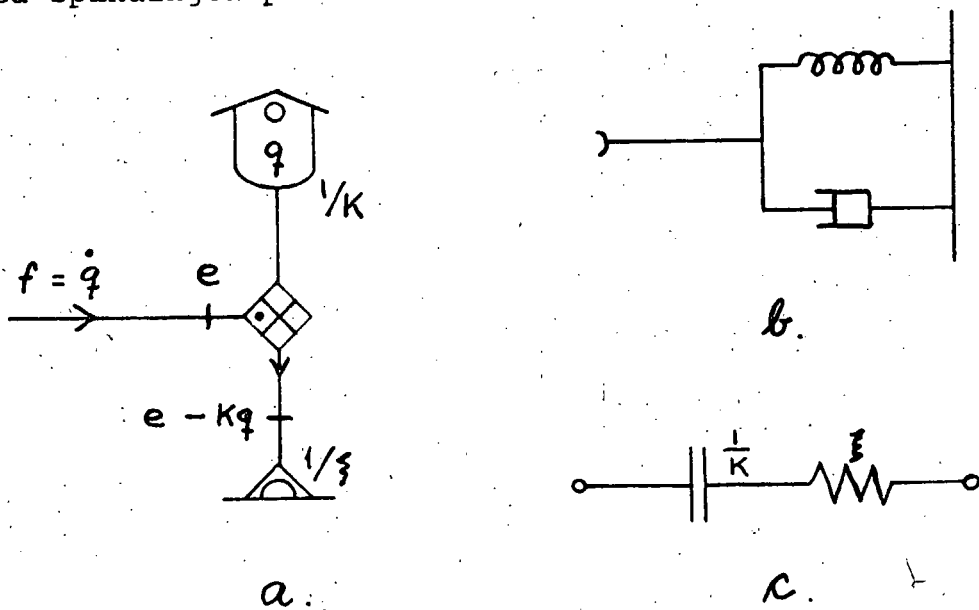


Fig.6. Voigt elementet. a: eb diagram. b: rheologisk. c: elektrisk.

Af skemaet fig.1 og additionsreglen (18) findes G , Z og M :

$$G(t) = K + 2\xi\delta(t)$$

$$Z(t) = K \cdot t + \xi \quad (28)$$

$$M(t) = \frac{1}{2}Kt^2 + \xi \cdot t$$

Vi ser, at $G(t)$ ikke går mod nul for $t \rightarrow \infty$, d.v.s. når Voigt elementet har strøminput, er det ikke ergodisk.

For spændingsinput har vi (fig.6a):

$$\frac{dq}{dt} = f = \frac{1}{\xi} \cdot (e - K \cdot q) \quad (29)$$

Løsningen af denne differentialligning for q giver

$$q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi} e(t') \cdot e^{-\frac{K}{\xi}(t-t')} dt'$$

I dette tilfælde er level variabelen q det samme som den cykliske level variable q for den ydre port, d.v.s. vi må have

$$q(t) = \int_{-\infty}^t Y(t-t') e(t') dt'$$

og derfor

$$Y(t) = \frac{1}{\xi} \cdot e^{-\frac{K}{\xi}t} \quad (30)$$

I dette tilfælde har Y en endelig grænseværdi for $t \rightarrow 0$, og ved differentiation af Y får vi derfor en deltafunktion ud over den ordinære differentialkvotient:

$$F(t) = \frac{2}{\xi} \delta(t) - \frac{K}{\xi^2} e^{-\frac{K}{\xi}t} \quad (31)$$

Endelig fås krybefunktionen ved integration af (30):

$$J(t) = \frac{1}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{\xi}t} \right) \quad (32)$$

Da $F(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, er Voigt elementet ergodisk, når det har spændingsinput.

Sammenligner vi krybefunktionerne (22) og (32), ser vi, at Maxwell-elementet er "flydende" eller "væskeagtigt", medens Voigt elementet, som har en endelig grænseværdi af J for $t \rightarrow \infty$, er "faststofagtigt". I virkeligheden optræder begge elementer i væskedynamikken, hvor Maxwell-elementet beskriver transversale ("shear") bevægelser, medens Voigt-elementet beskriver rumfangsændrende ("bulk") bevægelser.

I det foregående afsnit nævntes, at et ikke-ergodisk system kan gøres ergodisk ved påsætning af en læk. For et Voigt element med strøminput skal vi bruge konstruktionen på fig.7 (sml. fig. 1.1.3.2.)

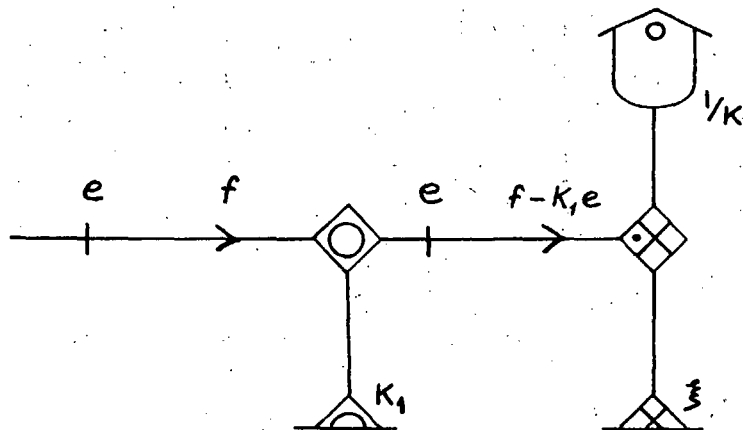


Fig.7. Voigt element med strøminput gjort ergodisk ved påsætning af spændingslækken K_1 .

Med brug af $G(t)$ for det "bare" Voigt element fra ligning (28) fås nu for det "påklædte" Voigt element:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \int_{-\infty}^t [K + 2\xi\delta(t-t')] \cdot [f(t') - K_1 \cdot e(t')] dt' \\
 &= K \cdot q(t) - K \cdot K_1 \cdot p(t) + \xi \cdot f(t) - \xi K_1 \cdot e(t)
 \end{aligned}$$

Når denne ligning løses m.h.t. e og derefter differentie-

res, får vi:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{1+\xi K_1} \cdot \left\{ K \cdot f + \xi \frac{df}{dt} - K \cdot K_1 \cdot e \right\}$$

Sættes nu $f = f_0 \cdot E(t)$, fås $e = f_0 \cdot Z(t)$, og Z må derfor tilfredsstille differentiaalligningen

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{K}{1+\xi K_1} \cdot [1 - K_1 \cdot Z] + \frac{2\xi}{1+\xi K_1} \delta(t) \quad (33)$$

Løsningen til (33) er

$$Z(t) = \frac{1}{K_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K \cdot K_1}{1+\xi K_1} t} \right) + \frac{\xi}{1+\xi K_1} E(t) \quad (34)$$

og ved differentiation heraf fås

$$G(t) = \frac{K}{1+\xi K_1} e^{-\frac{K \cdot K_1}{1+\xi K_1} t} + \frac{2\xi}{1+\xi K_1} \delta(t) \quad (35)$$

Denne G -funktion går mod nul for $t \rightarrow \infty$, hvilket viser, at det "påklædte" Voigt element er ergodisk. For $K_1 \rightarrow 0$ går udtrykket (35) over i G -funktionen for det "bare" Voigt element.

Som det sidste eksempel i dette afsnit ser vi på den udæmpede harmoniske oscillator. Som vist på fig. 8 kan der defineres to forskellige ydre porte for dette system, af hvilke den ene kun kan have spændingsinput (spændingsporten) og den anden kun kan have strøminput (strømporten). Vi skal nøjes med at behandle tilfældet med spændingsinput (fig. 8a), idet det andet tilfælde fremgår heraf ved en dualitetstransformation.

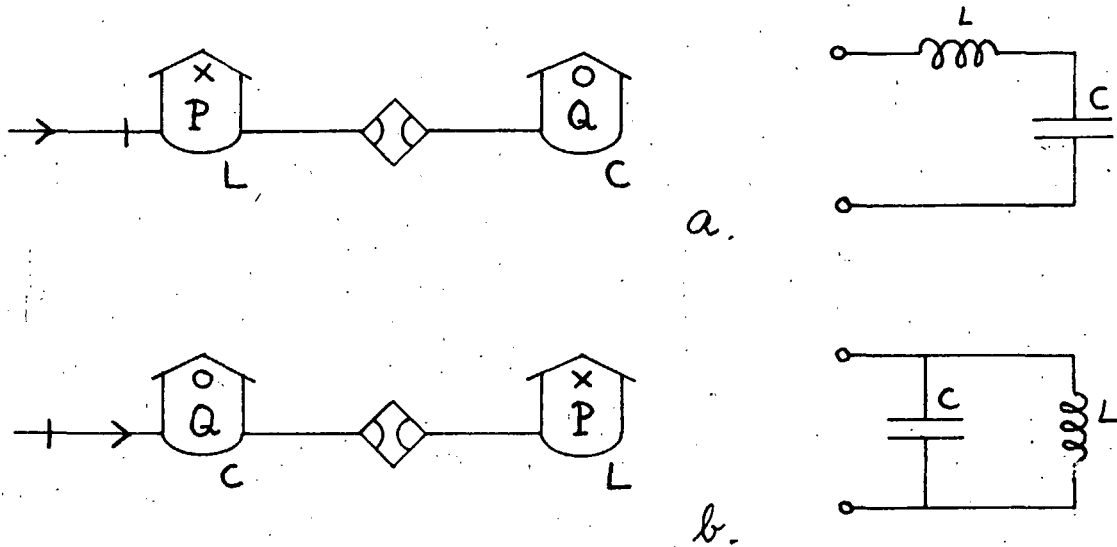


Fig.8. E.b. diagram og elektriske diagrammer for en udæmpet harmonisk oscillator. a. Spændingsinput. b. Strøminput.

Da to-port x-lageret på fig.7a er et sædvanligt et-port lager med en indbygget x-samler, kan vi bestemme de uegentlige funktioner ved brug af (18), f.eks.

$$M(t) = L + \frac{t^2}{2C} \quad (36)$$

For at bestemme de egentlige responsefunktioner opstiller vi de dynamiske ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= e - \frac{Q}{C} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{P}{L} = f \end{aligned} \quad (37)$$

Sættes nu $e = e_0 \cdot E(t)$, skal vi have $f = e_0 \cdot Y(t)$. Af (37) fås så følgende differentialligning for $Y(t)$:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Y(t) + \frac{1}{L} \delta(t) \quad (38)$$

For meget små værdier af t er $Q=0$, d.v.s. $P = e_0 \cdot t$ og dermed $Y \approx \frac{P}{L \cdot e_0} = \frac{t}{L}$. Den eneste løsning til (38), som tilfredsstiller disse grænsebetingelser, er

$$Y(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (39)$$

Admittansen antager altså både positive og negative værdier og svinger harmonisk med frekvensen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (40)$$

Ved differentiation af (39) fås:

$$F(t) = \frac{1}{L} \cos(\omega_0 t) \quad (41)$$

og integration af (39) giver

$$J(t) = C \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)] \quad (42)$$

Den udæmpede oscillator er ikke ergodisk, da $F(t)$ ikke går mod nul for $t \rightarrow \infty$. Krybefunktionen er ikke-negativ, som den skal være ifølge den termodynamiske ulighed 1.1.3.7, men den antager værdien 0 uendelig mange gange for $t \rightarrow \infty$, idet oscillatoren ikke kan dissipere energien, men kun oplagre den.

1.1.5. Tidseksponenter og indre systemtid.

Blandt de tidsafhængige responsefunktioner indtager føjeli-gheds- eller krybefunktionen $J(t)$ på flere måder en særstilling. Vi har set, at J og M er ikke-negative, og at deres plads øverst i integrationshierarkiet fritager dem for de δ -funktionsagtige (og endnu værre) singulariteter, som plager de øvrige responsefunktioner. De fire forskellige stimulus-responsevariable, q, f, e og p , som indgår i definitionen af responsefunktionerne forholder sig forskelligt til måleudstyret, først og fremmest fordi x -variablene f og p refererer til laboratorietiden t og kræver en form for ur for at kunne måles, hvorimod o -variablene q og e kan bestemmes uafhængigt af tidsmålet. De responsefunktioner, som defineres alene ud fra o -variablene kan måles "selv om vi ikke ved hvad tid er for noget" og er derfor, begrebsmæssigt og eksperimentelt, simplere end de øvrige. Af responseegenskaber, som kan måles uden ur, findes kun stivheden $G (=e/q)$ og føjeliigheden $J (=q/e)$.

Det "ur" som skal bruges til måling af en x -variabel, kan have mange forskellige udformninger, afhængigt af det energetiske medium. For et mekanisk medium, hvor strømmene er hastigheder af partikler og spændingerne er kræfter, der virker på partiklerne, måles strømme f.eks. med en meterstok og et sædvanligt stopur, medens spændingerne kan måles med en fjedervægt. Hvis en kraft har en konstant værdi, kan det nemt konstateres uden brug af ur, hvorimod hastighedens konstans i den inertielle bevægelse af en fri partikel kun kan eftervises ved brug af et ur.

Tilsvarende for et elektrisk energibånd: Spændingen kan i princip måles elektrostatisk ved at bestemme kraften på en prøveladning, uden brug af nogen form for ur. Strømmen, derimod, kan bestemmes ved at veje, hvor meget sølv den udskiller af en sølvholdig elektrolyt i et bestemt tidsrum, som må kontrolleres ved hjælp af et sædvanligt ur. En anden (og nemmere) metode til strømmåling er at bruge et drejespolegalvanometer. Her er der tilsyneladende ikke involveret noget ur, men til gengæld indgår et permanent magnetfelt. Der er gode grunde til at opfatte en permanent magnet som en særlig slags "ur". Hvis vi råder over en sådan, kan vi få en prøveladning til at cirkulere med konstant frekvens (cyklotronfrekvensen) og vi får derved en "viser", som kan udmåle tiden lige så godt som et sædvanligt ur.

Alle systemer, som svinger med en fast frekvens, er potentielle ure. Moderne metoder til måling af massestrømme i gasser og væsker bygger på Doppler-forskydning af spredt stråling, som udsendes af en maser eller en laser. En meget følsom metode til hastighedsbestemmelse bygger på resonansabsorption af γ -stråling fra atomkerner. Det er den såkaldte Mössbauer-effekt, som vi senere skal diskutere i detaljer.

Naturligvis kan vi ikke udmåle funktionen $J(t)$ uden at vide, hvad t er for noget, men hvis vi blot råder over et "uformelt tidsmål" t^* , som tillader ordning af føjelighedsmålingerne, således at senere målinger svarer til større værdier af parameteren t^* , så kan vi bestemme funktionen $J(t^*)$, som på sin vis er lige så god. D.v.s. hvis vi senere får fastsat relationen mellem den uformelle og den rigtige tid $t^*(t)$, kan vi oversætte måleresultaterne rent matematisk

$$J(t) = J(t^*(t)) \quad (1)$$

uden at der skal ændres på de målte værdier af føjeligheden.

Lad os nu i første omgang forestille os at vi kender den rigtige tid, således at begge aspekter af $J(t)$ kan fastlægges: både den fysiske egenskab, føjelighederne, som målt af de ikke-kronometriske apparater i en bestemt rækkefølge, og den matematiske funktionsafhængighed af tiden, som beskriver den nøjagtige kronologi af målingerne. Vi vil benytte en skrivemåde, som klart adskiller de to væsensforskellige aspekter

$$J(t) = J_1 \cdot H_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (2)$$

hvor J_1 er en fysisk konstant med dimensionen føjelighed og H_1 en rent matematisk funktion af den dimensionsløse variabel t/τ . Størrelsen τ er så en karakteristisk tid for systemet, f.eks. kan vi for et Maxwell-element bruge

relaxationstiden τ_M , for Voigt elementet ξ/K og for den harmoniske oscillator $1/\omega_0$. For nogle systemer kan der findes flere karakteristiske tider, og hvis der er stor afstand mellem disse, kan der defineres flere H-funktioner, som hver især er gyldige på et bestemt område af tidsaksen. I andre tilfælde frembyder systemet så få parametre (f.eks. de to simple lagre), at der umuligt kan defineres en karakteristisk tid alene ud fra disse parametre. I sådanne tilfælde kan vi inddrage temperaturen T og herved definere den kvantemekaniske korrelationstid

$$\tau_0 = \frac{h}{kT} \quad (3)$$

hvor h er Planck's konstant ($6,67 \cdot 10^{-34}$ J·sec) og k er Boltzmann's konstant ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J·deg⁻¹). Vi skal senere i forbindelse med diskussionen af støjfænomener, se, at τ_0 er en nedre grænse for, hvor små tider, man kan skelne i et response-forsøg. I det følgende vil vi for simpelhedens skyld regne med, at systemet frembyder netop én karakteristisk tidskonstant. Opspaltningen af $J(t)$ i en fysisk konstant og en matematisk funktion gøres éntydig ved at vi definerer konstanten som værdien af $J(t)$ for $t=\tau$. Funktionen $H_1(x)$ må da adlyde betingelsen

$$H_1(1) = 1 \quad (4)$$

Systemets karakteristiske tid τ er kun defineret på nær en arbitrær positiv faktor λ . D.v.s vi kunne lige så godt opfatte $\lambda\tau$ som den karakteristiske tid. Når vi laver en sådan skalatransformation på tidsaksen, får vi en anden opspaltning af $J(t)$:

$$J(t) = J_\lambda \cdot H_\lambda\left(\frac{t}{\lambda\tau}\right) \quad (5)$$

hvor vi forlanger, at

$$H_{\lambda}(1) = 1 \quad (6)$$

I almindelighed vil forskellige værdier af skalafaktoren λ give anledning til forskellige matematiske funktioner $H_{\lambda}(x)$. Hvis det ikke er tilfældet, d.v.s. hvis

$$H_{\lambda}(x) = H_1(x) \quad (7)$$

siger vi, at krybefunktionen er skalainvariant (egentlig burde vi sige tids-skala-invariant). Det er en normal egenskab, at krybefunktionen enten for meget små tider eller for meget store tider har en asymptotisk form, som er skalainvariant. I de tilfælde, hvor systemet slet ikke har nogen karakteristisk tid, og vi må bringe τ ind "udefra", f.eks. ved konstruktionen (3), er der nødvendigvis skalainvarians over hele den positive tidsakse. F.eks. har vi for x-lageret (sml. lign. 1.1.4.2.)

$$J(t) = \frac{t^2}{2m} = \frac{\tau^2}{2m} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = \frac{\lambda^2 \tau^2}{2m} \cdot \left(\frac{t}{\lambda \tau}\right)^2$$

d.v.s.

$$J_{\lambda} = \frac{\lambda^2 \tau^2}{2m} \quad \text{og} \quad H_{\lambda}(x) = x^2$$

her er τ og λ helt virkårlige, og betingelsen (7) er opfyldt. Tilsvarende har vi for en x-læk R:

$$J(t) = \frac{t}{R} = \frac{\tau}{R} \cdot \frac{t}{\tau} = \frac{\lambda \tau}{R} \cdot \frac{t}{\lambda \tau}$$

d.v.s.

$$J_{\lambda} = \frac{\lambda \tau}{R} \quad \text{og} \quad H_{\lambda}(x) = x ; \quad (7) \text{ er opfyldt.}$$

Maxwell elementet er ikke skalainvariant, men for $t \ll \tau_M$ er

$$J(t) = \frac{1}{G}, \quad \text{d.v.s.} \quad J_{\lambda} = \frac{1}{G} \quad \text{og} \quad H_{\lambda}(x) = 1$$

og for $t \gg \tau_M$ er

$$J(t) = \frac{t}{\eta} \quad \text{som for en x-læk, } \eta \text{ (sml. ovenfor);}$$

d.v.s. Maxwell elementets krybefunktion er skalainvariant i begge grænser $t \rightarrow 0$ og $t \rightarrow \infty$.

Det er nemt at indse, at skalainvarians kun kan optræde i forbindelse med potensfunktioner $H_\lambda(x) = x^\alpha$. Vi har jo

$$J(t) = J_\lambda \cdot H_\lambda\left(\frac{t}{\lambda\tau}\right) = J_1 \cdot H_1\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

d.v.s. når (7) er opfyldt, får vi (sæt $x = \frac{t}{\lambda\tau}$)

$$\frac{H_1(\lambda x)}{H_1(x)} = \frac{J_\lambda}{J_1}$$

Højresiden er uafhængig af x , d.v.s. når vi differentierer venstresiden m.h.t. x får vi nul:

$$\frac{\lambda H_1'(\lambda x) \cdot H_1(x) - H_1(\lambda x) \cdot H_1'(x)}{H_1^2(x)} = 0$$

Vi sætter så $x=1$ og får:

$$\frac{H_1'(\lambda)}{H_1(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha \quad (8)$$

hvor $\alpha = \frac{H_1'(1)}{H_1(1)}$ er en konstant. Differentialligningen

(8) har den fuldstændige løsning

$$H_1(\lambda) = \beta \cdot \lambda^\alpha$$

og konstanten β fastsættes ved ligning (1): $\beta = 1$. Vi har så vist, at en skalainvariant H-funktion altid må have formen

$$H_1(x) = H_\lambda(x) = x^\alpha$$

og en skalainvariant krybefunktion se således ud:

$$J(t) = J_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \quad (9)$$

i de tilfælde, hvor systemets krybefunktion i en eller anden grænse, eller på hele tidsaksen, kan skrives på formen (9), siger vi, at systemet optræder med tidseksponenten α .

Ved at se tilbage på eksemplerne i foregående afsnit kan vi bestemme tidseksponenterne, som vises i nedenstående skema:

x-lager	$\alpha = 2$
o-lager	$\alpha = 0$
læk (x og o)	$\alpha = 1$
Maxwell element, $t \ll \tau_M$	$\alpha = 0$
Maxwell element, $t \gg \tau_M$	$\alpha = 1$
Voigt element, $t \ll \xi/K$	$\alpha = 1$
Voigt element, $t \gg \xi/K$	$\alpha = 0$
Harmonisk } $t \ll 1/\omega_0$: { spændingsport	$\alpha = 2$
oscillator }	{ strømport $\alpha = 0$

Vi har allerede indset, at $J(t)$ ikke kan have en uendelighed for $t = 0$. Det følger heraf, at for alle systemer med skalainvariant krybefunktion er

$$\alpha \geq 0 \quad (10)$$

Eksemplerne i skemaet ovenfor kunne tyde på, at værdien 2 er en øvre grænse for α . Dette kan dog ikke vises, men vi skal se om lidt, at systemer for hvilke alle responsefunktionerne er potensfunktioner af tiden nødvendigvis må have

$$\alpha \leq 2 \quad (11)$$

Vi kan sige, at det lukkede interval fra 0 til 2 er normalområdet for α .

Skemaet kunne også tyde på, at α kun kan antage de heltallige værdier 0, 1 og 2. Dette er heller ikke rigtigt. Vi skal i forbindelse med væskedynamik og diffusionsprocesser se eksempler, hvor $\alpha = 3/2$ og $\alpha = 1/2$.

Ved dobbelt differentiation af udtrykket (9) ser vi at lethedsfunktionen har en singularitet for $t = 0$, hvis $\alpha < 2$. For $\alpha = 1$ er singulariteten en deltafunktion, hvis $1 < \alpha < 2$ fås en integrabel singularitet og for $0 \leq \alpha < 1$ er singulariteten ikke integrabel. Lethedsfunktionen er derfor en egentlig responsefunktion for $1 \leq \alpha \leq 2$ og uegentlig for $0 \leq \alpha < 1$. D.v.s. hvis $\alpha = 1$ er systemet passivt og kan have både strøm- og spændingsinput, medens det for $1 < \alpha \leq 2$ er reaktivt med spændingsinput og for $0 \leq \alpha < 1$ reaktivt med strøminput. Disse regler kan dog kun anvendes, når tidsekspONENTEN beskriver de asymptotiske forhold for små tider; f.eks. har Voigt elementet $\alpha = 0$ for store tider, men dette element kan jo have både strøminput og spændingsinput, og har da også tidsekspONENTEN 1 i grænsen for små tider.

Vi skal nu undersøge mulighederne for, at systemet (og ikke blot dets krybefunktion) er skalainvariant i en eller anden tidsgrænse, d.v.s. at alle responsefunktionerne er "potensfunktioner" af tiden. Hvis det er tilfældet, må vi have

$$M(t) = M_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta \quad (12)$$

ligesom (9) stadig antages at gælde. De øvrige responsefunktioner, som fås ved at differentiere (9) og (12) op til to gange bliver så også "potensfunktioner" af t , hvis vi også regner $\delta(x)$ og $\delta'(x)$ med til "potensfunktionerne". Hvis $\alpha = 1$ bliver lethedsfunktionen en deltafunktion og for $\alpha = 0$ bliver den en δ' -funktion. Vi må derfor regne $\delta(x)$ for en "potensfunktion" med eksponenten -1 og $\delta'(x)$ for en "po-

tensfunktion" med eksponenten -2 .

Lad os forestille os, at vi giver systemet en skalainvariant spændingsstimulus

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\gamma & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (13)$$

hvor eksponenten γ er større end eller lig med 0. (Tilfældet $\gamma=0$ er en stimulus af den type vi hidtil har benyttet, proportional med Heaviside funktionen $E(t)$). Strømresponset er så

$$f(t) = \int_0^t Y(t-t') de(t')$$

Hvis $\alpha > 0$ fås ved differentiation af (9) ($Y = dJ/dt$) og (13)

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha \gamma J_1 e_1 \tau^{-\alpha-\gamma} \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} t'^{\gamma-1} dt' \\ &= \alpha \gamma \frac{J_1}{\tau} e_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\gamma-1} \cdot \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\gamma-1} dx \quad (14) \end{aligned}$$

Integralet i (14) er en såkaldt beta-funktion af α og γ , som kan udtrykkes ved hjælp af fakultetsfunktionen $x!$, der er defineret for alle reelle x der er større end -1 (ref. V). Vi får så

$$f(t) = e_1 \cdot \frac{J_1}{\tau} \cdot \frac{\alpha! \gamma!}{(\alpha+\gamma-1)!} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\gamma-1} \quad (15)$$

Udtrykket (15) er kun udledt for $\alpha > 0$. Hvis $\alpha=0$ skal vi sætte $Y(t) = 2J_1 \cdot \delta(t)$, og man kan så let overbevise sig om, at (15) også er gyldig i dette tilfælde.

Vi ser altså, at også strømsignalet bliver en potensfunktion af tiden, når (9) og (13) er opfyldt. Eksponenten $\alpha+\gamma-1$ er positiv eller nul, når

$$\gamma \geq 1 - \alpha \quad (16)$$

Når (16) er opfyldt, kan vi formelt vende kausaliteten og betragte signalet (15) som en strømstimulus

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ f_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\delta & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (17)$$

hvor

$$f_1 = e_1 \cdot \frac{J_1}{\tau} \cdot \frac{\alpha! \gamma!}{(\alpha + \gamma - 1)!} \quad (18)$$

$$\text{og} \quad \delta = \alpha + \gamma - 1 \quad (19)$$

Vi kan så gennemføre nøjagtigt tilsvarende regninger, hvor vi benytter den skalainvariante træghedsfunktion (12) i forbindelse med strøminputtet (17), og få bestemt spændingsoutputtet

$$e(t) = f_1 \cdot \frac{M_1}{\tau} \cdot \frac{\beta! \delta!}{(\beta + \delta - 1)!} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta + \delta - 1} \quad (20)$$

og når f_1 og δ er givet ved (18) og (19), må udtrykket (20) være identisk med det oprindelige spændingssignal (15).

Altså

$$\gamma = \beta + (\alpha + \gamma - 1) - 1$$

d.v.s. α og β må adlyde relationen

$$\alpha + \beta = 2 \quad (21)$$

og endvidere

$$e_1 = \left(e_1 \cdot \frac{J_1}{\tau} \cdot \frac{\alpha! \gamma!}{(\alpha + \gamma - 1)!} \right) \cdot \frac{M_1}{\tau} \cdot \frac{\beta! \cdot (\alpha + \gamma - 1)!}{[(2 - \alpha) + (\alpha + \gamma - 1) - 1]!}$$

hvorved vi finder en relation mellem J_1 og M_1 :

$$J_1 \cdot M_1 = \frac{\tau^2}{\alpha! \cdot \beta!} \quad (22)$$

For et skalainvariant system er det altså simpelt at udtrykke alle seks responsefunktioner ved hjælp af den information, som ligger i tidseksponenten α og føjeligheds-konstanten J_1 . Da $\beta = 2 - \alpha$ og træghedsfunktionen er ikke-singulær for $t=0$, må

$$\alpha \leq 2 \quad (23)$$

være en nødvendig betingelse for at systemet er skalainvariant.

Til sidst skal vi se på begrebet "indre systemtid". Lad os tænke os, at systemet er skalainvariant, og at tidseksponenten α ligger i det halvåbne interval $0 < \alpha \leq 2$. Krybefunktionen $J(t)$ er så monotont voksende for $t > 0$. Uafhængigt af laboratorietiden t kan vi iværksætte et eksperiment med en spændingsstimulus, som er nul til at begynde med, og derefter pludseligt springer op til en konstant værdi e_0 . For et hvilket som helst tidsmål, t^* , som er en voksende funktion af t , og hvis nulpunkt fastsættes ved det pludselige spændingsspring, har vi så:

$$e(t^*) = e_0 \cdot E(t^*) \quad (24)$$

Målinger af forskydningen q som funktion af t^* giver så krybefunktionen $J(t^*)$, som vil være monotont voksende, og som hænger sammen med den rigtige krybefunktion ved ligning (1). Krybefunktionen selv definerer derfor et muligt tidsmål, som vi vil kalde den indre systemtid, t_1^* :

$$t_1^* = \frac{\tau}{J_1} \cdot J(t) = \tau \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \quad (25)$$

Målt efter den indre systemtid er krybefunktionen altså

lineær:

$$J(t_i^*) = J_1 \cdot \frac{t_i^*}{\tau} \quad (26)$$

og systemet virker, målt med dette specielle "ur", og i henhold til det specielle stimulus-response eksperiment, som en simpel spændingslæk.

Hvis vi råder over flere identiske systemer, kan vi bruge ét af disse som "ur" til fastlæggelse af skalaen t_i^* , og vi kan udføre andre stimulus-response eksperimenter med de øvrige systemer. Det vil da hurtigt vise sig, at systemet tilsyneladende ikke er tidshomogent, (selv om det er det i virkeligheden) med mindre det rent faktisk er en spændingslæk. Med andre ord: et eksperiment, som starter til et andet tidspunkt end $t_i^*=0$ vil i almindelighed have et kvalitativt anderledes forløb end et tilsvarende eksperiment, der starter kl.0, når t_i^* skalaen lægges til grund.

Den indre tidsskala har altså et fast nulpunkt i modsætning til den rigtige tid. Hvis vi holder os til skalainvariante stimuli, som starter kl.0, vil systemets skalainvarians medføre, at forholdet mellem responseværdier til forskellige tider t_i^* kun afhænger af forholdet (ratioen) mellem de tilsvarende værdier af t_i^* . Vi siger derfor, at den indre systemtid definerer en ratioskala. Den rigtige tid t er også en ratioskala for systemet, hvis dens nulpunkt er sammenfaldende med nulpunktet for den indre tid, men vil desuden have den egenskab, at responsefunktioner for eksperimenter, der starter for $t=0$ kun afhænger af tidsintervallet mellem stimulus og response. Den rigtige tid har altså et forskydeligt nulpunkt og definerer en interval skala for systemet, uanset om dette er skalainvariant eller ej, blot det er tidshomogent.

Hvis den indre tid er både en ratioskala og en interval-

skala, er det ensbetydende med, at systemet er en spændingslæk ($\alpha=1$), og den indre tid er så identisk med den rigtige tid, på nær en lineær transformation. Et sådant system siges derfor at konstituere et Bergsonsk ur. Et x -lager ($\alpha=2$) kan tilsvarende definere et Newtonsk ur, idet strømvariablen for dette er en lineær funktion af tiden for konstant spændingsinput, og denne lovmæssighed er en generaliseret udgave af Newtons 2. lov.

Prototypen på et Bergsonsk ur er et timeglas (sand-eller vandur), men i øvrigt har alle ure i praksis det træk fælles med Bergson-uret, at de er irreversible og kun kan fungere, hvis de konstant dissiperer energi. Det reversible Newton-ur er derimod en fiktion, som ikke kan anvendes i praksis til tidsmåling. Betegnelserne på de to forskellige tidsdefinitioner er lånt fra indledningskapitlet "Newtonian and Bergsonian Time" til Norbert Wiener's epokegørende bog "Cybernetics", som kom i 1948.

Henri Bergson (1859-1941) var en fransk filosof, som er mest kendt for bogen "L'Evolution Créatrice" ("Den skabende udvikling") fra 1907. Bergson rettede en kraftig kritik mod den naturopfattelse, som kommer til udtryk i den deterministiske, klassiske mekanik. Specielt kritiseredes mekanikkens reversible tidsbegreb. Psykologisk velkendte fænomener som tidens gang og tidens retning er uforståelige med Newton's tidsbegreb, og spontan udvikling samt individets frie vilje er utænelige begreber i den mekaniske tradition. I stedet mener Bergson, at tidsbegrebet må forstås "indefra", og at den objektive tid er en intersubjektiv abstraktion af den intuitive tidsoplevelse.

I fysikken defineres den Newtonske tid ved det "t", der optræder i Newton's 2. lov, $m \, dv/dt = F$, medens den Bergsonske tid defineres ved irreversible bevægelsesligninger, først og fremmest diffusionsligningen, som vi senere skal beskæftige os indgående med. Den Newtonske "definition" fører til en cirkelslutning, som kun kan brydes ved et metafysisk postulat (den absolutte tid) eller ved at lægge det irreversible, Bergsonske tidsbegreb til grund.

1.2. Komplekse, frekvensafhængige responsefunktioner.

Diskussionen af de tidshomogene systemers responseegenskaber bliver meget simplere, når man som standard-stimuli anvender tidshomogene funktioner i stedet for Heaviside's enhedsfunktion. Som et hovedresultat opnås, at de integral- og differentiallyigninger, som optræder ved bestemmelse af de tidsafhængige responsefunktioner for sammensatte energibandsmodeller (jfr. afsnit 1.1.4), kan erstattes med algebraiske ligninger. Til gengæld bliver den reelle fysiske tid erstattet med en knapt så anskuelig kompleks frekvens, og responsefunktionen bliver selv kompleks. Oversættelsen frem og tilbage mellem de reelle, tidsafhængige og de komplekse, frekvensafhængige responsefunktioner sker ved hjælp af den såkaldte Laplacetransformation, som i visse tilfælde kan føres over i den simplere og mere velkendte teknik Fouriertransformation. I denne paragraf gives en "ståltrådsmatematisk" introduktion til disse teknikker med specielt henblik på de fysiske forhold, som gør sig gældende for reaktive systemers response. En introduktion til de grundlæggende matematiske begreber fra den komplekse funktionsteori, som ikke går for meget i detaljer, kan findes i ref.3.

En kortfattet, pragmatisk skitse af komplekse tal og funktioner med omtale af nogle beregningsteknikker for lommeregnere gives i appendix A. I appendix B resumeres de vigtigste formler fra denne og den følgende paragraf. Diskussionen af den dæmpede harmoniske oscillator i afsnit 1.2.5 er fulgt op med et regneprogram i appendix C.

1.2.1. Tidshomogene standardsignaler.

Når et tidshomogent system påvirkes af et signal $\phi(t)$, er det i en vis forstand det samme eksperiment at påvirke systemet med signalet $\phi(t+\tau)$, som kun adskiller sig fra det første ved en translation af en vilkårlig størrelse τ på tidsaksen. Forskellen på de to signaler svarer til en omdefinering af nulpunktet for tidsskalaen og vedrører egentlig ikke systemet.

Matematisk kan dette forhold udtrykkes ved at vi indfører en tidstranslationsoperator \mathbf{T}_τ , hvor parameteren τ kan antage alle reelle værdier. Hvis vi lader denne operator virke på en stimulus $\phi(t)$:

$$\mathbf{T}_\tau \phi(t) = \phi(t+\tau) \quad (1)$$

så vil systemets response fremgå af responset $\gamma(t)$ på den oprindelige stimulus ved den samme tidstranslation. Vi udtrykker sammenhængen mellem stimulus og response ved den lineære response-operator \mathbf{R} (sml. lign. 1.1.3.3)

$$\gamma(t) = \mathbf{R}\phi(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-t') d\phi(t') \quad (2)$$

og har så som følge af tidshomogeniteten

$$\mathbf{R}\phi(t+\tau) = \gamma(t+\tau)$$

eller

$$\mathbf{R}\mathbf{T}_\tau \phi(t) = \mathbf{T}_\tau \gamma(t) = \mathbf{T}_\tau \mathbf{R}\phi(t) \quad (3)$$

Med andre ord: tidshomogeniteten er ensbetydende med, at responseoperatoren \mathbf{R} kommuterer med tidstranslationsoperatoren \mathbf{T}_τ for alle reelle værdier af τ :

$$\mathbf{R}\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau \mathbf{R} \quad (4)$$

Nu er det klart, at systemets responseegenskaber ville være særligt simple at diskutere, hvis vi kunne finde en særlig klasse af standard-stimuli $\phi_s(t)$, som er egenfunktioner til responseoperatoren R , d.v.s.

$$R\phi_s(t) = r_s \cdot \phi_s(t) \quad (5)$$

hvor r_s er en konstant, som kaldes egenværdien, hørende til egenfunktionen ϕ_s . For sådanne stimuli fås altså et response, som til hver en tid er proportionalt med værdien af stimulus til samme tid, og systemet ville derfor i denne sammenhæng kunne behandles matematisk på samme måde som et passivt system. Hvis både ϕ og γ er enten strøm eller spænding, vil (5) være opfyldt for enhver funktion hvis og kun hvis systemet er en (x-eller o-)læk. For et lager, vil (5) derimod kun være opfyldt, hvis $\phi_s(t)$ er en eksponentialfunktion af tiden. Umiddelbart ville man synes, at klassen af egenfunktioner til R må være afhængig af systemets art, og at det er umuligt at sige noget generelt om disse funktioners udseende uden at kende operatoren R .

Heldigvis forholder det sig sådan, at de specielle egenskaber af T_τ -operatoren i forbindelse med kommutations-egenskaben (4) sikrer, at egenfunktioner til T_τ automatisk vil være egenfunktioner til en vilkårlig responseoperator R . D.v.s. for tidshomogene systemer behøver vi slet ikke at kende den nøjagtige systemadfærd for at løse egenfunktionsproblemet (5); vi kan løse det én gang for alle ved at bestemme egenfunktionerne af den systemuafhængige tids-translationsoperator.

For at indse dette, noterer vi først, at egenværdiligningen

$$T_\tau \phi_s(t) = \lambda_s(\tau) \cdot \phi_s(t) \quad (6)$$

hvor τ er en vilkårlig forskydning, bestemmer funktionen

$\phi_s(t)$ entydigt, pånær en arbitrær multiplikativ konstant K :

$$\phi_s(t) = K \cdot e^{st} \quad (7)$$

med den tilhørende egenverdi

$$\lambda_s(\tau) = e^{s\tau} \quad (8)$$

hvor s (og dermed $\lambda_s(\tau)$) kan være et vilkårligt komplekst tal.

Entydighedssætningen bevises lettest ved, at vi fører differensligningen (6) over i en 1.ordens differentiaalligning. Operatorerne \mathbf{T}_τ udgør en kommutativ gruppe, d.v.s. for to vilkårlige tidsforskydninger τ og σ gælder altid $\mathbf{T}_\tau \mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_{\tau+\sigma}$. Da funktionen $\phi_s(t)$ er egenfunktion til både \mathbf{T}_τ og \mathbf{T}_σ , må vi have $\lambda_s(\tau) \cdot \lambda_s(\sigma) = \lambda_s(\tau+\sigma)$, eller for et vilkårligt reelt tal ξ :

$$\lambda_s(\xi \cdot \tau) = [\lambda_s(\tau)]^\xi$$

Ligning (6) medfører derfor, at

$$\frac{\phi_s(t+\xi \cdot \tau) - \phi_s(t)}{\xi \cdot \tau} = \frac{[\lambda_s(\tau)]^\xi - 1}{\xi \cdot \tau} \cdot \phi_s(t)$$

Lader vi nu ξ gå mod nul, får vi

$$\frac{d\phi_s(t)}{dt} = \phi_s(t) \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\lambda_s(\tau)^\xi - 1}{\xi \cdot \tau} = \phi_s(t) \frac{\ln \lambda_s(\tau)}{\tau}$$

Da $\phi_s(t)$ ikke afhænger af τ , må forholdet $\ln \lambda_s(\tau)/\tau$ heller ikke afhænge af τ , men kun af s . Dette forhold kan derfor benyttes til definition af parameteren s , og vi får derfor ligning (8), idet vi benytter udvidelsen af logaritmefunktionen og eksponentialfunktionen til de komplekse tals domæne. Den komplekse funktion $\phi_s(t)$ er så bestemt ved differentiaalligningen

$$\frac{d\phi_s(t)}{dt} = s \cdot \phi_s(t)$$

som har den entydige løsning (7), hvor K er en arbitrær kompleks konstant.

Af (4) fås nu

$$\mathbf{T}_\tau \mathbf{R} \phi_s(t) = \mathbf{R} \mathbf{T}_\tau \phi_s(t) = \lambda_s(\tau) \cdot \mathbf{R} \phi_s(t)$$

d.v.s. funktionen $R\phi_s(t)$ er også egenfunktion til T_τ med samme egen værdi, $\lambda_s(\tau)$. Ifølge ovenstående entydighedsætning, må $R\phi_s(t)$ derfor være proportional med $\phi_s(t)$, og det vil jo netop sige, at $\phi_s(t)$ er en egenfunktion til operatoren R .

Funktionsklassen (7) kaldes de tidshomogene funktioner, da de er bestemt som egenfunktioner til tidstranslationsoperatoren. Hvis en funktion fra denne klasse anvendes som stimulus til et tidshomogent system, kan vi altså være sikre på, at systemets response vil tilhøre den samme funktionsklasse og endda være proportional med stimulus (d.v.s. s -værdien for stimulus og response er den samme).

Nu er det imidlertid ikke alle funktioner af typen (7), som er mulige stimuli til et reelt fysisk system. Først og fremmest må funktionen respektere tidsordenen i et stimulus-response eksperiment, d.v.s. stimulus skal forsvinde i den uendeligt fjerne fortid, $t = -\infty$, og må tilkobles gradvist, efterhånden som tiden går. Hvis vi opspalter parameteren s i realdel og imaginærdel:

$$s = \epsilon - i\omega \quad (9)$$

kan $\phi_s(t)$ i ligning (7) skrives på formen

$$\phi_s(t) = K \cdot e^{\epsilon t} \cdot (\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (10)$$

Det ses heraf, at funktionen kun respekterer tidsordenen, hvis ϵ , realdelen af s , er positiv.

$$\epsilon = \text{Re}(s) > 0 \quad (11)$$

Det komplekse s kaldes Laplace-frekvensen, medens ω og ϵ benævnes hhv. frekvensen (den reelle frekvens) og tilkoblingsparameteren.

Funktionerne (10) er i almindelighed komplekse og kun reelle, hvis $\omega=0$. Da stimulus-response variable for et reelt system er reelle funktioner af tiden, kunne man fristes til kun at acceptere funktioner med $\omega=0$ som stimuli. Dette ville imidlertid være en dårlig strategi.

Sagen er nemlig, at brugen af standard stimuli kun er praktisk, hvis disse kan defineres som et fuldstændigt funktionssæt. D.v.s. vi vil gerne opnå, at en vilkårlig stimulus kan udtrykkes som en superposition (vægtet sum) af standard-stimuli. De trigonometriske funktioner, som fås for $\varepsilon=0$, udviser en vis grad af fuldstændighed, som kommer til udtryk i teknikker som Fourier-opløsning ved summer og integraler, anvendelig på en stor funktionsklasse. Desværre repræsenterer de trigonometriske funktioner et grænsetilfælde, som strengt taget ikke er med i klassen af acceptable stimuli på grund af tidsordningsbetingelsen (11). De reelle eksponentialfunktioner $K \cdot e^{\varepsilon t}$ svarende til et reelt K og med $\omega=0$, $\varepsilon>0$ udgør til gengæld ikke et fuldstændigt funktionssæt.

Vi slipper altså ikke uden om de komplekse funktioner, hvis vi vil have et fuldstændigt sæt af tidshomogene stimuli. Realiteten af de fysiske signaler må så opnås ved at benytte en sum af to standardstimuli, som er hinandens kompleks-konjugerede

$$\begin{aligned}\phi_s^{(r)}(t) &= \text{Re}[\phi_s(t)] = \frac{1}{2}(\phi_s(t) + \phi_s^*(t)) \\ &= \frac{1}{2}K \cdot e^{st} + \frac{1}{2}K^* \cdot e^{s^* \cdot t}\end{aligned}\tag{12}$$

hvor stjernen betyder kompleks konjugering:

$$\begin{aligned}s^* &= \text{Re}(s) - i \cdot \text{Im}(s) = \varepsilon + i\omega \\ K^* &= \text{Re}(K) - i \cdot \text{Im}(K) = K_1 - iK_2\end{aligned}\tag{13}$$

Det reelle signal (12) tilhører ikke klassen af tidshomogene funktioner (undtagen for $\omega=0$), men er en sum af to forskellige funktioner fra denne klasse. Disse to funktioner kan sammenlignes med "visere", som roterer hver sin vej i den komplekse plan med fælles omdrejningspunkt i nulpunktet. Det første led i (12) kaldes den retrograde viser og har omløbsretning med uret (vi antager her, at ω er positiv), medens det andet led kaldes den progressive viser og roterer mod uret med samme cykliske frekvens ω . Samtidigt med rotationen vokser længden af de to visere eksponentielt med tiden, således at endepunkterne af dem aftegner to logaritmiske spiraler, der ligger symmetrisk om den reelle akse. Det resulterende reelle signal (12) er så en svingende funktion med eksponentielt voksende amplitude

$$\phi_s^{(r)}(t) = \phi_0 \cdot e^{\epsilon t} \cdot \cos(\omega t - \phi_1) \quad (14)$$

hvor de reelle konstanter, amplitudekonstanten ϕ_0 og fasekonstanten ϕ_1 afhænger af real- og imaginærværdien af den komplekse konstant K

$$\begin{aligned} \phi_0 &= |K| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ \phi_1 &= \text{Arcsin} \frac{K_2}{|K|} \end{aligned} \quad (15)$$

I praksis vil den eksponentielt voksende karakter af signalet (14) sætte en øvre tidsgrænse for, hvor længe signalet kan anvendes, inden systemets linearitet bryder sammen. En streng linearitet kan jo kun forventes at være opfyldt i grænsen for uendeligt små stimuli. Den øvre tidsgrænse vil være en aftagende funktion af ϵ , og hvis vi lader ϵ gå mod nul, kan vi få ubegrænset tid til rådighed, blot amplituden ϕ_0 er tilstrækkelig lille. I praksis går man derfor til grænsen $\epsilon=0$ og betragter systemets response på et signal fra en sinusgenerator med frekvensen ω , men man må gøre

sig klart, at et rent trigonometrisk input signal (for alle tider) aldrig kan komme på tale på grund af tidsordenen i den eksperimentelle situation, som kræver, at systemet er uforstyrret til at begynde med. I næste afsnit skal vi se, at funktionerne ϕ_s med $\epsilon > 0$ kan bruges som basis for sættet af alle mulige stimuli, der respekterer tidsordenen og vokser langsommere end eksponentielt for $t \rightarrow \infty$.

I teorien vil vi ikke bruge udtrykket (14) særlig meget, da det ikke er tidshomogent og derfor i almindelighed ikke en egenfunktion til response-operatoren R . Lineariteten og realiteten af R sikrer imidlertid, at responset på (14) vil kunne udtrykkes som en sum af to visere, som hver for sig er response på den tilsvarende viser i (12):

$$R(\phi_s(t) + \phi_s^*(t)) = R\phi_s(t) + R\phi_s^*(t) = \gamma_s(t) + \gamma_s^*(t) \quad (17)$$

D.v.s. vi kan nøjes med at udregne responset på den ene af de to visere, og ligesom den faktiske stimulus er realdelen af viseren, således vil det faktiske response være realdelen af responset på viseren. Det er altså ligemeget, hvilken af de to visere, ϕ_s og ϕ_s^* , der betragtes som stimulus. Valget er en konvention, men må foretages, og vi må holde os til denne konvention i det følgende. Symbolikken har naturligvis allerede afsløret, at vi her vælger $\phi_s(t)$ fra ligning (10), med s givet ved (9), men i andre fremstillinger af responseteorien kan man komme ud for det modsatte valg og derved til komplekse formler for responsefunktioner, som afviger fra de her givne ved fortegnet på den imaginære enhed "i" (som i øvrigt ofte benævnes "j").

Vi skal nu udregne responset på en viserstimulus, som vi tænker os er en spænding:

$$e_s(t) = \tilde{e}_s \cdot e^{st} = \tilde{e}_s e^{\epsilon t} \cdot (\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (18)$$

hvor \tilde{e}_s er amplitudekonstanten, svarende til K i ligning (7). Strømresponset er så

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \int_{-\infty}^t F(t-t') e(t') dt' \\ &= \tilde{e}_s \int_{-\infty}^t F(t-t') e^{st'} dt' \\ &= \tilde{e}_s \cdot e^{st} \cdot \int_{-\infty}^t F(t-t') e^{s(t-t')} dt' \\ &= \tilde{e}_s \cdot e^{st} \cdot \int_0^{\infty} F(t') e^{-st'} dt' \end{aligned}$$

hvor $F(t)$ er den tidsafhængige lethedsfunktion. Vi ser altså, at forholdet mellem strømresponse og spændingsstimulus har den tidsuafhængige værdi

$$\tilde{Y}(s) = \frac{f_s(t)}{e_s(t)} = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt \quad (18)$$

Dette forhold, som i almindelighed er en kompleks funktion af den komplekse "frekvens" s , kaldes den komplekse admittans for systemet. Transformationen (18), som fører den tidsafhængige lethedsfunktion over i den komplekse admittans, kaldes en Laplace-transformation.

Udsat for de komplekse standardstimuli optræder systemet altså som en o-læk med den komplekse ledningsevne $\tilde{Y}(s)$. Hvis $\tilde{Y}(s)$ er forskellig fra nul, kan vi formelt vende kausaliteten og derved definere den komplekse impedans:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{e_s(t)}{f_s(t)} = \frac{1}{\tilde{Y}(s)} \quad (19)$$

Hvis systemet har spændingsinput kan vi ikke uden videre udtrykke $\tilde{Z}(s)$ ved den uegentlige stivhedsfunktion $G(t)$ med et integral svarende til (18), for $G(t)$ vil jo så have en ikke-integrabel singularitet for $t=0$. Omvendt, hvis systemet har strøminput, definerer vi

$$\tilde{Z}(s) = \int_0^{\infty} G(t)e^{-st} dt \quad (20)$$

$$\text{og } \tilde{Y}(s) = \frac{1}{\tilde{Z}(s)}$$

Hver af de to komplekse responsefunktioner kan opspaltes i realdel og imaginærdel

$$\tilde{Y}(s) = \tilde{Y}_1(s) + i\tilde{Y}_2(s) \quad (21)$$

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{Z}_1(s) + i\tilde{Z}_2(s)$$

Hvis vi vil beregne enten \tilde{Z}_1 eller \tilde{Z}_2 ved ligning (19), får vi brug for både \tilde{Y}_1 og \tilde{Y}_2 :

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{Y}_1}{\tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2} \quad (22)$$

$$\tilde{Z}_2 = - \frac{\tilde{Y}_2}{\tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2} \quad (23)$$

Betingelsen for, at vi kan udregne systemets response på et periodisk signal med frekvensen ω er, at den egentlige responsefunktion har en endelig grænseværdi i punktet ω på den reelle frekvensakse (d.v.s. den imaginære s-akse). D.v.s. for spændingsinput, at grænseværdien

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \tilde{Y}(\epsilon - i\omega) = \hat{Y}(\omega) = \hat{Y}_1(\omega) + i\hat{Y}_2(\omega) \quad (24)$$

eksisterer. I dette tilfælde kan vi udregne den gennemsnitlige dissipationshastighed af energien som den samlede energiindstrømning over en periode, divideret med periodens længde, $2\pi/\omega$:

$$w_{\omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} e_s^{(r)}(t) \cdot f_s^{(r)}(t) dt =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} [\tilde{e}_s e^{-i\omega t} + \tilde{e}_s^* e^{i\omega t}] \cdot \frac{1}{2} [\hat{Y}(\omega) \tilde{e}_s e^{-i\omega t} + \hat{Y}^*(\omega) \tilde{e}_s^* e^{i\omega t}] dt$$

Da integralet over et helt antal perioder af de komplekse (trigonometriske) eksponentialfunktioner er nul, får vi kun bidrag fra de tidsuafhængige led, som fremkommer, når $e^{i\omega t}$ ganges med $e^{-i\omega t}$. D.v.s. vi finder

$$\begin{aligned} w_\omega &= \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \tilde{e}_s \cdot \tilde{e}_s^* \cdot [Y(\omega) + Y^*(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\tilde{e}_s|^2 \cdot \hat{Y}_1(\omega) \end{aligned} \quad (25)$$

Vi vil kort betegne denne størrelse som dissipationen for frekvensen ω . De dissipative systemegenskaber er altså alene bestemt af realdelen af responsefunktionen på den reelle frekvensakse (den imaginære s-akse). Hvis vi formelt vender kausaliteten, er input-signalviseren givet ved

$$f_s(t) = \tilde{f}_s \cdot e^{st} \quad (26)$$

hvor $\tilde{f}_s = \tilde{Y}(s) \cdot \tilde{e}_s \quad (27)$

Dissipationen for den reelle frekvens ω er så givet ved

$$w_\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} |\tilde{f}_s|^2 \cdot \tilde{Z}_1(s) = \frac{1}{2} |\tilde{f}_s|^2 \cdot \hat{Z}_1(\omega) \quad (28)$$

og man overbeviser sig let om, at dette udtryk er identisk med (25) på grund af (22) og (27). Der er altså en formel ligestilling mellem den egentlige og den uegentlige responsefunktion, svarende til at systemet formelt behandles som et passivt system. De faktiske kausalforhold vil imidlertid afsløres, når vi ser nøjere på de matematiske egenskaber af de to responsefunktioner for et givet system.

Som nævnt vil man ofte i teorien lade som om de faktiske signaler i energibåndet er givet ved de komplekse visere (18) og (26). Hvis \tilde{f}_s og $\tilde{Z}(s)$ er reelle, vil \tilde{e}_s også være reel, og for $\epsilon=0$ har vi en situation svarende til, at vi

sender en vekselstrøm med amplituden \tilde{f}_s gennem en ohmsk modstand R . Ifølge (28) og (25) er varmeudviklingen pr. tidsenhed så givet ved

$$\begin{aligned} w_\omega &= \frac{1}{2} \tilde{f}_s^2 \cdot R = R \cdot (\tilde{f}_s / \sqrt{2})^2 \\ &= \frac{1}{R} \cdot (\tilde{e}_s / \sqrt{2})^2 \end{aligned} \quad (29)$$

d.v.s. det samme som Joule-varmen af en jævnstrøm med størrelsen $\tilde{f}_s / \sqrt{2}$. Størrelserne $\tilde{f}_s / \sqrt{2}$ og $\tilde{e}_s / \sqrt{2}$ kaldes derfor hhv. den effektive strøm og den effektive spænding.

Man skal altså passe lidt på: ganske vist opfører signalamplituderne i vekselstrømsteorien sig ganske som strøm og spænding for et passivt system i de lineære relationer (f.eks. (19), som svarer til Ohm's lov), men i det kvadratiske udtryk for dissipationen optræder der en divisor 2 som tegn på, at brugen af de komplekse signalvisere i stedet for de reelle signaler (12) og (17) er lidt af en tilsnigelse. (En stor del af responseteoretikers arbejde består i jagt på forsvundne totaler).

1.2.2. Fourier- og Laplace-transformationer.

Nytten af de tidshomogene standardsignaler beror som sagt på, at de udgør et fuldstændigt funktionssystem, d.v.s. alle de funktioner, der kan komme på tale som stimulus og response, kan udtrykkes ved superposition af disse funktioner. For en vilkårlig stimulus $\phi(t)$ søger vi altså en "opløsning" på standardfunktionerne e^{st} . Den mest almindelige form for en sådan opløsning udtrykkes ved et såkaldt Lebesgue-integral

$$\phi(t) = \int_C e^{st} d\tilde{\phi}(s) \quad (1)$$

hvor $\tilde{\phi}(s)$ er et komplekst "mål" over den komplekse plan og C betegner et område i den del af planen, hvor funktionerne e^{st} respekterer tidsordenen, d.v.s. den højre halvplan $\epsilon = \text{Re}(s) > 0$.

Vi skal imidlertid ikke gå nøjere ind i teorien for de super-generelle integralformer, Lebesgue- og Stieltje. En introduktion til Lebesgue integralet og dets anvendelse i Fourieranalysen kan findes i ref.4 eller ref.5. I de tilfælde, vi kommer ud for, kan vi altid betragte området C som en passende "kontur", d.v.s. en endimensional kurve i den komplekse plan, som endda altid vil kunne "deformeres" til en ret linje. Givet en parameterfremstilling for konturen C vil "målet" $\tilde{\phi}(s)$ kunne betragtes som en kompleks funktion af en reel variabel σ (parameteren), og "differentialen" $d\tilde{\phi}(s)$ vil kunne udtrykkes ved en differentialkvotient og et linjeelement på sædvanlig måde:

$$d\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}'(s) \cdot ds = \frac{d\tilde{\phi}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot d\sigma \quad (2)$$

Integralet (1) vil da kunne udtrykkes ved et sædvanligt Riemann'sk integral, hvor der ganske vist kan forekomme

δ -funktions-singulariteter i integranden, svarende til diskontinuiteter i "målet" $\tilde{\phi}(s)$.

Som eksempel på en sådan funktionsopløsning ser vi på Fourier-integralet

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot \hat{\phi}'(\omega) \cdot d\omega \quad (3)$$

som fremgår af (1), hvis konturen C er den imaginære s-akse (også kaldet den reelle frekvensakse). Fourieropløsning er en teknik, som kan anvendes på funktioner, som er "kvadratisk integrable" d.v.s. med en endelig værdi af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt$$

I dette tilfælde vil $\hat{\phi}'(\omega)$, være en ikke-singulær funktion, som også er kvadratisk integrabel, og som er givet ved $\phi(t)$ ved Fourier-transformationen

$$\hat{\phi}'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{i\omega t} dt \quad (4)$$

Vi kan benytte en mere kortfattet skrivemåde for transformationen (4) ved at indføre Fourier-operatoren F:

$$F\{\phi(t), \omega\} = \hat{\phi}'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

Den omvendte transformation (3) er så givet ved den inverse Fourier-operator F^{-1} :

$$F^{-1}\{\hat{\phi}'(\omega), t\} = \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}'(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6)$$

Klassen af kvadratisk integrable funktioner, som Fourier integralteknikken kan anvendes på, er ikke tilstrækkelig omfattende til responseteoriens formål. F.eks. er de tidligere benyttede standardstimuli, nemlig Heaviside funk-

tionen $E(t)$ og de tidshomogene funktioner e^{st} ikke kvadratisk integrable. Vi kan udvide teknikens anvendelse noget ved at tillade delta-funktions singulariteter i "spektret" $\hat{\phi}'(\omega)$, f.eks.

$$\hat{\phi}'(\omega) = \hat{\phi}'_c(\omega) + \sum_i \hat{\phi}_i \cdot \delta(\omega - \omega_i) \quad (7)$$

hvor $\hat{\phi}'_c$ er en kontinuert og kvadratisk integrabel funktion, og hvor koefficienterne $\hat{\phi}_i$ i "linjespektret" er kvadratisk summable: (selv om der kan være uendelig mange "linjer")

$$\sum_i |\hat{\phi}_i|^2 < \infty \quad (8)$$

Når vi indsætter et sådant blandet spektrum i (3), fås et tidsafhængigt signal af typen

$$\phi(t) = \phi_c(t) + \sum_i \hat{\phi}_i e^{-i\omega_i t} \quad (9)$$

hvor leddet ϕ_c er en kvadratisk integrabel funktion (der forsvinder i begge grænser $t = -\infty$ og $t = \infty$), medens andet led i almindelighed er en næsten periodisk funktion. I det specielle tilfælde, hvor frekvenserne ω_i i linjespektret er kommensurable, udarter den næsten-periodiske funktion til en periodisk funktion.

Ved Fourier-transformation, d.v.s. indsættelse i (5), af den blandede funktion (9), skal vi få det blandede spektrum (7). D.v.s. vi må definere den Fourier-transformerede af den periodiske funktion $e^{-i\omega_i t}$ som deltafunktionen $\delta(\omega - \omega_i)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_i)t} dt = \delta(\omega - \omega_i) \quad (10)$$

$$\text{eller} \quad F\{e^{-i\omega_i t}, \omega\} = \delta(\omega - \omega_i)$$

Den inverse transformation (6) giver

$$F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_i), t\} = e^{-i\omega_i t} \quad (11)$$

På samme måde kan vi tillade deltafunktioner af tiden:

$$F\{\delta(t-t_k), \omega\} = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t_k} \quad (12)$$

$$F^{-1}\{e^{i\omega t_k}, t\} = 2\pi \cdot \delta(t-t_k) \quad (13)$$

Specielt ses, at den Fouriertransformerede af den ufor-skudte deltafunktion $\delta(t)$ er $1/2\pi$ altså en frekvensuafhængig konstant.

Ved at tillade deltafunktioner i teorien kan vi altså udvide anvendelsen af Fourierteknikken til de tidshomogene funktioner $e^{-i\omega t}$, som omfatter den del af funktionsklassen e^{st} , hvor s ligger på den imaginære akse. Imidlertid er det, på grund af tidsordenen i responseeksperimentet, de funktioner e^{st} , hvor s har en positiv realdel ϵ , som især er relevante. De tilladte stimuli skal forsvinde for $t=-\infty$, men ikke nødvendigvis for $t=\infty$, og Fourier-integralet (5) kan derfor ikke forventes at konvergere. Hvis vi derimod tilføjer et reelt led $-\epsilon t$ til eksponenten i (5), så kan vi med rimelighed forvente, at den aftagende eksponentialfunktion $e^{-\epsilon t}$ kan gøre integralet konvergent, i hvert tilfælde hvis stimulus $\phi(t)$ vokser langsommere end eksponentielt for $t \rightarrow \infty$.

Vi ledes derfor til at betragte en analytisk udvidet Fourier-transformation

$$F\{\phi(t), z\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{izt} dt = \hat{\phi}'(z) \quad (14)$$

hvor Fourier-frekvensen z nu er kompleks og begrænset til øvre halvplan:

$$z = \omega + i\epsilon ; \epsilon > 0 \quad (15)$$

Fourier-frekvensen z hænger sammen med parameteren s for de tidshomogene funktioner ved relationen

$$s = -iz \quad ; \quad z = is \quad (16)$$

I overensstemmelse med sprogbrugen i foregående afsnit vil vi kalde s for Laplace-frekvensen, medens ω kaldes den reelle frekvens (eller blot frekvensen), og ϵ kaldes tilkoblingsparameteren (egentlig: "den reciprokke tilkoblingstid"). Transformationen (14) kan også udtrykkes ved Laplace-frekvensen:

$$F\{\phi(t), is\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-st} dt = \tilde{\phi}'(s) \quad (17)$$

hvor s er begrænset til højre halvplan:

$$s = \epsilon - i\omega \quad ; \quad \epsilon > 0 \quad (18)$$

Læg mærke til, at den Fouriertransformerede af $\phi(t)$ kan udtrykkes som funktion af enten Fourier-frekvensen z eller Laplace-frekvensen s . Der er således tale om to forskellige funktioner, selvom det er den samme størrelse, det drejer sig om, og vi indicerer med en " $\hat{}$ " (en "hat"), over funktionssymbolet ϕ' , når det er z , som er argumentet, og med en " $\tilde{}$ " (en "tilde"), når det er s .

Til den analytisk udvidede Fouriertransformation i ligning (17) kan vi også definere den omvendte transformation F^{-1} . Integrationsvejen er nu en kontur, der kan vælges som et ret linje med en konstant (positiv) værdi af tilkoblingsparameteren ϵ (vist på fig.1).

$$F^{-1}\{\hat{\phi}'(z), t\} = \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \hat{\phi}'(z) e^{-izt} dz \quad (19)$$

$$F^{-1}\{\tilde{\phi}'(s), t\} = -i \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \tilde{\phi}'(s) e^{st} ds \quad (20)$$

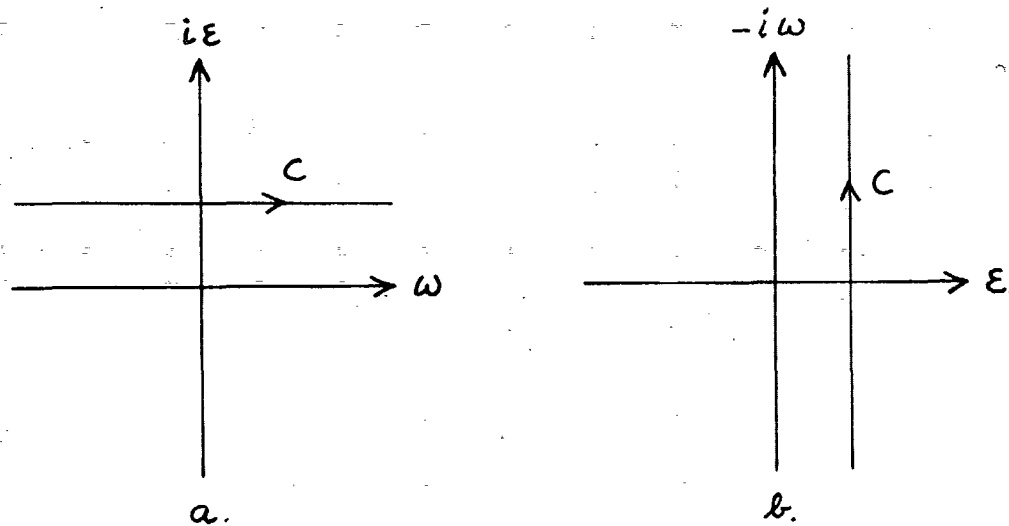


Fig.1. Integrationskonturen (C) ved invers Fouriertransformation; a: z-planen, lign.(19). b: s-planen, lign. (20).

Når stimulus $\phi(t)$ vokser langsommere end eksponentielt for $t \rightarrow \infty$, vil den Fouriertransformerede $\hat{\phi}'(z)$ være analytisk i øvre halvplan, d.v.s. uden singulariteter og vilkårligt ofte differentiabel i øvre halvplan $\epsilon > 0$. Det er da ligegyldigt hvor højt oppe i øvre halvplan, man lægger integrationslinjen C i fig. 1a. For en analytisk funktion gælder nemlig Cauchy's integralsætning, som siger, at integralet langs en vilkårlig lukket kontur af en analytisk funktion $f(z)$ er nul, forudsat at $f(z)$ er uden singulariteter inden for konturen.

$$\oint f(z) dz = 0 \quad (21)$$

Hvis vi betragter to parallelle integrationslinjer med forskellige positive ϵ -værdier i fig. 20a, så kan vi tænke os, at sammenføje linjernes "endepunkter i det uendelige", hvorved der fremkommer en lukket kontur. Da denne kontur forløber helt i øvre halvplan, hvor $\hat{\phi}'(z)$ (og dermed også $\hat{\phi}'(z) \cdot e^{-izt}$) er analytisk, kan vi anvende Cauchy's integral-

sætning. D.v.s. hvis vi integrerer tilhøjre langs den nederste linje og derefter tilvenstre langs den øverste, får vi nul, og derfor må integration til højre langs en vilkårlig linje parallel med den reelle akse på fig.1a. altid give samme resultat.

Hvis stimulus vokser langsommere end eksponentielt for $t \rightarrow \infty$, må det samme gælde for responset, medmindre systemet er ustabilt. D.v.s. vi kan bestemme en funktion $\hat{\gamma}'(z)$, som er den (analytisk udvidede) Fourier-transformerede af responset $\gamma(t)$, og vi kan regne med, at $\hat{\gamma}'(z)$ er analytisk i øvre halvplan. Hvis vi skulle finde, at $\hat{\gamma}'(z)$ har en singularitet, f.eks. en såkaldt pol af 1. orden (den hyppigst forekommende type singularitet i responseteorien)

$$\hat{\gamma}'(z) \propto \frac{1}{z-z_0} \quad (22)$$

i et punkt z_0 i øvre halvplan, så er det tegn på, at systemet er ustabilt. Et sådant system vil spontant forandre sine egenskaber, d.v.s. det kan ikke opfattes som reaktivt, men snarere som aktivt, og det kan derfor ikke beskrives med responseteoriens begrebsapparat. Vi må derfor regne med, at det Fouriertransformerede response $\hat{\gamma}'(z)$ er analytisk i øvre halvplan. Til gengæld er der ikke spor i vejen for, at den analytiske fortsættelse af funktionen kan have poler i den modsatte halvplan og/eller på ω -aksen. Det må tværtimod forventes, at der her optræder en form for uendelighed, da en analytisk funktion kun kan være begrænset i hele den komplekse plan, hvis den er konstant.

Lad os tænke os, at systemet udsættes for en spændingsstimulus $e(t)$. Strømresponset $f(t)$ er så givet ved

$$f(t) = \int_{-\infty}^t F(t-t')e(t')dt' \quad (23)$$

Ved Fourier-transformation fås (sml. (17)):

$$\tilde{f}'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \left\{ \int_{-\infty}^t F(t-t') e^{(t')} dt' \right\} dt$$

Ved omvendning af integrationsordenen og yderligere manipulation findes så:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t')} \cdot \left\{ \int_{t'}^{\infty} F(t-t') e^{-st} dt \right\} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t')} \cdot e^{-st'} \left\{ \int_{t'}^{\infty} F(t-t') \cdot e^{-s(t-t')} dt \right\} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t)} e^{-st} dt \cdot \int_0^{\infty} F(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \tilde{e}'(s) \tilde{Y}(s) \end{aligned} \quad (24)$$

hvor $\tilde{e}'(s)$ er den Fourier-transformerede spændings-stimulus og $\tilde{Y}(s)$ er den komplekse admittans, som blev indført i foregående afsnit, og som fremgår af lethedsfunktionen $F(t)$ ved en Laplace-transformation (sml. ligning 1.2.1.18).

Vi ser altså, at relationen mellem stimulus, response og responsefunktion, som i den tidsafhængige teori må udtrykkes ved det såkaldte foldningsintegral (23), i den frekvensafhængige teori udtrykkes ved en simpel algebraisk ligning. Vi har nu simpelthen for en vilkårlig responsefunktion

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{Y}'(s)}{\tilde{\phi}'(s)} \quad (25)$$

hvor $\tilde{\phi}'(s)$ og $\tilde{Y}'(s)$ er de komplekse signal-amplituder, d.v.s. de Fourier-transformerede af hhv. stimulus og response. Stabiliteten af systemet medfører så, at $\tilde{R}(s)$ er analytisk uden singulariteter i højre halvplan.

Den væsentligste forskel på Fourier- og Laplace-transformation er, at Laplace-integralet kun går fra nul til uendelig, medens Fourier-integralet går fra $-\infty$ til ∞ , og

grunden til, at den komplekse admittansfunktion $\tilde{Y}(s)$ er givet ved en Laplace-transformation er altså, at lethedsfunktionen $F(t)$ kun er defineret for $t > 0$. Vi kan imidlertid let udvide definitionen ved blot at fastsætte at $F(t)$ skal være nul for negative tider, således at det også bliver muligt at Fourier-transformere $F(t)$. Vi får så, idet vi indfører operatorsymbolet \mathbf{L} for Laplace-transformationen (sml. (17)):

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(s) &= \mathbf{L}\{F(t), s\} = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt \\ &= 2\pi \cdot \mathbf{F}\{F(t), is\}\end{aligned}\quad (26)$$

Ved omvendt Fouriertransformation (sml. (20)) får vi så

$$\begin{aligned}F(t) &= \mathbf{L}^{-1}\{\tilde{Y}(s), t\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}^{-1}\{\tilde{Y}(s), t\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \tilde{Y}(s) e^{st} ds\end{aligned}\quad (27)$$

hvorved vi har fundet opskriften på den inverse Laplace-operator (Fourier-Mellins sætning).

Integralet i (27) må altså have den egenskab at være nul for $t < 0$. Dette kan vi også indse ved at betragte fig. 2. For $t < 0$ vil en halvcirkel, som lukker integrationsvejen uendelig langt ude i højre halvplan ikke give noget bidrag til integralet. Da $\tilde{Y}(s)$ er uden poler i højre halvplan, forsvinder integralet ifølge Cauchy's integralsætning (21).

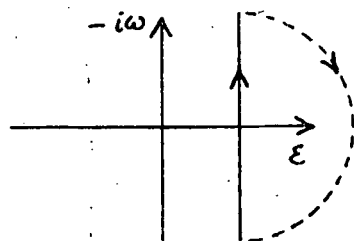


Fig. 2. Lukning af integrationsvejen i (27) for $t < 0$.

Vi betragter nu en vilkårlig Laplace-transformerbar funktion $g(t)$, som er nul for $t < 0$ og ikke-singulær for $t \geq 0$ (men muligvis med diskontinuiteter) dens afledede $g'(t)$ (som kan have singulariteter for $t \geq 0$) og dens stamfunktion

$$h(t) = \int_0^t g(t') dt'$$

som er kontinuert for alle værdier af t . Den Laplace transformerede af $g(t)$ er altså

$$L\{g(t), s\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (28)$$

Ved delvis integration af dette udtryk findes:

$$L\{h(t), s\} = \frac{1}{s} L\{g(t), s\} \quad (29)$$

For en vilkårlig anden stamfunktion $h_1(t) = h(t) + h_1(0)$ har vi

$$L\{h_1(t) - h_1(0), s\} = \frac{1}{s} L\{g(t), s\} \quad (30)$$

Ved Laplace-transformation af konstanten $h_1(0)$ findes

$$L\{h_1(0), s\} = \frac{1}{s} h_1(0)$$

Når vi så (uden at tænke for dybt over sagen) i (30) udfører substitutionen $h_1(t) \rightarrow g(t)$, $g(t) \rightarrow g'(t)$ finder vi differentiationsreglen

$$L\{g'(t), s\} = s \cdot L\{g(t), s\} - g(0) \quad (31)$$

Vi har altså stort set de simple regneregler, at differentiation hhv. integration af de tidsafhængige funktioner afspejles ved, at de Laplace-transformerede skal ganges, hhv. divideres med Laplace-frekvensen s . Men man skal passe på:

den simple differentiationsregel gælder kun, når $g(t)$ har grænseværdien nul for $t=0$. Hvis $g(t)$ har en endelig grænseværdi $g(0+)$ for $t \rightarrow 0+$, er det ikke denne værdi, som definerer konstanten $g(0)$ i ligning (31). I almindelighed kan vi skrive

$$g(t) = g(0+) \cdot E(t) + g_c(t) \quad (32)$$

hvor $g_c(t)$ er kontinuert for $t=0$, d.v.s. har grænseværdien 0 for $t \rightarrow 0$. Den afledede er så

$$g'(t) = g(0+) \cdot \delta(t) + g'_c(t) \quad (33)$$

Laplace transformation af deltafunktionen giver konstanten $\frac{1}{2}$ (jfr. diskussionen i afsnit 1.1.4), så vi får af (33) (ved brug af (31), med $g_c(0)=0$)

$$L\{g'(t), s\} = \frac{1}{2} \cdot g(0+) + sL\{g_c(t), s\} \quad (34)$$

Når vi indsætter (32) direkte i højresiden af (31) og benytter, at Heaviside-funktionen $E(t)$ har den Laplace-transformerede $1/s$, får vi

$$L\{g'(t), s\} = g(0+) + sL\{g_c(t), s\} - g(0) \quad (35)$$

D.v.s. ved sammenligning af (34) og (35) finder vi, at konstanten $g(0)$ i (31) må tillægges værdien

$$g(0) = \frac{1}{2}g(0+) \quad (36)$$

(en ny udgave af responseteoretikerens mareridt "det forsvundne 2-tal"). Det kan iøvrigt vises, at den inverse Laplace-transformation altid foreskriver funktionsværdien i springpunkter som gennemsnittet af grænseværdierne fra højre og fra venstre, se f.eks. ref.5. Som et specialtilfælde af denne sætning ser vi, at Heaviside funktionen må defineres strengt på følgende måde:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } t = 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (37)$$

Vi prøver at finde en sikker og direkte vej gennem den matematiske regnskov af teoremer og lemmaer vedrørende Fourier- og Laplace-transformationer og de specielle singulære funktioner, som i matematikken kaldes distributioner (f.eks. deltafunktionen). Vi råber "pas på", når vi møder en faktor 2 eller $\frac{1}{2}$ og gør en hel del ud af holdepunkter som ligning (36). Der er imidlertid andre veje at gå, og i litteraturen kan man let finde eksempler på formler, som afviger fra de her givne med en faktor 2. F.eks. i ref.3 optræder formel (31), men med $g(0+)$ i stedet for $g(0)$. Laplace-transformationen kan defineres således at deltafunktionens transformede bliver 1 i stedet for $\frac{1}{2}$, og derved vil en del formler naturligvis komme til at se anderledes ud, men de mystiske og tilsyneladende umotiverede 2-taller vil så blot dukke op i nogle andre formler. En anden (og mere uskyldig) konvention, som varierer en hel del i litteraturen, er placeringen af " 2π " i Fourier-integralerne (5) og (6) og fortegnet på den imaginære enhed " i ". Fra en anden sammenhæng kan nævnes faktoren " 4π ", som plager elektrodynamikken, og som ingen af de mange enhedssystemer har kunnet komme til livs. Moralen er, at selv om konventioner og de tilhørende symbolvalg er arbitrære, bliver man nødt til at følge dem inden for den givne kontekst.

Til slut i dette afsnit gives en kortfattet skematisk oversigt over nogle simple funktioner af tiden og deres Laplace-transformerede. Det er underforstået, at funktionerne $g(t)$ er nul for $t < 0$.

$g(t)$	$L\{g(t), s\}$
$E(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{2}$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}} \quad (k > -1 ; (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi})$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\ln at$	$\frac{1}{s} [\ln \frac{a}{s} - \gamma] \quad (a > 0; \gamma = 0.5772 \text{ er Euler's konstant})$
$\frac{1}{t} \text{sinkt}$	$\text{Arctg } \frac{k}{s} \quad (\text{Arctg } (\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2})$

En langt mere omfattende fortegnelse, hvoraf dette skema er et uddrag, kan findes i ref.V. Selv om de her anførte funktioner af s virker simple og velkendte, kan de i praksis blive noget mere indviklede, fordi anvendelserne kræver, at deres definitionsområde udvides til den komplekse plan, specielt til den imaginære s -akse, som jo svarer til reelle frekvenser.

1.2.3. Generelle egenskaber af komplekse responsefunktioner

De to foregående matematiske afsnit har måske virket lidt trættende på læseren, som forventede at denne tekst skulle handle om fysiske systemegenskaber. Vi må derfor hellere slå fast, at vi er på vej til at gøre tilværelsen, om ikke lettere, så i hvert tilfælde mere overskuelig for den, som ønsker at erhverve sig et mål af "fysisk intuition". Denne højt berømmede egenskab er ikke noget mystisk og medfødt, og heller ikke en automatisk følge af flittig læsning, men et spørgsmål om valg af pragmatisk velbegrundede forestillingsbilleder (ikoner) og kendskab til de rigtige matematiske teknikker. Den komplekse funktions-kalkyle, herunder Fourier- og Laplace-transformationerne, er en af de mest værdifulde gaver, som matematikken har givet fysikken. Den har gjort responseteorien til det mest tværgående paradigme i den teoretiske fysik, og kan forlene kenderen med en indsigt i fysiske sammenhænge, der for udenforstående må virke som "den rene magi".

Vi har allerede set, at det komplekse maskineri gør det muligt at behandle alle tidshomogene, reaktive (og selvfølgelig lineære) systemer som om de var passive og derved definere responseegenskaber ved simple forhold mellem signalamplituderne af response og stimulus (ligning 1.2.2.25). Ser vi nu på de to dynamiske variable inden for samme kausale klasse, f.eks. $e(t)$ og $p(t)$, som er forbundet ved integralrelationen 1.1.1.1, så vil der gælde en simpel algebraisk relation mellem de tilsvarende signalamplituder, nemlig

$$\tilde{e}'(s) = s \cdot \tilde{p}'(s) \quad (1).$$

Denne ligning vises på samme måde som ligning 1.2.2.30, men her er der ingen problemer med med mystiske konstanter som $g(0)$ i foregående afsnit, for nedre grænse i integralet,

der forbinder $e(t)$ og $p(t)$ er jo $-\infty$, og i den grænse forsvinder alle signaler.

En vilkårlig kompleks responsefunktion defineres altså som forholdet mellem de komplekse amplituder af de signaler, der optræder som stimulus og response i den semiotiske matrix fig. 1.1.2.1, og pilene i skemaet, som betød integration af de tidsafhængige funktioner, kommer nu til af betydning af de tidsafhængige funktioner, kommer nu til af betydning af division med Laplace-frekvensen s . F.eks. finder vi, at den komplekse føjelighedsfunktion $\tilde{J}(s)$ er givet ved:

$$\tilde{J}(s) = \frac{\tilde{q}'(s)}{\tilde{e}'(s)} = \frac{1}{s} \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{e}'(s)} = \frac{1}{s} \tilde{Y}(s) \quad (2)$$

Læg mærke til symbolikken: signalamplituderne er forsynet med et "differentiationsmærke", som ikke optræder på responsefunktionen. Grunden til denne notation er, at dimensionen af signalamplituden $\tilde{\phi}'(s)$ ikke er den samme som dimensionen af signalet $\phi(t)$, men

$$\dim[\tilde{\phi}'(s)] = \dim[\phi(t)] \cdot \dim[t]$$

hvilket fremgår af definitionen af Fourier-operatoren, ligning 1.2.2.5. Laplace-frekvensen s har jo dimensionen reciprok tid, d.v.s. hvis vi integrerer $\tilde{\phi}'(s)$ m.h.t. s , får vi en størrelse, som med rette kunne kaldes $\tilde{\phi}(s)$ (uden mærke), da den har samme dimension som $\phi(t)$. (Sml. lign.1.2.2.1).

Alle de komplekse funktioner og relationer, vi får brug for, kan lige så godt udtrykkes ved Fourier-frekvensen $z = is$, og vi indicerer så overgangen fra s til z ved at skifte "tilden" på funktionssymbolet ud med en "hat". D.v.s. relationen (2) mellem føjelighed og bevægelighed kan lige så godt udtrykkes på formen

$$\hat{J}(z) = \frac{\hat{q}'(z)}{\hat{e}'(z)} = \frac{1}{z} \hat{Y}(z) \quad (3)$$

Vi vil skifte frit frem og tilbage mellem s og z med det

formål at slippe for at skrive "i" for mange gange. Når vi diskuterer de generelle sammenhænge, som bygger på differentiationsreglen (1), er det en fordel at bruge s og "tilde", men når vi diskuterer forholdene på ω -aksen, hvor s jo er imaginær, tager vi "hatten" på.

Vi kan nu servere en kompleks version af den efterhånden velkendte semiotiske matrix. Alle funktionerne i den ene kausale klasse udtrykkes ved admittansfunktionen $\tilde{Y}(s)$ og alle funktionerne i den anden klasse ved impedansfunktionen $\tilde{Z}(s)$. Da disse to funktioner er hinandens reciprokke, er der i virkeligheden kun én funktion i skemaet, som udtrykker noget om systemets fysiske egenskaber. De funktioner, som fremgår af hinanden ved spejling i hoveddiagonalen er nu ikke alene dimensionsmæssigt reciprokke (som i det tidsafhængige skema), men simpelthen reciprokke funktioner.

$\tilde{\phi}'$ / \tilde{Y}'	\tilde{q}'	\tilde{f}'	\tilde{e}'	\tilde{p}'
	\leftarrow		\rightarrow	
\tilde{q}'	1	s	$\tilde{G}=s \cdot \tilde{Z}$	\tilde{Z}
\tilde{f}'	$\frac{1}{s}$	1	\tilde{Z}	$\tilde{M}=\frac{1}{s}\tilde{Z}$
\tilde{e}'	$\tilde{J}=\frac{1}{s}\tilde{Y}$	\tilde{Y}	1	$\frac{1}{s}$
\tilde{p}'	\tilde{Y}	$\tilde{F}=s \cdot \tilde{Y}$	s	1

Fig.1. De komplekse responsefunktioner. Pilene angiver division med Laplace-frekvensen s .

For et system med spændingsinput er admittansen $\tilde{Y}(s)$ den Laplace-transformerede af lethedsfunktionen $F(t)$:

$$\tilde{Y}(s) = L\{F(t), s\} = \frac{1}{s} \tilde{F}(s) \quad (4)$$

Vi kan nu også se, hvad vi får ved Laplace-transformation af de øvrige (egentlige) tidsafhængige responsefunktioner. Admittansen $Y(t)$ er ikke-singulær for $t \geq 0$, men kan have en diskontinuitet for $t=0$. Den svarer altså til funktionen $g(t)$ fra foregående afsnit, og iflg. ligning 1.2.2.35 skal vi for $t=0$ tilskrive den værdien

$$Y(0) = \frac{1}{2}Y(0+) \quad (5)$$

Krybefunktionen $J(t)$ er en stamfunktion til $Y(t)$ og forsvinder for $t=0$. Af 1.2.2.28 får vi derfor

$$L\{J(t), s\} = \frac{1}{s} L\{Y(t), s\} \quad (6)$$

Derimod svarer $F(t)$ i almindelighed ikke helt til den afledede $g'(t)$ (d.v.s. $Y'(t)$), men

$$F(t) = Y'(t) + Y(0+) \cdot \delta(t) \quad (7)$$

for $Y'(t)$ har jo det singulære bidrag $Y(0+)\delta(t)$, som kun giver halvdelen af diskontinuiteten $Y(0+)$, når det integreres fra 0 til t , og integralet fra 0 til t af $F(t)$ skal jo give $Y(t)$.

Differentiationsreglen 1.2.2.30 giver

$$L\{Y'(t), s\} = s \cdot L\{Y(t), s\} - \frac{1}{2}Y(0+)$$

Når vi heri indsætter (7) og (4) og benytter, at deltafunktionens Laplace-transformerede er $\frac{1}{s}$, finder vi det simple resultat

$$\mathcal{L}\{Y(t), s\} = \frac{1}{s} \tilde{Y}(s) = \tilde{J}(s) \quad (8)$$

Ligning (6) giver så

$$\mathcal{L}\{J(t), s\} = \frac{1}{s} \tilde{J}(s) \quad (9)$$

Af (4), (8) og (9) fremgår, at vi ved Laplace-transformation af en vilkårlig egentlig responsefunktion får den tilsvarende komplekse, divideret med Laplace-frekvensen s . Det følger heraf, at alle de komplekse responsefunktioner er reelle på den reelle s -akse. Mere alment gælder for en vilkårlig af de komplekse responsefunktioner

$$\tilde{R}(s^*) = \tilde{R}^*(s) \quad (10)$$

Når vi har bestemt de egentlige komplekse funktioner, kan vi nemt bestemme de uegentlige, som jo simpelthen er de reziproke funktioner, og vi kan da ved brug af ovenstående sammenhæng definere, hvad vi vil forstå ved den Laplace-transformerede af en uegentlig responsefunktion, som har en ikke-integrabel singularitet for $t=0$.

Som et vigtigt eksempel på anvendelsen af de fundne sammenhænge betragter vi et skalainvariant system med tidseksponenten α . Krybefunktionen er givet ved

$$J(t) = J_1 \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \quad (11)$$

hvor $0 \leq \alpha \leq 2$. I skemaet over Laplace-transformationer i foregående afsnit finder vi formlen

$$\mathcal{L}\{t^k, s\} = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad \text{for } k > -1 \quad (12)$$

Ligning (9) og (11) giver så

$$\tilde{J}(s) = \alpha! \cdot J_1 \cdot (s\tau)^{-\alpha} \quad (13)$$

Videre bestemmes så $\tilde{Y}(s)$ og $\tilde{F}(s)$ ved at gange med s :

$$\tilde{Y}(s) = \alpha! \cdot \frac{J_1}{\tau} \cdot (s\tau)^{1-\alpha} \quad (14)$$

$$\tilde{F}(s) = \alpha! \cdot \frac{J_1}{\tau^2} \cdot (s\tau)^{2-\alpha} \quad (15)$$

Træghedsfunktionen $\tilde{M}(s)$ bestemmes nu som den reciproke til lethedsfunktionen $\tilde{F}(s)$:

$$\tilde{M}(s) = \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{\tau^2}{J_1} \cdot (s\tau)^{\alpha-2} \quad (16)$$

og tilsvarende kunne vi opskrive $\tilde{Z} = 1/\tilde{Y}$ og $\tilde{G} = 1/\tilde{J}$. Den tidsafhængige træghedsfunktion bestemmes som den omvendt Laplace-transformerede af $\tilde{M}(s)/s$. Her kan vi også bruge ligning (12), hvor $k+1=3-\alpha$, d.v.s. $k=2-\alpha$. Vi finder så

$$M(t) = \frac{\tau^2}{\alpha! \cdot (2-\alpha)! \cdot J_1} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2-\alpha} \quad (17)$$

en formel, som vi allerede har udledt i afsnit 1.1.5. Ved to gange differentiation findes

$$G(t) = \frac{1}{J_1 \cdot \alpha! \cdot (-\alpha)!} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \quad (18)$$

Denne formel kan dog kun bruges for $\alpha \neq 1$ og $\alpha \neq 2$, da fakultetsfunktionen er udefineret for negative heltal. Hvis $1 < \alpha < 2$ har $G(t)$ en ikke-integrabel singularitet for $t=0$ og er altså uegentlig. Vi kan så ikke udregne den Laplace-transformerede direkte, men vi kan bestemme den indirekte ved brug af sammenhængen

$$L\{G(t), s\} = \frac{1}{s} \tilde{G}(s) = \frac{1}{s\tilde{J}(s)} = \frac{\tau^\alpha s^{\alpha-1}}{\alpha! \cdot J_1}$$

Vi får altså det samme, som hvis vi brugte udtrykket (18) direkte i ligning (12), med $k=-\alpha$, uden hensyn til, at ligning (12) er udledt under forudsætning af, at $k > -1$.

I det følgende vil vi hovedsageligt diskutere egenskaberne af admittansen $\tilde{Y}(s)$ og impedansen $\tilde{Z}(s)$. Disse to reciproke funktioner er de komplekse standard responsefunktioner, som hænger sammen med de tidsafhængige standard responsefunktioner $F(t)$ og $G(t)$ ved en Laplace-transformation.

Lad os antage, at systemet har spændingsinput. Vi har så allerede indset, at den egentlige responsefunktion $\tilde{Y}(s) = L\{F(t), s\}$ må være analytisk, uden uendeligheder i højre halvplan, $\epsilon > 0$. Dette indbefatter specielt, at $|\tilde{Y}(s)|$ ikke kan gå mod uendelig for $\epsilon \rightarrow \infty$, når den er egentlig. D.v.s. hvis vi for et system opdager, at $|\tilde{Y}(s)| \rightarrow \infty$ for $\epsilon \rightarrow \infty$, er det et sikkert tegn på, at systemet har strøminput.

Relationen mellem den tidsafhængige lethed og den frekvensafhængige admittans kan også udtrykkes ved den omvendte Fourier-transformation (sml. 1.2.2.26)

$$\begin{aligned} F(t) &= L^{-1}\{\tilde{Y}(s), t\} = \frac{1}{2\pi} F^{-1}\{\hat{Y}(z), t\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \hat{Y}(z) e^{-izt} dz \end{aligned} \quad (19)$$

Hvis vi nu lader $\epsilon \rightarrow 0+$ og derefter $t \rightarrow \infty$, vil integranden i (19) indeholde funktionen $e^{-i\omega t}$, som svinger meget hurtigt, når ω varierer. Integralet vil derfor gå mod nul for $t \rightarrow \infty$, medmindre $\hat{Y}(\omega)$ har en ikke integrabel singularitet. Hvis der er en ikke integrabel singularitet, f.eks. en pol af 1. orden $\tilde{Y} \propto (\omega - \omega_0)^{-1}$ på den reelle frekvensakse, vil $F(t)$ ikke gå mod nul for $t \rightarrow \infty$, d.v.s. så er systemet ikke ergo-disk. F.eks. hvis

$$\tilde{Y}(s) \propto \frac{1}{s} \quad ; \quad \hat{Y}(\omega) \propto \frac{1}{\omega}$$

har vi som bekendt $F(t) \propto E(t)$, som jo ikke går mod nul. Dette tilfælde beskriver et x-lager, som ikke er ergo-disk.

For en udæmpet harmonisk oscillator er $F(t) \propto \cos \omega_0 t$. Skemaet over Laplace-transformationer sidst i afsnit 1.2.2. giver så

$$\tilde{Y}(s) \propto \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{d.v.s.} \quad \hat{Y}(\omega) \propto \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Her er der 1.ordens poler for $\omega = \omega_0$ og $\omega = -\omega_0$, hvilket igen viser, at systemet er uergodisk. Omvendt kan vi slutte, at $\hat{Y}(\omega)$ for et ergodisk system ikke kan have poler, men nok svagere integrable singulariteter af typen $(\omega - \omega_0)^{-k}$, hvor $k < 1$. (Ofte kaldet forgreningspunkter, fordi den analytiske af sådanne funktioner til den komplekse plan ikke er entydig).

Lad os et øjeblik forudsætte, at systemet er ergodisk. Vi kan så tillade os at gå helt til grænsen $\epsilon = 0+$ og udtrykke $\hat{Y}(\omega)$ ved et Fourier-integral af sædvanlig type

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\omega) &= \int_0^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} F(t) \cos \omega t dt + i \int_0^{\infty} F(t) \sin \omega t dt \\ &= \hat{Y}_1(\omega) + i \hat{Y}_2(\omega) \end{aligned} \quad (20)$$

Da $F(t)$ er reel, kan vi identificere realdelen $\hat{Y}_1(\omega)$ og imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$ med hhv. cosinusintegralet og sinus-integralet i (20)

$$\hat{Y}_1(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \cos \omega t dt \quad (21)$$

$$\hat{Y}_2(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \sin \omega t dt \quad (22)$$

Vi ser heraf, at realdelen $\hat{Y}_1(\omega)$ er en lige funktion af frekvensen, medens imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$ er ulige:

$$\hat{Y}_1(-\omega) = \hat{Y}_1(\omega) \quad (23)$$

$$\hat{Y}_2(-\omega) = -\hat{Y}_2(\omega) \quad (24)$$

Disse paritetsegenskaber er i øvrigt specialtilfælde af ligning (10). Et fortegnsskift på ω i integralfremstilling (20) resulterer altså i en komplekskonjugering af $\hat{Y}(\omega)$:

$$\hat{Y}^*(\omega) = \hat{Y}(-\omega) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

Ved substitutionen $t \rightarrow -t$ fås:

$$\tilde{Y}^*(\omega) = \int_{-\infty}^0 F(|t|) e^{i\omega t} dt$$

Addition af denne formel til (20) giver

$$\begin{aligned} 2\hat{Y}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(|t|) e^{i\omega t} dt \\ &= 2\pi F\{F(|t|), \omega\} \end{aligned} \quad (25)$$

(sml. 1.2.2.5). Den Fouriertransformerede af den lige funktion $F(|t|)$ for et ergodisk system er altså lig med $\hat{Y}_1(\omega)/\pi$. Den inverse Fourier-transformation 1.2.2.6 giver så

$$F(|t|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (26)$$

Da $\hat{Y}_1(\omega)$ er lige, er det kun cosinusdelen af den komplekse eksponentialfunktion i (26) som giver et bidrag, og dette kan udtrykkes alene ved et integral over positive frekvenser:

$$F(|t|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (27)$$

Denne meget vigtige formel viser, at for et ergodisk system er al information om systemets responseegenskaber indeholdt i realdelen af standardresponsefunktionen på den positive frekvensakse.

Vi har nu udledt formel (27) på en ret omstændelig måde, men

et lille eksempel vil vise, hvor let man kan blive snydt for en faktor 2, hvis man ikke passer på. For en spændingslæk K har vi

$$F(t) = 2K\delta(t)$$

$$\hat{Y}(z) = K$$

d.v.s. $\hat{Y}_1(z) = K$, $\hat{Y}_2(z) = 0$ i hele øvre halvplan. Går vi til grænsen $\epsilon \rightarrow 0+$ får vi altså

$$\hat{Y}_1(\omega) = K, \quad \hat{Y}_2(\omega) = 0$$

Hvis vi nu i ligning (19) uden videre sætter $\epsilon=0$, får vi for $t \geq 0$ (sml. 1.2.2.13)

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot K \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{K}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cos\omega t d\omega \quad (=K\delta(t)) \end{aligned}$$

altså kun halvdelen af det rigtige resultat, som fås af (27).

I tilfælde hvor $F(t)$ ikke indeholder en δ -singularitet, kan man tillade sig at gå til grænsen $\epsilon=0$ i (19). Ved udnyttelse af paritetsegenskaberne (23) og (24) fås så:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\hat{Y}_1(\omega) \cdot \cos\omega t + \hat{Y}_2(\omega) \cdot \sin\omega t] d\omega \quad (28)$$

Ved sammenligning med (27) ser vi så, at for positive tider giver sinusdelen af integralet samme bidrag som cosinusdelen. For negative tider, hvor $F(t)=0$, må sinusdelen ophæve cosinusdelen. Vi kan udtrykke dette ved relationen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \cdot \sin\omega t d\omega &= \text{sign}(t) \cdot \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \cos\omega t d\omega \quad (29) \\ &= \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) \cdot F(|t|) \end{aligned}$$

hvor fortegnsfunktionen $\text{sign}(t)$ er givet ved

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t = 0 \\ -1 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (30)$$

Relationerne (28) og (29) viser så også den tidligere fremhævede betingelse, at vi for $t=0$ må tilskrive funktionen $F(t)$ en værdi, som er halvdelen af grænseværdien for $t \rightarrow 0+$ (hvis der er en grænseværdi). Integralet (27) har imidlertid værdien $F(0+)$ for $t=0$, hvilket stemmer med, at $F(|t|)$ er kontinuert for $t=0$, når der ikke er nogen singularitet.

Ligning (29) viser, at imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$ og for sig også indeholder al information om responseegenskaberne og derfor er "lige så god" som realdelen. Man må dog huske, at (28) og (29) kun gælder, hvis $F(t)$ ikke har en δ -singularitet for $t=0$, d.v.s. ikke for passive systemer og asymptotisk passive (f.eks. Voigt elementet), hvorimod (27) gælder for ethvert ergodisk system. Vi skal senere vende tilbage til spørgsmålet om, hvordan (27) kan modificeres til også at gælde for ikke-ergodiske systemer, og hvorledes (29) ser ud for asymptotisk passive systemer.

En anden vigtig egenskab ved realdelen $\hat{Y}_1(\omega)$ har vi tidligere været inde på, da vi beregnede dissipationen for et standard signal med frekvensen ω , ligning 1.2.1.25. Et svingende signal repræsenterer jo en form for kredsproces med systemet, så ifølge termodynamikkens grundlæggende axiom (afsnit 1.1.3) må dissipationen 1.2.1.25 være ikke-negativ. Det følger heraf, at

$$\hat{Y}_1(\omega) \geq 0 \quad (31)$$

for et ergodisk system i alle punkter på frekvensaksen, hvor $\hat{Y}_1(\omega)$ er ikke-singulær. Som et specialtilfælde af (31), når vi anvender den på en spændingslæk med $\hat{Y}_1(\omega) = K$,

finder vi energibandsformalismens lækaxiom. Omvendt kan vi være sikre på, at en fuldt reticuleret energibandsmodel med positive lække automatisk opfylder (31).

Hvis den dissipative responsefunktion $\hat{Y}_1(\omega)$ er integrabel over frekvensaksen, finder vi af (27), at $F(|t|)$ har en endelig grænseværdi for $t \rightarrow 0$ givet ved

$$F(0+) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) d\omega \quad (32)$$

Denne formel, som kaldes den termodynamiske sumregel, er et godt eksempel på de "magiske sammenhænge", som den komplekse responseteori er så god til at påpege. Funktionen $\hat{Y}_1(\omega)$ beskriver jo de dissipative, d.v.s. irreversible systemegenskaber, hvorimod lethedens for $t=0$ er en reversibel egenskab.

Som eksempel ser vi på det såkaldte Brown element, fig.2, som beskriver en partikel med massen m , der bevæges i et miljø med hastighedsproportional gnidning, skildret ved x -lækken ρ . Elementet benyttes i diskussionen af Brownske bevægelser; heraf navnet.

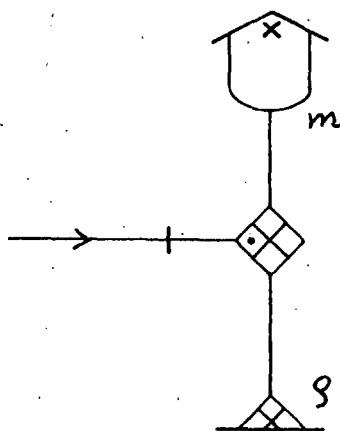


Fig.2. Brown elementet.

Brown elementet er dualt til Maxwell elementet, fig.1.1.4.5, så ved oversættelse af formel 1.1.4.24 får vi direkte, for

$t > 0$:

$$F(t) = \frac{1}{m} e^{-\frac{\rho}{m}t} \quad (33)$$

Af skemaet i afsnit 1.2.2. finder vi den Laplace-transformationerede

$$\tilde{Y}(s) = \mathbf{L}\{F(t), s\} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{\rho}{m}} = \frac{1}{\rho + ms} \quad (34)$$

Heraf fås ved substitutionen $s = -iz$:

$$\hat{Y}(z) = \frac{1}{\rho - izm} \quad (35)$$

Vi ser, at $\hat{Y}(z)$ har en 1.ordens pol i nedre halvplan for $z = -i\rho/m = -i/\tau_B$, hvor τ_B er elementets relaxationstid

$$\tau_B = \frac{m}{\rho} \quad (36)$$

På den reelle frekvensakse finder vi

$$\hat{Y}_1(\omega) = \frac{\rho}{\rho^2 + \omega^2 m^2} \quad (37)$$

$$\hat{Y}_2(\omega) = \frac{m\omega}{\rho^2 + \omega^2 m^2} \quad (38)$$

Ved brug af formel (29) får vi foræret et par vigtige integraler. Sumreglen (32) er også opfyldt og giver

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) d\omega = \frac{1}{m} \quad (39)$$

Af udtrykket (37) ses, at den termodynamiske ulighed (31) er opfyldt i kraft af lækaxiomet, $\rho > 0$. Sumreglen (39) medfører altså, at massen m er positiv. Det ser ud til, at aksiomet, som siger, at lække er positive, automatisk medfører, at også lagerkapaciteter må være positive.

Det ville dog være forhastet, hvis vi på dette grundlag

krævede af alle mulige energibåndsmodeller, at lagerkapaciteter skal være positive. Vi vil stadig tillade, at m i Brown elementet og G_0 i Maxwell elementet kan være negative, men derved rykker disse elementer ud af systemklassen, der kan beskrives med lineær responseteori, d.v.s. så er de ikke længere reaktive.

Hvis m er negativ, får $\hat{Y}(z)$ for Brown elementet en pol i øvre halvplan, og $F(t)$ bliver eksponentielt voksende. Systemet er altså ustabil og vil spontant generere en output strøm, som ikke er fremkaldt af en stimulus. D.v.s. systemet må beskrives som aktivt. Vi vil ikke forhindre energibåndsteknikken i at modellere aktive systemer og kræver derfor ikke, at lagerkapaciteter er positive. Ligning (27) og den termodynamiske sumregel (32) er bl.a. af denne grund ikke automatiske konsekvenser af teknikens spille-regler, men hvis de er brudt, vil det alligevel ofte være et tegn på, at modelbyggeren har opereret med forkerte forudsætninger.

1.2.4. Konturintegraler og residuer

Når man skal udregne responsefunktionerne for en forelagt energibandsmodel, er det som regel ganske let at udregne de frekvensafhængige funktioner, hvorimod udregningen af de tidsafhængige funktioner løber ind i differentialligninger og integralligninger, som kan være ganske svære at løse. Den praktiske metode er da at starte med udregning af den komplekse, frekvensafhængige standard responsefunktion ($\tilde{Y}(s)$ eller $\tilde{Z}(s)$, afhængigt af kausaliteten) og derefter bestemme den tilsvarende tidsafhængige ($F(t)$ eller $G(t)$) ved hjælp af den inverse Laplace-transformation

1.2.2.26. Man stilles herved over for det problem at skulle udføre en besynderlig kontur-integration i den komplekse plan, og det er jo nok for de fleste en temmelig uvant og afskrækkende opgave. Imidlertid forholder det sig så heldigt, at vi til vores rådighed har en række matematiske hjælpesætninger og teknikker, som er så stærke, at man så at sige aldrig får brug for at udføre integrationen i praksis, men kan nøjes med en langt simplere opgave, nemlig at bestemme poler og residuer af den komplekse responsefunktion.

Funktionen $f(s)=1/s$ har en pol af 1.orden for $s=0$. Vi prøver nu at integrere denne funktion rundt på en cirkel med radius r og centrum i nulpunktet. Integralets fortegn vil så afhænge af omløbsretningen, og vi vælger at integrere rundt "den positive vej", d.v.s. mod uret. Da $s=r \cdot e^{i\theta}$, r er konstant, og θ varierer fra 0 til 2π på cirklen, får vi:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{s} ds &= \oint_C \frac{1}{r e^{i\theta}} d(r e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i \end{aligned} \quad (1)$$

Ifølge Cauchy's integralsætning 1.2.2.21 vil integralet af

funktionen $1/s$ rundt langs en lukket kontur, der ikke omslutter polen i nulpunktet, altid være nul. Herfra kan man let indse, at integralet på en lukket kontur, der omslutter polen, altid vil have samme værdi som cirkelintegralet (1).

Vi betragter nu en funktion $f(s)$, som er analytisk og er ikke-singulær inden for en lukket kontur C . Hvis s_0 er et punkt inden for konturen, gælder Cauchy's integralformel

$$\oint_C \frac{f(s)}{s-s_0} ds = 2\pi i \cdot f(s_0) \quad (2)$$

Vi kan indse rigtigheden af denne vigtige formel ved følgende simple argument: Hvis vi lægger en lukket kontur C' meget tæt rundt om punktet s_0 (se fig.1), hvor integranden i (2) har en pol af 1.orden, så vil værdien af funktionen $f(s)$ på konturen C' kunne sættes lig med konstanten $f(s_0)$.

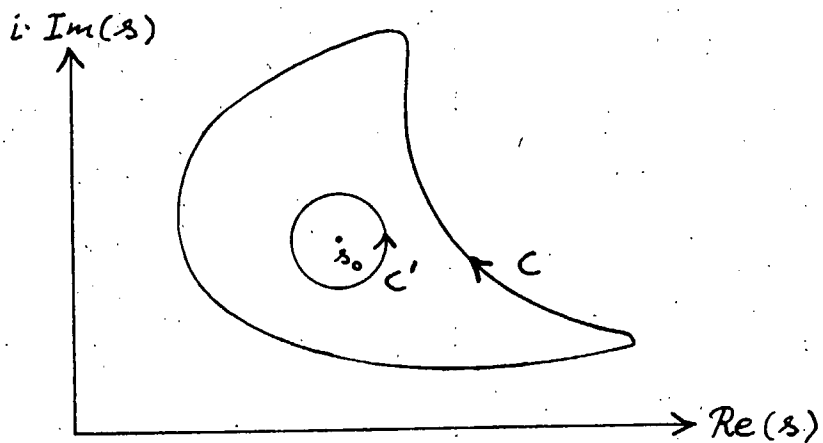


Fig.1. Lukkede konturer for integralet i Cauchy's integralformel.

Udledelsen af ligning (1) kan nu overføres til integralet på konturen C' :

$$\oint_{C'} \frac{f(s)}{s-s_0} ds = f(s_0) \oint_{C'} \frac{ds}{s-s_0} = f(s_0) \cdot 2\pi i$$

Da integranden i (2) er fri for poler i området mellem C' og C , vil C -integralet give samme bidrag som C' -integralet, og heraf følger rigtigheden af Cauchy's integral-formel.

Hvis en funktion $f(s)$ har en pol af n 'te orden i punktet s_0 , kan vi skrive den på formen

$$f(s) = \frac{c_n}{(s-s_0)^n} + \frac{c_{n-1}}{(s-s_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_1}{s-s_0} + g(s) \quad (3)$$

hvor $g(s)$ er ikke-singulær i punktet s_0 . Ved udregning af integralet af funktionen $(s-s_0)^{-q}$ på en cirkel med centrum i s_0 finder vi

$$\oint \frac{ds}{(s-s_0)^q} = \oint e^{-iq\theta} d(e^{i\theta}) = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-q)\theta} d\theta$$

d.v.s integralet bliver nul, undtagen for $q=1$. For $q=1$ har det som før værdien $2\pi i$. Når vi integrerer funktionen $f(s)$ i (3) rundt på en kontur C , som ikke omslutter andre poler end s_0 , finder vi derfor

$$\oint_C f(s) ds = 2\pi i \cdot c_1 = 2\pi i \cdot \text{Res}f(s_0) \quad (4)$$

Konstanten c_1 kaldes funktionens residuum i polen s_0 .

Vi ser altså, at integrationen langs en lukket kontur kan føres over i den langt simple opgave at bestemme polerne inden for konturen og de tilhørende residuer. Hvis en pol i s_0 er af 1.orden, har vi simpelthen

$$\text{Res}f(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} (s-s_0) \cdot f(s) \quad (5)$$

Hvis polen er af 2.orden, vil funktionen

$$g(s) = (s-s_0)^2 \cdot f(s) \quad (6)$$

være ikke singulær i punktet s_0 . Ved række udvikling til

1.orden omkring s_0 får vi så:

$$g(s) \approx g(s_0) + g'(s_0) \cdot (s-s_0)$$

d.v.s. funktionen $f(s)$ kan i nærheden af s_0 skrives på for-
men

$$f(s) \approx \frac{g(s_0)}{(s-s_0)^2} + \frac{g'(s_0)}{s-s_0}$$

For en 2.ordens pol er residuet altså

$$\text{Res}f(s_0) = g'(s_0) \quad (7)$$

hvor $g(s)$ er givet ved ligning (6). Argumentet kan let ud-
bygges til bestemmelse af residuet for en n'te ordens pol:

$$\text{Res}f(s_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{ds^{n-1}} \{ (s-s_0)^n f(s) \} \quad (8)$$

Ved udregning af standard-responsefunktionen $\tilde{Y}(s)$ eller $\tilde{Z}(s)$ for en endelig energibandsmodel vil vi i reglen kun finde 1.ordens poler, men i sjældne tilfælde kan der forekomme en pol af 2.orden, som vi skal se i næste afsnit. Det kan imidlertid blive lidt mere indviklet for de øvrige responsefunktioner. F.eks. finder vi for et x-lager en pol af 1.orden i nulpunktet, når vi udregner standard responsefunktionen $\tilde{Y}(s)=1/ms$, men den komplekse føjelighed $\tilde{J}(s)=\tilde{Y}(s)/s$ vil jo så have en 2.ordens pol i nulpunktet. Af denne grund vil vi hovedsageligt interessere os for funktionerne \tilde{Y} og \tilde{Z} , hvis residuer næsten altid kan udregnes ved den simple formel (5).

Hvis en funktion $f(s)$ har poler i flere punkter s_k , der ligger inden for konturen C , giver hver pol et bidrag, som er givet ved dens residuum. Formel (4) må altså modificeres til

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(s) ds = \sum_k \text{Res}f(s_k) \quad (9)$$

Lad os nu tænke os, at vi har udregnet admittansfunktionen $\tilde{Y}(s)$ og har fundet et udtryk af formen

$$\tilde{Y}(s) = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s-s_k} \quad (10)$$

altså en funktion, hvis poler alle er af 1. orden med residuer givet ved

$$\text{Res}\tilde{Y}(s_k) = a_k \quad \text{for } 1 \leq k \leq n \quad (11)$$

Polerne s_k kan ifølge diskussionen i afsnit 1.2.2. kun finde sig i venstre halvplan, eller på den imaginære akse (ω -aksen).

Den tidsafhængige lethedsfunktion er givet ved

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{Y}(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \tilde{Y}(s) e^{st} ds \quad (12)$$

d.v.s. integrationskonturen er ikke lukket, men en ret linje i højre halvplan, parallel med den imaginære akse. Imidlertid kan vi for $t > 0$ lukke integrationsvejen med en halvcirkel, der "omslutter" den imaginære akse og går uendelig langt ud i venstre halvplan. Denne lukning af konturen vil ikke ændre værdien af integralet (Jordans lemma), idet $e^{st} \rightarrow 0$ for $\text{Re}(s) \rightarrow -\infty$, når $t > 0$. Betingelsen for gyldigheden af Jordans lemma er, at integranden går mod nul i det uendelige, d.v.s. vi må i første omgang holde konstanten a_0 i ligning (10) ude af sagen.

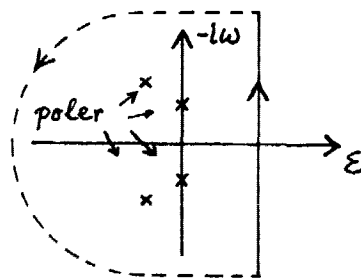


Fig.2. Lukning af integrationsvejen i (12) for $t > 0$.

En vilkårlig af polerne s_k vil så for $t > 0$ give bidraget

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{a_k e^{st}}{s-s_k} ds = a_k \cdot e^{s_k t}$$

da polen kommer til at ligge inden for den lukkede kontur på fig.2, og integrationsvejen går mod uret. For $t < 0$ må man, som tidligere nævnt lukke integrationsvejen i højre halvplan (fig.1.2.2.2). Herved kommer alle polerne s_k til at ligge uden for konturen, og integralet bliver nul.

Konstanten a_0 i ligning (10) kan ikke behandles på denne måde, men vi har jo allerede tidligere indset, at den Laplace-transformerede af en deltafunktion er konstanten $\frac{1}{s}$, d.v.s. konstanten a_0 må give bidraget $2a_0\delta(t)$. Resultatet af (12) bliver altså

$$F(t) = 2a_0\delta(t) + E(t) \cdot \sum_{k=1}^n a_k e^{s_k t} \quad (13)$$

Da $F(t)$ er reel, ser vi, at koefficienterne a_0 og a_k må være reelle, og at polerne s_k må ligge symmetrisk om den reelle akse med samme værdi af a_k for et par symmetriske poler. (Sml.1.2.3.10). På den imaginære akse kan der f.eks. være en pol i nulpunktet og et polpar $\pm i\omega_0$, og i (13) vil der så optræde et konstant led og et led, der går som $\cos\omega_0 t$. D.v.s. poler på ω -aksen giver anledning til ikke-ergodisk opførsel af systemet, hvorimod alle polerne i venstre halvplan giver bidrag, som uddør eksponentielt for $t \rightarrow \infty$.

Vi har tidligere set, at $\tilde{Y}(s)$ for et ikke ergodisk system vil have én eller flere ikke-integrable singulariteter på ω -aksen (den imaginære s -akse eller den reelle z -akse). En pol af 1.orden er den almindeligste type af en ikke-integrabel singularitet. Lad os nu tænke os, at $\tilde{Y}(s)$ har en ikke-integrabel singularitet for $s = -i\omega_0$. Vi prøver nu at udbygge systemet med en x -læk R , som vist på fig.1.1.3.2. Da x -lækken er påsat med en x -sampler, kan vi finde impe-

dansen af det udbyggede system ved simpel addition af impedanser:

$$\tilde{Z}_R(s) = R + \tilde{Z}(s) = R + \frac{1}{\tilde{Y}(s)}$$

Admittansen af det udbyggede system er altså:

$$\tilde{Y}_R(s) = \frac{1}{\tilde{Z}_R(s)} = \frac{\tilde{Y}(s)}{1+R \cdot \tilde{Y}(s)} \quad (14)$$

Lader vi nu s gå mod det singulære punkt s_0 , hvor $\tilde{Y}(s)$ er uendelig, finder vi

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \tilde{Y}_R(s) = \tilde{Y}_R(s_0) = \frac{1}{R} \quad (15)$$

D.v.s admittansfunktionen af det udbyggede system er ikke singulær i s_0 . Hvis vi lader R blive meget lille, vil udtrykket (14) være næsten lig med $\tilde{Y}(s)$, hvis vi bare er et lille stykke borte fra singulariteten. Der kan ikke opstå nye singulariteter på ω -aksen ved konstruktionen (14). Hvis nemlig ligningen $\tilde{Y}(s) = -1/R$ havde en løsning for $s = -i\omega_1$, så ville vi kunne lave en evighedsmaskine ved at forbinde systemet (det uudbyggede) med et arbejdsreservoir, der "pumper" med frekvensen ω_1 . Vi ser altså at det udbyggede systems admittansfunktion er uden singulariteter på ω -aksen, og vi har derved vist den tidligere fremsatte påstand, at vi altid kan gøre et system ergodisk ved at tilkoble en læk.

Flere sætninger, som blev vist for ergodiske systemer i foregående afsnit, kan nu udvides til ikke ergodiske systemer ved at benytte læk konstruktionen og derefter lade størrelsen af lækken gå imod nul. Vi ser straks, at paritetsegenskaberne 1.2.3.23 og -24, såvel som den termodynamiske ulighed 1.2.3.31 må gælde uændret, bortset naturligvis fra de singulære punkter, hvor $\hat{Y}_1(\omega)$ og $\hat{Y}_2(\omega)$ er udefinerede. Lidt værre er det med "cosinusformlen" 1.2.3.27, som vi nu skal se på.

Vi har tidligere betragtet Brown elementet, fig.1.2.3.2, som har admittansfunktionen

$$\tilde{Y}_\rho(s) = \frac{1}{\rho + ms} \quad ; \quad \hat{Y}_\rho(z) = \frac{1}{\rho - izm} \quad (16)$$

Dette element kan betragtes som et simpelt eksempel på "ergodicering", idet x-lageret med admittansen

$$\tilde{Y}_0(s) = \frac{1}{ms} \quad ; \quad \hat{Y}_0(z) = \frac{1}{mz} \quad (17)$$

gøres ergodisk ved tilkobling af x-lækken ρ . Så længe $\rho > 0$, kan vi tillade os at udføre den inverse Laplace integration på ω -aksen, d.v.s. (jvf.1.2.3.19):

$$F_\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_\rho(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (18)$$

Realdelen og imaginærdelen af $\hat{Y}_\rho(\omega)$ er givet ved 1.2.3.35-36:

$$\hat{Y}_{1\rho}(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\rho/m}{(\rho/m)^2 + \omega^2} \quad (19)$$

$$\hat{Y}_{2\rho}(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\omega}{(\rho/m)^2 + \omega^2} \quad (20)$$

I ref.I, kapitel 9 blev deltafunktionen defineret ved grænseovergangen

$$\delta(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + x^2} \quad (21)$$

Vi møder nu den samme funktion (Lorentz funktionen) i ligning (19). Når vi går til grænsen $\rho \rightarrow 0+$ får vi derfor

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \hat{Y}_{1\rho}(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \quad (22)$$

For den komplekse funktion $\hat{Y}_\rho(\omega)$ skriver vi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \hat{Y}_\rho(\omega) = \frac{\pi}{m} \delta_+(\omega) \quad (23)$$

hvor den singulære δ_+ -funktion er defineret ved

$$\delta_+(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\epsilon - i\omega} = \delta(\omega) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{\omega} \quad (24)$$

Prøver vi nu at gå til grænsen i (18) for $t > 0$, er delta-funktionsbidraget til $\hat{Y}_\rho(\omega)$ ganske uproblematisk at integrere, men giver værdien

$$F_{\text{delta}}(t) = \frac{1}{2m} \quad (25)$$

d.v.s. kun halvdelen (!) af lethedsfunktionen for x-lageret. Det må betyde, at det imaginære led i δ_+ -funktionen giver et lige så stort bidrag, som svarer til at integrationsvejen må tænkes at slå en lille krølle op over singulariteten:

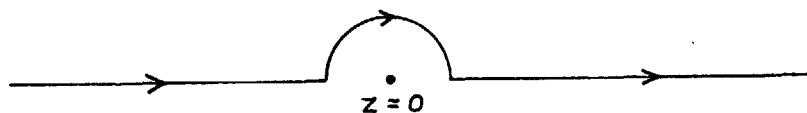


Fig.3. Integrationsvejen i (18) for $\rho=0^+$.

Det bidrag til integralet, som kommer fra den lille krølle må jo være halvdelen af et cirkelintegral med uret rundt om polen, d.v.s. iflg. (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\text{krølle}} \frac{i}{mz} dz &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint \frac{i}{mz} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2m} \end{aligned} \quad (26)$$

Hvis krøllen var gået nedenom singulariteten, ville resultatet være blevet $-1/2m$, idet cirkulationsvejen så ville have været den modsatte vej rundt. Hvis vi leder integrationsvejen direkte igennem polen, ved vi ikke, hvad der sker, men vi kan definere den såkaldte principalværdi af integralet af $1/\omega$ som gennemsnittet af det vi får ved at

"krølle over" og det, vi får ved at "krølle nedenunder", d.v.s. nul. At der er tale om en principalværdi udtrykkes ved et "P" foran eller en streg tværs over integraltegnet:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 0 \quad (27)$$

Defineres integralet i (18) som en principalværdi for $\rho=0+$, udelader vi altså bidraget fra det imaginære led i δ_+ funktionen, og til gengæld skal vi så gange med 2:

$$\begin{aligned} F(|t|) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (28)$$

hvorved vi har genopdaget formel 1.2.3.26.

Vi kan nu prøve at generalisere opskriften. Lad os tænke os, at admittansfunktionen for et ikke-ergodisk system kan skrives på formen

$$\tilde{Y}(s) = Y_0 + \frac{a_0}{s} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left[\frac{1}{s+i\omega_k} + \frac{1}{s-i\omega_k} \right] + \tilde{Y}_{er}(s) \quad (29)$$

hvor Y_0 , a_0 , a_k og ω_k er reelle positive konstanter, og hvor $\tilde{Y}_{er}(s)$ er den ergodiske og reaktive del af admittansen, d.v.s. en funktion, som er uden poler på ω -aksen, og som går mod nul for $|s| \rightarrow \infty$. Leddet Y_0 beskriver altså en asymptotisk passiv systemadfærd ($Y_0 = Y(0+)$, sml. 1.2.3.5) og ledene med a_0 og a_k beskriver en ikke-ergodisk adfærd. Den tidsafhængige lethedsfunktion er så givet ved

$$F(|t|) = 2Y_0 \delta(t) + a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega_k t + F_{er}(|t|) \quad (30)$$

Vi kan så regne med, at $\hat{Y}_{er}(\omega)$ og $F_{er}(|t|)$ tilfredsstiller cosinus- og sinusformlerne fra foregående afsnit:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_{er1}(\omega) \cos \omega t d\omega = F_{er}(|t|) \quad (31)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_{er2}(\omega) \sin \omega t \, d\omega = \text{sign}(t) \cdot F_{er}(|t|) \quad (32)$$

Ved overgang til z-variablen i udtrykket (29) fås

$$\hat{Y}(z) = Y_0 + i \left\{ \frac{a_0}{z} + \sum_{k=1}^n a_k \left[\frac{1}{z-\omega_k} + \frac{1}{z+\omega_k} \right] \right\} + \hat{Y}_{er}(z) \quad (33)$$

Vi går så fra øvre halvplan ned på den reelle akse (ω -aksen) ved at bruge δ_+ -funktionen (sml. (24)):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega + i\epsilon} = -i\pi \delta_+(\omega) = P \frac{1}{\omega} - i\pi \delta(\omega) \quad (34)$$

hvor P-et er en påmindelse om, at formlen kun giver mening i forbindelse med principalværdien af et integral. For realdelen og imaginærdelen af $\hat{Y}(\omega)$ skal vi altså benytte udtrykkene

$$\hat{Y}_1(\omega) = Y_0 + \pi \left\{ a_0 \delta(\omega) + \sum_{k=1}^n a_k [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \right\} + \hat{Y}_{er1}(\omega) \quad (35)$$

$$\hat{Y}_2(\omega) = \frac{a_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n a_k P \left[\frac{1}{\omega - \omega_k} + \frac{1}{\omega + \omega_k} \right] + \hat{Y}_{er2}(\omega) \quad (36)$$

Vi kan straks verificere, at cosinusformlen er opfyldt:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cos \omega t \, d\omega = F(|t|) \quad (37)$$

med vel at mærke kun fordi vi har defineret realdelen af de ikke-ergodiske led på ω -aksen ved brug af δ_+ -funktionen, som vist ovenfor.

De øvrige (egentlige) tidsafhængige responsefunktioner kan nu på lignende måde udtrykkes ved $\hat{Y}_1(\omega)$, ved at vi integrerer cosinusformlen fra 0 til t op til to gange:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega = Y(|t|) \cdot \text{sign}(t) \quad (38)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \, d\omega = J(|t|) \quad (39)$$

Vi lægger mærke til, at de tre responsefunktioner F, Y og J nu er udtrykt ved reelle integraler, hvori indgår de tilsvarende responsefunktioner, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ og $1-\cos\omega t$, for den udæmpede harmoniske oscillator med egenfrekvensen ω (sml. 1.1.4.39, 41 og 42). Vi skal udnytte denne analogi i paragraf 1.3, hvor vi "spektralopløser" et vilkårligt system. Endvidere ser vi af (39), at den tidsafhængige udgave af den termodynamiske ulighed: $J \geq 0$ (afsnit 1.1.3) følger af den frekvensafhængige version $\hat{Y}_1 \geq 0$, (1.2.3.31) idet funktionen $1-\cos\omega t$ er ikke-negativ.

Når vi skal udregne sinusintegralet af imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$, bliver vi nødt til at bruge principalværdien. Først bemærker vi, at

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega = \text{sign}(t) \quad (40)$$

Ser vi dernæst på et led i (36) med pol i ω_k , får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega - \omega_k} d\omega &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\omega - \omega_k)t + \omega_k t]}{\omega - \omega_k} d\omega = \\ &= \cos\omega_k t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega + \sin\omega_k t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega} d\omega \\ &= \text{sign}(t) \cdot \cos\omega_k t \end{aligned} \quad (41)$$

hvor vi har benyttet (40), samt at det principale integral af en ulige funktion forsvinder. Ved benyttelse af (32), (40) og (41) i sinusintegralet af udtrykket (36) for $\hat{Y}_2(\omega)$ og sammenligning med udtrykket (30) for $F(|t|)$ finder vi den generelle sinusformel:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \sin\omega t d\omega = [F(|t|) - 2Y_0\delta(t)] \cdot \text{sign}(t) \quad (42)$$

Sinusintegralet er altså ude af stand til at udtrykke den asymptotisk passive del af systemadfærd. På grund af faktoren $\text{sign}(t)$, som er nul for $t=0$, er der imidlertid ingen

grund til at udtrykke dette forbehold, så vi kan lige så godt omforme (42) til et udtryk, der ligner den tidligere udledte sinusformel:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \sin \omega t \, d\omega = F(|t|) \cdot \text{sign}(t) \quad (43)$$

Ved hjælp af cosinusformlen (37) og sinusformlen (43), samt de omvendte transformationer 1.2.3.21-22 har vi tilsyneladende fået afskaffet de komplekse konturintegraler og residueregningen og ført sagen over i en langt mere banal form for Fourier-transformation. Det er dog kun tilsyneladende. Cosinus- og sinustransformationerne er nu definerede for alle slags responsesystemer, herunder klasser af funktioner, der ikke kan Fourier-transformeres ud fra en elementær analytisk forståelse uden brug af kompleks funktions-teori. Den reelle frekvensakse har en særlig status, både teoretisk og eksperimentelt, og vi får brug for cosinus- og sinustransformationerne som led i begrebsudviklingen. Men når det gælder udregning af konkrete responsefunktioner for givne netværk er det langt lettere og sikrere at holde sig væk fra den "farlige ω -akse" og benytte de komplekse konturintegraler og residueregnings teknikken.

Residueregningen, som bygger på Jordans lemma, kan kun anvendes i forbindelse med de egentlige responsefunktioner. Hvis systemet har spændingsinput, har lethedsfunktionen $F(t)$ højst en integrabel singularitet for $t=0$, og dens Laplace-transformerede vil være begrænset i det uendelige. Hvis systemet er skalainvariant med tidsekspONENTEN α for små tider, vil $\tilde{Y}(s)$ gå som $s^{1-\alpha}$ for $|s| \rightarrow \infty$ (sml. 1.2.3.13). Et system med spændingsinput har jo en tidsekspONENT mellem 1 og 2, så den uegentlige responsefunktion $\tilde{Z}(s) = 1/\tilde{Y}(s)$ vil gå mod uendelig for $|s| \rightarrow \infty$. Vi siger da (for $1 < \alpha \leq 2$), at impedansen $\tilde{Z}(s)$ har en singularitet i det uendelige, og specielt hvis $\alpha=2$, har $\tilde{Z}(s)$ en pol i det uendelige. (F.eks. Brown elementet har $\alpha=2$ for tider der er små i forhold til

relaxationstiden m/ρ).

De uegentlige resonsefunktioner overtræder altså den almindelige lov om, at responsefunktioner (af s) er uden singulariteter i højre halvplan. Alligevel kan vi fremtvinge en uegentlig responsesituation som løsning på en kausal konflikt, f.eks. ved at forbinde vort spændings-input-system til en strømkilde. Hvordan skal det nu forstås response-teoretisk?

På fig.4 betragter vi den kausale konflikt mellem en strømkilde og et Brown element. Normalt siger vi, at den aktive kilde vinder over det reaktive element, således at lageret påtvinges differentiell kausalitet. Dette kan imidlertid ikke være rigtigt for vilkårligt små tider, fordi standard responsefunktionen for den påtvungne kausalitet

$$G(t) = 2\rho\delta(t) + 2m\delta'(t) \quad (44)$$

har en ikke-integrabel singularitet (δ' -funktionen) for $t=0$. D.v.s. for tilstrækkeligt små tider eller tilstrækkeligt høje frekvenser kan det faktiske response ikke være beskrevet ved de uegentlige funktioner. Grunden kan siges at være den, at det aktive system ikke kan være aktivt for vilkårligt høje frekvenser, men en bedre forklaring får man, hvis man som vist på fig.4 indfører en ny systemkomponent, f.eks. en læk, der kan virke som stødpude og "tage skraldet" fra de kausale sammenstød.

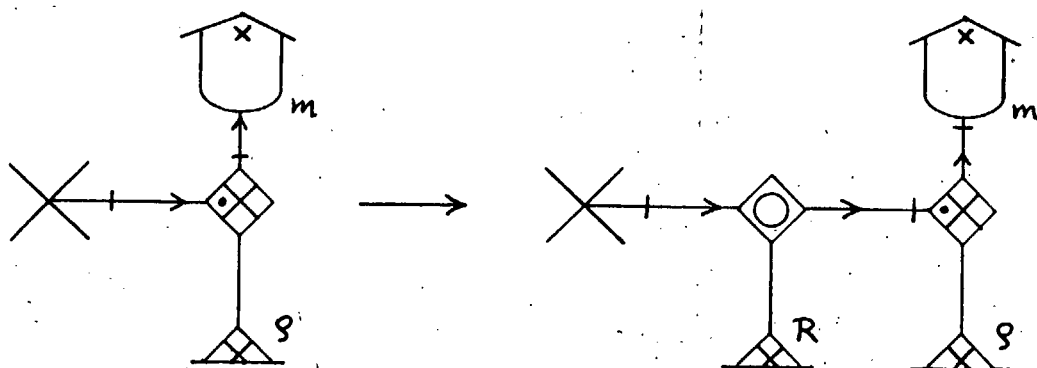


Fig.4. En kausal konflikt og dens bilæggelse.

Impedansfunktionen for Brown elementet er

$$\tilde{Z}(s) = \rho + ms \quad (45)$$

Vi ser, at $\tilde{Z}(s)$ har en pol i det uendelige som tegn på, at $\tilde{Z}(s)$ er uegentlig. Når vi nu udbygger systemet med lækken R , får det udbyggede system admittansen

$$\tilde{Y}_u(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\tilde{Z}(s)}$$

og dets impedans bliver altså

$$\tilde{Z}_u(s) = \frac{1}{\tilde{Y}_u(s)} = \frac{R \cdot (\rho + ms)}{R + \rho + ms} \quad (46)$$

Hvis vi lader modstanden R gå mod uendelig, vil udtrykket (46), som er en egentlig responsefunktion, konvergere mod den uegentlige impedansfunktion (45) inden for en hvilken som helst afgrænset del af den komplekse halvplan $\text{Re}(s) > 0$. Der er altså ikke spor i vejen for, at man i et eksperiment med en begrænset tidsopløsning kan udmåle et uegentligt response. Man behøver ikke at tænke på at etablere "stødpuden" R i forvejen. Den gemmer sig inden i strømkilden og vil dukke frem i måleresultaterne, hvis man presser frekvensen for højt op. Det må dog bemærkes, at der er andre måder at bilægge konflikten på, idet et hvilken som helst reaktivt system med strøminput kan erstatte x -lækken R . Det er derfor ikke nødvendigvis en rent Ohmsk shuntmodstand i strømkilden, der afsløres i højfrekvens grænsen.

1.2.5. Eksempler

I dette afsnit gennemgås nogle simple energibandsmodeller ligesom i afsnit 1.1.4, men denne gang lægger vi hovedvægten på de frekvensafhængige responsefunktioner. Da disse er så meget simplere at bestemme end de tidsafhængige, går vi en smule videre m.h.t. kompleksiteten at systemerne og hovedpunktet bliver en diskussion af den dæmpede harmoniske oscillator.

De forskellige basale ikoner har alle været omtalt tidligere i denne paragraf og vi nøjes derfor med at servere en frekvensversion af skemaet på fig.1.1.4.1

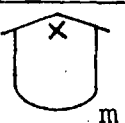

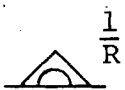

	$\tilde{F}(s)$	$\tilde{Y}(s)$	$\tilde{J}(s)$		$\tilde{G}(s)$	$\tilde{Z}(s)$	$\tilde{M}(s)$	
	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{ms}$	$\frac{1}{ms^2}$		ms^2	ms	m	
	Cs^2	Cs	C		$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{Cs^2}$	
	$\frac{s}{R}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{Rs}$		Rs	R	$\frac{R}{s}$	

Fig.1. Skema over de frekvensafhængige responsefunktioner for simple komponenter.

Ved substitutionen $s=-iz$ kan responsefunktionerne udtrykkes som funktioner af Fourier-frekvensen $z=\omega+ic$ i stedet for Laplace-frekvensen $s=\epsilon-i\omega$.

Som vist i afsnit 1.2.3. oversætter man fra en vilkårlig frekvensfunktion $\tilde{R}(s)$ til den tilsvarende tidsafhængige $R(t)$ ved at anvende den inverse Laplace-transformation på $\tilde{R}(s)/s$:

$$R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{R}(s)/s, t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\tilde{R}(s)}{s} e^{st} ds \quad (1)$$

og integralet kan udregnes ved hjælp af residuesætningen 1.2.4.9, når forudsætningen for Jordans lemma er opfyldt, d.v.s. når

$$\frac{\tilde{R}(s)}{s} \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad |s| \rightarrow \infty \quad (2)$$

Vi vil i dette afsnit kun interessere os for standard responsefunktionerne, d.v.s. $R(t)$ er enten $F(t)$ eller $G(t)$ og $\tilde{R}(s)/s$ er enten $\tilde{Y}(s)$ eller $\tilde{Z}(s)$.

Når vi nu begynder af kombinere de basale ikoner med transducere, gyrotorer og samlere, kan vi uden videre overføre de kendte regneregler fra afsnit 1.1.4 til de frekvensafhængige funktioner. Det nye, som kommer til, er at \tilde{Y} og \tilde{Z} er reciprokke funktioner. D.v.s. når to systemer er forbundet til samme ydre port med en o-samler som på fig.1.1.4.4, så har vi ikke alene en additionsregel for admittanserne, svarende til ligning 1.1.4.17, men også en additionsregel for de reciprokke impedanser:

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 = \quad (3)$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$$

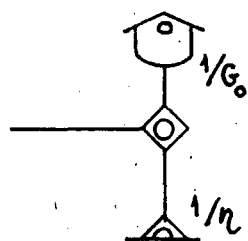
Og når samleren er af x-typen har vi foruden additionsreglen for impedanserne den samme regel udtrykt ved de reciprokke admittanser:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 = \quad (4)$$

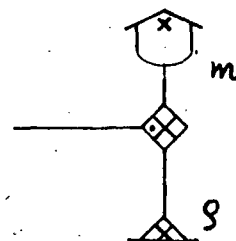
$$\frac{1}{\tilde{Y}} = \frac{1}{\tilde{Y}_1} + \frac{1}{\tilde{Y}_2}$$

Vi risikerer derfor ikke at løbe ind i integralligninger (som 1.1.4.21) eller differentiaalligninger, når vi skal bestemme de frekvensafhængige responsefunktioner for en sammensat energibandsmodel, men kan i værste fald komme ud for at skulle løse et sæt lineære, algebraiske ligninger.

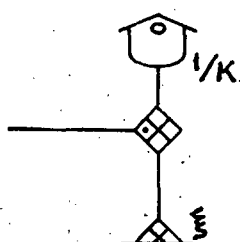
På fig.2 er vist de ikoniske modeller med tilhørende symbolsk parametrisering for de systemer, som i det følgende vil blive gennemgået for at illustrere brugen af de udviklede regneteknikker.



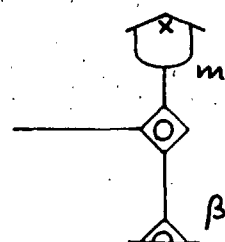
a. Maxwell



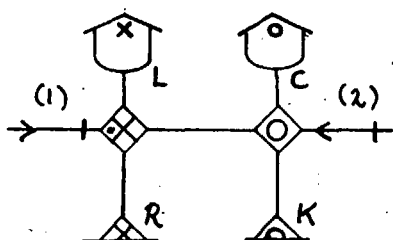
b. Brown (dualt Maxwell)



c. Voigt



d. Dualt Voigt



e. Dæmpet harmonisk oscillator.

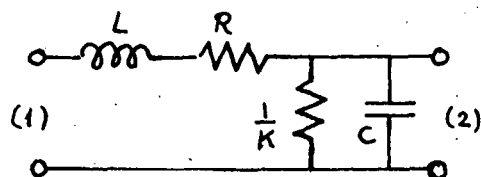


Fig.2. Energibandsmodeller, som gennemgås i det følgende. Den dæmpede harmoniske oscillator er også repræsenteret ved et elektrisk netværk.

a. Maxwell element.

Addition af admittanser:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{\eta} + \frac{s}{G_0} \quad (\text{pol i det uendelige,} \quad (5) \\ \text{d.v.s. uegentlig})$$

Impedans:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{1}{\tilde{Y}(s)} = \frac{\eta}{1+s\frac{\eta}{G_0}} = \frac{\eta}{1+s\tau_M} \quad (6)$$

Pol og residuum:

$$s_0 = -\frac{1}{\tau_M} ; \quad \text{Res}\tilde{Z}(s_0) = G_0 \quad (7)$$

Invers Laplacetransformation:

$$G(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\tilde{Z}(s), t\} = G_0 \cdot e^{-t/\tau_M} \quad (8)$$

b. Brown element.

Dualitetstransformation af (6) og (8)

$$\tilde{Y}(s) = \frac{\frac{1}{\rho}}{1+s\frac{m}{\rho}} = \frac{\frac{1}{\rho}}{1+s\tau_B} \quad (9)$$

$$F(t) = \frac{1}{m} e^{-t/\tau_B} \quad (10)$$

c. Voigt element.

Addition af impedanser:

$$\tilde{Z}(s) = \xi + \frac{K}{s} \quad (11)$$

Pol og residuum

$$s_0 = 0 \text{ (ikke ergodisk) ; } \text{Res}\tilde{Z}(0) = K \quad (12)$$

Invers Laplace transformation:

$$G(t) = 2\xi\delta(t) + K \quad (13)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{\tilde{Z}(s)} = \frac{s}{K+\xi s} = \frac{1}{\xi} \cdot \left[1 - \frac{K}{K+\xi s}\right] \quad (14)$$

Pol og residuum:

$$s_0 = -\frac{K}{\xi} \text{ (ergodisk) ; Res}\tilde{Y}(s_0) = -\frac{K}{\xi^2} \quad (15)$$

Invers Laplacetransformation:

$$F(t) = \frac{2}{\xi}\delta(t) - \frac{K}{\xi^2} e^{-\frac{K}{\xi}t} \quad (16)$$

d. Dualt Voigt element.

Ligesom Brown elementet kan det duale Voigt element beskrive en partikel opslemmet i en væske med hastighedsproportional gnidning. Stimulusvariablen kan være en hastighed, som væsken bevæges med, og responset vil være den kraft, som partiklen påvirker væsken med. Udregning af responsefunktionerne ved dualitetstransformation af (11)-(16) overlades til læseren.

e. Dæmpet harmonisk oscillator.

Selvom dette kapitel behandler systemer med kun én port til omgivelserne, vil vi i dette tilfælde gøre en undtagelse og behandle den dæmpede harmoniske oscillator som en toport. Diskussionen og definitionen af forskellige parametre foretages nemlig lettest på grundlag af den såkaldte overføringsfunktion, som knytter forbindelse mellem signaler i de to modsatte porte. Responseegenskaberne beskrives så ved en matrix:

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}'_1 \\ \tilde{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}'_1 \\ \tilde{f}'_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

hvor orienteringerne og numrene refererer til fig.2e. Bemærk, at \tilde{Y} og \tilde{Z} er egentlige responsefunktioner for to forskellige porte. De er altså ikke reciprokke, men duale funktioner.

Hvis vi sætter $\tilde{f}'_2=0$, kan vi behandle oscillatoren som et 1-port system med spændingsinput (i port 1). Vi finder så

$$\tilde{Y}(s) = [R + Ls + \tilde{Z}_M(s)]^{-1}$$

hvor $\tilde{Z}_M(s)$ er impedansen af Maxwell elementet sammensat af C og K:

$$\tilde{Z}_M(s) = \frac{\frac{1}{K}}{1+s \cdot \frac{C}{K}} = \frac{1}{K+Cs}$$

D.v.s. vi finder

$$\tilde{Y}(s) = \frac{K+Cs}{1+(R+Ls)(K+Cs)} \quad (18)$$

Tilsvarende finder vi ved at sætte $\tilde{e}'_1=0$ impedansen i port 2:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{R+Ls}{1+(K+Cs)(R+Ls)} \quad (19)$$

For at bestemme den dimensionsløse overføringsfunktion $\tilde{H}_{12}(s)$ sætter vi $\tilde{e}'_1=0$. Så er

$$\tilde{e}'_2 = \tilde{Z} \cdot \tilde{f}'_2$$

Brown elementet sammensat af L og R har nu input amplituden $-\tilde{e}'_2$ og admittansen

$$\tilde{Y}_B(s) = \frac{1}{R+Ls}$$

d.v.s. vi finder

$$\tilde{f}'_1 = \tilde{Y}_B \cdot (-\tilde{e}'_2) = -\tilde{Y}_B \cdot \tilde{Z} \cdot \tilde{f}'_2$$

og dermed, iflg. (17)

$$\tilde{H}_{12}(s) = -\tilde{Y}_B(s) \cdot \tilde{Z}(s) = -\frac{1}{1+(K+Cs)(R+Ls)} \quad (20)$$

Tilsvarende finder vi for $\tilde{f}'_2=0$:

$$\tilde{f}'_1 = \tilde{Y} \cdot \tilde{e}_1 \quad ; \quad \tilde{e}'_2 = \tilde{Z}_M \cdot \tilde{f}'_1$$

$$\tilde{H}_{21}(s) = \tilde{Z}_M(s) \cdot \tilde{Y}(s) = \frac{1}{1+(K+Cs)(R+Ls)} \quad (21)$$

Vi ser altså, at de to ikke-diagonale elementer i response-matricen er lige store med modsat fortegn:

$$\tilde{H}_{21}(s) = -\tilde{H}_{12}(s) = \tilde{H}(s) = \frac{1}{1+(K+Cs)(R+Ls)} \quad (22)$$

Dette er et specialtilfælde af den almindelige reciprocitetssætning, som vi skal udlede i kapitel 2.

Admittansen i port 1 og impedansen i port 2 kan nu også udtrykkes ved overføringsfunktionen $\tilde{H}(s)$:

$$\tilde{Y}(s) = (K+Cs) \cdot \tilde{H}(s) \quad (23)$$

$$\tilde{Z}(s) = (R+Ls) \cdot \tilde{H}(s) \quad (24)$$

og vi ser, at polerne for de tre responsefunktioner er sammenfaldende og bestemt ved ligningen

$$0 = H^{-1}(s) = LCs^2 + (KL+RC)s + 1 + RK \quad (25)$$

Vi ser, at der i almindelighed er to poler i venstre halvplan

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{K}{C}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{K}{C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{K}{C}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{K}{C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \quad (26)$$

For den udæmpede oscillator, hvor $R=0$ og $K=0$, ligger begge polerne på den imaginære akse:

$$s_1 = -i\omega_0 \quad , \quad s_2 = i\omega_0$$

idet vi vælger den kvadratrod, som har positiv imaginærdel ($\sqrt{-1} = i$). Egenfrekvensen ω_0 for den udæmpede oscillator er

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (27)$$

I det udæmpede tilfælde er den tidsafhængige admittans og impedans givet ved (sml. 1.1.4.39)

$$Y(t) = \frac{1}{Z_0} \sin\omega_0 t$$

$$Z(t) = Z_0 \sin\omega_0 t$$

hvor Z_0 er den karakteristiske impedans af den udæmpede oscillator

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (28)$$

Den matematiske diskussion af den dæmpede oscillator simplificeres betydeligt, hvis vi erstatter de fire dimensionerede energibandsparametre L , R , C og K med de to dimensionerede parametre ω_0 og Z_0 , der karakteriserer den udæmpede oscillator, samt to dimensionsløse parametre γ og δ , der karakteriserer henholdsvis styrken og "skævheden" af dæmpningen. De to forhold R/L og K/C har begge dimensionen tid^{-1} , så hvis vi dividerer dem med ω_0 fås dimensionsløse tal. Det symmetriske dæmningsforhold γ defineres som

$$\gamma = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} + \frac{K}{C} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + KZ_0 \right) \quad (29)$$

og det asymmetriske dæmningsforhold δ defineres som

$$\delta = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} - \frac{K}{C} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} - KZ_0 \right) \quad (30)$$

Af lækaxiomet følger, at γ er ikke-negativ, (hvis $\gamma=0$, er oscillatoren udæmpet, d.v.s. så er der ingen lække) medens δ kan være positiv eller negativ i det lukkede interval $[-\gamma, \gamma]$:

$$|\delta| \leq \gamma \quad (31)$$

Omvendt kan vi udtrykke energibandsparametrene ved de fire nye parametre:

$$\begin{aligned} L &= \frac{Z_0}{\omega_0} & ; & & C &= \frac{1}{\omega_0 Z_0} \\ R &= Z_0 \cdot (\gamma + \delta) & ; & & K &= \frac{1}{Z_0} \cdot (\gamma - \delta) \end{aligned} \quad (32)$$

Hvis frekvensen måles i forhold til ω_0 og impedansen i forhold til Z_0 , kan vi nøjes med at diskutere tre dimensionsløse funktioner, som afhænger af de to parametre γ og δ . Vi vil gå over til Fourier-frekvensen $z=is$ i stedet for Laplace-frekvensen s og definerer derfor

$$\begin{aligned} x &= \frac{z}{\omega_0} \\ \hat{y}(x) &= \hat{Y}(z) \cdot Z_0 \\ \hat{z}(x) &= \frac{\hat{Z}(z)}{Z_0} \\ \hat{h}(x) &= \hat{H}(z) \end{aligned} \quad (33)$$

Polerne for funktionerne \hat{y} , \hat{z} og \hat{h} er nu udtrykt ved γ og δ :

$$x_1 = -i\gamma + \sqrt{1-\delta^2}$$

$$x_2 = -i\gamma - \sqrt{1-\delta^2}$$
(34)

Hvis $|\delta| < 1$ har polerne en realdel, og responsefunktionerne udviser en svingende opførsel. Vi siger da, at oscillatoren er underdæmpet. Hvis $|\delta| > 1$ er begge polerne imaginære, og der kommer ingen svingninger; oscillatoren er overdæmpet. Tilfældene $\delta = +1$ og $\delta = -1$, hvor de to poler er sammenfaldende til en enkelt pol af 2.orden, kaldes kritisk dæmpning. Egentlig er det lidt misvisende at tale om dæmpning i disse sammenhænge, for vi ser jo, at det er det asymmetriske dæmpningsforhold δ , og ikke det symmetriske dæmpningsforhold γ , som skiller mellem tilfældene, men vi skal se, at det er γ , og ikke δ , som bestemmer hvor hurtigt responset dæmpes. Dæmpningsparameteren γ kan være lige så stor det skal være, uden at svingende adfærd af den grund er udelukket. Grunden til, at brugen af ordet "dæmpning" i denne forbindelse er blevet indarbejdet, er nok den, at man i mekanikken betragter hastighedsproportional gnidning som den eneste årsag til dissipation. D.v.s. man inkluderer x -lækken R , men tager ikke muligheden for, at der kan optræde en o -læk K i betragtning. Hvis $K=0$, er $\delta = \gamma$, og parameteren δ vil derfor i dette specielle tilfælde karakterisere styrken af dæmpningen. Tilfældene $K=0$ eller $R=0$, hvor $|\delta| = \gamma$, kaldes udartet dæmpning.

Den mekaniske harmoniske oscillator kan være en partikel med massen m ($\sim L$), som sidder fast i den ene ende af en fjeder med stivheden G ($\sim 1/C$), som er fastgjort til "laboratoriet" i den anden ende. Systemet kan være nedsænket i en væske, som så sørger for hastighedsproportional gnidning med en modstandskoefficient ρ ($\sim R$). Den manglende parameter, o -lækken K , kan komme ind i billedet ved, at fastgøringspunktet for fjederen ikke sidder helt fast i forhold til laboratoriet, men har en vis bevægelighed β ($\sim K$). På denne måde ophæves udartningen af den mekaniske oscillator.

Svingningsfrekvensen for den dæmpede oscillator defineres som realdelen af polen z_1 , når oscillatoren er underdæmpet

$$\omega_\delta = \operatorname{Re}(z_1) = \omega_0 \operatorname{Re}(x_1) = \omega_0 \sqrt{1-\delta^2} \quad (35)$$

I tilfældet $\delta=0$, som kaldes symmetrisk dæmpning, er svingningsfrekvensen altså den samme som for den udæmpede oscillator. I nedenstående diagram er de forskellige former for kvalitativ opførsel angivet ved de tilsvarende områder i parameterplanen $\gamma-\delta$.

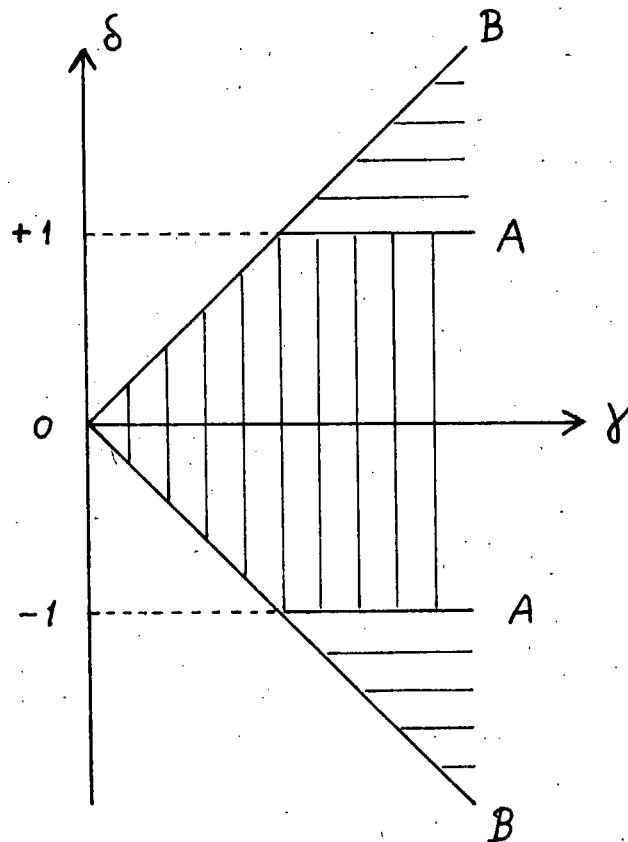


Fig.3. Kvalitativ adfærd af den dæmpede oscillator afmærket ved områder i $\gamma-\delta$ parameterplanen.

Lodret skravering: $|\delta| < 1$; underdæmpet

Vandret skravering: $|\delta| > 1$; overdæmpet

Linjerne A: $|\delta| = 1$; kritisk dæmpning

Linjerne B: $|\delta| = \gamma$; udartet dæmpning

Linjen γ : $\delta = 0$; symmetrisk dæmpning

Nulpunktet: $\gamma=\delta = 0$; udæmpet.

Det kan være bekvemt at have andre dimensionsløse parametre at arbejde med. Lækproduktet λ defineres ved (sml. (32))

$$\lambda = R \cdot K = \gamma^2 - \delta^2 \quad (36)$$

og er altså ikke-negativ. De udartede tilfælde af dæmpning svarer til, at $\lambda=0$.

Overføringsfunktionen $\hat{h}(x)$ i (33) kan nu skrives på formen (sml. (22)):

$$\hat{h}(x) = [1 + \lambda - x^2 - 2i\gamma x]^{-1} = \frac{-1}{(x-x_1)(x-x_2)} \quad (37)$$

Det ses, at overføringsfunktionen antager en rent imaginær værdi for en bestemt frekvens ω_λ , som kaldes resonnansfrekvensen.

$$\hat{h}(\pm\sqrt{1+\lambda}) = \hat{H}(\pm\omega_\lambda) = \pm iQ \quad (38)$$

$$\omega_\lambda = \omega_0 \sqrt{1+\lambda}$$

hvor Q-værdien er givet ved

$$Q = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1+\lambda}} \quad (39)$$

Q-værdien er et dimensionsløst mål for oscillatorens "godhed", d.v.s. mangel på dæmpning. En stor Q værdi betyder en meget skarp resonans og omtrentligt sammenfald af de tre karakteristiske frekvenser, som er ordnet på følgende måde

$$\omega_\delta \leq \omega_0 \leq \omega_\lambda$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{svingnings-} \\ \text{frekvens} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{egen-} \\ \text{frekvens} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{resonnans-} \\ \text{frekvens} \end{array} \right)$$

hvor det første lighedstegn gælder for $\delta=0$, (symmetrisk dæmpning), mens det andet kun gælder for $\lambda=0$ (udartet dæmpning).

Definitionerne på de forskellige oscillatorparametre varierer en del i litteraturen. F.eks. er der nogle, som omformer (37) til

$$\hat{H}(\omega) = (1+\lambda)^{-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 - 2i\gamma' \cdot \frac{\omega}{\omega_\lambda} \right]^{-1}$$

og herefter definerer

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2-\delta^2}}$$

som "dæmpningsparameteren". Denne definition har den fordel, at det bliver "dæmpningsparameteren", som afgør, om oscillatoren er underdæmpet ($\gamma' < 1$), kritisk dæmpet ($\gamma' = 1$) eller overdæmpet ($\gamma' > 1$). Ulempen er bl.a. at dæmpningshastigheden $\gamma' \omega_\lambda (= \gamma \omega_0)$ nu sættes i relation til resonansfrekvensen ω_λ , som er et mere kompliceret udtryk end egenfrekvensen ω_0 .

Også Q-værdien hersker der en del uenighed om. Feynmann (ref.6) mener, at den mest almindeligt accepterede definition bygger på forholdet mellem den oplagrede energi og det arbejde, der udføres per cyklus (d.v.s. per radian) ved resonansfrekvensen. Denne definition er dog ikke videre god, fordi den er usymmetrisk m.h.t. de to porte. Feynmann anfører, at man har mest brug for parameteren Q, når den er meget stor, og "i den grænse stemmer alle definitioner overens".

Enhver skarp resonans i naturen kan tilskrives en Q-værdi. Den absolutte rekord indehaves vel nok stadig af Mössbauer-effekten: $Q \approx 10^{11} - 10^{15}$, men en moderne He-Ne laser er ved at kunne konkurrere. Hvis man forsøger at lave en udæmpet svingningskreds af en spole (L) og en kondensator (C), er det svært at komme op over en Q-værdi på ca. 100. Den begrænsende faktor er især spolens modstand ($\sim R$ i vores model), d.v.s. dæmpningen er udartet ($\lambda=0$) og i dette tilfælde er

$$Q = \frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_0}{R}$$

hvilket alle vist kan blive enige om.

Netværksteoretikeren Valkenburg (ref.7) definerer Q for et RCL netværk ved ovenstående formel. Hans diskussion er dog så fuldstændig, at den antyder en generalisation til tilfældet $\lambda \neq 0$. De to poler s_1 og s_2 , lign. (26), vil i det underdæmpede tilfælde ligge på en cirkel med radius ω_λ . Vinklen θ mellem én af polerne og den reelle akse er bestemt ved

$$\cos \theta = \frac{1}{2Q'}$$

hvor Q' må opfattes som Valkenburg's definition af Q-værdien. Sammenhængen med det her benyttede Q er så

$$Q' = \frac{1}{2\gamma'} = (1+\lambda) \cdot Q$$

Denne definition kan sættes i relation til overføringsfunktionen på samme måde som her, og forskellen på definitionerne Q og Q' hænger så på, om "spændingsdeleforholdet" $\hat{H}(0) = (1+\lambda)^{-1}$ skal regnes med i overføringsfunktionen eller ej.

Real- og imaginærværdien af overføringsfunktionen på den reelle frekvensakse er givet ved

$$\hat{H}_1(\omega) = \frac{(\omega_\lambda^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \omega^2} \quad (40)$$

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{2\gamma \omega_0^3 \omega}{(\omega_\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \omega^2} \quad (41)$$

Hvis ω ligger meget tæt ved ω_λ kan vi approximere udtrykket (41) på følgende måde

$$\hat{H}_2(\omega) \approx Q \cdot \left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_\lambda}{\gamma \omega_0} \right)^2 \right]^{-1} \quad \text{for} \quad \left| \frac{\omega - \omega_\lambda}{\omega_0} \right| \ll 1 \quad (42)$$

Vi ser altså, at imaginærværdien af overføringsfunktionen i nærheden af ω_λ med tilnærmelse kan beskrives som en Lorentz-kurve, der ligger symmetrisk om ω_λ med maximumsværdien Q og halvværdibredden $\gamma \omega_0$.

Hvis vi pumper oscillatoren med et trigonometrisk spændingssignal svarende til viseren

$$\hat{e}_\omega e^{-i\omega t}$$

og forudsætter, at strømmen i port 2 er nul, så vil spændingsviseren i port 2 være givet ved

$$\hat{H}(\omega) \cdot \hat{e}_\omega \cdot e^{-i\omega t} = |\hat{H}(\omega)| \hat{e}_\omega e^{-i(\omega t - \phi)}$$

Fasedrejningen, som er det beløb, fasen i port 2 kommer bagefter fasen i port 1, er

$$\phi = \text{Arccos} \frac{\hat{H}_1(\omega)}{|\hat{H}(\omega)|} \quad \text{for} \quad \omega > 0 \quad (43)$$

medens amplitudeforstærkningen er funktionen

$$|\hat{H}(\omega)| = \hat{H}_1(\omega)^2 + \hat{H}_2(\omega)^2 \quad (44)$$

Hvis vi i stedet sætter spændingen i port 1 til nul og pumper med et strømsignal i port 2, så vil strømmen i port 1 være karakteriseret ved den samme fasedrejning og amplitudeforstærkning, bortset fra fortegnet. Hvis vi vender orienteringen i port 1 (bruger D-tegn i begge porte), bliver analogien fuldkommen, idet de to ikke-diagonale elementer i responsematricen (17) så bliver identiske som udtryk for den almindelige reciprocitetsegenskab af energibandsmodeller (uden gyratorer).

Følgende figur giver et vue over fasedrejningen ϕ og amplitudeforstærkningen $|\hat{H}|$ som funktion af ω . Det er især værd at bemærke, at ved resonansfrekvensen ω_λ er fasedrejningen altid $\pi/2$ og amplitudeforstærkningen lig med Q-værdien. For meget små frekvenser er $\phi \approx 0$ og $|\hat{H}|$ er givet ved spændingsdelerforholdet $(1+\lambda)^{-1}$, og for meget store frekvenser går amplitudeforstærkningen mod 0 og fasedrejningen mod π .

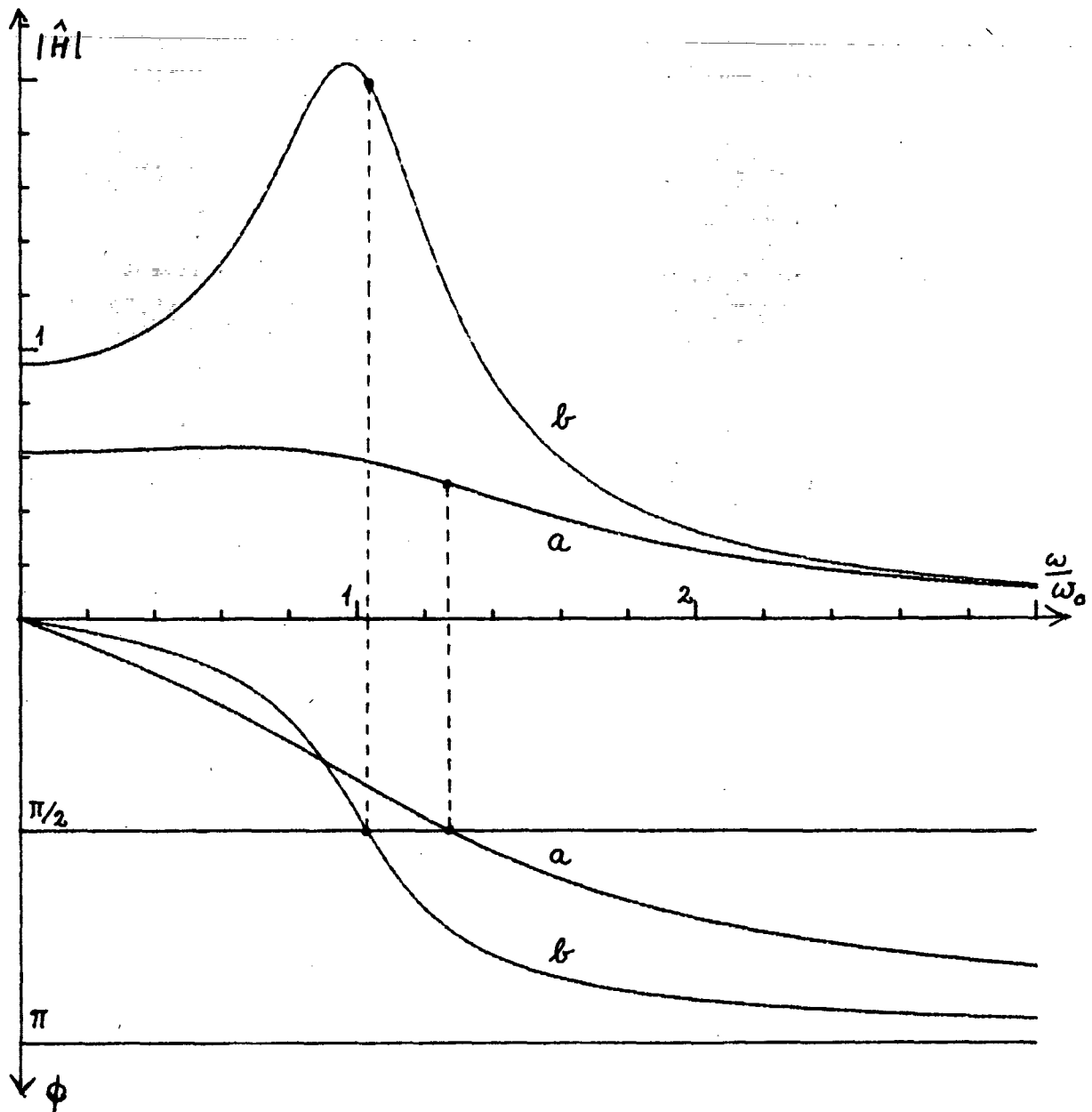


Fig.4. Amplitudeforstærkning og fasedrejning for overføringsfunktionen af den dæmpede harmoniske oscillator som funktion af frekvensen. (HP25 program i appendix C).

a: $\delta = 0$, $Q = 0.5$

b: $\delta = 0$, $Q = 2.0$

Vi vender nu tilbage til at betragte oscillatoren som et 1-port system, og vi vil nøjes med at se på forholdene i spændingsporten (port 1, d.v.s. strømmen i port 2 sættes til nul). Af (23) og (25) får vi

$$\tilde{Y}(s) = \frac{(K+Cs) \cdot \omega_0^2}{(s+i\omega_0 x_1)(s+i\omega_0 x_2)} \quad (45)$$

hvor x_1 og x_2 er givet ved (34).

Hvis x_1 og x_2 er forskellige, d.v.s. hvis $|\delta| \neq 1$, har $\tilde{Y}(s)$ to forskellige 1.ordens poler i venstre halvplan, $s_1 = -i\omega_0 x_1$ og $s_2 = -i\omega_0 x_2$ (sml. (26)). Residuerne kan beregnes ved ligning 1.2.4.5, og vi får efter lidt regneri (antag $|\delta| < 1$)

$$\text{Res}\tilde{Y}(s_1) = \frac{\omega_0^2 (K+Cs_1)}{s_1 - s_2} = \frac{1}{2L} \cdot [1 + i \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}] \quad (46)$$

$$\text{Res}\tilde{Y}(s_2) = \frac{\omega_0^2 (K+Cs_2)}{s_2 - s_1} = \frac{1}{2L} \cdot [1 - i \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}] \quad (47)$$

Residuesætningen 1.2.4.9 giver så for den inverse Laplace-transformation:

$$F(t) = \text{Res}\tilde{Y}_1(s_1) \cdot e^{-i\omega_0 x_1 t} + \text{Res}\tilde{Y}_1(s_2) \cdot e^{-i\omega_0 x_2 t} \quad (48)$$

I det underdæmpede tilfælde $|\delta| < 1$ fås

$$F(t) = \frac{1}{L} [\cos(\omega_\delta t) - \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega_\delta t)] \cdot e^{-\omega_0 \gamma t} \quad (49)$$

hvor ω_δ er svingningsfrekvensen (35). I det overdæmpede tilfælde $|\delta| > 1$, skal vi sætte

$$\omega_\delta = \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1} \quad (50)$$

og vi får så ved tilsvarende regninger:

$$F(t) = \frac{1}{L} [\cosh(\omega_\delta t) - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 1}} \sinh(\omega_\delta t)] e^{-\omega_0 \gamma t} \quad (51)$$

Vi mangler så kun tilfældet kritisk dæmpning $|\delta|=1$. I dette tilfælde falder de to poler s_1 og s_2 sammen til en enkelt pol af 2.orden for $s=-\gamma\omega_0$. Vi kan så udregne residuet ved formel 1.2.4.7, d.v.s

$$\begin{aligned} F(t) &= \text{Res}[\tilde{Y}(s)e^{st}]_{s=-\gamma\omega_0} = \frac{d}{ds}[(s+\gamma)^2\tilde{Y}(s)e^{st}]_{s=-\gamma} \\ &= \frac{d}{ds}[\omega_0^2(K+Cs)e^{st}]_{s=-\gamma\omega_0} = \frac{1}{L} e^{-\omega_0\gamma t}(1-\delta\cdot\omega_0 t) \quad (52) \end{aligned}$$

hvor δ er enten +1 eller -1. Dette udtryk kan også findes direkte af (49) eller (51) for $|\delta|=1$.

Standardresponsefunktionen $G(t)$ for strømporten kan så bestemmes ved en dualitetstransformation. D.v.s. i (49), (51) og (52) skal vi erstatte L med C og skifte fortegn på δ . De øvrige tidsafhængige responsefunktioner kan bestemmes af $F(t)$ og $G(t)$ ved integration, f.eks. ved brug af formlerne

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-at} \cos bt \, dt &= \frac{1}{a^2+b^2} [a - ae^{-at} \cos bt + be^{-at} \sin bt] \\ \int_0^t e^{-at} \sin bt \, dt &= \frac{1}{a^2+b^2} [b - be^{-at} \cos bt - ae^{-at} \sin bt] \end{aligned} \quad (53)$$

Det er dog i reglen lettere og sikrere at bestemme en af de tidsafhængige $R(t)$ ved invers Laplace-transformation af $\tilde{R}(s)/s$ (lign. (1)) og brug af residuesætningen 1.2.4.9. Udtrykkene er komplicerede, og vi skal nøjes med at anføre et par stykker for tilfældet $\delta=0$, symmetrisk dæmpning, som er det simpleste at behandle, da sinusleddet i (49) mangler

$$Y(t) = \frac{1}{Z_0 \cdot (1+\gamma^2)} [(\sin\omega_0 t - \gamma \cos\omega_0 t) e^{-\omega_0\gamma t} + \gamma] \quad (54)$$

$$J(t) = \frac{\gamma t}{Z_0 (1+\gamma^2)} + \frac{C}{(1+\gamma^2)^2} \left\{ 1 - [(1+\gamma^2) \cos\omega_0 t - 2\gamma \sin\omega_0 t] e^{-\omega_0\gamma t} \right\} \quad (55)$$

Den dæmpede harmoniske oscillator er vel nok det vigtigste modelsystem i fysikken, og vi skal få god brug for den i de følgende paragraffer.

1.3. Spektralopløsning og kædebrøks-reticulation.

I denne paragraf går vi nærmere ind på de analytiske egenskaber af de frekvensafhængige responsefunktioner. Vi skal på dette grundlag diskutere modsætningsforholdet mellem den mikroskopiske reversibilitet og den makroskopiske irreversibilitet i fysikken. Desuden gives et par opskrifter på energibands-reticulation af en black box med given responsefunktion.

1.3.1. Spektraltæthed og dispersionsrelationer.

Vi har tidligere været inde på, at cosinusformlen 1.2.4.37 og de integrerede versioner 1.2.4.38 og -39 udtrykker de tidsafhængige responsefunktioner for den ukendte "black box" ved hjælp af de tilsvarende tidsafhængige funktioner for en yderst velkendt "white box", nemlig den udæmpede harmoniske oscillator. Ulempen ved disse formler er, at de blander sammen på tids- og frekvensbilledet: Det er de tidsafhængige responsefunktioner, der kommer ud af formlerne, men der kræves kendskab til den frekvensafhængige dissipative funktion $\hat{Y}_1(\omega)$. Vi skal derfor starte med at omformulere cosinusformlen til en relation, hvori der indgår frekvenser, men ingen tid.

For den udæmpede oscillator med egenfrekvensen ω' har admittansen for spændingsporten poler i $\pm i\omega'$, og begge residuer er $1/(2L)$ (sml. 1.2.5.47):

$$\tilde{Y}_{\omega'}^{\text{osc.}}(s) = \frac{1}{2L} \left\{ \frac{1}{s+i\omega'} + \frac{1}{s-i\omega'} \right\} \quad (1)$$

Ved overgang til Fourier-frekvensen $z=is$, fås

$$\hat{Y}_{\omega'}^{\text{osc.}}(z) = \frac{i}{2L} \left\{ \frac{1}{z-\omega'} + \frac{1}{z+\omega'} \right\} \quad (2)$$

Ligning (2) er gyldig for z i øvre halvplan. Hvis z kommer ned på den reelle ω -akse, skal vi bruge δ_+ -funktionen, ligning 1.2.4.34:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\text{osc.}}(\omega) &= \frac{\pi}{2L} \{ \delta(\omega-\omega') + \delta(\omega+\omega') \} \\ &+ \frac{i}{2L} P \left\{ \frac{1}{\omega-\omega'} + \frac{1}{\omega+\omega'} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

For "black box" systemet er admittansfunktionen $\hat{Y}(z)$ jo

givet ved Laplace-transformationen

$$\hat{Y}(z) = \mathbf{L}\{F(t), -iz\} = \int_0^{\infty} F(t) e^{izt} dt \quad (4)$$

hvor det også forudsættes, at z er i øvre halvplan. Vi indsetter nu i (4) cosinusformlens udtryk for $F(t)$ (vi erstatte ω med ω' for ikke at forveksle med $\text{Re}(z)$):

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega') \cos \omega' t d\omega' \quad \text{for } t > 0 \quad (5)$$

Den Laplace-transformerede af funktionen $\cos \omega' t$ er, bortset fra faktoren $1/L$, det samme som admittansen af en udæmpet oscillator med egenfrekvensen ω' (sml. skemaet i afsnit 1.2.2)

$$\mathbf{L}\{\cos \omega' t, -iz\} = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{z - \omega'} + \frac{1}{z + \omega'} \right] \quad (6)$$

Udtrykket (4) bliver nu, med brug af (5) og (6):

$$\hat{Y}(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega') \cdot \left[\frac{1}{z - \omega'} + \frac{1}{z + \omega'} \right] d\omega' \quad (7)$$

Denne såkaldte spektralformel viser altså, at black box'en kan "opløses" på oscillatorer, hvis egenfrekvenser ω' ligger kontinuert fordelt over den positive, reelle akse. Hvis vi tænker os, at alle disse oscillatorer har samme inertans (induktans) L , så skal antallet af oscillatorer med egenfrekvenser i et lille interval fra ω' til $\omega' + d\omega'$ kunne skrives på formen

$$S(\omega') d\omega'$$

hvor $S(\omega')$ er spektraltætheden, givet ved

$$S(\omega') = \frac{2L}{\pi} \cdot \hat{Y}_1(\omega') \quad (8)$$

Spektralformlen siger da

$$\hat{Y}(z) = \int_0^{\infty} S(\omega') \cdot \hat{Y}_{\omega'}^{\text{osc}}(z) d\omega' \quad (9)$$

hvor oscillatoradmittansen er udtrykket (2).

Vi har herved udviklet en metode til reticulation og evt. simulation af vores black box: Først udmåler vi funktionen $\hat{Y}_1(\omega')$, f.eks. ved at bestemme dissipationen for alle frekvenser. Dernæst vælger vi et passende fælles L for en mængde oscillatorer, hvis fordeling af egenfrekvenser approximerer spektraltætheden i ligning (8). Til sidst forbindes spændingsporten af alle disse oscillatorer til en fælles o-samler. Når vi så udefra opretter et dominerende bånd (giver spændingsinput) til o-samleren, vil admittansen af det samlede system være summen af oscillatorernes admittans og dermed en approximation til integralet (9).

Specielt ser vi af (8), at vi kan simulere en o-læk ($\hat{Y}_1=K$) ved en o-samler og en mængde oscillatorer, der har en jævn fordeling af frekvenser fra 0 til ∞ . For et system med strøminput, specielt en x-læk, skal vi bruge den duale konstruktion, altså en x-samler, der forbindes til strømporten af alle oscillatorerne. Det er denne tankekonstruktion, der ligger bag valget af ikonerne for lækkene, som vist på fig.1. Hvis vi "graver ned i jorden" under det trekantede læk-ikon, opdager vi en samler af samme type som lækken og distributive koblinger til en masse skjulte oscillatorer.

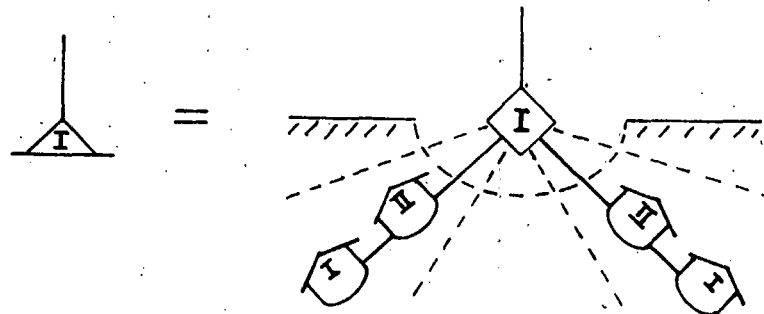


Fig.1. Afsløring af, hvad der gemmer sig under læk-ikonet. De symbolske indices I og II står for hhv. x og o, eller omvendt.

I praksis vil der være en del problemer, hvis man prøver at simulere et system ved hjælp af oscillator reticulatio-
nen, og konstruktionen (8) - (9) har da også mere princi-
piel end praktisk interesse. Først og fremmest vil der væ-
re problemer, hvis systemet er ikke-ergodisk, idet spek-
traltæthedens så har ikke-integrable singulariteter. I så
fald må man prøve at udskille den ikke-ergodiske del af
responsefunktionen (sml. 1.2.4.29) og simulere den for sig
ved hjælp af nogle enkelte "makro-oscillatorer" og reser-
vere alle "mikro-oscillatorerne" til den ergodiske del af
responsefunktionen.

Mikro-oscillatorerne kan aldrig i praksis være totalt u-
dæmpede (uergodiske), hvilket også ville give problemer,
når de udsættes for reelle frekvenser. Det vil være bedre
at konstruere dem som symmetrisk dæmpede med en ganske
lille værdi af dæmpningsparameteren γ (eller en stor Q -
værdi). Realdelen af mikrooscillatorens admittans vil så
ikke være et par deltafunktioner, som i (3), men et par
Lorentz-funktioner med halvværdi bredden $\gamma\omega'$ omkring $+\omega'$
og $-\omega'$. Forudsætningen for, at sådanne oscillatorer kan
bruges til at opbygge spektralfordelingen $S(\omega')$ er så, at
denne varierer ganske lidt over et frekvensområde af stør-
relsesordenen $\gamma\omega'$.

Hvis vi brugte udæmpede oscillatorer, ville det sammensat-
te system blive uergodisk, og man kan undre sig over, hvor-
dan det skulle kunne simulere en ergodisk black box. Lad
os antage, at lethedsfunktionen $F(t)$ for black box'en har
en relaxationstid τ_r , således at $F(t)$ effektivt er nul
for $t > \tau_r$. Vi forsøger så at simulere systemet med en os-
cillatorsamling, hvis egenfrekvenser afviger fra hinanden
med beløb, der har et vist mindste fælles mål $\Delta\omega'$. Letheds-
funktionen for oscillatorsamlingen vil så være periodisk
med perioden

$$\tau_p = 2\pi/\Delta\omega' \quad (10)$$

D.v.s. oscillatorsamlingens lethedsfunktion kan godt til at begynde med relaxere mod nul, som om systemet var ergo-disk, men senest når tiden τ_p er gået, vil den vokse op igen til værdien for $t=0$. Vi siger derfor at τ_p er tilbagevendingstiden for systemet, og kriteriet for, at oscillator-samlingen giver en rimelig simulation, er

$$\tau_p \gg \tau_r \quad (11)$$

Ved brug af svagt dæmpede oscillatorer kan vi sikre os mod tilbagevending ved at lade frekvensafstanden $\Delta\omega'$ være mindre end halvværdibredden $\gamma\omega'$. I så fald vil oscillatorernes hukommelse være så neddæmpet, når tiden τ_p er gået, at tilbagevendingsfænomenet udebliver.

Spektralformlen (7) er prototypen på en familje af formler, som kaldes dispersionsrelationer. Vi skal her udlede Kramers-kronig relationerne, som knytter forbindelse mellem realdelen og imaginærdelen af den komplekse standard responsefunktion.

Ligesom ligning (7) udtrykker hele responsefunktionen ved realdelen $\hat{Y}_1(\omega)$, således kan vi udtrykke næsten hele responsefunktionen ved imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$. Sinusformlen giver jo (1.2.4.43)

$$F(|t|)\text{sign}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega') \sin\omega't \, d\omega' \quad (12)$$

Laplace-transformation af sinusfunktionen giver

$$L\{\sin\omega't, -iz\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z+\omega'} - \frac{1}{z-\omega'} \right] \quad (13)$$

Ved Laplace-transformation af udtrykket (12) får vi ikke et passivt bidrag til $F(t)$ af typen $2Y_0\delta(t)$ med, idet deltafunktionen udslukkes af funktionen $\text{sign}(t)$. D.v.s. vi får

$$\hat{Y}(z) - Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega') \cdot \left[\frac{-1}{z+\omega'} - \frac{-1}{z-\omega'} \right] d\omega' \quad (14)$$

Når vi nu i (7) og (14) går til grænsen $\epsilon \rightarrow 0+$, får vi ved brug af δ_+ -funktionen for den første spektralformel:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\omega) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{z-\omega'} d\omega' \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_1(\omega') \cdot \left[P \frac{1}{\omega-\omega'} - i\pi\delta(\omega-\omega') \right] d\omega' \end{aligned} \quad (15)$$

og for den anden spektralformel

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\omega) - Y_0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_2(\omega')}{z-\omega'} d\omega' \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_2(\omega') \cdot \left[P \frac{1}{\omega-\omega'} - i\pi\delta(\omega-\omega') \right] d\omega' \end{aligned} \quad (16)$$

Vi opspalter nu $\hat{Y}(\omega)$ i realdel og imaginærdel:

$$\hat{Y}(\omega) = \hat{Y}_1(\omega) + i\hat{Y}_2(\omega)$$

og husker, at konstanten Y_0 er reel. Deltafunktionsdelen af integralerne (15) og (16) giver så et par trivielle identiteter, medens bidragene $P(\omega-\omega')^{-1}$ giver de to Kramers-Kronig relationer:

$$\hat{Y}_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' \quad (17)$$

$$\hat{Y}_1(\omega) - Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_2(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' \quad (18)$$

Som eksempel på anvendelsen af dispersionsrelationer ser vi på en elektromagnetisk bølge, som sendes igennem et dielektrisk og svagt ledende stof. Admittansen for en sådan bølge med frekvensen ω , d.v.s. forholdet mellem amplituderne for signalviserne af den magnetiske feltstyrke og den elektriske feltstyrke kan vises (kap.3) at være

$$\hat{Y}(\omega) = \sqrt{(\epsilon + i\sigma/\omega)/\mu} \quad (19)$$

Her er ϵ dielektricitets-"konstanten" eller permittiviteten, som vil afhænge af frekvensen, og σ er den specifikke ledningsevne for elektrisk strøm i stoffet (også afhængig af ω). Den magnetiske permeabilitet μ kan formodes at ligge tæt på vacuumværdien $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Hy/m.

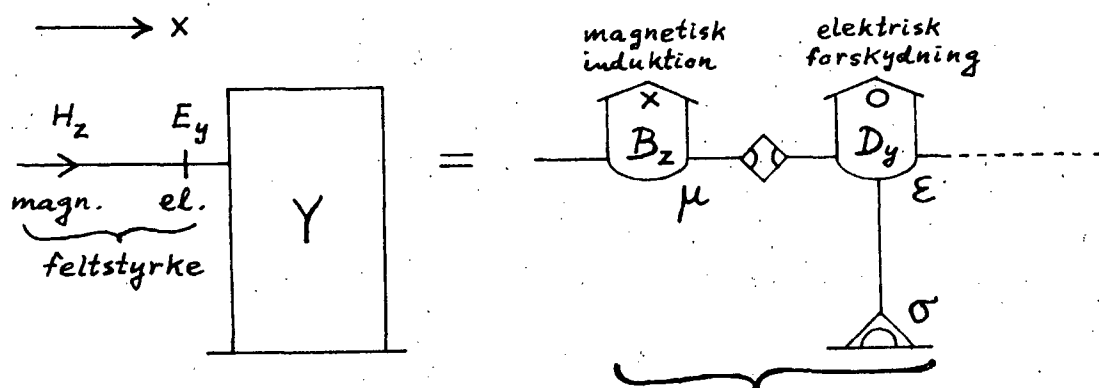


Fig.2. Kontinuumsdiagram (mere herom i kapitel 3) for en lineært polariseret plan elektromagnetisk bølge, der udbreder sig i x-retningen gennem et stof med permeabilitet μ , dielektricitetskonstant ϵ og specifik ledningsevne σ . I almindelighed er ϵ og σ komplekse funktioner af frekvensen. Modulet over "tuborgen" til højre forestiller et kubisk udsnit af bølgen. Det skal tænkes repeteret i det uendelige i retning af den punkterede linje.

Udtrykket (19) kan omskrives på følgende måde:

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \frac{1}{Z_0} (n+ik) \quad (20)$$

hvor

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,7 \text{ ohm} \quad (21)$$

er en naturkonstant, som kaldes bølgeimpedansen af det tomme rum, ϵ_r er den relative dielektricitetskonstant af stoffet. Størrelserne n og k kaldes hhv. brydningsforholdet og

absorptionskoefficienten for bølgen. Vi ser altså, at brydningsforholdet bestemmer realdelen, og absorptionskoefficienten bestemmer imaginærdelen af bølgeadmittansen.

Hvis stoffet er isolerende, d.v.s. $\sigma=0$, er ϵ_r stadig en kompleks funktion af frekvensen (ref.8), og både n og k vil også være frekvensafhængige (men reelle og positive). Det er brydningsforholdet, som bestemmer afbøjningen af en bølge, som sendes gennem et prisme af stoffet (Snell's lov). Frekvensafhængigheden af n giver anledning til dispersion, d.v.s. forskellig afbøjning af de forskellige farver af lys. Ved brydningsforsøg kan vi bestemme $n(\omega)$, som svarer til $\hat{Y}_1(\omega)$, og vi kan da ved brug af Kramers-Kronig relationen (17) udregne absorptionskoefficienten $k(\omega)$.

I almindelighed er funktionen $n(\omega)$ ret kompliceret, og målinger af dispersionen af sollys giver ingen information om dispersionen i røntgen området. I princippet skal man kende $n(\omega)$ for alle frekvenser for at kunne bestemme $k(\omega)$ for blot én frekvens ved brug af (17), og det er umuligt. I praksis er det dog ikke så slemt. Hvis man har målt $\hat{Y}_1(\omega)$ over nogle dekader, hvor den er rimelig stor, vil integralet i (17) kunne give en rimelig god bestemmelse af $\hat{Y}_2(\omega)$ inden for samme frekvensområde.

1.3.2. Retarderet og avanceret response.

Alt response er ifølge sagens natur retarderet, d.v.s. det kommer efter den stimulus, som er dets årsag. I den almindelige formel (1.1.2.13) for relationen mellem stimulus $\phi(t)$ og retarderet response $\gamma^R(t)$

$$\gamma^R(t) = \int_{-\infty}^t R^R(t, t') d\phi(t') \quad (1)$$

udtrykkes responset til tiden t ved stimuli til tider t' , som ligger før t , og responsefunktionen er derfor retarderet. Når man alligevel af og til snakker om "avanceret response" bygger det på en betragtning om den grundlæggende reversibilitet af fysikkens mikroskopiske love.

I "virkeligheden", siger man, d.v.s. set med mikrofysiske briller er der ingen forskel på fortiden og fremtiden. Systemet kan ikke selv mærke, hvilken vej tiden går; det kan kun iagttageren, som eksperimenterer med systemet. Det er iagttageren, som præparerer den eksperimentelle situation på den specielle måde, at han sørger for, at systemet er uforstyrret til at begynde med, $t=-\infty$, og derefter begynder at stimulere det. Hvis fysikeren var en "marsmand" af en slags, hvis tid løber den modsatte vej, så ville han naturligvis sørge for, at systemet var uforstyrret til $t=+\infty$, og det "response", han kunne observere, ville være avanceret, d.v.s. kun afhængigt af fremtidige stimuli:

$$\gamma^A(t) = \int_{\infty}^t R^A(t, t') d\phi(t') \quad (2)$$

For tidshomogene systemer kan (1) og (2) udtrykkes på formen

$$\gamma^R(t) = \int_0^{\infty} R^R(\tau) \phi'(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

$$\gamma^A(t) = - \int_0^{\infty} R^A(\tau) \phi'(t+\tau) d\tau \quad (4)$$

hvor τ i der retarderede tilfælde er $t-t'$ og i det avancerede tilfælde $t'-t$.

Naturligvis kan man ikke anvende denne ret absurde betragtning (om marsmanden) i forbindelse med en energibandsmodel, hvis denne er manifest irreversibel, d.v.s. hvis den indeholder lække. Lækaxiomet er, ligesom termodynamikkens anden hovedsætning, i direkte modstrid med princippet om den mikroskopiske reversibilitet. Ser vi derimod på en systemreticulation uden lække, må vi indrømme, at bevægelsesligningerne er reversible; der er intet som helst i systemets indre dynamik, der kan "sætte en pil på tidsaksen".

Som eksempel ser vi på responseforholdene i strømporten af en harmonisk oscillator (fig.1).

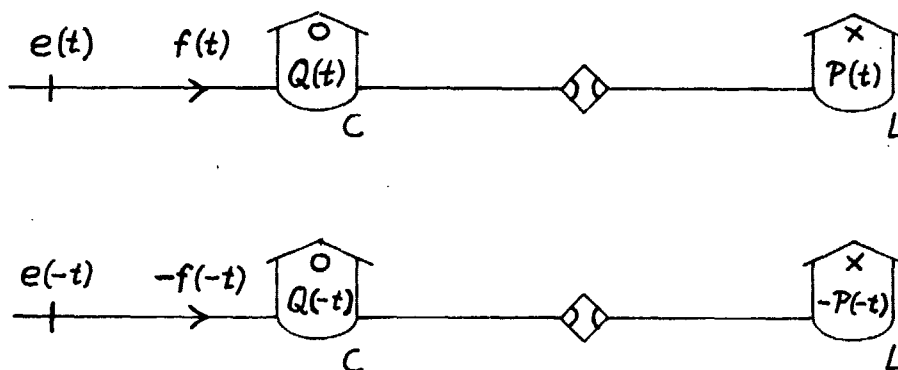


Fig.1. Harmonisk oscillator beskrevet forlæns og baglæns i tiden.

Det sædvanlige retarderede response er givet ved

$$e^R(t) = \int_0^{\infty} G^R(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (5)$$

hvor $G^R(\tau) = \frac{1}{C} \cos \omega_0 \tau \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$

Vi prøver nu at betragte sagen fra marsmandens synspunkt, d.v.s. vi laver en tidsvending:

$$t \rightarrow t^* = -t \quad (7)$$

De forskellige variabler og konstanter skal nu transformeres i henhold til x-o systemet, således at de skifter fortegn, hvis de er af x-typen og bevarer fortegnet, hvis de er af o-typen, d.v.s. (sml. fig.1):

$$\begin{aligned} C &\rightarrow C^* = C \quad (\text{o-konstant}) \\ L &\rightarrow L^* = L \quad (\text{o-konstant}) \\ e(t) &\rightarrow e^*(t^*) = e(-t) \quad (\text{o-rate}) \\ f(t) &\rightarrow f^*(t^*) = -f(-t) \quad (\text{x-rate}) \end{aligned} \quad (8)$$

Hvis der havde været lække i systemet, skulle de skifte fortegn for at give bevægelsesligningerne samme form i det tidsvendte system, og herved ville modellen komme i modstrid med lækaxiomet. Nu er der imidlertid ingen lække, systemet er reversibelt, og beskrivelsen af det med den omvendte tid t^* er ligeså god som beskrivelsen med den retvendte tid t . Vi kan derfor uden videre skrive den avancerede responseligning

$$e^{A^*}(t^*) = \int_0^{\infty} G^A(\tau) f^*(t^* - \tau) d\tau \quad (9)$$

og da stivheden G er en funktion af o-typen, må det gælde, at

$$G^A(\tau) = G^R(\tau) = \frac{1}{C} \cos \omega_0 \tau \quad (10)$$

Vi kan nu sammenholde de to responseudtryk (5) og (9), idet vi udtrykker de tidsvendte variable i (9) ved de retvendte variable i (8) og substituerer $-t$ med t :

$$e^R(t) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(t - \tau) d\tau \quad (11)$$

$$e^A(t) = -\frac{1}{C} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(t+\tau) d\tau \quad (12)$$

(Vi har droppet indekset 0 på ω)

Forskellen mellem det retarderede og det avancerede response er altså:

$$\begin{aligned} e^R(t) - e^A(t) &= \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(t-\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(t+\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(t+\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\omega(t+\tau) - \omega t] \cdot f(t+\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \left\{ \cos \omega t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot f(\tau) d\tau + \sin \omega t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega \tau \cdot f(\tau) d\tau \right\} \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (13) \end{aligned}$$

hvor A og B er tidsuafhængige konstanter. Vi ser altså, at det avancerede response adskiller sig fra det retarderede response ved en tidsafhængig funktion, som netop er en af systemets mulige egensvingninger.

Outputtet fra et ikke-ergodisk system, som den udæmpede oscillator, er jo i almindelighed ikke et rent response, men indeholder et ekstra bidrag, som afspejler systemets egenbevægelse. D.v.s. hvis vi ser, at en udæmpet oscillator står og svinger, uden at vi tidligere har stimuleret den, så vil vi ikke udbryde: "Aha, et avanceret response!", men blot konstatere, at den svinger "af sig selv". Hvis vi derefter får den idé, at oscillatoren skal være stille og sørger for at udslukke egensvingningen med et passende signal gennem den tilgængelige port, så vil vores marsmand fra før alligevel få ret, hvis han opfattede svingningen som et avanceret response (d.v.s. retarderet for ham).

Diskussionen kan nu let generaliseres: Et reversibelt system må altid være ikke-ergodisk, og forskellen på det avancerede og det retarderede response må altid kunne udtrykkes ved egensvingningerne af det uforstyrrede system. Et reticuleret system kan kun være ergodisk, hvis det indeholder lække, men omvendt kan vi ikke regne med, at et system med lække altid er ergodisk (f.eks. Voigt elementet er ikke-ergodisk, når det har strøminput, selv om det indeholder en læk).

For et reversibelt system er der ingen forskel på den avancerede og den retarderede tidsafhængige standard responsefunktion

$$G^A(t) = G^R(t) = G(t) \text{ for strøminput} \quad (14)$$

$$F^A(t) = F^R(t) = F(t) \text{ for spændingsinput}$$

Da diskussionen forløber parallelt i de to tilfælde, vil vi nu igen nøjes med at diskutere tilfældet med spændingsinput. En helt tidssymmetrisk formulering opnås ved at definere det symmetriske response som gennemsnittet af det retarderede og det avancerede response (sml. (12))

$$\begin{aligned} f^S(t) &= \frac{1}{2}[f^R(t) + f^A(t)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\tau) e(t-\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\tau) e(t+\tau) d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Det vil så gælde, at systemets faktiske strømoutput er givet ved et hvilket som helst af de tre responseudtryk f^R , f^A eller f^S plus en af de mulige egensvingninger for systemet. Svarende til det symmetriske response defineres en symmetrisk responsefunktion ved integralformen

$$f^S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F^S(\tau) e(t-\tau) d\tau \quad (16)$$

Ved sammenligning af (15) og (16) fås følgende udtryk for den symmetriske responsefunktion, som (i modsætning til den retarderede og den avancerede) er defineret for både positive og negative tider:

$$F^S(t) = \frac{1}{2} F(|t|) \cdot \text{sign}(t) \quad (17)$$

Vi skal nu gå over til frekvensbilledet og se hvordan symmetriseringen forløber i den komplekse z-plan ($z=\omega+i\epsilon$). Af sinusformlen 1.2.4.43 og (17) fås:

$$\begin{aligned} F^S(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \sin\omega t d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \sin\omega t d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= F^{-1} \left\{ \frac{i}{2\pi} P \hat{Y}_2(\omega), t \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

hvor $\hat{Y}_2(\omega)$ er imaginærdelen af den sædvanlige (retarderede) komplekse responsefunktion $\hat{Y}(z)$ på den reelle akse, og hvor "P" som sædvanlig står for "principalværdi". I udledningen af (18) er benyttet, at $P\hat{Y}_2(\omega)$ er en ulige funktion. Ved Fouriertransformation af (18) fås

$$iP\hat{Y}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F^S(t) e^{i\omega t} dt = i \int_0^{\infty} F(t) \sin\omega t dt \quad (19)$$

Vi ser altså, at imaginærdelen af den sædvanlige responsefunktion på ω -aksen er et rent reversibelt aspekt, som kan defineres tidssymmetrisk. Udtrykket (19) fremkommer ligesom ligning 1.2.1.18, når vi udregner det symmetriske response på et trigonometrisk standardsignal $e^{-i\omega t}$. Der er derfor ingen tvivl om, at den frekvensafhængige symmetriske admittans kan defineres på den reelle akse ved ligning (19).

$$\hat{Y}^S(\omega) = iP\hat{Y}_2(\omega) \quad (20)$$

d.v.s. den symmetriske standard responsefunktion er rent

imaginær på frekvensaksen.

Ser vi f.eks. på et x-lager, er den retarderede admittans på ω -aksen jo givet ved (sml. 1.2.4.23) en grænseovergang, hvor vi lader z gå ned på ω -aksen fra øvre halvplan:

$$\begin{aligned}\hat{Y}(\omega) &= \hat{Y}^R(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{m(\omega + i\epsilon)} = \frac{\pi}{m} \delta_+(\omega) \\ &= \frac{\pi}{m} \delta(\omega) + \frac{i}{m\omega}\end{aligned}$$

d.v.s. (20) giver

$$\hat{Y}^S(\omega) = \frac{i}{m} \text{P} \frac{1}{\omega}$$

Den avancerede admittansfunktion, som jo bygger på den modsatte tidsorden, er defineret i nedre halvplan, d.v.s. på den reelle akse findes den ved grænseovergangen

$$\hat{Y}^A(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{i}{m(\omega + i\epsilon)} = -\frac{\pi}{m} \delta(\omega) + \frac{i}{m\omega}$$

Vi ser altså i dette tilfælde, at den avancerede responsefunktion på den reelle akse adskiller sig fra den retarderede ved fortegnet på realdelen. Den symmetriske admittans er gennemsnittet af de to andre på ω -aksen og derfor rent imaginær.

Spørgsmålet er nu, hvorledes man kan lave en analytisk fortsættelse, hvorved $\hat{Y}^S(z)$ defineres i hele den komplekse plan ud fra vort kendskab til den på den reelle akse. I foregående afsnit udledte vi to såkaldte spektralformler, og den ene af disse, 1.3.1.12 udtrykker $\hat{Y}(z)$ i øvre halvplan ved imaginærdelen $\hat{Y}_2(\omega)$, som jo også er imaginærdelen af $\hat{Y}^S(\omega)$. Imidlertid ser vi af 1.3.1.14, at formelen vil give det forkerte fortegn, hvis vi lader z nærme sig den reelle akse nedefra. Den "rigtige" spektralformel 1.3.1.7 giver samme fortegn på imaginærdelen for $\epsilon \rightarrow 0^+$ og $\epsilon \rightarrow 0^-$ (se 1.3.1.13), men udtrykker admittansen ved realdelen $\hat{Y}_1(\omega)$, som jo ikke

er realdelen af $\hat{Y}^S(\omega)$. Vi kommer uden om problemerne ved at bruge Kramers-Kronig relationen (1.3.1.18) og indsætte i spektralformlen 1.3.1.7, idet vi udelader konstanten Y_0 (som jo er et lækbidrag og derfor ikke kan forekomme for et reversibelt system). Definitionen på den symmetriske admittans bliver da

$$\hat{Y}^S(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega' - z} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_2(\omega'')}{\omega'' - \omega'} d\omega'' \right\} d\omega' \quad (21)$$

Ved indsættelse af (19) fås

$$\hat{Y}^S(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega' - z} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega'' - \omega'} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F^S(t) e^{i\omega''t} dt \right] d\omega'' \right\} d\omega'$$

Ved at benytte definitionen på principalværdien af et integral sammen med lidt residueregning fås

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega''t}}{\omega'' - \omega'} d\omega'' &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega''t}}{\omega'' - (\omega' + i\delta)} d\omega'' + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega''t}}{\omega'' - (\omega' - i\delta)} d\omega'' \right] \\ &= \text{sign}(t) \cdot e^{i\omega't} \end{aligned} \quad (22)$$

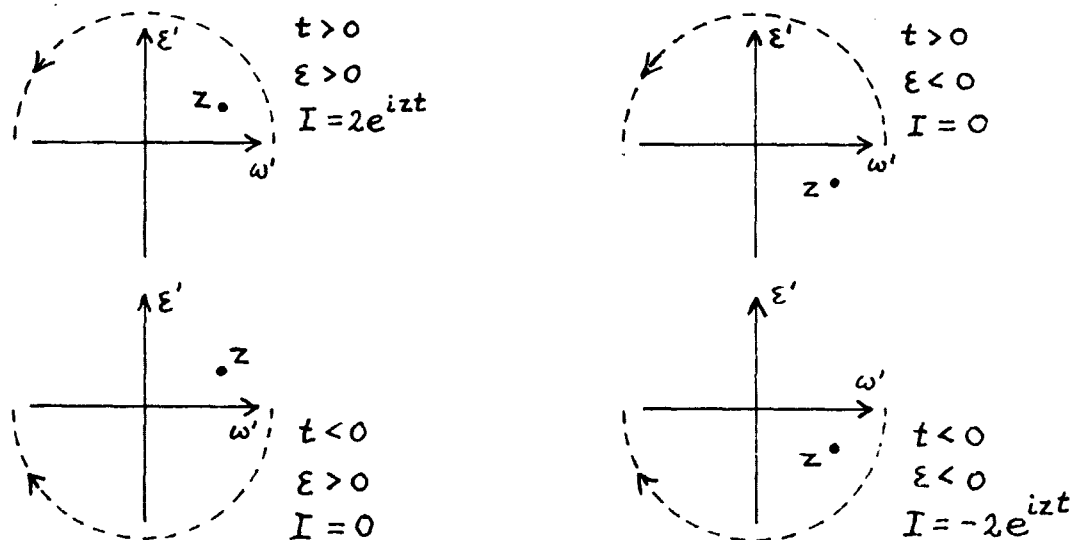


Fig.2. Konturer og poler for integralet $I(z,t)$ i lign. (23).

Tilsvarende fås (se fig.2)

$$I(z, t) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega't}}{\omega' - z} d\omega' = [\text{sign}(\epsilon) + \text{sign}(t)] e^{izt} \quad (23)$$

Vi finder da:

$$\begin{aligned} \hat{Y}^S(z) &= \text{sign}(\epsilon) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F^S(t) \text{sign}(t) e^{izt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} F^S(t) e^{izt} dt \\ &= \text{sign}(\epsilon) \cdot \int_0^{\infty} F(t) \coszt dt + i \int_0^{\infty} F(t) \sinzt dt \end{aligned} \quad (24)$$

hvor vi har indsat $F^S(t)$ fra (17). Dette udtryk adskiller sig kun fra den retarderede admittans

$$\begin{aligned} \hat{Y}(z) = \hat{Y}^R(z) &= \int_0^{\infty} F(t) e^{izt} dt \\ &= \int_0^{\infty} F(t) \coszt dt + i \int_0^{\infty} F(t) \sinzt dt \end{aligned}$$

ved faktoren $\text{sign}(\epsilon)$ på første led. I de to halvplaner $\epsilon > 0$ og $\epsilon < 0$ har vi:

$$\hat{Y}^S(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} F(t) e^{izt} dt = \hat{Y}^R(z) & \text{for } \epsilon > 0 \\ - \int_0^{\infty} F(t) e^{-izt} dt = \hat{Y}^A(z) & \text{for } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (25)$$

d.v.s. den retarderede og den avancerede responsefunktion kan defineres ud fra den symmetriske i hhv. øvre halvplan og nedre halvplan. Sammenhængen mellem \hat{Y}^R og \hat{Y}^A i deres respektive halvplaner er givet ved

$$\hat{Y}^A(-z) = - \hat{Y}^R(z) \quad (26)$$

Diskussionen har hidtil forudsat, at systemet er reversibelt, og det er jo ellers ikke det normale. Vi så imidlertid i foregående afsnit, at irreversible systemer, f.eks.

lække kan reticuleres med vilkårlig stor nøjagtighed ved hjælp af reversible elementer (oscillatorer). Vi får her ved et vink til opklaring af et af fysikken dunkle mysterier, modsætningen mellem makrofysikkens irreversibilitet og mikrofysikkens reversibilitet.

En hvilken som helst endelig oscillator-reticulation vil være reversibel og have en responsefunktion af typen (sml. 1.2.4.33)

$$\hat{Y}_{\text{rev}}(z) = i \left\{ \frac{a_0}{z} + \sum_{k=1}^n a_k \left[\frac{1}{z-\omega_k} + \frac{1}{z+\omega_k} \right] \right\} \quad (27)$$

(leddet ia_0/z repræsenterer et x-lager, som her opfattes som en "oscillator" uden o-lager, med egenfrekvensen 0). Udtrykket (27) er den retarderede responsefunktion for z i øvre halvplan. Af (26) ser vi, at den avancerede responsefunktion i nedre halvplan er givet ved samme funktionsudtryk, d.v.s. \hat{Y}_{rev}^A er den analytiske fortsættelse af \hat{Y}_{rev}^R fra den ene halvplan til den anden, og begge funktionerne er identiske med \hat{Y}_{rev}^S i begge halvplaner. Kun på den reelle akse er der forskelle, idet \hat{Y}_{rev}^R og \hat{Y}_{rev}^A tilskrives hhv. positive og negative reelle deltafunktionsbidrag, medens \hat{Y}_{rev}^S er rent imaginær.

Den indre bevægelse af et uforstyrret system med admittansfunktionen (27) er givet ved strømudtrykket

$$f_i(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \{A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t\} \quad (28)$$

hvor A erne og B erne er arbitrære reelle konstanter. I almindelighed vil $f_i(t)$ være en næsten-periodisk funktion, kun i det specielle tilfælde, hvor egenfrekvenserne er kommensurable med et mindste fælles mål $\Delta\omega$, er bevægelsen periodisk med svingningstiden $\tau_p = 2\pi/\Delta\omega$ (sml. 1.3.1.10). I det næsten periodiske tilfælde vil man også kunne bestemme en tilbagevendningstid τ_p , når der er opgivet en eksperimentel tolerance inden for hvilken bevægelsen ikke

kan skelnes fra en periodisk.

Den næsten periodiske karakter af den indre bevægelse afspejles i hukommelsesfunktionen (sml. 1.2.4.30)

$$F_{\text{rev}}(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega_k t \quad (29)$$

som jo aldrig kan gå mod nul for $t \rightarrow \infty$.

Et responseforsøg med det reversible system kan først foretages efter at man ved et studium af den uforstyrrede interne bevægelse (28) har bestemt frekvenserne ω_k og de aktuelle værdier af bevægelseskonstanterne A_0 , A_k og B_k . En sådan analyse kræver en vis tid, mindst én periode τ_p , hvis den skal være nogenlunde nøjagtig. Jo flere egenfrekvenser, der er i systemet, og jo tættere de ligger, jo vanskeligere bliver den indledende eksperimentelle analyse, som skal udseparere den indre bevægelse fra responset. Hvis frekvenserne ligger så tæt, at τ_p bliver større end universets alder, er det faktisk umuligt for mennesker at foretage denne analyse.

Det var matematikeren og fysikeren Henri Poincaré (1854-1912), som først gjorde opmærksom på tilbagevendingsfænomenet for isolerede mekaniske systemer (symbolet τ_p bør derfor udtales "Poincaré's tilbagevendings Tid"). En af de væsentligste indvendinger mod Boltzmann's H-teorem (ref. I, kap. 6) var Zermelo's "Wiederkehrwand", som bygger på Poincaré's argument: "Det kan ikke være rigtigt, at entropien altid vokser for et isoleret system", siger Zermelo (løst skitseret), "hvis entropien havde en lav værdi til at begynde med og starter med at vokse, vil den før eller senere vende tilbage, vilkårligt tæt til begyndelsesværdien". Boltzmann og hans våbendragere, bl.a. ægteparret Paul og Theresa Ehrenfest, svarede med at anslå tilbagevendingstiden for makrosystemer, f.eks. en vanddråbe og fandt størrelsesordenen

$$\tau_p \approx 10^{10^{19}} \text{ år}$$

Hvis systemet har N mikroskopiske frihedsgrader, vil det have ca $N!$ forskellige skelnelige tilstande. Hvis τ_0 er en karakteristisk tid for overgang fra én af disse tilstande til en anden, fås

$$\tau_p \approx N! \cdot \tau_0$$

F.eks. for et spil kort, der blandes, er $N = 52$ og $N! \approx 8 \cdot 10^{67}$. Hvis der udføres én blandingsmanøvre pr. sekund ($\tau_0 = 1$ sec.), bliver $\tau_p \approx 2 \cdot 10^{60}$ år, d.v.s. man skal ikke forvente, at kortene af sig selv kommer til at ligge i den rigtige orden, når man blander dem. For et termodynamisk system er $N \approx 10^{23}$, og tallet $N!$ vil være så uhyrligt stort, at det for vurderingen af τ_p er ligegyldigt, om mikrotiden τ_0 skal måles i picosekunder eller i årmilliarder.

I praksis må man derfor opdele oscillatorerne i to klasser: makro-oscillatorerne, som er få og skelnelige, og mikro-oscillatorerne, som er mange og eksperimentelt uskelnelige. Svarende hertil må hukommelsesfunktion opdeles i to bidrag:

$$F_{rev}(t) \rightarrow F_{ie}(t) + F_e(t) \quad (30)$$

hvor $F_{ie}(t)$ er det ikke-ergodiske bidrag fra makro-oscillatorerne, f.eks.

$$F_{ie}(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^m a_k \cos \omega_k t \quad ; \quad m \ll n \quad (31)$$

Det resterende bidrag $F_e(t)$ fra mikro-oscillatorerne må beskrives med en kontinuert frekvensfordeling:

$$F_e(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad (32)$$

altså et Fourier-integral i stedet for den oprindelige Fourier-sum. Ved overgangen til integralformen får $F_e(t)$ grænseværdien nul for $t \rightarrow \infty$, d.v.s. tilbagevendigstiden forsvinder ud i det uendelige, og responsebidraget $F_e(t)$ bliver ergodisk.

Tilsvarende kan man i den frekvensafhængige admittans udskille et ergodisk led, som kan beskrives ved spektralformlen

$$\hat{Y}_e(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_{e1}(\omega')}{z - \omega'} \, d\omega' \quad ; \quad \hat{Y}_{e1}(\omega') = \frac{\pi}{2L} S(\omega) \quad (33)$$

Dette udtryk kan imidlertid kun beskrive den retarderede response for z i øvre halvplan. Ved at gå fra øvre halvplan ned på den reelle akse, $\epsilon \rightarrow 0+$, finder vi at realdelen af $\hat{Y}_e(z)$ er givet ved det positive beløb $\hat{Y}_{e1}(\omega)$. D.v.s. systemet dissiperer energi og optræder irreversibelt i overensstemmelse med termodynamikkens anden hovedsætning.

Den avancerede responsefunktion er nu ikke længere den analytiske fortsættelse af (33) til nedre halvplan. For $\epsilon \rightarrow 0-$ vil realdelen af den avancerede admittans gå mod $-\hat{Y}_{e1}(\omega)$. Ved overgangen til den kontinuerte spektralfordeling ændres den oprindelige symmetriske responsefunktion altså på den måde, at de oprindelige diskrete poler på ω -aksen smelter sammen til et diskontinuitets-snit (branch cut), hvor realdelen af funktionen springer med beløbet $2\hat{Y}_{e1}(\omega)$.

Den "egentlige" (symmetriske) responsefunktion er altså altid analytisk uden singulariteter i begge halvplaner, og kun på den reelle akse kan der være isolerede poler (for ikke-ergodiske systemer) og et diskontinuitets-snit (for irreversible systemer). Når eksperimentalfysikeren skal udmåle responsefunktionen ved hjælp af standardsignaler e^{-izt} tvinges han imidlertid af sin egen tidsopfattelse og af irreversibiliteten i hele det økosystem, han er en del af, til kun at beskæftige sig med z -værdier i øvre halvplan. Det er altså kun den retarderede responsefunktion $\hat{Y}(z)$ i øvre halvplan, som er tilgængelig for måling. Når vi taler om $\hat{Y}(z)$ og dens poler i nedre halvplan, er det ikke den avancerede responsefunktion, vi mener, men den analytiske fortsættelse af den retarderede responsefunktion ud over snittet på den reelle frekvensakse.

Den proces hvorved de diskrete mikro-frihedsgrader erstattes af en kontinuert spektralfordeling er et eksempel på det, man i den statistiske mekanik kalder en "coarse

graining". Ud over at ændre på responsefunktionens analytiske egenskaber betyder coarse grainingen også, at vi giver afkald på en deterministisk beskrivelse af systemets egenbevægelse (28). De undertrykte frihedsgraders bidrag til (28) kan kun beskrives statistisk og dukker op i formalismen i form af støj. Vi ser altså, at støjen nødvendigvis må gøre sit indtog sammen med de dissipative system-egenskaber. Det er denne forbindelse, som beskrives i fluktuations-dissipationsteoremet; hovedemnet for næste paragraf.

Diskussionen har indtil nu vist, at den mikrofysiske reversibilitet kan reddes, idet den tillader både avancerede og retarderede response løsninger. Der er altså ingen direkte modstrid mellem mikrofysikken og eksistensen af en "tids-pil", som ordner begivenhederne i en bestemt rækkefølge. På den anden side kan mikrofysikken ikke forklare, hvorfor det altid kun er den ene af de to mulige tidspile, som forekommer i naturbeskrivelsen.

For at forstå dette, må vi gøre os klart, at både systemer og deres iagttagere indgår i et irreversibelt univers. Fysikeren har mulighed for at arbejde med nogle forholdsvis få makroskopiske frihedsgrader, og når han gør det, spredes energien ud på myriader af ukontrollable mikro-frihedsgrader, hvorfra den ikke vender tilbage. Ganske vist giver mikrofrihedsgraderne sig til kende i form af støj, men sandsynligheden for, at de diffuse mikrosignaler pludselig skulle optræde koherent og give anledning til et signifikant makro signal er overordentlig ringe. Hvis det pludselig skulle ske, ville systemoutputtet komme til at ligne et avanceret response, og det ville nok få iagttageren til at tvivle på sin sunde fornuft og miste sit makroskopiske overblik.

Et eksempel vil belyse dette. Vi kan tænke på en luftsluse i et rumskib: et rum, som er delt af en skillevæg, og

hvor der er lufttomt på den ene side af væggen, men normalt tryk på den anden. Når der åbnes en ventil i skillevæggen vil trykket hurtigt udlignes, og rumskibspiloten kan tage sin rumhjelme af og ånde lettet op, idet han trygt stoler på, at luften ikke af sig selv vil strømme tilbage gennem ventilen, og at de spontane trykfluktuationer er så små, at de ikke vil hæmme et naturligt åndedræt. Mikrofysisk er der imidlertid ikke noget i vejen for, at den omvendte luftbevægelse kunne finde sted. Den er ganske vist uhyre usandsynlig, men den bevægelse, som faktisk fandt sted er præcis lige så usandsynlig, set fra mikrofysikkens standpunkt.

Vi må altså acceptere som en kendsgerning, at menneskabte systemer, naturlige økosystemer og det omgivende fysiske univers udvikler sig på en sådan måde, at tidligere tilstande altid er uhyre usandsynlige i forhold til senere tilstande, mikrofysisk set. I sammenligning med et hypotetisk univers i ligevægt er der "alt for meget" energi lokaliseret på de makroskopiske frihedsgrader, og denne energi vil konstant spredes (dissiperes) ud på mikrofrihedsgrader, hvorved entropien vokser.

Det er den uligevægtige fordeling af energien i mikro-makro dimensionen, som muliggør, at iagttageren kan bevare sit makroskopiske overblik og i det hele taget fungere som et levende væsen. Muligheden for at få orden i tingene hænger på, at der hele tiden kan skabes mere orden i molekylerne. Til syvende og sidst kan denne mulighed ikke forklares mikroskopisk, men kun ud fra den mest makroskopiske af alle discipliner: kosmologien.

Den i dag mest accepterede kosmologi bygger på den såkaldte "Big Bang" hypotese, som går ud på, at alt stof i universet for ca. 10 milliarder år siden har været samlet i et meget lille område og derfra har startet en ekspansion, som fortsætter den dag i dag og beskrives i Hubble-loven

(ref.9). Selve ekspansionen kan forstås termodynamisk som årsag til de enorme temperaturforskelle fra stjernernes indre til den diffuse 3K-baggrundsstråling (hvis temperatur er 2.7K). Big Bang hypotesen kan derfor også forklare, at der udgår lys fra stjernerne, som spredes mod koldere kloder, hvor økosystemer blomstrer op og fysikere udmåler deres retarderede responsefunktioner.

En interessant diskussion fra 1970 mellem J.V.Narlikar og D.Layzer (ref.10) viser, hvorledes forskellige kosmologiske opfattelser afspejles i diskussionen af tidens pil. Narlikar er fortalende for modpolen til Big Bang hypotesen, den såkaldte Steady State hypotese, som han har arbejdet på sammen med F.Hoyle.

Både Narlikar og Layzer taler om forskellige tidspile: en kosmologisk, en elektrodynamisk, en termodynamisk, en biologisk og en historisk. Formålet med begge indlæg er at påvise, at en enkelt af disse pile kan forklare alle de øvrige.

Narlikar mener, at den elektrodynamiske tidspil, som foreskriver de retarderede potentialer som løsninger til feltligningerne for givne ladnings- og strømfordelinger er den grundlæggende, men at den kun kan forenes med den kosmologiske pil (Hubble ekspansionen) på grundlag af Steady State teorien. Han går ud fra Feynmann-Wheeler kvanteelektrodynamikken fra 1945, som bygger på brugen af symmetriske responsefunktioner. Udvælgelsen af den retarderede løsning sker så ved, at Steady State universet i fremtiden er mere absorberende for stråling end det var i fortiden, hvilket medfører, at korrektionen til det retarderede response kan karakteriseres som støj, medens korrektionen til det avancerede response vil have karakter af et makro-signal.

Narlikar mener åbenbart, at når man først har forstået elektrodynamikken, kommer alt det andet af sig selv. I øvrigt lægger han ingen vægt på, at tiden går, men kun på at den har retning, hvilket fremgår af hans slutbemærkning:

"If we were able to establish a strong connection between the different arrows of time, physical, biological etc., we could then argue in the following way. An absolute direction is immaterial: The important concept is the relative orientation of the different arrows. For example, if we can say 'we grow old because the universe expands' then this is equivalent to saying that we grow young as the universe contracts! The question 'Why do we grow older, not younger?' without reference to other arrows of time has no meaning."

Layzer, som går ind for Big Bang hypotesen fremsætter synspunkter, som er mere i overensstemmelse med de her givne. Han mener, at den kosmologiske tidspil kan forklare den termodynamiske, som så kan forklare alle de øvrige. Narlikars fokusering på den elektrodynamiske pil "leaves the thermodynamic arrow suspended in mid-air", og så er

man faktisk ikke kommet ud af stedet, mener Layzer. Imidlertid, hvis man har forstået den termodynamiske tidspil, kan man også forklare den elektrodynamiske ud fra et princip, som blev formuleret af Einstein i 1909:

"Einstein pointed out that the retarded and advanced descriptions of radiation processes occurring in any finite region of space-time are completely equivalent, but the auxiliary conditions in the two descriptions differ in kind. In the retarded description all macroscopic radiation sources must be specified, while in the advanced description the microscopic absorption processes must be specified in detail. In practice one uses the retarded description because one does not have microscopic information about the absorbing matter. For the same reason, if one wishes to describe an irreversible process such as diffusion or heat conduction at the macroscopic level one must describe it as occurring in the 'forward' direction of time. In short, Einstein's argument demonstrates that the asymmetry of macroscopic radiation processes results from precisely those properties of matter in bulk that give rise to other macroscopically irreversible phenomena."

Layzer fortsætter med at gøre rede for sammenhængen mellem den termodynamiske og den historiske tidspil. Medens den termodynamiske peger i retning af voksende entropi, peger den historiske (herunder den biologiske og den geologiske) tidspil i retning af voksende information: "A record of the Moon's past is written in its pitted surface; the internal structure of a star, like that of a tree, records the process of aging".

Der er en tæt forbindelse mellem begreberne entropi og information (ref. III). Den termodynamiske entropi kan karakteriseres som mikroinformation, d.v.s. en for den makroskopiske iagttagere utilgængelig (og uinteressant) umådelig informationsmængde om den detaljerede kvantemekaniske tilstand af et system, som kun kan studeres på "makrooverfladen". Mikroinformationen eksisterer ikke som egentlig information, men snarere som et postulat, der (i lighed med de avancerede responsefunktioner) tjener til at redde den mekaniske reversibilitet. Termodynamikkens hovedsætning om den konstant voksende entropi, handler således om "tidens tand", der nedslider makroinformationen og uddissiperer den makroskopisk lokaliserede energi på de molekylære frihedsgrader. Denne proces er irreversibel: vi kan ikke genvinde den tabte energi (som er blevet til varme); fordi det at finde den og ensrette den til noget makroskopisk koherent igen ville kræve kendskab til mikroinformationen (entropien). Hvis det overhovedet har mening at tænke på mikroinformationen som en slags potentielle oplysninger (det mener Layzer ikke), ville der ikke være meget ved at indsamle den. For det første ville det kræve mere makro-energi end der kan indhentes ved ensretning af mikro-energien i gunstigste fald, og for det andet ville mikroinformationen være håbløst forældet, inden vi kunne nå at behandle den og reagere på den (ref.11). En vending af den termodynamiske tidspil er altså umulig, medmindre man ad parafysisk (overnaturlig) vej kan skaffe sig indsigt i mikroinformationen (ref.12).

Den historiske tidspil er ikke slet så irreversibel. Det er velkendt

at historisk opsamlet makroinformation kan forsvinde igen ved en entropisk proces (tänk f.eks. på den store biblioteksbrand i Alexandria, som udslettede de mest værdifulde overleveringer fra antikken). I det store og hele sker der imidlertid en konstant forøgelse af mængden af makroinformation. Dette strider ikke direkte mod entropisætningen, selv om der er tale om den modsatte proces. Entropisætningen gælder kun for lukkede systemer, og den historiske udvikling af ny information (der ikke kan afledes af den gamle) må derfor nødvendigvis foregå i åbne systemer.

For at forstå karakteren af den dialektiske modsætning mellem termodynamisk entropivækst og den historiske udvikling, må man beskæftige sig med åbne systemer, der konstant udsættes for en energistrøm med kilde i det mere makroskopiske og læk i det mere mikroskopiske. De senere år (bl.a. forureningsproblemerne) har åbnet manges øjne for, at lækken er mindst lige så væsentlig som kilden. De biologiske processer på Jorden drives ikke af Solen, men af kontrasten mellem den lyse sol og det mørke himmelhvalv. Hvis himlen var lys som solen overalt (og det ville den nok være, hvis ikke universet expanderede), ville det være nat med historien (ref.13).

Fra en filosofisk-fysisk synsvinkel er det meget væsentligt, at de dissipative læk-processer altid er ledsaget af støj. I et åbent system med energistrøm fra kilde til læk kommer der altid et principielt uforudsigeligt element ind i beskrivelsen, takket være støjen fra lækken. Nøglen til universets historie og fremtid ligger altså ikke alene i den nøjagtige tilstand på tidspunktet for "The Big Bang"; denne giver kun muligheden, inden for hvilken den aktuelle virkelighed udfolder sig på en måde, som aldrig vil kunne forudsiges i detaljer.

Et termodynamisk udtryk for denne tankegang er princippet om "orden gennem fluktuationer", formuleret af belgieren Ilya Prigogine, som bl.a. i denne anledning forrige år fik tildelt nobelprisen i kemi (ref.14). Prigogine og hans medarbejdere på universitetet i Bruxelles har studeret forskellige termodynamiske systemer, som udsættes for energigennemstrømning med konstante grænsebetingelser. Uden for det lineære område optræder en mangfoldighed af stationære tilstande med forskellige grader af makroskopisk orden, såkaldte dissipative strukturer. Spontan overgang fra én stationær tilstand til en anden kan induceres af forstyrrelser udefra eller af de termiske fluktuationer indefra. Medens den termodynamiske grundtilstand uden makrostruktur er enestående, vil der være en uendelig mangfoldighed af dissipative strukturer, hvis kompleksitet ikke er begrænset opadtil, og systemerne vil derfor i det lange løb klatre op ad en stige mod højere makroinformation.

1.3.3. Reticulation af diskrete systemer.

Spektralopløsning som reticulations-forskrift har først og fremmest teoretisk interesse, fordi den kan modellere irreversibel adfærd med reversible elementer. I praksis er den derimod ikke så velegnet, medmindre systemet er omtrent reversibelt med få egensvingninger, som f.eks. et frit ammoniakmolekyle. For udpræget irreversible systemer kan man naturligvis gennemføre en mere nøjagtig reticulation med færre elementer, hvis man tillader brug af de irreversible elementer i energibandsformalismen, d.v.s. lækkene.

Reticulationsopskrifter af mange forskellige arter udnyttes af elektroingeniører til design af reaktive filtre med bestemte matematiske egenskaber. Det er i dag almindeligt at simulere reaktive komponenter (hovedsageligt de induktive, x-lagrene) ved hjælp af aktive netværk med indgående operationsforstærkere, men en stor del af den matematiske teori for netværkssyntese, der i stor udstrækning er opstået som ren matematik uden tanke for de ingeniørmæssige anvendelser, er stadig aktuel i dag (ref.15).

Vi skal ikke her gå ind i en systematisk diskussion af sådanne metoder, da det ville blive alt for teknisk til vort formål, men koncentrere os om den såkaldte kædebrøksmetode, som er et vigtigt overgangsled til behandling af de rumligt kontinuerte systemer, vi møder bl.a. i væskedynamikken.

Lad os antage, at vi har givet en black box med én port, som indeholder et ukendt, men endeligt antal passive og reaktive komponenter, forbundet med hinanden på en for os ukendt måde. Vi forestiller os, at komponenterne er diskrete, ideelle enheder, således at en energibandsbeskrivelse

med et endeligt antal ikoner kan være gyldigt som "blueprint" for kassens indretning. Et sådant system siges at være diskret. Vi skal så prøve at reticulere en white box med de samme responseegenskaber ved hjælp af de passive og reaktive energibåndselementer. D.v.s. vi skal anvende elementer af samme slags som dem, der formodes at befinde sig inde i den sorte kasse, men det forlanges ikke, at vi skal reproducere indmaden af den sorte kasse, kun dens adfærd.

Vi har altså lov til at udmåle responsefunktioner for kassen via den tilgængelige port, men lad os nøjes med at forestille os, at vi kan måle dissipationen som funktion af frekvensen, hvilket er ækvivalent med at bestemme realdelen af standard-responsefunktionen, $\hat{Y}_1(\omega)$ eller $\hat{Z}_1(\omega)$. Hvis vi har en sinusformet spændingsgenerator med konstant amplitude og variabel frekvens ω , kan vi bestemme amplituden af strømresponset for $\omega \rightarrow \infty$. Hvis denne vokser mod ∞ , er det tegn på, at admittansfunktionen $\hat{Y}(z)$ har en pol i det uendelige, d.v.s. at $\hat{Z}(z)$ er den egentlige responsefunktion, og at systemet rettelig har strøminput og bør undersøges med en strømkilde i stedet for en spændingskilde.

Lad os antage, at det ikke er tilfældet, d.v.s. at admittansen $\hat{Y}(z)$ er den egentlige responsfunktion, som er begrænset i det uendelige. Vi vil endvidere antage, at systemet er ergodisk, således at det kan undersøges for endelige, reelle frekvenser (incl. frekvensen nul), uden at amplituden af strømresponset går mod uendelig. For et ikke ergodisk system, kan man starte med en diskret spektralopløsning, hvorved man én for én udskiller de oscillatorer, som er ansvarlige for polerne på frekvensaksen (sml. 1.3.2.27) Det resterende system er da ergodisk. Den diskrete spektralopløsning, som svarer til en partialbrøkdudvikling af responsefunktionen kaldes Foster metoden.

Da den sorte kasse kun indeholder et endeligt antal energibåndselementer, vil dens responsefunktion være en bruden rational funktion af Laplace-frekvensen $s = -iz$:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \quad (1)$$

hvor $P_n(s)$ og $Q_m(s)$ er polynomier med reelle koefficienter af grad hhv. n og m . Grunden til, at der ikke kan komme andet end en bruden rational funktion ud af det er, at de enkelte elementer i kassen karakteriseres ved sådanne funktioner og bestemmer admittansen af det sammensatte system via et lineært algebraisk ligningssystem (afsnit 1.2.5).

Ud over det, at $\tilde{Y}(s)$ er reel på den reelle s akse og derfor kun indeholder reelle koefficienter i tæller- og nævnerpolynomiet, gælder en række andre matematiske betingelser, som følger af de generelle egenskaber, vi har set på i de foregående afsnit:

- a) Realdelen $\hat{Y}_1(\omega) = \text{Re } \tilde{Y}(-i\omega)$ er ikke-negativ.
- b) Polerne for $\tilde{Y}(s)$ ligger i venstre halvplan eller på den imaginære akse. ($\text{Re}(s_{\text{pol}}) \leq 0$)
- c) Nulpunkterne for $\tilde{Y}(s)$ ligger i venstre halvplan eller på den imaginære akse.

Vi sammenfatter betingelserne ved at sige, at funktionen skal være positiv reel. Egenskaben c), som vi ikke før har diskuteret, følger af, at nulpunkterne for \tilde{Y} jo er poler for $\tilde{Z} = 1/\tilde{Y}$, og selv om \tilde{Z} er uegentlig, kan den jo optræde som en egentlig responsefunktion inden for ethvert lukket område i s -planen (afsnit 1.2.4).

Da $\tilde{Y}(s)$ er antaget at være egentlig, må det for graderne af de to polynomier P_n og Q_m i (1) gælde, at

$$n \leq m \quad (2)$$

Hvis $n=m$, kan det konstateres ved, at den målte $\hat{Y}_1(\omega)$ går mod en positiv konstant for $\omega \rightarrow \infty$. Denne positive grænseværdi er den samme, som fås for $s \rightarrow \infty$ på den reelle akse (ε akse). For at indse dette benytter vi spektralformlen 1.3.1.7 med en let omskrivning

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(s) &= \frac{2s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{s^2 + \omega'^2} d\omega' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(sx)}{1+x^2} dx \end{aligned} \quad (3)$$

Lader vi her $s \rightarrow \infty$, fås

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{Y}(s) = \frac{2}{\pi} \hat{Y}_1(\infty) \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \hat{Y}_1(\infty) \quad (4)$$

Lad os nu antage, at $n < m$, hvilket betyder at $\tilde{Y}(s)$ må gå mod nul mindst lige så hurtigt som $1/s$ for $s \rightarrow \infty$. Af (3) fås

$$s \tilde{Y}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{1 + \left(\frac{\omega'}{s}\right)^2} d\omega' \quad (5)$$

Da integralet i (5) er en voksende funktion af s , når s er reel, ser vi at $\tilde{Y}(s)$ ikke kan gå hurtigere mod nul end $1/s$ for $s \rightarrow \infty$. I grænsen fås

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{Y}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega') d\omega' = \frac{1}{L_1} \quad (6)$$

Konstanten $1/L_1$ er grænseværdien af den tidsafhængige lethedsfunktion:

$$\frac{1}{L_1} = \lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = F(0+) \quad (7)$$

og ligning (6) er blot en ny version af den tidligere udledte termodynamiske sumregel 1.2.3.32.

Ud over den åbenlyse betingelse (2) har vi nu vist den mere spændende ulighed

$$n \geq m-1 \quad (8)$$

d.v.s. nævnerpolynomiets grad kan højst være én over tællerpolynomiets grad. Desuden har vi set, at hvis $n = m-1$, vil den dissipative funktion $\hat{Y}_1(\omega)$ være integrabel, og lethedsfunktionen $F(t)$ vil være ikke singular for $t = 0$ med grænseværdien $1/L_1$, der bestemmes af sumreglen (6). For små tider har systemet altså tidseksponenten 2, ligesom et x-lager.

Ifølge algebraens fundamentalsætning har et komplekst polynomium præcis så mange nulpunkter, som dets grad angiver, idet man dog så skal tælle evt. sammenfaldende nulpunkter med flere gange. D.v.s. den brudne rationale funktion $\tilde{Y}(s)$ i ligning (1) har n nulpunkter og m poler af 1. orden (heraf evt. nogle sammenfaldende til en pol af højere orden). Hvis $n = m-1$ er der altså ét nulpunkt mindre end der er poler, men til gengæld er der så et "nulpunkt i det uendelige". Hvis vi for både egentlige og uegentlige responsefunktioner lader "nulpunktet" eller "polen i det uendelige" tælle med i regnestykket, kommer vi til den simple regel, at 1 port responsefunktioner for diskrete systemer altid har præcis lige mange nulpunkter og poler.

Hvis vi for alle mulige sorte kasser med et endeligt antal komponenter definerer n og m ved ligning (1), d.v.s. ud fra admittansen, så kan vi naturligvis også komme ud for, at n overstiger m med én, nemlig hvis systemet har strøminput og \tilde{Y} er uegentlig. Den almindelige udgave af ulighederne (2) og (8) er så

$$|n - m| \leq 1 \quad (9)$$

Den asymptotiske tidsekspont for små tider er så givet ved

$$\alpha = m - n + 1 \quad (10)$$

og vi ser altså, at for et diskret system kan den asymptotiske tidsekspont for små tider kun antage de heltal-
lige værdier 0, 1 og 2. For tilstrækkelig små tider virker det diskrete netværk altid som en af de basale eb-komponenter, et o-lager, en læk, eller et x-lager. Ideen i reticulationen (den første Caueer-metode) går nu simpelthen ud på, at vi starter med at udstille denne asymptotiske komponent. Derefter ser vi på den resterende responsefunktion, som igen vil have en asymptotisk opførsel svarende til et af de basale ikoner, som så udskilles, o.s.v., indtil vi er i bund med netværket. Helt så simpelt som her antydet behøver det ikke at gå, men hovedresultatet, som skyldes netværksteoretikerne Foster, Caueer og Brune er, at et diskret system altid kan reticuleres eksakt efter en forholdsvis simpel algoritme, som stopper efter et endeligt antal skridt.

Lad os antage, at den asymptotiske tidsekspont er 1 ($n = m$). Vi skal da starte med at udreticulere en læk. Ser vi på $\hat{Y}_1(\omega)$ for $\omega \rightarrow \infty$ er der to muligheder, som antydet på fig.1:

- a. Værdien $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{Y}_1(\omega) = Y_0$ er mindre end alle værdierne $\hat{Y}_1(\omega)$ for endelige frekvenser (Caueer tilfældet)
- b. $\hat{Y}_1(\omega)$ antager en minimumsværdi Y_m for en endelig frekvens ω_m , som er mindre end grænseværdien Y_0 for $\omega \rightarrow \infty$. (Brune tilfældet)

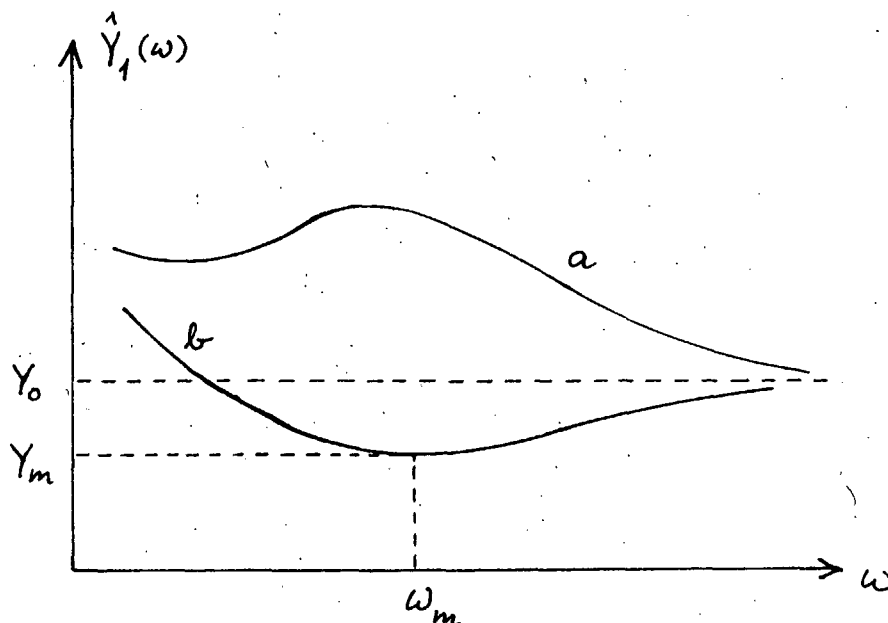


Fig.1. To forskellige slags asymptotisk tilnærmelse af den dissipative admittans til en endelig grænseværdi Y_0 . a: Cauer tilfældet, b: Brune tilfældet.

Det er nu klart, at størrelsen af den læk, som skal udskilles, aldrig kan overstige minimumsværdien for $\hat{Y}_1(\omega)$, for den resterende del af admittansfunktionen skal også være positiv, hvis reticulationsprocessen skal kunne fortsættes. I Brune tilfældet b vil den resterende admittans, når minimumsværdien Y_m er udskilt som en o-læk være en såkaldt minimumsfunktion, hvis realdel antager værdien 0 for en endelig frekvens. Dette tilfælde er det mest komplicerede, så vi udskyder diskussionen af det lidt og forudsætter indtil videre, at Cauer metoden kan anvendes, d.v.s. at vi kan udskille en o-læk, som vist på fig.2, hvis værdi Y_0 er den asymptotiske grænseværdi af $\hat{Y}_1(\omega)$ for $\omega \rightarrow \infty$.

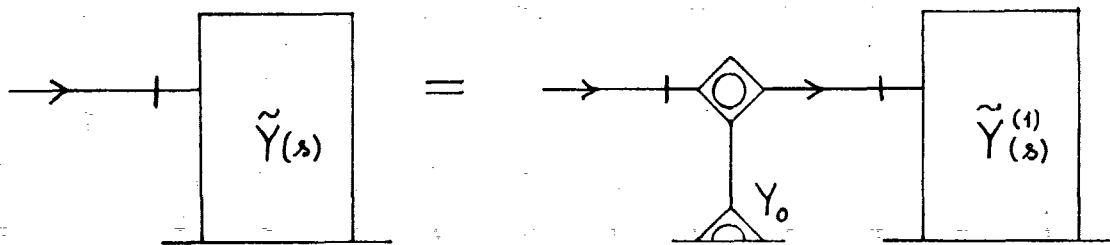


Fig. 2. Cauer metodens første skridt: udskillelse af asymptotisk grænseværdi for $\hat{Y}_1(\omega)$ i form af en o-læk Y_0 .

Den resterende admittansfunktion $\tilde{Y}^{(1)}(s)$ vil nu gå mod nul som $1/s$ for $s \rightarrow \infty$, d.v.s. den asymptotiske tidsekspONENT er 2, og vi kan fortsætte med at udreticulere et x-lager, hvis inertans (induktans eller selvinduktion) L_1 er bestemt af sumreglen (6) (med $\hat{Y}_1(\omega') - Y_0$ indsat i stedet for $\hat{Y}_1(\omega')$). Den uegentlige impedans $\tilde{Z}^{(1)} = 1/\tilde{Y}^{(1)}$ går som $L_1 s$ for $s \rightarrow \infty$ og har altså en pol i det uendelige. Vi fjerner denne pol ved at reticulere systemet som et x-lager L_1 og en polfri impedans $\tilde{Z}^{(2)}$, forbundet til en fælles x-samler, som vist på fig. 3.

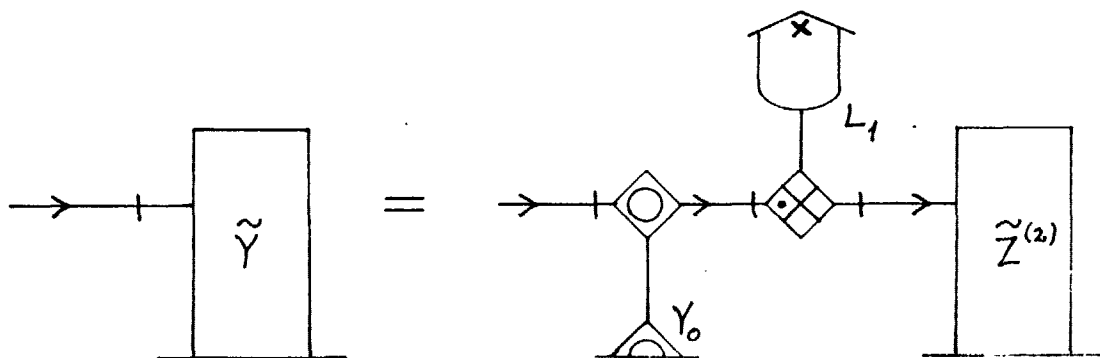


Fig. 3. Andet skridt i Cauer metoden: Udskillelse af en pol i det uendelige for impedansen $\tilde{Z}^{(1)} = 1/\tilde{Y}^{(1)}$ (fig. 2) i form af et x-lager.

Ved indførelsen af x-lageret L_1 har vi fået vendt kausaliteten, således at det nu er en impedansfunktion $\tilde{Z}^{(2)}$, vi skal beskæftige os med, men iøvrigt begynder melodien at gentage sig selv: Vi undersøger, om $\hat{Z}_1^{(2)}(\omega)$ har en endelig grænseværdi for $\omega \rightarrow \infty$, og i så fald må vi afgøre, om det er Caueer tilfældet eller Brune tilfældet. I Caueer tilfældet kan vi udskille grænseværdien R_2 som en x-læk. Admittansen af det resterende system vil så have en pol i det uendelige, som fratrækkes i form af et o-lager med kapaciteten C_3 o.s.v. Ved at fortsætte efter denne melodi indtil den oprindelige admittansfunktion er udtømt, eller indtil vi løber ind i Brune tilfældet, får vi udskilt en kæde af simple elementer, som tilsammen udgør den såkaldte Foster præambel. På fig.4 vises situationen, når vi har udskilt Foster præamblen (ved Caueer metoden) og står tilbage med en impedans, som er en minimumsfunktion, der må behandles med Brune metoden.

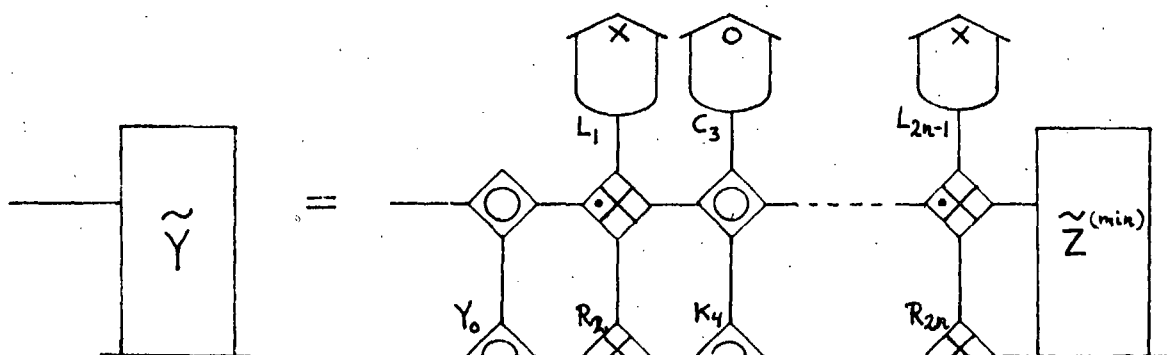


Fig.4. Foster præamblen.

Ser vi nu tilbage på de enkelte skridt i Caueer metoden, fås en kædebrøksudvikling af den oprindelige admittansfunktion:

$$\tilde{Y}(s) = Y_0 + \tilde{Y}^{(1)}(s)$$

$$\tilde{Z}^{(1)}(s) = 1/\tilde{Y}^{(1)}(s) = L_1 s + \tilde{Z}^{(2)}(s)$$

$$\tilde{Z}^{(2)}(s) = R_2 + \tilde{Z}^{(3)}(s)$$

$$\tilde{Y}^{(3)}(s) = 1/\tilde{Z}^{(3)}(s) = C_3 s + \tilde{Y}^{(4)}(s)$$

$$\tilde{Y}^{(4)}(s) = K_4 + \tilde{Y}^{(5)}(s)$$

o.s.v. indtil

$$\tilde{Z}^{(2n)}(s) = R_{2n} + \tilde{Z}^{(min)}(s)$$

hvorved vi enten er nået til Brune tilfældet eller er kommet i den heldigere situation at den resterende funktion er nul, som tegn på at reticulationen er fuldstændig. Den sammenfattende kædebrøk ser således ud:

$$\tilde{Y}(s) = Y_0 + \frac{1}{L_1 s + R_2 + \frac{1}{C_3 s + K_4 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{L_{2n-1} s + R_{2n} + \tilde{Z}^{(min)}}}}} \quad (11)$$

Hvis det lykkes at komme til ende med Caueer metoden, kan vi omforme kædebrøken til den sædvanlige form for en bruden rational funktion ved at forlænge brøkerne én efter én, startende nedefra, f.eks.

$$\tilde{Y}(s) = Y_0 + \frac{1}{L_1 s + R_2 + \frac{1}{C_3 s + K_4 + \frac{1}{L_5 s + R_6}}} =$$

$$Y_0 + \frac{1}{L_1 s + R_2 + \frac{L_5 s + R_6}{(C_3 s + K_4)(L_5 s + R_6) + 1}} =$$

$$Y_0 \left(\frac{(C_3 s + K_4)(L_5 s + R_6) + 1}{(L_1 s + R_2)[(C_3 s + K_4)(L_5 s + R_6) + 1] + L_5 s + R_6} \right)$$

Vi ser heraf, for det første, at antallet af lagre i Foster præambelen ikke kan overstige graden af nævnerpolynomiet. For det andet: Koefficienterne til de forskellige potenser af s i de to polynomier må være positive. Den sidste egenskab kan vises at gælde alment, også når Foster-Cauer metoden ikke kan føres til bunds. D.v.s. hvis en forelagt bruden rational funktion af s har enkelte negative koefficienter, kan det ikke være en gyldig 1-port responsefunktion (forudsat naturligvis, at eventuelle fælles faktorer for tæller- og nævnerpolynomiet i forvejen er forkortet bort). På den anden side er positiviteten af koefficienterne ikke en tilstrækkelig betingelse for funktionens gyldighed. Det relevante kriterium er snarere, at parametrene i kædebrøksudviklingen skal være positive. Hvis vi rent mekanisk begynder at kædebrøksudvikle en forelagt bruden rational funktion med positive koefficienter ved fortsat polynomiedivision og støder på en negativ parameter, er det tegn på, at funktionen ikke er positiv reel, eller at vi er løbet ind i Brune tilfældet. Hvad der så er tilfældet må afgøres ved at se om realdelen af funktionen på den imaginære s -akse (frekvensaksen) antager negative værdier eller ej. I det følgende gennemgås nogle eksempler, delvist taget fra Valkenburgs bog (ref.15).

Eksempel 1.

$$\tilde{Y}(s) = \frac{s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{3}{4}}{s^2 + s + 4} = 1 + \frac{-\frac{1}{4}s - \frac{13}{4}}{s^2 + s + 4}$$

d.v.s. Cauer metoden kan ikke bruges. For $s = -i\omega$ fås:

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{-\omega^2 - \frac{3}{4}i\omega + \frac{3}{4}}{4 - \omega^2 - i\omega}$$

$$\hat{Y}_1(\omega) = \frac{\left(\frac{3}{4} - \omega^2\right)(4 - \omega^2) + \frac{3}{4}\omega^2}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{(\omega^2)^2 - 4\omega^2 + 3}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

Nævnerpolynomiet er positivt, men tællerpolynomiet har nulpunkter for $\omega^2=1$ og $\omega^2=3$ og er negativt ind imellem. Funktionen $\hat{Y}(s)$ er altså ikke positiv reel, og kan ikke realiseres med et passivt-reaktivt netværk.

Eksempel 2.

$$\tilde{Z}(s) = \frac{s^3 - 1}{4s^3 - 3s - 1}$$

har negative koefficienter, men polynomiet $s-1$ går op i både tæller og nævner. Ved forkortelse fås:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{16}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Nu ser det bedre ud! For $s = -i\omega$ fås

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1 + 2i\omega}{1 + 4\omega^2} \right)^2$$

$$\hat{Z}_1(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{1 - 4\omega^2}{(1 + 4\omega^2)^2}$$

\hat{Z}_1 har minimumsværdien $\frac{5}{32}$ for $\omega^2 = \frac{3}{4}$.

Funktionen er altså positiv reel, men skal behandles ved Brune metoden. Vi vender tilbage til dette eksempel senere.

Eksempel 3.

$$\tilde{Y}(s) = \frac{4s^3 + 10s^2 + 8s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s}$$

Funktionen har en pol for $s = 0$ med residuet 1. Denne ikke-ergodiske del må først fratrækkes (Foster metoden), så vi får en ergodisk admittans

$$\tilde{Y}^{(1)}(s) = \tilde{Y}(s) - \frac{1}{s} = \frac{4s^2 + 8s + 5}{2s^2 + 3s + 1}$$

Det fratrukne led svarer til et x-lager med inertansen 1, påsat en o-samler. Den resterende funktion $\tilde{Y}^{(1)}(s)$ er nu ergodisk, så vi fortsætter med kædebrøksudvikling:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s} + 2 + \frac{2s + 3}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{s} + 2 + \frac{1}{s + \frac{1}{2s+3}}$$

Vi ser altså, at Foster-Cauer metoden kan føres til bunds, uden at

der dukker negative parametre op, så systemet kan reticuleres som vist på fig.5.

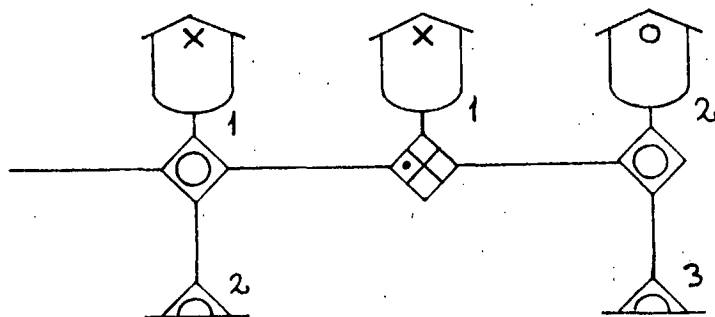


Fig.5. Reticulation af admittansfunktionen i eksempel 3.

Vi vender os nu til Brune metoden, idet vi tænker os, at Foster-Cauer metoden er endt med en minimumsimpedans $\tilde{Z}^{(\min)}(s)$, hvis realdel på frekvensaksen antager minimumsværdien nul for en endelig frekvens ω_m (sml. fig.4). Der bliver så to forskellige tilfælde, afhængigt af fortegnet på imaginærdelen $\hat{Z}_2(\omega_m)$. Denne værdi kan ikke være nul, for så ville admittansen jo have en pol for $\omega = \omega_m$ (og for $\omega = -\omega_m$), og der ville kunne udskilles et ikke-ergodisk bidrag i form af en udæmpet oscillator med egenfrekvensen ω_m .

Brunes oprindelige behandling (fra 1931) bygger på indførelsen af negative selvinduktioner: Hvis $\hat{Z}_2(\omega_m)$ er positiv, virker systemet ved frekvensen ω_m som en negativ selvinduktion med størrelsen $-\hat{Z}_2(\omega_m)/\omega_m$ og vi starter derfor med at fraskille et x-lager med denne induktans. Hvis $\hat{Z}_2(\omega_m)$ er negativ, skal der fraskilles en positiv induktans, men der vil så dukke en negativ op lidt længere henne i processen. Ideen er nu, at minimumsopførselen skyldes en harmonisk oscillator med resonansfrekvensen ω_m efter induktansen, som "kortsletter" systemet ved resonansen, således at kun den første induktans mærkes ved ω_m . Efter oscillatoren skal der indsættes en ekstra induktans, som ophæver den pol i det uendelige, der blev indført af den første induktans.

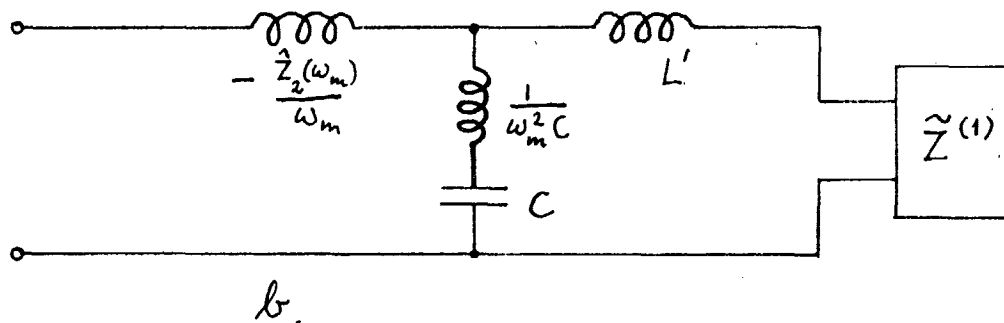
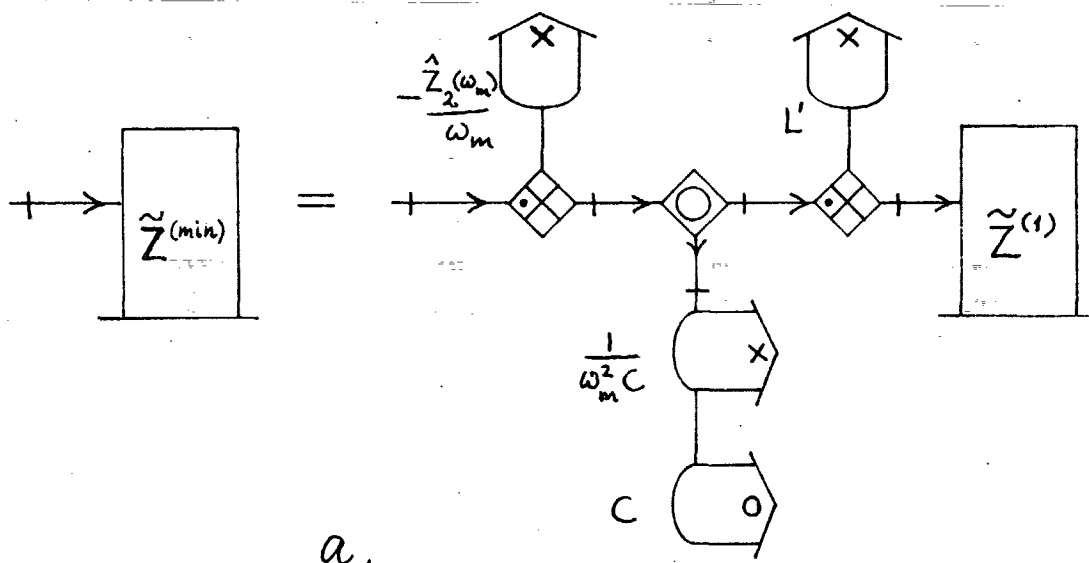


Fig.6. Den første reticulation af Brune tilfældet
 a: eb diagram. b: elektrisk netværk.

Betingelsen for, at der ikke indføres en ny pol i det uendelige er, at de tre parallelforbundne (o-samleren) selvinduktions resultierende selvinduktion er nul:

$$-\frac{\omega_m}{\hat{Z}_2(\omega_m)} + \omega_m^2 C + \frac{1}{L'} = 0 \quad (12)$$

Brune kunne så vise, at kapaciteten C kan bestemmes således, at netop én af de tre selvinduktioner er negativ, og at den resulterende impedans $\tilde{Z}^{(1)}$ efter udskillelse af Brune elementet er positiv reel.

Et blik på eb-diagrammet i fig. 6a viser, at to af de tre x-lagre er pålagt differentiell kausalitet. Der er derfor to differentielle bånd på de tre x-levels, og det bør forsøges at omforme eb-diagrammet, således at der kun optræder ét x-lager og differentiell kausalitet og negative induktanser kan undgås. Dette problem kan løses og fører til introduktion af Brune transformatoren, en reversibel toport med tre parametre, som vises på fig.7.

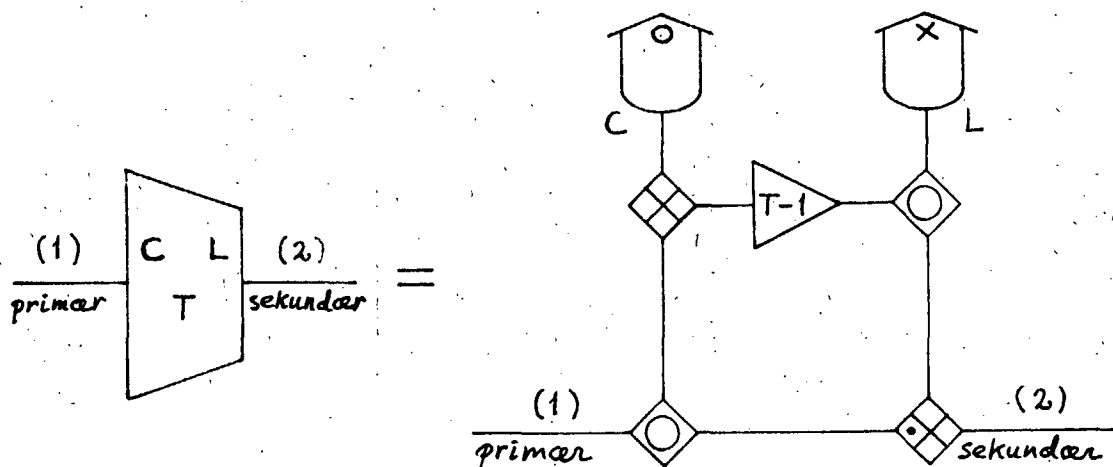


Fig.7. Brune transformatoren. Primærsiden svarer til den side af elementet på fig.6, hvor den negative selvinduktion sidder.

Når vi anvender Brune transformatoren til reticulation, vil vi forudsætte, at parametrene for ikonerne på fig.7 alle er positive:

$$\begin{aligned}
 C &> 0 \\
 L &> 0 \\
 T &> 1
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Ganske vist kunne vi tillade T-værdier i intervallet mel-

lem 0 og 1, men herved ville elementets definition blive tvetydig. Brune transformatoren har nemlig det træk fælles med en ideel transformator med omsætningsforholdet T , at en ombytning af primær- og sekundærsiden svarer til, at T erstattes med den reciprokke værdi $1/T$. På fig.8 vises som en tegneserie, hvordan omvendingen af Brune transformatoren foretages ved brug af regneregler for skeletdiagrammer (ref.I kapitel 5, fig.40) uden at man behøver at opskrive ligninger.

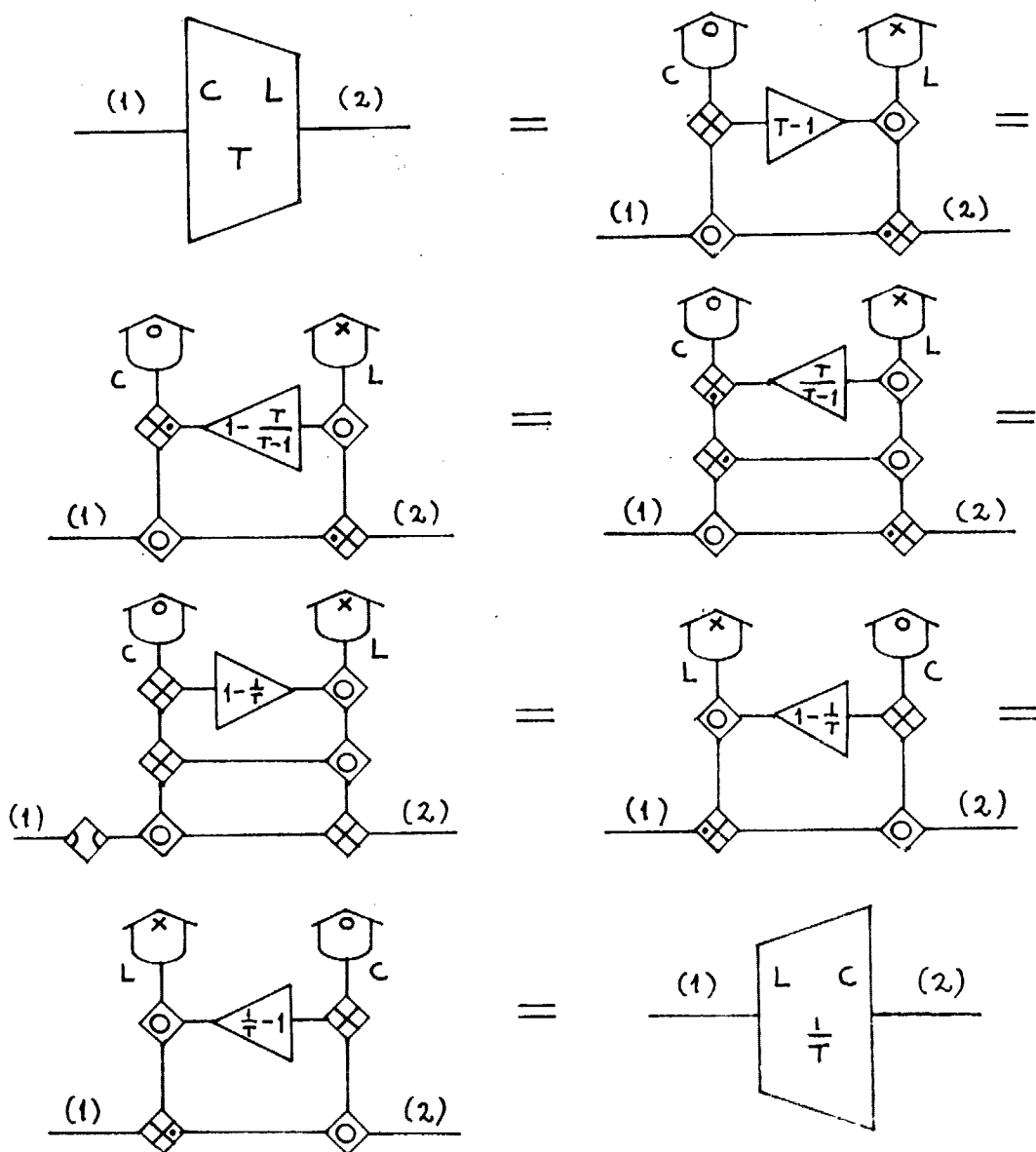


Fig.8. Vending af Brune transformatoren.

Med indførelsen af Brune transformatoren optræder der for første gang en ideel transformator (T-1) som et nødvendigt led i reticulationen af en 1-port responsefunktion, og for første gang er det nødvendigt at være påpasselig med anbringelsen af prikker i x-samlerne.

Resonnansen i Brune transformatoren optræder for frekvensen

$$\omega_0 = \frac{T-1}{\sqrt{LC}} \quad (14)$$

men minimumsfrekvensen er

$$\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{T}} \quad (15)$$

I øvrigt ser vi, at Brune transformatoren har samme art af dualsymmetri som den ideelle transformator: en dualitetstransformation svarer til en vending af elementet med bevarelse af parametrene (d.v.s. symbolerne bliver stående medens ikondiagrammet vendes). Der bliver derfor i alt fire tilfælde i brugen af Brune transformatoren, som vist på fig.9.

Vi skal ikke her gennemføre udregningerne, som udtrykker minimumsfunktionen \tilde{Z} eller \tilde{Y} ved Brune transformatorens parametre og den resterende positive reelle responsefunktion $\tilde{Z}^{(1)}$ eller $\tilde{Y}^{(1)}$. Udregningerne, som er trivielle, men lidt omstændelige foretages på sædvanlig måde ved at indicere signalamplituder på energibåndene, udnytte de forskellige ikoners response-relationer og løse det fremkomne ligningssystem. I kapitel 2 tager vi dette tilfælde op igen, og viser hvordan problemet kan løses noget lettere ved brug af signalspor og Shannon's loop regel.

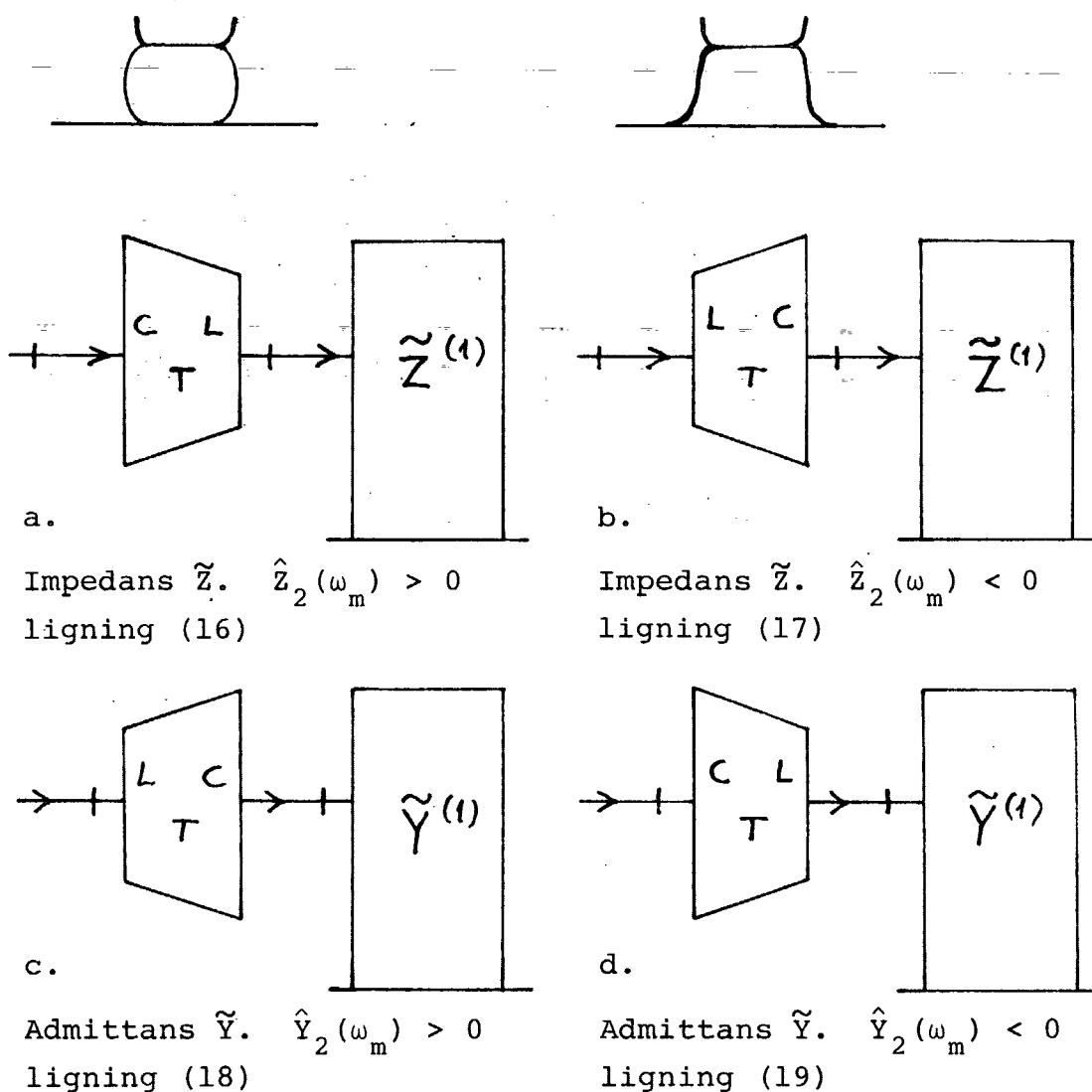


Fig.9. De fire tilfælde i reticulationen af en minimums-funktion ved hjælp af Brune transformatoren. Signalspor skitseret.

For tilfældet på fig.9a, hvor vi reticulerer en minimums-impedans, hvis imaginærværdi \hat{Z}_2 er positiv ved minimumsfrekvensen ω_m , findes:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{\tilde{Z}^{(1)}(s) \cdot LCs^2 + (T-1)^2 \cdot [Ls + \tilde{Z}^{(1)}(s)]}{T^2 \cdot LCs^2 + (T-1)^2 [\tilde{Z}^{(1)}(s) \cdot Cs + 1]} \quad (16)$$

$$\hat{Z}_2(\omega_m) = \sqrt{\frac{L}{TC}}$$

Hvis imaginærdelen $\hat{Z}_2(\omega_m)$ er negativ, skal vi bruge opstillingen på fig.9b, hvor Brune transformatoren er vendt om. Formlen for $\tilde{Z}(s)$ fås så af (16) ved at erstatte T med $1/T$ (sml. fig.8):

$$\tilde{Z}(s) = \frac{\tilde{Z}^{(1)}(s) \cdot T^2 LCs^2 + (T-1)^2 [Ls + \tilde{Z}^{(1)}(s)]}{LCs^2 + (T-1)^2 [\tilde{Z}^{(1)}(s) \cdot Cs + 1]} \quad (17)$$

$$\hat{Z}_2(\omega_m) = -\sqrt{\frac{TL}{C}}$$

Tilfældet fig.9c er dualt til fig.9a idet der dog er byttet om på symbolerne L og C. Formlen for $\tilde{Y}(s)$ fås derfor af (16) ved at erstatte L med C, C med L og $\tilde{Z}^{(1)}$ med $\tilde{Y}^{(1)}$. En anden måde at udlede formelen på er at benytte, at $\tilde{Y}(s)$ er den reciprokke funktion af $\tilde{Z}(s)$ i ligning (17) (fig.9b). D.v.s. vi skal blot vende brøken i (17) og erstatte $\tilde{Z}^{(1)}$ med $1/\tilde{Y}^{(1)}$. Begge metoder fører til formelen

$$\tilde{Y}(s) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(s) \cdot LCs^2 + (T-1)^2 [Cs + \tilde{Y}^{(1)}(s)]}{T^2 LCs^2 + (T-1)^2 [\tilde{Y}^{(1)}(s) \cdot Ls + 1]} \quad (18)$$

$$\hat{Y}_2(\omega_m) = \sqrt{\frac{C}{TL}}$$

Endelig fås formelen for $\tilde{Y}(s)$ i tilfældet fig.9d som den duale til (17) (fig.9b) eller den reciprokke til (16) (fig.9a):

$$\tilde{Y}(s) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(s) \cdot T^2 LCs^2 + (T-1)^2 [Cs + \tilde{Y}^{(1)}(s)]}{LCs^2 + (T-1)^2 [\tilde{Y}^{(1)}(s) \cdot Ls + 1]} \quad (19)$$

$$\hat{Y}_2(\omega_m) = -\sqrt{\frac{TC}{L}}$$

Eksempel 4.

For impedansfunktionen i eksempel 2 fandt vi, at realdelen $\hat{Z}_1(\omega)$ har minimumsværdien $5/32$ for $\omega = \pm\sqrt{3/4}$. Vi skal altså reticulere minimumsimpedansen

$$\tilde{Z}^{(\min)}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{4s^2 + 4s + 1} - \frac{5}{32} = \frac{\frac{3}{8}s^2 + \frac{3}{8}s + \frac{27}{32}}{4s^2 + 4s + 1} \quad (20)$$

Sattes heri $s = -i\omega_m = -i\sqrt{3/4}$ fås

$$\hat{Z}_{\min}(-i\omega_m) = i\hat{Z}_{2m}(\omega_m) ; \hat{Z}_{2m}(\omega_m) = \frac{3\sqrt{3}}{32} > 0$$

Vi skal altså bruge fig.9a og formel (16). Da udtrykket (20) er af 2.grad i både tæller og nævner, må restimpedansen $\hat{Z}^{(1)}$ i (16) være uafhængig af s, svarende til en x-læk R. Ved sammenligning af koefficienterne i (16) og (20) får vi 5 ligninger til bestemmelse af de 4 konstanter R,C,L og T. Den overskydende ligning fungerer som kontrol på, at vi har valgt den rigtige af de fire kombinationer på fig.9. Vi finder

$$R = \frac{27}{32}, \quad C = \frac{128}{27}, \quad L = \frac{3}{8}, \quad T = 3$$

og har hermed gennemført en fuldstændig reticulation

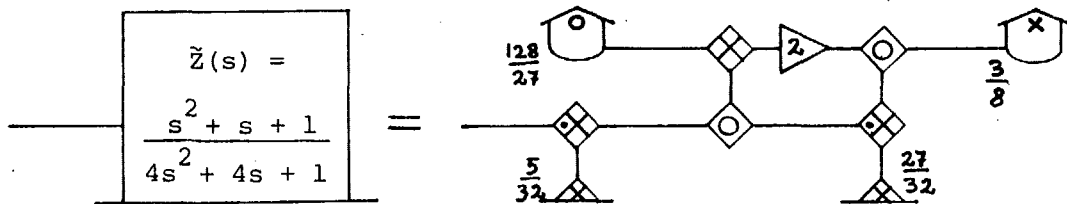


Fig.10. Reticulation af impedansen fra eksempel 2.

Eksempel 5.

Vi vil udregne admittansen af systemet på fig.11.

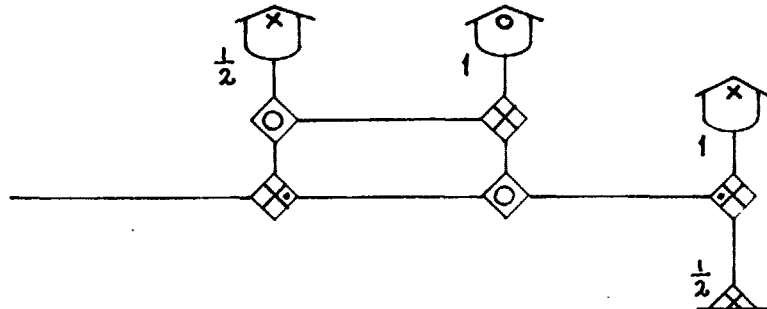


Fig.11. En white box.

Systemet ses at bestå af en Brune transformator og et Brown element, sammenkoblet som i fig.9c. Af ligning (18) fås så:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(s) &= \frac{\frac{1}{s+1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot s^2 + 1^2 [1 \cdot s + \frac{1}{s+1/2}]}{2^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot s^2 + 1^2 [\frac{1}{s+1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot s + 1]} = \\ &= \frac{3s^2 + s + 2}{4s^3 + 2s^2 + 3s + 1} \end{aligned} \tag{21}$$

Vi vil nu forsøge at glemme, at vi allerede kender kassens indretning

fra fig.11 og i stedet betragte ovenstående udtryk (21) som en black box admittans, der nu skal reticuléres.

Da tællerpolynomiet er en grad lavere end nævnerpolynomiet, starter vi med at udskille et x-lager ved at dividere tællerpolynomiet op i nævnerpolynomiet:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{\frac{4}{3}s + \tilde{Z}^{(\min)}(s)}, \text{ hvor}$$

$\tilde{Z}^{(\min)}(s)$ er en minimumsimpedans:

$$\tilde{Z}^{(\min)}(s) = \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + 1}{3s^2 + s + 2}$$

$$\hat{Z}_1^{(\min)}(\omega) = \frac{2(\omega^2 - 1)^2}{9\omega^4 - 5\omega^2 + 4}; \quad \hat{Z}_2^{(\min)}(\omega) = \frac{\frac{1}{3}\omega(\omega^2 + 1)}{9\omega^4 - 5\omega^2 + 4}$$

Minimumsfrekvensen er $\omega_m = 1$, og for den frekvens er imaginærdelen positiv. Vi er derfor i tilfældet fig.9a og skal bruge ligning (16):

$$\frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + 1}{3s^2 + s + 2} = \frac{RLCs^2 + (T-1)^2[Ls+R]}{T^2LCs^2 + (T-1)^2[RCs+1]}$$

for $s = 0$ fås $R = \frac{1}{2}$

og for $s \rightarrow \infty$ fås $\frac{R}{T^2} = \frac{2}{9}$ d.v.s. $T = \frac{3}{2}$

Videre fås: $C = 1$, $L = \frac{1}{6}$

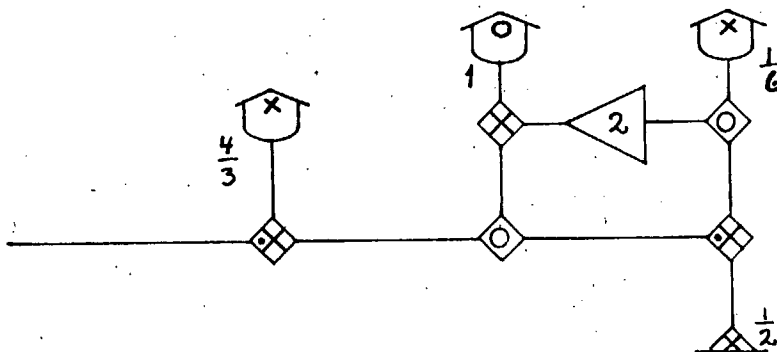


Fig.12. Black box reticulation af 1 port admittansen (21) for white boxen fig.11.

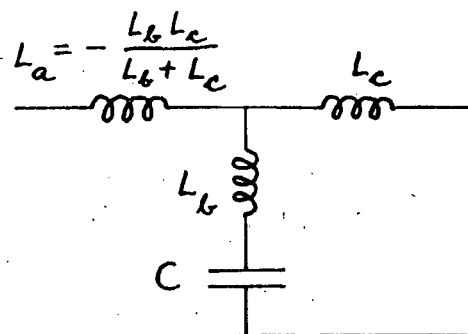
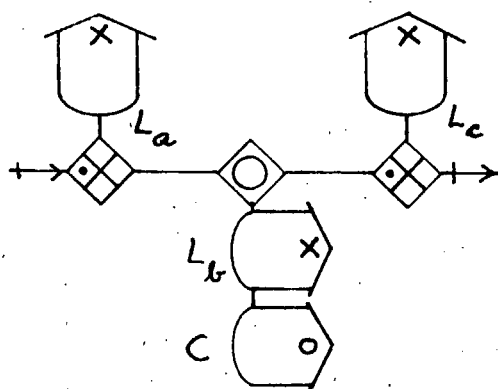
Sammenligning af fig.11 og fig.12 demonstrerer, at der i almindelighed kan designs flere forskellige systemer, som ikke kan skelnes fra hinanden på grundlag af deres 1-port responsefunktion (men nok, hvis vi havde flere porte til rådighed).

Løsningen på minimumsproblemet, som her er givet ved eb-versionen af Brune-transformatoren på fig.7 demonstrerer, at alle passive og reaktive komponenter i det basale byggesæt, med undtagelse af gyratorerne, er nødvendige for at en vilkårlig 1-port skal kunne reticuleres. Reticulationsteorien er oprindeligt udformet med de elektriske netværksdiagrammer som det ikoniske referencesprog, og da dette "byggesæt" er mindre fuldstændigt end eb-sproget, bl.a. mangler den symmetriske x-samler og den ideelle transformator, er Brune-problemet på grænsen af, hvad man kan klare, og en direkte oversættelse af eb-diagrammet på fig.7 til "elektrisk sprog" er umulig.

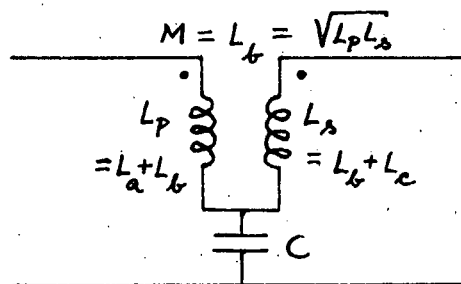
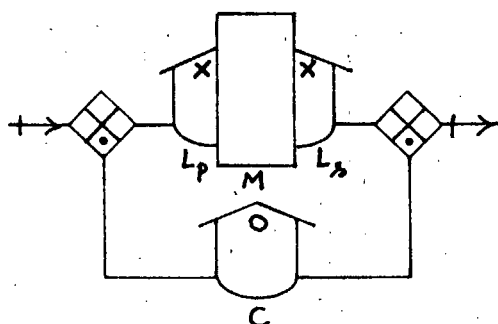
Imidlertid indgår der en induktiv transformator i det elektriske byggesæt, og en sådan svarer til en parallelforbindelse af (mindst) én selvinduktion til den ene port af en ideel transformator. Det er altså ikke muligt i det elektriske byggesæt at skille den ideelle transformator ud fra den parallelforbundne selvinduktion, men da det faktisk er en sådan forbindelse, der optræder i Brune transformatoren, kan den realiseres ved at man føjer en kondensator til en induktiv transformator, som vist på fig.13b.

Det blev senere vist af Bott og Duffin, at det faktisk er muligt at realisere minimumsfunktioner uden brug af transformatorer ved hjælp af "broer i balance". Disse metoder har dog kun akademisk interesse, da de indfører flere netværkskomponenter, som skal afstemmes omhyggeligt i forhold til hinanden. Eb-løsningen indfører tre uafhængige, positive parametre, som er det minimale antal til løsning af opgaven. Brunnes løsninger benytter fire parametre, heraf én overflødig, og Bott og Duffin metoden indfører endnu flere overflødige parametre. I dag, hvor den avancerede elektronik med integrerede kredse alligevel i stor udstrækning har afløst den traditionelle sammenlodning af konden-

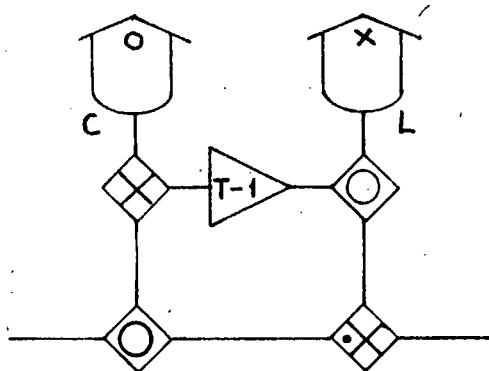
satorer med selvinduktioner m.m., forekommer det mere rationelt at koncentrere sig om semiotikken og relationslogikken i de teoretiske overvejelser fremfor at hænge sig for meget i begrænsningerne af et specifikt medium.



a.



b.



$$L = \frac{L_c^2}{L_b + L_c}$$

$$T-1 = \frac{L_c}{L_b}$$

c.

Fig.13. De forskellige udgaver af Brune transformatoren med eb- og elektriske diagrammer.

a. Med negativ selvinduktion $L_a = -\frac{L_b L_c}{L_b + L_c}$

b. Med induktiv transformator. Koblingsparameter $k = \frac{M}{\sqrt{L_p L_s}} = 1$, hvor M er den gensidige induktans. Omsætningsforhold T.

c. Den endelige eb-version uden differentiell kausalitet.

1.4. Fluktuations-dissipationsteoremet.

Level variablene for et system i termodynamisk ligevægt udviser fluktuation, som må beskrives statistisk. Svarende hertil vil output rate variabelen i en stimulus-response port udvise tilfældige variationer, der karakteriseres som støj. Det viser sig, at der er en simpel forbindelse mellem støjspektrets frekvensafhængighed og den dissipative responsefunktion, som i den klassiske grænse udarter til simpel proportionalitet. Den tidslige korrelationsfunktion af støjen fra et ergodisk system kan så på tilsvarende måde udtrykkes ved en af de tidsafhængige responsefunktioner. Afsnittene 1 - 4 udleder det klassiske F.D.teorem og fremstiller dette som et grundlag for den statistiske mekanik (bl.a. ligefordelingsloven).

I afsnit 5 indføres den såkaldte breddefunktion, og diskussionen tager derefter hovedsageligt sigte mod atomare diffusionsprocesser og indfører de såkaldte van Hove funktioner for selvkorrelation. Afsnit 6 indfører den sandsynlighedsteoretiske Poissonproces for "random walk" af en partikel i et diskret gitter og modellen forbindes semiotisk med den traditionelle diskussion af termisk støj og diffusion. I afsnit 7 diskuteres betydningen af det rumlige dimensionstal og diffusionsmodellernes anvendelse i væskedynamikken.

Endelig tages den kvantemekaniske støjdiskussion op i afsnit 8. Den klassiske teori for response og støj bryder sammen for tider af størrelsesordenen $\tau_0 = h/kT$ og må revideres med udgangspunkt i Kubo's formel for responsefunktionen. F.D.teoremet formuleres bedst ud fra breddefunktion og van Hove-spredningsfunktioner, men der er problemer med nulpunktsfluktuationer, hvis målelighed er tvivlsom.

Afsnittene 5-8 har en større sværhedsgrad end de øvrige afsnit og kræver visse forudsætninger i sandsynlighedsteori, væskedynamik og kvantemekanik.

1.4.1. Matematisk beskrivelse af termisk støj.

I afsnit 1.3.2, da vi diskuterede forholdet mellem reversibilitet og irreversibilitet, indså vi, at den irreversible adfærd af et ergodisk system må betragtes som et grænsetilfælde af reversibel og ikke-ergodisk adfærd. Et ikke-ergodisk system kan karakteriseres som en samling af oscillatorer, hvis egenfrekvenser giver sig til kende som diskrete poler på frekvensaksen for responsefunktionen. Hvis egenfrekvenserne bliver tilstrækkelig mange, må oscillatorerne betragtes som mikroskopiske og ukontrollable, og fordelingen af egenfrekvenser beskrives ved en kontinuert spektralfordeling, som hænger nøje sammen med en dissipativ realdel af responsefunktionen og en irreversibel systemadfærd.

Ser vi på et ergodisk system med spændingsinput, kan vi fastholde spændingen på værdien nul. Strømmen vil da fluktuere, selv om strømresponset er nul, d.v.s. systemet optræder som en aktiv støjkilde. Støjen afspejler den indre bevægelse i mikrofrihedsgraderne. Hvis vi opfatter disse som beskrevet ved et sæt oscillatorer med diskrete, omend tætliggende, egenfrekvenser ω_k , kan vi skrive:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\omega_k t} \quad (1)$$

hvor c_k erne er komplekse konstanter (sml. lign. 1.3.2.27). Da $f(t)$ er reel, må frekvenserne være symmetrisk fordelt på positive og negative værdier (frekvensen nul forekommer ikke)

$$\omega_{-k} = -\omega_k \quad (2)$$

og koefficienterne for k og $-k$ må være hinandens komplekskonjugerede

$$c_{-k} = c_k^*$$

(3)

Bortset fra denne betingelse må koefficienterne c_k betragtes som tilfældige. D.v.s. for et bestemt system er c_k ene muligvis bevægelseskonstanter, men vi kan ikke på forhånd kende deres værdier ud fra systemets makroskopiske karakteristika. Ser vi på et stort ensemble af ergodiske systemer, som er identiske på makrooverfladen, d.v.s. beskrives ved samme energibandsmodel (med én eller flere lække), så vil hvert enkelt c_k kunne betragtes som en stokastisk (tilfældig) kompleks variabel over de enkelte systemer i ensemblet. Vi kan altså ikke foreskrive værdien, men kun en sandsynlighedsfordeling for c_k på grundlag af vort makroskopiske kendskab til systemet.

Vi benytter her en pragmatisk definition på tilfældighed: en størrelse betragtes som tilfældig, hvis dens værdi ikke kan forudsiges ud fra en på forhånd defineret praksis. Praksis er her defineret ud fra de eksperimenter som kan designes på grundlag af en bestemt foreskrevet vekselvirkningsmåde med systemet. Så længe vi beskæftiger os med 1-port responseegenskaber, er der altså tale om målinger i en bestemt foreskrevet port.

Diskussionen af tilfældighedsbegrebet strander ofte på, at folk lader hånt om pragmatismen og forsøger sig med absolutte definitioner i stil med: "en størrelse betragtes som tilfældig, hvis dens værdi ikke kan forudsiges på nogen mulig måde". Fortsættelsen af diskussionen på dette grundlag fører så uvægerligt til, at der udkrystalliseres nogle alt for "firkantede" holdninger, f.eks.:

a) Vulgærpragmatikere, som mener, at alt må forstås ud fra den praksis, vi kender "her og nu". De gør altså praksis til noget absolut, afviser nytten af tankeeksperimenter og teoretiske spekulationer over tilfældighedsbegrebet i det hele taget: "støj er støj, og enhver radiotekniker ved, hvad det vil sige".

b) Mekanister, som tror at alt "i virkeligheden" er styret af Schrödingerligningen, evt. på en lidt mere indviklet form, som vi ikke helt kender endnu. Konklusionen af denne indstilling er, at tilfældighed slet ikke findes. Hvis noget ser ud til at være tilfældigt, er det blot fordi, vi har utilstrækkelig information om systemet eller ikke har gidet løse bevægelsesligningerne ordentligt.

c) Esoterikere eller parafysikere, som heller ikke mener, at tilfældighed findes "i virkeligheden". Virkeligheden er dog for dem noget andet, end den er for mekanisterne, og den formel, der styrer det hele, er absolut ikke Schrödingerligningen, men snarere en eller anden kabalistisk "glyf", som involverer andre kræfter end de fysiske.

Hvis noget ser tilfældigt ud, er det fordi vi ikke kender glyffen, eller fordi vores følsomhed for visse telepatiske vibrationer er for lav. Et godt medium, eller en skolet magiker vil straks erkende den rette sammenhæng.

Det er ikke meningen her at bestride, at der kan være noget godt og rigtigt i alle tre holdninger. Det der gør dem så firkantede, er at de filosoferer videre på grundlag af den absolutte tilfældighedsdefinition.

En sand pragmatiker (eller "pragmaticist", som C.S. Peirce kaldte sig på sine gamle dage, da han var blevet træt af vulgærpragmatikerne) mener naturligvis, at praksis må lægges til grund for begrebsdefinitionerne og er altså enig med vulgærpragmatikeren så langt. På den anden side mener han (m/k) ikke, at praksis kan løsrives fra den teoretiske virksomhed, og at man ikke skal prøve at forestille sig andre former for praksis end dem, der er gældende her og nu. Han er enig med mekanicisten i gyldigheden af Schrödingerligningen og andre af fysikkens såkaldte førsteprincipper, men mener ikke, at de kan bruges til at afskaffe tilfældighedsbegrebet, når de ikke ledsages af opskrifter på, hvordan man i praksis indsamler den manglende information uden at ødelægge systemet, og hvordan man i praksis bearbejder den, så der kan komme en gyldig forudsigelse ud af det. Han vil give parafysikeren medhold i, at der sikkert findes andre informationskanaler end de fra fysikken kendte, og at visse personer mestrer en praksis, som virker "overnaturlig" for de fleste. Det kan imidlertid heller ikke benyttes til at afskaffe tilfældigheden i en given sammenhæng, når der ikke gives en praktisabel opskrift på, hvordan man øser af de esoteriske kilder.

Et eksempel, som kan belyse, hvordan de forskellige holdninger ytrer sig, er de såkaldte tilfældighedsalgoritmer, som bruges meget i forbindelse med computersimulation (Monte Carlo teknikker). Hvis man råder over en programmerbar lommeregner, kan man let gennemprøve følgende simple algoritme:

$$x_{i+1} = \text{FRAC}(x_i \cdot 401 + 7 \cdot 10^{-5}) \quad (4)$$

hvor "FRAC" betyder "den brudne del af tallet", d.v.s. det der kommer efter decimaltegnet. Algoritmen startes med et "frø" x_0 , som er et tal mellem 0 og 1, og alle de frembragte tal ligger i det samme interval.

Hvis man spørger folk fra de her beskrevne filosofiske lejre, om de således frembragte tal er tilfældige, vil både vulgærpragmatikeren, mekanicisten og esoterikeren straks sige, at de er ikke spor tilfældige, fordi de frembringes af en deterministisk arbejdende maskine. Pragmatikeren vil sige: "fortæl mig, hvilke metoder, jeg har til rådighed for at studere tallene, så skal jeg afgøre, om de er tilfældige". Hvis han så får opgivet algoritmen og frøet, vil han snart opdage, at han har et 100% sikkert middel til forudsigelse af tallene, som derfor ikke er tilfældige. Hvis man undlader at fortælle ham algoritmen og i stedet forærer ham en lærebog i statistik, vil han bede om en passende stor stikprøve, f.eks. 1000 tal i rækkefølge, og efter at have undersøgt disse med henblik på gennemsnit, varians og korrelationer, vil han konkludere, at tallene er tilfæl-

dige. Denne konklusion vil ikke ændres, selv om han ved, at der er en bagved liggende algoritme, for når algoritmen er ukendt og ikke kan afsløres med statistikkens metoder, kan den ikke bruges til forudsigelse.

Hvis pragmatikeren selv betjener sig af tilfældighedsalgoritme i et simulations eksperiment, vil han indtage en dialektisk holdning til tilfældigheden af de frembragte tal. Fra programmørens synspunkt er det en fordel at tallene ikke er tilfældige, således at et bestemt eksperiment kan reproduceres nøjagtigt. Fra "systemets synspunkt" er det vigtigt, at tallene, som simulerer støjen er så tilfældige som muligt. D.v.s. den information, som ligger i støjalgoritmen, skal ikke kunne uddrages af de fysiske observable, som simuleres.

Selv om den pragmatiske tilfældighedsdefinition viger uden om det ontologiske spørgsmål, om der er en absolut tilfældighed eller ej, fører den alligevel let til en tro på, at den findes, hvorved pragmatismen kommer i modsætning til mekanicismen og forskellige former for esoterisk lære. Når man i de fleste praktiske situationer må erkende, at der indgår et tilfældigt, d.v.s. uforudsigeligt element, får tilfældighedsbegrebet status af noget virkeligt eksisterende, og man får svært ved at acceptere en kosmologi, som udelukker dette element. Dette metafysiske problem blev taget op af C.S. Peirce i en serie artikler i tidsskriftet "The Monist" 1891-93. Heri drøftes modsætningen mellem deterministiske kosmologier og "tychismen", som Peirce foretrækker, og som han definerer som troen på objektiv eller autentisk tilfældighed, der ikke kan bortskaffes ved en forøget information (ref.16).

Diskussionen florerer stadig omkring fortolkningen af kvantemekanikken, hvor Københavnerskolens fysikere (Bohr, Heisenberg m.fl.) nærmest har stået for en pragmatisk-tychistisk holdning, medens Einstein og tilhængere af de "skjulte parametre" (bl.a. D.Bohm) har forsøgt at redde mekanicismen.

Når vi har defineret et ensemble ud fra systemets makroskopiske egenskaber, kan vi definere ensemblemiddelværdien, som indiceres med "bra-ket" notationen $\langle \rangle$. F.eks. må det for en vilkårlig af c_k erne gælde, at

$$\langle c_k \rangle = 0 \quad (5)$$

Hvis (5) ikke var opfyldt, ville vi kunne lave en evighedsmaskine ved at "udfiltrere" bestemte fourierkomponenter af støjen fra et ensemble og overføre den til et arbejdsreservoir.

Hvis man fastholder det termodynamiske axiom om umulighe-

den af en evighedsmaskine, selv når støjen tages i betragtning, kan der ikke være så mange sandsynlighedsfordelinger for c_k erne over et ensemble, som kan komme på tale. F.eks. vil enhver afvigelse af fordelingen for c_k ernes fase fra en jævn fordeling straks kunne udnyttes af kløgtige ingeniører til en evighedsmaskine. D.v.s. sandsynlighedsfordelingen for

$$c_k = |c_k| e^{i\phi_k} \quad (6)$$

kan kun afhænge af den numeriske værdi $|c_k|$. Ligning (5) vil så være automatisk opfyldt.

Ideen om, at støjens statistiske egenskaber kan udledes alene på grundlag af det termodynamiske axiom om umuligheden af en evighedsmaskine, blev udviklet af den ungarske fysiker Leo Szilard i en artikel fra 1925 (ref.17). Det er et resultat af stor værdi, som Szilard nåede frem til, men det nåede aldrig rigtig frem i "the Mainstream of Physics". Grunden er nok den, at på det tidspunkt, Szilard udarbejdede sine ideer, var den såkaldt energetiske skole, som bekæmpede atomteorien, omsider blevet dysset ned, og kvantemekanikken og den statistiske mekanik fejrede sin blomstring. Et resultat som Szilard's, der påviste, at atom- og molekylforestillingen slet ikke var nødvendig for at udvikle en statistisk termodynamik, måtte virke bagstræberisk. Det var først efter 1948, med fremkomsten af et nyt paradigme, kybernetikken og informationsteorien, at Szilard's tanker kom til ære og værdighed. (Dog ikke så meget den nævnte artikel som en senere, der omhandlede Maxwell's dæmon og forholdet mellem entropi og information).

Ud over det, at hver enkelt af c_k erne betragtes som en tilfældig variabel med jævnt fordelt fase, må det gælde, at to forskellige variable c_k og $c_{k'}$ er statistisk uafhængige eller ukorrelerede undtagen for $k' = -k$ (lign. (3)). Vi udtrykker dette ved korrelationsfunktionen

$$\phi_{k,k'} = \langle c_k^* c_{k'} \rangle = \langle |c_k|^2 \rangle \delta_{k,k'} \quad (7)$$

hvor $\delta_{k,k'}$ (Kronecker symbolet) er

$$\delta_{k,k'} = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq k' \\ 1 & \text{for } k = k' \end{cases} \quad (8)$$

Den manglende korrelation mellem c_k erne er ensbetydende med, at deres faser er ukorrelerede. Hvis der var en fasekorrelation mellem forskellige c_k er, ville denne give anledning til bestemte, forudsigelige træk ved støjfunktionen, som kunne udnyttes til en evighedsmaskine.

Den eneste statistiske parameter for c_k -fordelingen, som ikke forsvinder, og som må kunne foreskrives ud fra et makroskopisk kendskab til systemet, er spredningskvadrattet $\langle |c_k|^2 \rangle$. Svarende hertil, er den eneste fordeling, som ikke foregøgler mere information, end vi faktisk har, en gaussisk fordeling over den komplekse plan med centrum i nulpunktet:

$$p(c_k) = \frac{1}{\pi \langle |c_k|^2 \rangle} e^{-|c_k|^2 / \langle |c_k|^2 \rangle} \quad (9)$$

Sandsynlighedstætheden (9) er normeret, således at integralet af den over planen har værdien 1.

Selve støjfunktionen $f(t)$ i ligning (1) har også middelværdien nul. Da systemet er tidshomogent må vi også regne med, at de statistiske egenskaber af støjfunktionen er tidshomogene. Den såkaldte autokorrelationsfunktion, der defineres som ensemblemiddelværdien af produktet af støjfunktionen til to forskellige tider, t og t' , kan derfor kun afhænge af tidsforskellen $\tau = t - t'$. D.v.s. vi kan skrive

$$\Phi_f(\tau) = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle \quad (10)$$

Af tidshomogeniteten følger så, at $\Phi_f(\tau)$ er en lige funktion af τ :

$$\Phi_f(-\tau) = \langle f(t-\tau)f(t) \rangle = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \Phi_f(\tau) \quad (11)$$

Indsætter vi nu udtrykket (1) i ovenstående definition af autokorrelationsfunktionen og benytter, at c_k erne er sta-

tistisk uafhængige, ligning (7), finder vi:

$$\begin{aligned}
 \Phi_f(\tau) &= \langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \langle f^*(t)f(t+\tau) \rangle \\
 &= \langle (\sum_k c_k^* e^{i\omega_k t}) (\sum_{k'} c_{k'} e^{-i\omega_{k'}(t+\tau)} \rangle \\
 &= \sum_{k \neq k'} \langle c_k^* c_{k'} \rangle e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t - i\omega_{k'}\tau} + \sum_k \langle |c_k|^2 \rangle e^{-i\omega_k \tau} \\
 &= \sum_k \langle |c_k|^2 \rangle e^{-i\omega_k \tau} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Vi ser altså, at tidshomogeniteten følger af egenskaben (7), d.v.s. af den mangel på fasekorrelation mellem forskellige c_k er, som karakteriserer et ergodisk system.

Nu er ensemblemiddelværdier et teoretisk begreb, som kan være svært at anvende i praksis, fordi vi sjældent råder over et ensemble, men laver eksperimenter med et enkelt system. De observerbare middelværdier er derfor ikke ensembleværdier, men tidsmiddelværdier for den enkelte system. For et tidshomogent system defineres tidsmiddelværdien af en fluktuerende størrelse $A(t)$ på følgende måde

$$\overline{A(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

I princippet kunne nedre grænse på integralet være ethvert andet tidspunkt end kl.0; det ville ikke ændre tidsmiddelværdien, da systemet er tidshomogent. Vi kan nu udregne en tidsligt midlet autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
 \overline{f(t)f(t+\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t)f(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\sum_k c_k^* e^{i\omega_k t}) (\sum_{k'} c_{k'} e^{-i\omega_{k'}(t+\tau)}) dt \\
 &= \sum_{k \neq k'} \left\{ c_k^* c_{k'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \cdot e^{-i\omega_{k'}\tau} \right\} + \sum_k |c_k|^2 e^{-i\omega_k \tau} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Dobbeltsummen i (13) forsvinder, fordi tidsmiddelværdien

af den svingende funktion $e^{i(\omega-\omega')t}$ er nul og vi står tilbage med et udtryk, som meget ligner den ensemble-midlede autokorrelationsfunktion (11). Den eneste forskel er, at i (13) optræder absolutkvadraterne $|c_k|^2$ for det enkelte system, medens vi i (12) har ensemblemiddelværdierne af de samme størrelser til at indgå. Hvis systemet er ergodisk, kan vi tillade os at se bort fra denne forskel. De diskrete frekvenser ω_k vil jo så være meget tætliggende. Hvis vi ser på et ganske lille interval $\Delta\omega$ omkring frekvensen ω , vil bidraget til (13) fra dette interval kunne udtrykkes på formen

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_k \in [\omega, \omega + \Delta\omega]} |c_k|^2 e^{-i\omega_k \tau} &\approx e^{-i\omega \tau} \sum_{\omega_k \in [\omega, \omega + \Delta\omega]} |c_k|^2 \\ &\approx e^{-i\omega \tau} \sum_{\omega_k \in [\omega, \omega + \Delta\omega]} \langle |c_k|^2 \rangle \end{aligned}$$

hvor den sidste omtrentlige lighed er en følge af "de store tals lov", fra sandsynlighedsregningen (ref.18).

Konklusionen er altså, at for et ergodisk system, vil tidsmiddelværdien med overvejende sandsynlighed (næsten altid) være lig med ensemblemiddelværdien. Man plejer at tilføje "for enhver observabel funktion", men det vil vi nu ikke gøre, for man kan godt finde på funktioner, for hvilke sætningen ikke gælder (spørgsmålet er så, om sådanne funktioner er observable). De eneste funktioner, vi skal interessere os for, er energibandsvariablene i systemets stimulus-response port og deres korrelationer, specielt autokorrelationen af output strømmen, og for denne vil sætningen være opfyldt, som vi netop har vist. Identiteten af tidsmiddelværdi og ensemblemiddelværdi benyttes iøvrigt ofte som definition på ergodicitet, hvilket er en problematisk affære, da det let fører til den konklusion, at ingen systemer er ergodiske i streng forstand. (ref.19).

Autokorrelationsfunktionen for støjen fra et ergodisk system kan altså udtrykkes på følgende måde:

$$\begin{aligned}\Phi_f(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle \\ &= \sum_k \langle |c_k|^2 \rangle e^{-i\omega_k \tau}\end{aligned}\quad (14)$$

Da frekvenserne ω_k er meget tætliggende, må vi kunne udtrykke (14) ved et Fourierintegral, idet vi forudsætter, at $\langle |c_k|^2 \rangle$ er en pæn glat funktion af ω_k . Vi definerer da det såkaldte spektrum $\hat{\Phi}_f(\omega)$ ved ligningen

$$\sum_{\omega_k \in [\omega, \omega + \Delta\omega]} \langle |c_k|^2 \rangle = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_f(\omega) \cdot \Delta\omega \quad (15)$$

Faktoren 1/2 skyldes, at der kommer et lige så stort bidrag fra intervallet $[-\omega - \Delta\omega, -\omega]$. Vi kan så udtrykke (14) på formen

$$\Phi_f(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_f(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} \hat{\Phi}_f(\omega) \cos\omega\tau d\omega \quad (16)$$

hvor vi har udnyttet, at $\hat{\Phi}_f(\omega)$ er en lige funktion af frekvensen. Ved Fouriertransformation af (16) fås den omvendte relation, hvor vi udnytter, at $\Phi_f(\omega)$ er en lige funktion af τ (sml. lign. (12)):

$$\hat{\Phi}_f(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_f(\tau) \cos\omega\tau d\tau \quad (17)$$

Relationerne (16) og (17) mellem spektrum og autokorrelation af en tilfældig funktion (en "tidsrække", time series, $f(t)$) udgør tilsammen det såkaldte Wiener-Khinchin teorem, som blev vist uafhængigt af amerikaneren N.Wiener (i 1932, i Cambridge, længe før "Cybernetics") og russeren A.I. Khinchin. Vi har her skudt en genvej til teoremet ved at forudsætte, at støjen kan udtrykkes som i ligning (1), ved en trigonometrisk række; den generelle diskussion er ret kompliceret (ref.20).

1.4.2. Symmetrisk dæmpede oscillatorer.

Den almene teori for termisk støj hviler på spektralopløsnings-teoremet, som blev vist i afsnit 1.3.1. Ved at fremstille et vilkårligt 1-port responsesystem som en samling af oscillatorer, udpeger vi den harmoniske oscillator til vort modelsystem nr.1. I den eksakte spektralformel sammenlignes systemet med en samling udæmpede oscillatorer, hvis egenfrekvenser har en kontinuert fordeling. I praksis, hvis man vil bruge spektralformlen som grundlag for approksimativ reticulation og simulation, må man imidlertid benytte en diskret samling af svagt dæmpede oscillatorer. Vi må tænke på den udæmpede oscillator som det uopnåelige grænsetilfælde af "uendelig svag dæmpning", og netop når det gælder støjfenomener, er vi nødt til at medregne dæmpning, selv om den er aldrig så svag, for kun derved bliver oscillatoren ergodisk og får en chance for at komme i termisk ligevægt.

I princippet kan grænseovergangen til uendelig svag dæmpning foretages på mange måder, for, som vi så i afsnit 1.2.5, skal der to dimensionsløse parametre γ og δ , til at beskrive arten af dæmpning. Enhver kurve, som forløber inden for eller på randen af det skraverede område i fig. 1.2.5.3 og ender i nulpunktet repræsenterer en mulig grænseovergang. Vi vil imidlertid holde os til tilfældet $\delta=0$, som kaldes symmetrisk dæmpning, for herved bliver vi nemmest i stand til at udnytte den duale symmetri mellem x - og o -egenskaber i energibandsformalismen.

På fig.1 vises en omformning af den symmetrisk dæmpede oscillator, som gør dualsymmetrien åbenbar. Først indsættes et par transducere i de ydre porte, som sørger for, at strømmen i port 1 får samme dimension som spændingen i port 2. Derefter trækkes de to transducere gennem samlerne

og smelter sammen med hinanden og med de passive og reaktive elementer efter de regneregler, som er fremstillet i ref.I (kap.5, fig.40, samt opgave 8). Som resultat får vi en fuldstændig symmetrisk model, hvor de duale responsefunktioner i de to porte er identiske, forudsat at orienteringerne vælges symmetrisk.

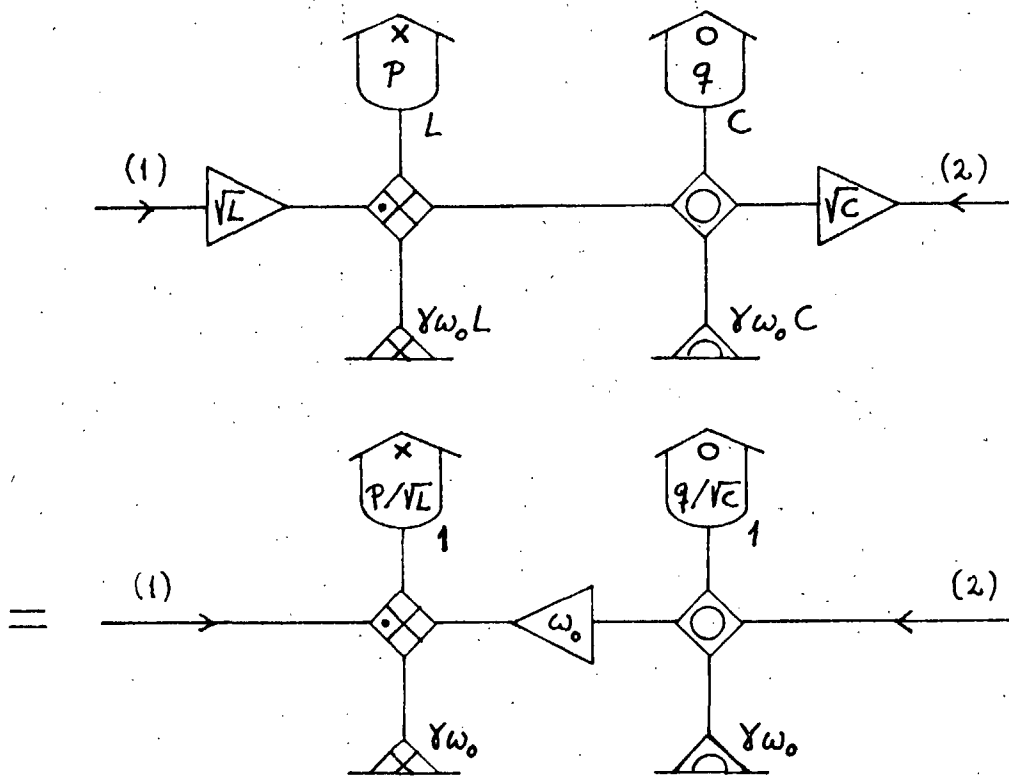


Fig.1. Dimensionsmæssig symmetrisering af den symmetrisk dæmpede oscillator.

I den symmetriserede model på fig.1 har de to level variable begge dimensionen $(\text{energi})^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{x-level} : \quad \pi &= p/\sqrt{L} \\ \text{o-level} : \quad \chi &= q/\sqrt{C} \end{aligned} \tag{1}$$

Bevægelsesligningerne for den symmetrisk dæmpede oscillator kan nu udtrykkes på formen

$$\frac{d\pi}{dt} = V_1 - \gamma\omega_0\pi - \omega_0\chi \quad (2)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = J_2 - \gamma\omega_0\chi + \omega_0\pi \quad (3)$$

I den sædvanlige response sammenhæng betyder V_1 spændingen i port 1 og J_2 er strømmen i port 2. Nu skal vi imidlertid have støjen med, så V_1 indeholder spændingsstøjen fra x-lækken og J_2 indeholder strømstøjen fra o-lækken. Hvis de udefra pålagte stimuli forsvinder, eksisterer V_1 og J_2 stadig som rene støjbidrag. Begge har dimensionen (energi)^{1/2}/tid.

I stedet for de to reelle level variable π og χ vil vi nu indføre en enkelt kompleks o-level a:

$$a = \chi + i\pi \quad (4)$$

Energifunktionen er så

$$\frac{1}{2} a^* a = \frac{\chi^2 + \pi^2}{2}$$

Grunden til, at a karakteriseres som en o-level er, at dens realdel er en o-level. I kvantemekanikken indebærer tidsvendingsoperationen bl.a., at der skal skiftes fortegn på "i", og da π er en x-level, som også skifter fortegn ved tidsvendning, er a altså invariant ved tidsvendning og må karakteriseres som o-level. Nu er denne diskussion ganske vist ikke kvantemekanisk, men den symmetriske dæmpede oscillator er i forbløfende grad upåvirket af overgangen fra klassisk til kvantemekanisk beskrivelse, og giver derfor et godt påskud til at foregribe kvantemekanikken lidt. Divideres a med $\sqrt{\hbar\omega_0}$ fås en dimensionsløs størrelse, som svarer til den såkaldte annihilationsoperator, og den komplekskonjugerede $a^*/\sqrt{\hbar\omega_0}$ svarer til skabelsesoperatoren.

Desuden indfører vi en kompleks strømkilde Λ :

$$\Lambda = J_2 + iV_1 \quad (5)$$

Bevægelsesligningerne (2) og (3) kan så sammenfattes til en enkelt kompleks ligning:

$$\frac{da}{dt} = -\omega_0(\gamma+i)a + \Lambda \quad (6)$$

På fig.2 vises en kompleks energibandsmodel, som samtidigt fremstiller (6) og den kompleks-konjugerede ligning

$$\frac{da^*}{dt} = -\omega_0(\gamma-i)a^* + \Lambda^* \quad (7)$$

Det ses, at størrelsen "i" svarer til en gyrator, altså en ikke-dissipativ funktion. Dæmpningen $\omega_0\gamma$ fremstilles ved lække, som i det komplekse eb-sprog er antilineære, d.v.s. de giver anledning til en komplekskonjugering af input signalet.

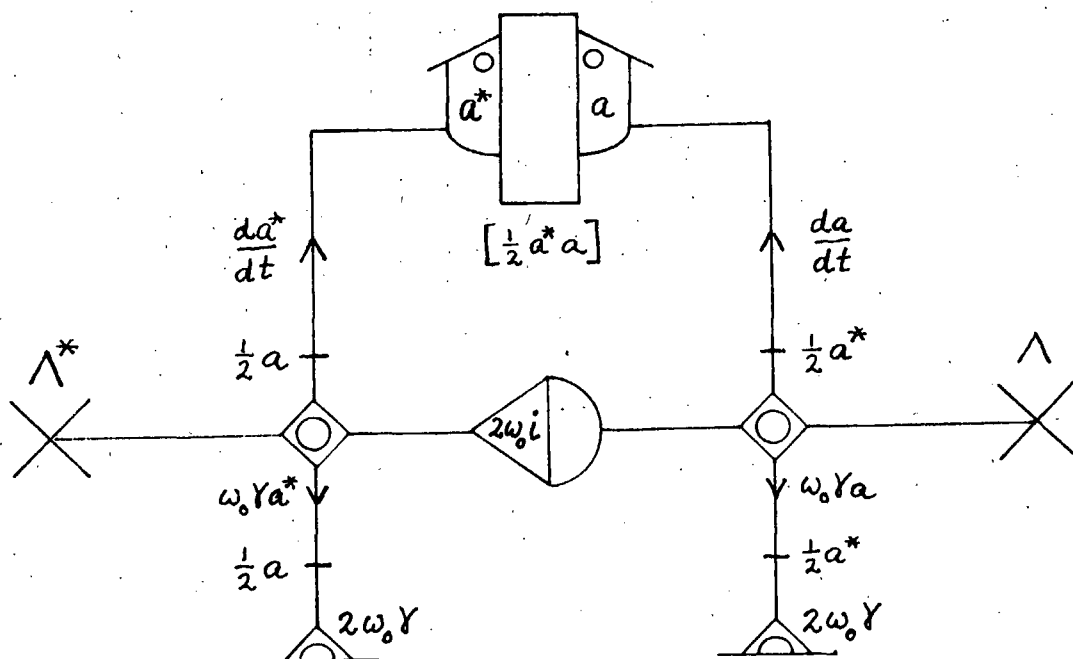


Fig.2. Den symmetriske dæmpede oscillator fremstillet ved en kompleks energibandsmodel. Reglerne for komplekse diagrammer er som for de sædvanlige reelle med den tilføjelse, at lækkene er antilineære, d.v.s. de komplekskonjugerer input signalet og ganger det med lækparameteren, som er reel.

Bevægelsesligningen (6) kan simplificeres yderligere ved at definere

$$b(t) = e^{i\omega_0 t} a(t) \quad (8)$$

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} \Lambda(t) \quad (9)$$

Vi får så af (6), (8) og (9):

$$\frac{db}{dt} = -\omega_0 \gamma b + \psi \quad (10)$$

Hvis oscillatoren var i sin grundtilstand i den fjerne fortid, $a(-\infty) = b(-\infty) = 0$, er løsningen til (10) givet ved

$$b(t) = e^{-\omega_0 \gamma t} \int_{-\infty}^t \psi(t') e^{\omega_0 \gamma t'} dt' \quad (11)$$

Denne løsning vil iøvrigt også gælde for $b(-\infty) \neq 0$, for da oscillatoren er ergodisk, vil ethvert spor af begyndelsestilstanden i den uendeligt fjerne fortid forlængst være udvisket kl.t. Løsningen $a(t)$ til (6) fås nu nemt af (11) ved at benytte (8) og (9).

Den komplekse strømkilde Λ vil i almindelighed sammenfatte de udefra pålagte signaler og støjbidragene fra lækkene. For en uforstyrret oscillator er $\Lambda(t)$ altså en tilfældig, kompleks variabel. Den fuldstændige symmetri mellem strømme og spændinger i modellen må så betyde, at realdelen og imaginærdelen af $\Lambda(t)$ har identiske gaussiske sandsynlighedsfordelinger, d.v.s. sandsynlighedsfordelingen for Λ kan kun afhænge af den numeriske værdi $|\Lambda|$ og må iøvrigt være en symmetrisk todimensional gaussisk fordeling, svarende til udtrykket 1.4.1.9. Det samme kan siges om fordelingen af $\psi(t)$ i ligning (9). Det er så klart, at fordelingen af den øjeblikkelige værdi $b(t)$, givet ved (11), må have samme cirkulære symmetri, og endelig kan vi, via ligning (8), slutte, at fordelingen for $a(t)$ kun kan af-

hænge af den numeriske værdi $|a(t)|$.

En konsekvens af dette symmetriargument er, at ensemblemiddelværdien af alle potenser af a må forsvinde. Specielt gælder

$$\langle a^2 \rangle = 0 \quad (12)$$

Indsættes heri definitionerne (4) og (1) fås:

$$\langle \chi^2 \rangle - \langle \pi^2 \rangle + 2i\langle \chi\pi \rangle = 0, \text{ d.v.s.}$$

$$\langle \frac{q^2}{C} \rangle = \langle \frac{p^2}{L} \rangle = \theta \quad (13)$$

$$\langle pq \rangle = 0 \quad (14)$$

Størrelsen θ i ligning (13) kan tænkes at afhænge af oscillatorparametrene γ og ω_0 , samt af temperaturen T .

Vi skal imidlertid se, at θ i hvert tilfælde ikke kan afhænge af dæmpningsparameteren γ , og at den i den klassiske grænse heller ikke kan afhænge af egenfrekvensen ω_0 , men kun af temperaturen.

Oscillatorens middelenergi i termisk ligevægt er jo

$$\langle \frac{1}{2}a^*a \rangle = \langle \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} \rangle = \theta \quad (15)$$

Denne termodynamiske ligevægtsegenskab må være uafhængig af styrken af dæmpningen. Hvis ikke, d.v.s. hvis θ afhang af γ , kunne vi lave følgende eksperiment:

Vi tager en oscillator med regulerbar dæmpningsparameter og anbringer den i kontakt med et varmebad med temperaturen T_1 . Lad os nu antage, at der er et par værdier γ_1' og γ_1'' af dæmpningsparameteren således at

$$\theta(\gamma_1', T_1) < \theta(\gamma_1'', T_1) \quad (16)$$

Vi indstiller så γ på værdien γ_1'' og venter til ligevægten har indstillet sig. Så tager vi oscillatoren ud af varmebadet og lader den beholde sin erhvervede energi, som i middel har værdien $\theta(\gamma_1'', T_1)$. Lad os endvidere tænke os, at vi har et andet varmebad med en temperatur T_2 , som er lidt højere end T_1 . Af kontinuitetsgrunde må vi forvente, at der ved denne temperatur findes et par værdier af γ , γ_2' og γ_2'' således at

$$\theta(\gamma_2', T_2) < \theta(\gamma_2'', T_2) \quad (17)$$

og således, at hvis $T_2 - T_1$ er tilstrækkelig lille

$$\theta(\gamma_1'', T_1) > \theta(\gamma_2', T_2) \quad (18)$$

Vi skal så blot bringe oscillatoren i kontakt med varmebadet T_2 og samtidigt indstille γ på værdien γ_2' , så vil der i middel efter en vis tid være overført energien

$$\theta(\gamma_1'', T_1) - \theta(\gamma_2', T_2) > 0 \quad (19)$$

til det andet varmebad. Vi må regne med at regulerings- og flytningsprocesserne kan udføres således, at de kræver "uendelig lidt energi"; så hvis vi efter opnåelsen af den nye ligevægt vender tilbage til udgangspositionen, har vi gennemført en kredsproces, hvorved der (i middel) er overført varme fra et koldere til et varmere sted, uden at der er afsat andre spor i universet. Noget sådant er i modstrid med termodynamikkens anden hovedsætning, og vi må derfor konkludere, at støjenergien θ ikke kan afhænge af dæmpningsparameteren.

Vi skal dernæst indse, at θ heller ikke kan afhænge af ω_0 . Argumentet gælder imidlertid kun i den klassiske grænse. Det bygger på en opsplitning af oscillatoren i dens

bestanddele, f.eks. en kondensator og en spole. En kvantemekanisk oscillator udgør en enhed, som er underlagt Heisenbergs usikkerhedsrelation

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{\hbar}{2} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right) \quad (20)$$

hvor Δp og Δq er spredningerne (standardafvigelse) af p og q . Udtrykt ved π og χ i ligning (1) fås usikkerhedsrelationen på formen

$$\Delta \pi \cdot \Delta \chi \geq \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (21)$$

I termisk ligevægt er både $\Delta \pi$ og $\Delta \chi$ givet ved spredningen $\sqrt{\theta}$ ifølge (13), d.v.s. (21) medfører, at

$$\theta \geq \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (22)$$

Ser vi nu på en masse oscillatorer med vidt forskellige frekvenser i kontakt med samme varmebad, så er det klart, at de ikke alle kan have samme værdi af støjenergien θ , for når frekvensen bliver meget stor, må θ jo også blive det ifølge (22). Kun i lavfrekvensgrænsen, hvor

$$\frac{\hbar \omega_0}{2\theta} \ll 1 \quad (23)$$

bliver de specielt kvantemekaniske træk betydningsløse, og vi kan regne med, at θ er frekvensuafhængig.

For at indse, at det virkelig forholder sig sådan, ser vi på en mængde lavfrekvente oscillatorer i samme varmebad T . Vi kan tænke på elektriske svingningskredse, med kapaciteter C_i , selvinduktioner L_i og egenfrekvenser $\omega_i = 1/\sqrt{L_i C_i}$. Ladningerne på kondensatorerne vil så have spredningskvadraterne

$$\langle q_i^2 \rangle = C_i \theta_i = C_i \theta(T, \omega_i) \quad (24)$$

På et vist tidspunkt begynder vi at klippe kondensatorerne fri fra spolerne og modstandene og tage dem ud af varmebadet. Herved fastfryses q_i på den værdi, den havde, da frigørelsen skete, men vi antager, at den energetiske virkning, som dette medfører ifølge usikkerhedsrelationen, kan negligeres. Hvis vi nu parallelforbinder alle kondensatorerne til en stor kondensator med kapaciteten

$$C_0 = \sum_{i=1}^n C_i$$

og ladningen

$$q_0 = \sum_{i=1}^n q_i$$

så vil middelen energien på den store kondensator være

$$\frac{\langle q_0^2 \rangle}{2C_0} = \frac{\langle (\sum_{i=1}^n q_i)^2 \rangle}{2 \sum_{i=1}^n C_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \langle q_i^2 \rangle}{2 \sum_{i=1}^n C_i} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \theta_i}{2 \sum_{i=1}^n C_i} \quad (25)$$

Vi har her benyttet, at de enkelte q_i er statistisk uafhængige, d.v.s.

$$\langle q_j q_k \rangle = 0 \quad \text{for } j \neq k \quad (26)$$

Nu kan den store kondensator jo sammensættes af mindre kondensatorer på så mange forskellige måder med samme resulterende kapacitet C_0 . Energien (25) må være uafhængig af småkapaciteternes størrelsesfordeling. Hvis den ikke var det, kunne vi vinde energi ved at samle kondensatoren på én måde og splitte den op igen på en anden måde og således realisere en evighedsmaskine af anden art. Udtrykket (25) kan imidlertid kun være uafhængigt af småkapaciteternes fordeling, hvis

$$\theta_i = \theta(T) \quad \text{for alle } i \quad (27)$$

d.v.s. hvis θ_i er uafhængig af egenfrekvensen ω_i af den

oscillator som kapaciteten C_i er skilt ud fra. Den sammensatte kondensator vil så have middelennergien $\frac{1}{2}\theta$ lige som alle de små kondensatorer.

Vi har herved vist et specialtilfælde af den såkaldte ligefordelingslov eller ækvipartitionsprincippet fra den klassiske statistiske mekanik. Den klassiske støjenergi θ er en universel funktion af temperaturen. Vi vil allerede nu forudskikke et resultat, som senere vil blive udledt, nemlig at

$$\theta = kT \tag{28}$$

hvor $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ er Boltzmanns konstant.

Det afgørende punkt i denne udledning af ligefordelingsloven er antagelsen om statistisk uafhængighed, ligning (26). Denne antagelse svarer til, at kondensatorerne sammensættes tilfældigt, uden hensyn til ladningsfortegnet, som antydnet på fig.3a. Der melder sig nu let følgende spørgsmål: Hvad nu hvis vi tager hensyn til ladningsfortegnene under sammensætningen, som vist på fig.3b, således at de positive plader forbindes med hinanden og de negative plader forbindes med hinanden? Den resulterende ladning på den store kondensator ville i så fald blive

$$\text{(ikke } \sum_{i=1}^n q_i \text{, men) } \sum_{i=1}^n |q_i|$$

og de enkelte led i summen ville ikke længere være ukorrelerede som i (26), da de har fælles fortegn.

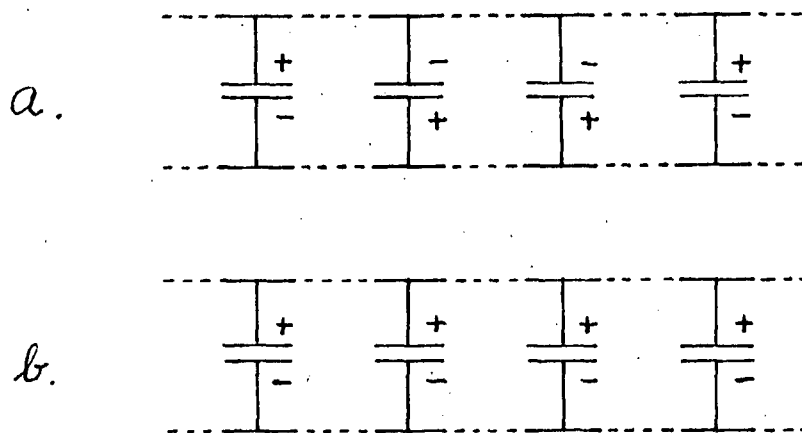


Fig.3. Parallelforbindelse af kondensatorer. a. tilfældig forbindelse. b. systematisk, fortegnbestemt forbindelse.

Hvis vi går ud fra, at (27) er rigtig, har ladningen q_i en gaussisk fordeling med middelværdien 0 og spredningskvadratet $C_i \theta$. Forventningsværdien af den numeriske ladning $|q_i|$ er så

$$\begin{aligned} \langle |q_i| \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi C_i \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} |q_i| e^{-q_i^2/2C_i \theta} dq_i \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi C_i \theta}} \int_0^{\infty} q_i e^{-q_i^2/2C_i \theta} dq_i = \sqrt{\frac{2}{\pi} C_i \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

Hvis vi nu for nemheds skyld lader alle småkondensatorerne have samme kapacitet C og sammensætter n af dem til en stor kondensator på den systematiske måde, så vil denne få middelen energien

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\sum_{i=1}^n |q_i|)^2 \rangle}{2nC} &= \frac{\sum_{i=1}^n \langle q_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle |q_i| \rangle \langle |q_j| \rangle}{2nC} \\ &= \frac{nC\theta + \frac{2}{\pi} C\theta \cdot n \cdot (n-1)}{2nC} = \frac{\theta}{2} \cdot (1 + \frac{2}{\pi} \cdot (n-1)) \end{aligned} \quad (30)$$

Altså betydelig mere, end hvis vi blot fra starten havde haft den store kondensator i ligevægt med varmebadet. Vi kan derfor få den sammensatte kondensator til at afgive en del af sin energi til et varmereservoir med højere temperatur end den, de små kondensatorer kommer fra, og dermed har vi endnu en gang lagt op til konstruktion af en evighedsmaskine af anden art!

Løsningen på dette paradox ligger i, at den systematiske sammensætning af kondensatorer kun kan foretages, hvis man har information om ladningsfortegnet. Den informationsmængde, som afgør et fifty-fifty spørgsmål kaldes en bit (af binary digit), så for at kende ladningsfortegnene på de n små kondensatorer skal vi have en information på n bits. Evighedsmaskine-axiomet (og dermed termodynamikken) kan altså kun reddes, hvis det koster energi at indsamle information. Af udtrykket (30) ser vi (for $n \gg 1$), at vi kan vinde energien θ/π pr. bit af information. Konklusionen må altså være, at det koster mindst energien θ/π at indhente én bit af information. En nøjere analyse af andre tankeeksperimenter, foretaget af L.Szilard og L.Brillouin (se f.eks. ref.III). viser, at energiomkostningen pr. bit må være mindst $\theta \cdot \ln 2$, hvilket er mere end θ/π . Energiomkostningen skyldes, at informationsoverførsel sker ved et signal, som ledsages af en fysisk energioverførsel. En parafysisk informationsoverførsel, som ikke kræver fysisk energi er åbenbart det, der skal til, hvis man vil lave en evighedsmaskine.

1.4.3. Støjens spektrum.

De statistiske egenskaber af støjen fra et lineært response system i termisk ligevægt udledes lettest på grundlag af et analogi-princip. To systemer betragtes som analoge, hvis deres responsefunktioner er identiske, og princippet siger da i al sin enkelhed, at to analoge systemer med samme temperatur har identiske støjspektre.

Vi skal ikke her gå ind i en systematisk diskussion af, hvordan en evighedsmaskine af anden art kunne konstrueres, hvis ikke analogiprincippet holdt. I stedet vil vi se på en lille opstilling, som demonstrerer forbindelsen til et andet vigtigt princip i fysikken. På fig.1 betragter vi et system med spændingsinput (A) og admittansen \hat{Y}_A , som er forbundet til system B, der har strøminput og impedansen \hat{Z}_B . Begge systemer er i termisk ligevægt med temperaturen T og står nu og sender støj til hinanden.

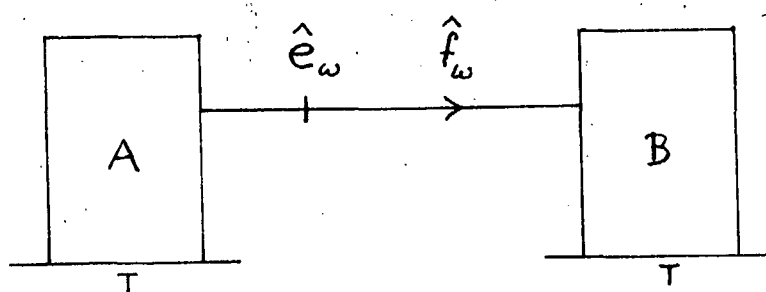


Fig.1. Forbindelse af to systemer i ligevægt ved samme temperatur.

For en bestemt frekvens ω vil signalamplituderne for strøm og spænding, \hat{f}_ω og \hat{e}_ω , kunne udtrykkes på formen

$$\begin{aligned}\hat{e}_\omega &= \hat{Z}_B(\omega) \cdot \hat{f}_\omega + \delta \hat{e}_\omega \\ \hat{f}_\omega &= -\hat{Y}_A(\omega) \cdot \hat{e}_\omega + \delta \hat{f}_\omega\end{aligned}\quad (1)$$

Selv om \hat{e}_ω og \hat{f}_ω har karakter af termisk støj, regner vi altså med, at de kan betragtes som regulære stimuli for hver sit system, og at outputtet fra hvert system kan beskrives på den sædvanlige måde som en sum af et støjbidrag og et response. Leddene $\delta \hat{e}_\omega$ og $\delta \hat{f}_\omega$ repræsenterer således støjbidragene, som ville adderes til responset, hvis de to systemer blev undersøgt hver for sig. Denne antagelse fremhæves ofte som noget helt grundlæggende i støjteorien (ref.21), men er egentlig ret banal ud fra et energibånds-synspunkt. Et reticuleret lineært system reagerer på den stimulus, det udsættes for, men kan ikke skelne, om stimulus kommer fra en termisk støjkilde eller en anden kilde.

Ved løsning af ligningssystemet (1) finder vi:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\omega &= \frac{\delta \hat{e}_\omega + \hat{Z}_B(\omega) \delta \hat{f}_\omega}{1 + \hat{Y}_A(\omega) \hat{Z}_B(\omega)} \\ \hat{f}_\omega &= \frac{-\hat{Y}_A(\omega) \delta \hat{e}_\omega + \delta \hat{f}_\omega}{1 + \hat{Y}_A(\omega) \hat{Z}_B(\omega)}\end{aligned}\quad (2)$$

Vi kan så udregne energitransporten fra A til B ved frekvensen ω (sml. 1.2.1.25):

$$\begin{aligned}w_\omega &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{e}_\omega^* \hat{f}_\omega) = \\ &= \frac{1}{2|1 + \hat{Y}_A \hat{Z}_B|^2} \operatorname{Re}(\hat{Z}_B^* |\delta \hat{f}_\omega|^2 - \hat{Y}_A |\delta \hat{e}_\omega|^2 + \delta \hat{e}_\omega^* \delta \hat{f}_\omega - \hat{Z}_B^* \delta \hat{f}_\omega^* \delta \hat{e}_\omega)\end{aligned}$$

Ensemblemiddelværdien af denne størrelse bliver, da støjbidragene $\delta \hat{e}_\omega$ og $\delta \hat{f}_\omega$ er statistisk uafhængige:

$$\langle w_\omega \rangle = \frac{\hat{Z}_{B1}(\omega) \langle |\delta \hat{f}_\omega|^2 \rangle - \hat{Y}_{A1}(\omega) \langle |\delta \hat{e}_\omega|^2 \rangle}{2|1 + \hat{Y}_A(\omega) \hat{Z}_B(\omega)|^2}\quad (3)$$

hvor \hat{Z}_{B1} og \hat{Y}_{A1} er realdelene af de to responsefunktioner.

Da de to systemer har samme temperatur, ved vi fra termodynamikken, at den samlede energitransport fra A til B må være nul. Vi vil imidlertid skærpe denne betingelse og benytte det såkaldte princip om detaljeret balance ved at kræve, at middelenergitransporten ved hver eneste frekvens skal være nul. Hvis det ikke forholdt sig sådan, d.v.s. hvis der var en nettotransport af energi ved en eller anden frekvens, så kunne vi sikkert ved at indsætte et passende afstemt filter på energibåndet få overført noget af denne energi til et arbejdsreservoir og dermed realisere en evighedsmaskine.

Vi slutter altså, at udtrykket (3) må forsvinde for enhver frekvens, d.v.s.

$$\frac{\langle |\delta \hat{f}_\omega|^2 \rangle}{\langle |\delta \hat{e}_\omega|^2 \rangle} = \frac{\hat{Y}_{A1}(\omega)}{\hat{Z}_{B1}(\omega)} \quad (4)$$

Nu er absolutkvadratet på støjampplituden for en bestemt frekvens et lidt fiktivt begreb. Hvis støjen overhovedet kan opløses på diskrete frekvenser, vil disse være så tætliggende, at "det hele flyder sammen" for en makroskopisk betragtning. Når systemerne A og B er ergodiske, vil de dissipative responsefunktioner \hat{Y}_{A1} og \hat{Z}_{B1} være kontinuerlige (næsten overalt) på frekvensaksen, d.v.s. hvis vi udvælger et tilpas lille interval $\Delta\omega$ omkring ω , vil brøkerne i (4) kunne betragtes som konstante i dette interval. Selv om der kan forekomme mange diskrete støjfrekvenser i $\Delta\omega$ -intervallet, kan middelværdien af absolutkvadratet for en enkelt af støjampplituderne repræsentere de tilsvarende bidrag fra alle de øvrige frekvenser i intervallet, og hvis vi summerer både tæller og nævner i brøken på venstresiden af (4) over frekvenserne i intervallet, får brøken samme værdi, som den havde før. Ved hjælp af definitionen 1.4.1.15 kan vi derfor omforme venstresiden af (4) til et forhold mellem støjspektre:

$$\frac{\langle |\delta \hat{f}_\omega|^2 \rangle}{\Delta\omega\text{-interval}} = \frac{\hat{\Phi}_{fA}(\omega)}{\hat{\Phi}_{eB}(\omega)} = \frac{\hat{Y}_{A1}(\omega)}{\hat{Z}_{B1}(\omega)}$$

Konsekvensen af dette må være, at støjspektret for et vilkårligt ergodisk system må være givet ved den dissipative realdel af responsefunktionen, ganget med en universel funktion af frekvens og temperaturen. Altså for et system med spændingsinput:

$$\hat{\Phi}_f(\omega) = \hat{Y}_1(\omega) \cdot U(\omega, T) \quad (18)$$

og for et system med strøminput:

$$\hat{\Phi}_e(\omega) = \hat{Z}_1(\omega) \cdot U(\omega, T) \quad (19)$$

hvor funktionen $U(\omega, T)$ er den samme for alle systemer. Vi har således nu demonstreret, hvorledes analogiprincippet følger af et andet princip, nemlig princippet om den detaljerede balance.

På grundlag af analogi-princippet er det nu en let sag at bestemme det eksakte udtryk for støjspektret. I afsnit 1.3.1. indså vi, at en black box med given responsefunktion kan simuleres med vilkårlig stor nøjagtighed ved spektralopløsning på harmoniske oscillatorer. Hvis systemet har spændingsinput, skriver vi (sml. 1.3.1.8 og 9)

$$\hat{Y}(z) = \int_0^\infty S(\omega') \hat{Y}_{\omega'}^{\text{osc}}(z) d\omega'$$

$$S(\omega') = \frac{2}{\pi} L(\omega') \hat{Y}_1(\omega') \quad (20)$$

$$\hat{Y}_{\omega'}^{\text{osc}}(z) = \frac{i}{2L(\omega')} \left\{ \frac{1}{z-\omega'} + \frac{1}{z+\omega'} \right\}$$

Vi har her generaliseret opskriften en smule, idet vi tillader oscillatorer med forskellige værdier af egenfrekvensen ω' at have forskellige værdier af x-lager kapaciteten

(selvinduktionen eller inertansen) $L(\omega')$.

I praksis må man som nævnt erstatte den kontinuerte fordeling af udæmpede oscillatorer med en diskret fordeling af svagt dæmpede oscillatorer. Dette er også en begrebsmæssig fordel, for kun i kraft af dæmpningen kan oscillatorerne komme i termisk ligevægt med varmebadet.

Der er ikke noget i vejen for, at lade oscillatorerne være symmetrisk dæmpede, så vi kan bruge teorien fra det foregående afsnit. Den enkelte oscillator med egenfrekvensen ω vil så udsende en "spektrallinje" af strømstøj, som er skarpt lokaliseret omkring egenfrekvensen, og hvis absolutkvadrat i middel er givet ved (sml. 1.4.2.13)

$$\langle |\hat{f}_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \left(\frac{P}{L} \right)^2 \rangle = \frac{1}{2L(\omega)} \theta(\omega, T) \quad (21)$$

hvor $\theta(\omega, T)$ er oscillatorens termiske energi. Faktoren $\frac{1}{2}$ skyldes, at den reelle strømstøj $\frac{P}{L}$ også indeholder et bidrag fra spektrallinjen $-\omega$:

$$\frac{P}{L} = \hat{f}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{f}_\omega^* e^{i\omega t}$$

Støjspektret $\hat{\Phi}_f(\omega)$ fås nu ved at summere bidragene fra spektrallinjerne inden for et $\Delta\omega$ -interval (sml. 1.4.1.15)

$$\int_{\Delta\omega\text{-interval}} \langle |\hat{f}_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_f(\omega) \Delta\omega = \frac{\theta(\omega, T)}{2L(\omega)} S(\omega) \Delta\omega \quad (22)$$

Ved at benytte udtrykket for $S(\omega)$ i (20) finder vi så endelig frem til fluktuations-dissipations (F.D.) teoremet:

$$\hat{\Phi}_f(\omega) = \frac{2}{\pi} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \theta(\omega, T) \quad (23)$$

og med den duale formulering for et system med strøminput:

$$\hat{\Phi}_e(\omega) = \frac{2}{\pi} \hat{Z}_1(\omega) \theta(\omega, T) \quad (24)$$

I Callen's og Welton's oprindelige udledning af F.D.teoremet fra 1950 (ref.22) benyttedes kvantemekanisk perturbationsregning, og udtrykket $\theta(\omega, T)$ blev givet ved det kvantemekaniske udtryk for oscillatorens termiske energi:

$$\theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} + \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (25)$$

Vi skal senere vende tilbage til dette udtryk og specielt diskutere de problemer, som opstår ved at medtage leddet $\frac{1}{2} \hbar\omega$, som er oscillatorens nulpunktsenergi.

I den klassiske grænse, hvor $kT \gg \hbar\omega$ (sml. 1.4.2.22 og 28) udarter (25) til det frekvensuafhængige udtryk

$$\theta = kT \quad (26)$$

Vi har allerede i foregående afsnit indset, at oscillatorenergien må være frekvensuafhængig i den klassiske grænse. Det endelige bevis for (26), som kan formuleres uden kvantemekanik, udsættes lidt endnu.

1.4.4. Tidslig beskrivelse af klassisk støj.

Vi vil nu indtil videre forudsætte, at systemet kan beskrives klassisk, d.v.s. at betingelsen

$$kT \gg h\omega \quad (1)$$

er opfyldt for alle relevante frekvenser. Vi ved da, at oscillatorenergien θ i F.D.teoremet 1.4.3.23 og 24 er frekvensuafhængig, d.v.s. støjspektret udviser en simpel proportionalitet med den dissipative realdel af responsefunktionen. Specielt finder vi for en x-læk R ($\hat{Z}_1 = R$):

$$\hat{\Phi}_e(\omega) = \frac{2}{\pi} R\theta \quad (2)$$

D.v.s. spændingsstøjen fra en ohmsk modstand er hvid, idet den er jævnt fordelt over alle frekvenser. Dette specialtilfælde af F.D.teoremet blev publiceret af Nyqvist allerede i 1928. Sædvanligvis formuleres Nyqvist's teorem ved hjælp af den rigtige frekvens ν , som hænger sammen med den cykliske frekvens ω ved relationen

$$\omega = 2\pi\nu \quad (3)$$

Spektret udtrykt ved ν -variablen er så givet ved

$$\hat{P}_e(\nu)d\nu = \hat{\Phi}_e(\omega)d\omega \quad (4)$$

Vi får da af (2) med $\theta = kT$:

$$\hat{P}_e(\nu) = 4RkT \quad (5)$$

som er den mest gængse formulering af Nyqvist's teorem.

For en vilkårlig frekvensafhængighed af den dissipative

responsefunktion kan vi i den klassiske grænse udtrykke den tidslige autokorrelation af støjen på en yderst simpel måde. Af Wiener-Khinchin teoremet 1.4.1.16 og F.D. teoremet 1.4.3.23 fås:

$$\Phi_f(\tau) = \frac{2\theta}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega$$

En sammeligning med cosinusformlen 1.2.3.27 viser så, at autokorrelationen af strømstøjen for et system med spændingsinput er lig med oscillatorenergien θ ganget med den tidsafhængige lethedsfunktion:

$$\Phi_f(\tau) = \theta \cdot F(|\tau|) \quad (6)$$

og tilsvarende, for et system med strøminput:

$$\Phi_e(\tau) = \theta \cdot G(|\tau|) \quad (7)$$

Disse to formler er nok de mest anvendelige udtryk for F.D.teoremet i den klassiske grænse. Som et specialtilfælde af (7) finder vi for en ohmsk komstand R:

$$\Phi_e(\tau) = \theta \cdot 2R\delta(\tau) \quad (8)$$

Vi ser altså, at hvid spændingsstøj har den specielle egenskab, at værdierne af den til to forskellige tidspunkter er statistisk uafhængige, og at det øjeblikkelige fluktuationskvadrat $\Phi_e(0) = \langle \delta e^2 \rangle$ er uendeligt. Strengt taget kan man altså ikke tilskrive støjen fra et passivt system en værdi til et bestemt tidspunkt; jo mere vi prøver at lokalisere støjen i tid, jo større værdier finder vi. Hvis vi derimod har en vis begrænset opløsningsevne Δt på tidsskalaen, kan vi erstatte deltafunktionen i (8) med den "grovkornede" deltafunktion (se fig.1)

$$\frac{1}{\delta(\tau)} \Delta t = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} |\Delta t - \tau| & \text{for } |\tau| < \Delta t \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

tionskvadrat, finder vi

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\tau_B \Delta t}{2} \cdot \frac{2R\theta}{\Delta t} = \theta \cdot m \quad (14)$$

D.v.s. middelværdien af partiklens kinetiske energi i termisk ligevægt bliver

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \theta \quad (15)$$

Vi ser altså, at alle Brownske partikler, uanset masse og gnidningsmodstand har samme kinetiske energi (i middel) ved samme temperatur, hvilket er ligefordelingsloven fra den klassiske statistiske mekanik. Nu har vi kun regnet på en enkelt af impulsens tre komponenter; den samlede kinetiske energi bliver

$$U_{N,\theta} = \frac{3}{2} N\theta \quad (16)$$

Ifølge den klassiske termodynamik er energien af en ideel gas af N punktpartikler givet ved

$$U_{N,T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T \quad (17)$$

hvor R er gaskonstanten og N_A er Avogadros tal. Vi finder da ved sammenligning af (16) og (17) en bekræftelse af den tidligere fremsatte påstand

$$\theta = \frac{R}{N_A} T = kT \quad (18)$$

idet Boltzmanns konstant k er defineret ved forholdet R/N_A .

Ligning (10), som er en speciel version af den såkaldte Langevin-ligning, viser, at korrelationen af hastighederne $v(t)$ og $v(t+\Delta t)$ er givet ved

$$\langle v(t+\Delta t)v(t) \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_B}\right) = \frac{\theta}{m} \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_B}\right)$$

Hvis tidsafstanden er n skridt, fås:

$$\langle v(t+n\Delta t)v(t) \rangle = \frac{\theta}{m} \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_B}\right)^n \quad (19)$$

Vi vil nu lade skridtlængden gå mod nul og samtidig n mod uendelig, således at

$$n \cdot \Delta t = \tau$$

For et fast τ finder vi i grænsen

$$\begin{aligned} \langle v(t+\tau)v(t) \rangle &= \frac{\theta}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\tau}{n\tau_B}\right)^n \\ &= \frac{\theta}{m} e^{-\tau/\tau_B} \end{aligned} \quad (20)$$

Vi har derved genopdaget det tidsafhængige F.D.teorem (6), idet venstresiden i (20) er autokorrelationen af strømstøjen, og højresiden er θ gange lethedsfunktionen for Brown elementet. Det bekræftes herved, at Nyqvist's teorem på formen (9) anvendt på lækkene i en fuldt reticuleret model medfører de mere generelt udseende F.D.teoremer. Inden for eb-spillet's vide rammer kan hele den klassiske statistiske mekanik plus dens endnu ret ukendte udvidelser til ikke-ligevægtsfænomener genereres med et simpelt axiom, som allerede i ref.I blev fremsat som et tillæg til lækaxiomet:

En strømlæk er en spændingskilde for Nyqvist-støj og en spændingslæk er en strømkilde for Nyqvist-støj.

Den statistiske fordeling af Nyqvist støjen hvis fluktuationskvadrat er givet ved (9), må nødvendigvis være gausisk. Dette hænger sammen med skalainvariansen af lækelementerne og den hertil svarende uendelige delelighed af tidsintervallet Δt i den klassiske beskrivelse. Vi kan opdele Δt i N lige store intervaller, hvor N er et vilkårligt stort tal:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_N \quad (21)$$

Den af lækstøjen frembragte ændring af den cykliske output-level p ($= \int \delta e dt$) er så

$$\delta p = \delta p_1 + \delta p_2 + \dots + \delta p_N \quad (22)$$

hvor

$$\delta p = \overline{\delta e}^{\Delta t} \cdot \Delta t \quad (23)$$

$$\delta p_i = \overline{\delta e}^{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i \quad \text{for } 1 \leq i \leq N \quad (24)$$

På grund af tidshomogeniteten må alle bidragene δp_i have samme sandsynlighedsfordeling, og på grund af skalainvariansen må fordelingen for δp afhænge af Δt på samme måde som fordelingen for δp_i afhænger af $\Delta t_i = \Delta t/N$. Ifølge den såkaldte "centrale grænsesætning" fra sandsynlighedsregningen (ref. 18 og 19) vil fordelingen af sumvariablen δp i (22) være gaussisk i grænsen $N \rightarrow \infty$, uanset fordelingen for δp_i , når blot $\langle \delta p_i^2 \rangle$ er endelig. Da N kan gøres vilkårligt stor, må δp være gaussisk fordelt, og fordelingen af δp_i erne må også være gaussisk, uanset værdien af N .

En særlig egenskab ved den gaussiske fordeling er, at spredningskvadratet for en sum af statistisk uafhængige variable er summen af de enkelte variables spredningskvadrater. D.v.s.

$$\langle \delta p^2 \rangle = N \cdot \langle \delta p_i^2 \rangle \quad (25)$$

Det følger heraf, at $\langle \delta p^2 \rangle$ må være proportional med længden af tidsintervallet Δt

$$\langle \delta p^2 \rangle \propto \Delta t \quad (26)$$

og dermed, ifølge (23)

$$\langle (\overline{\delta e}^{\Delta t})^2 \rangle \propto \frac{1}{\Delta t} \quad (27)$$

Vi ser altså, at $1/\Delta t$ afhængigheden af lækstøjens fluktuation kvadrat (eller spektrets hvidhed), såvel som den gaussiske fordeling kan begrundes i helt almene betragtninger over tidshomogenitet og skalainvarians, som karakteriserer den klassiske fysik. Skalainvariansen skyldes jo, at der ikke alene ud fra en lækparameter og en temperatur (eller en energi θ) kan defineres en karakteristisk tid. I det øjeblik kvantemekanikken dukker frem på arenaen, medbringende det universelle virkningskvantum, Planck's konstant h , vil der være en karakteristisk tid

$$\tau_0 = \frac{h}{kT} \quad (28)$$

Vi må derfor regne med, at de klassiske skalainvariansbetragtninger kun gælder for $\Delta t \gg \tau_0$. Tilsvarende gælder, at spektret af Nyqvist-støjen kun er hvidt for $\omega \ll kT/h$, i det frekvensområde, hvor oscillatorenergien $\theta(\omega, T)$ i ligning 1.4.3.25 er uafhængig af frekvensen.

Den klassiske diskussion, som her er ført på grundlag af Langevin-ligningen (10) for Brown-elementet kan let generaliseres til et lineært, ergodisk system med flere level variable (både x- og o-) og flere lække. x-samlere i fig. 2 skal så i almindelighed erstattes med et skeletdiagram med samlere, transducere og gyratorer, hvis input-output forhold beskrives ved en lineær matrix-ligning. Lineariteten af den til (10) svarende vektor-matrix ligning sikrer, at ligefordelingsloven og den gaussiske fordeling af level variablene og de tids-udglattede rate variable vil gælde, som for Brown-elementet.

Når systemet ikke udsættes for stimuli, vil det efter en vis tid komme i termisk ligevægt. En vilkårlig level-variabel L_i , hørende til et lager med kapaciteten K_i vil så have den stationære gaussiske fordeling

$$\rho(L_i) = (2\pi K_i \theta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta L_i^2 / (2K_i \theta)} \quad (29)$$

hvor $\delta L_i = L_i - L_i^0$ er afvigelsen fra ligevægtsværdien. Når reticulationen er ført til bunds, således at der kun forekommer simple lagre (ingen multiport lagre) kan systemets energifunktion skrives som en sum af kvadratiske led uden krydsprodukter:

$$E(\{L_i\}) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta L_i^2}{2K_i} + E(\{L_i^0\}) \quad (30)$$

De forskellige level variable er så i ligevægt statistisk uafhængige (forudsat, at de er dynamisk uafhængige), og den kombinerede sandsynlighedstæthed for samtlige levels er produktet af de individuelle fordelinger (29). Vi finder da Gibbs' kanoniske fordelingslov

$$\rho(\{L_i\}) = \text{konst} * e^{-E(\{L_i\})/\theta} \quad (31)$$

I den statistiske termodynamik (ref III) vises (31) at være det almene udtryk for ligevægtsfordelingen i den klassiske grænse ($\theta=kT$), også for ikke-lineære systemer. Den gaussiske fordelingslov gælder kun strengt i den lineære grænse, d.v.s. når energifunktionen er kvadratisk i L_i erne. For makroskopiske systemer vil de termiske fluktuationer dog i reglen være så små, at en kvadratisk rækkeudvikling af energifunktionen ud fra minimumsværdien $E(\{L_i^0\})$ (ligevægtsværdien) vil være gyldig. Vi kan altså regne med, at den relative spredning af L_i i ligevægt er givet ved

$$\frac{\langle \delta L_i^2 \rangle}{L_i^0} = \frac{\sqrt{K_i \theta}}{L_i} \quad (32)$$

Da level variablene L_i kan betragtes som ekstensive (ref. I, axiom 2) vil en størrelsestransformation med en faktor

λ betyde, at alle L_i og alle K_i scales op med den samme faktor λ . Vi ser da af (32), at den relative spredning vil gå som $\lambda^{-1/2}$, d.v.s. i den termodynamiske grænse $\lambda \rightarrow \infty$ bliver den relative usikkerhed forsvindende lille, og den gaussiske fordeling bliver eksakt. Argumentet holder dog ikke i nærheden af faseovergange, hvor enkelte af K_i går mod uendelig, og hvor fluktuationerne af de tilsvarende levels må beskrives ved andre scaling-love.

1.4.5. Breddefunktion og selvdiffusion.

De tidsafhængige korrelationslove 1.4.4.6 og 7 for output rate-variablen for et ergodisk system i ligevægt kan let omformes til udsagn om fluktuationerne af den cykliske output-level i stimulus-response porten.

På fig.1 betragtes et system med spændingsinput og lethedsfunktionen F . Input spændingen er sat til 0, således at systemet er i ligevægt og output strømmen f er et rent støjbidrag

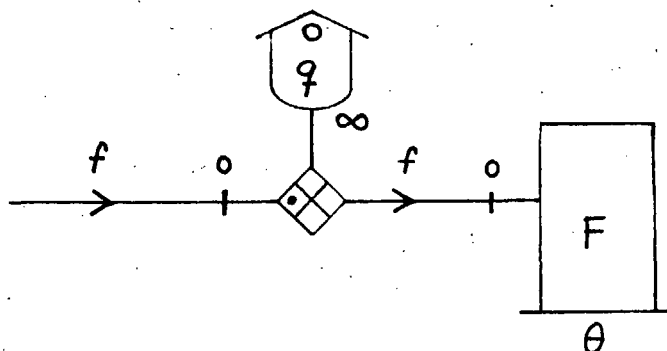


Fig.1. System med lethedsfunktionen F i termisk ligevægt med støjenergien $\theta = kT$.

Vi definerer den såkaldte breddefunktion $\Gamma(t)$ som spredningskvadratet på afvigelsen af den cykliske level q til tiden t fra dens værdi kl.0:

$$\Gamma(t) = \langle (q(t) - q(0))^2 \rangle \quad (1)$$

Breddefunktionen kan så udtrykkes ved autokorrelationen af strømstøjen:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= \langle (q(t) - q(0)) \cdot (q(t) - q(0)) \rangle \\
 &= \langle \left\{ \int_0^t f(t') dt' \right\} \left\{ \int_0^t f(t'') dt'' \right\} \rangle \\
 &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle f(t') f(t'') \rangle \\
 &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \phi_f(t' - t'') \quad (2)
 \end{aligned}$$

Vi indfører nu et par nye integrationsvariable:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau &= t' - t'' \\
 T &= t' + t''
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

På fig 2 vises integrationsområdet i (2) set i forhold til det nye og det gamle koordinatsæt

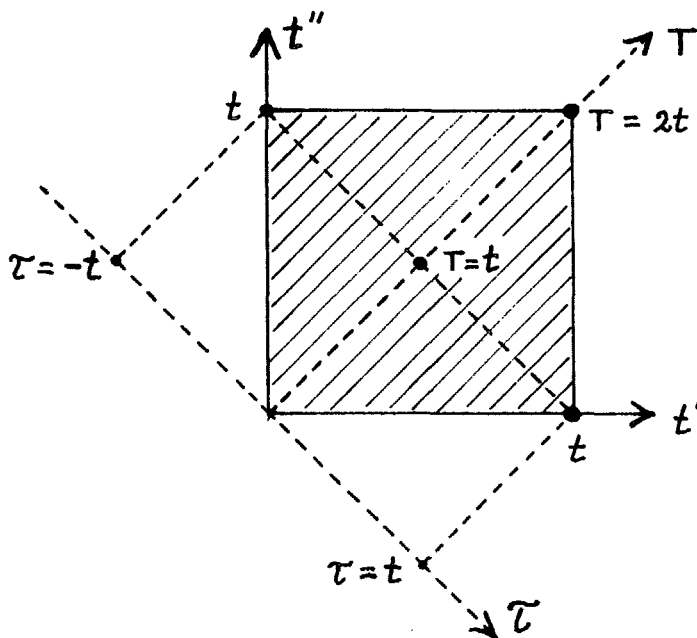


Fig.2. Integrationsområde (skraveret) og variable i (2).

Ved betragtning af fig.2. ser vi, at længdeenheden på T og τ akserne er en faktor $1/\sqrt{2}$ mindre end længdeenheden på t' og t'' akserne. D.v.s. arealelementet i de nye koordinater $d\tau dT$ skal divideres med en faktor 2 for at svare til areal-

elementet $dt'dt''$ i de gamle koordinater. Vi kan derfor omskrive (2) på følgende måde

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \phi_f(t'-t'') \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t dT \int_{-T}^T \phi_f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^{2t} dT \int_{T-2t}^{2t-T} \phi_f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Vi indsætter nu udtrykket 1.4.4.6 for $\phi_f(\tau)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \frac{\theta}{2} \int_0^t dT \int_{-T}^T F(|\tau|) d\tau + \frac{\theta}{2} \int_t^{2t} dT \int_{T-2t}^{2t-T} F(|\tau|) d\tau \\ &= \theta \int_0^{|t|} dT \int_0^T F(\tau) d\tau + \theta \int_{|t|}^{2|t|} dT \int_0^{2|t|-T} F(\tau) d\tau \\ &= \theta \int_0^{|t|} Y(T) dT + \theta \int_{|t|}^{2|t|} Y(2|t| - T) dT\end{aligned}\quad (4)$$

Ved at udføre substitutionen $T' = 2|t| - T$ i det sidste integral i (4), ser vi, at de to integraler har samme værdi, og resultatet bliver

$$\Gamma(t) = 2\theta \cdot J(|t|)\quad (5)$$

Vi ser altså, at der for alle ergodiske, lineære systemer med spændingsinput i den klassiske grænse vil være en simpel proportionalitet mellem breddefunktionen $\Gamma(t)$ og føjeheds- eller krybefunktionen $J(t)$. Hvis krybefunktionen er uegentlig, vil den have en diskontinuitet eller i det mindste en lodret tangent ($J'(0) = \infty$) for $t=0$, og der kan så forekomme afvigelser for små tider, som afspejler en kausal konflikt, men udtrykket (5) vil stadig være asymptotisk gyldigt.

I mange anvendelser af F.D.teoremet på formen (5) vil le-vel variabelen q være én af de tre positionskoordinater for en "prøvepartikel" opslemmet i en væske. Hvis væsken er

isotrop, vil den samlede breddefunktion være

$$\Gamma_3(t) = \langle (\vec{r}(t) - \vec{r}(0))^2 \rangle = 3\Gamma(t) = 6\theta J(|t|) \quad (6)$$

En hyppigt anvendt approximation for kugleformede partikler i en væske bygger på Stokes' lov, som tilskriver partiklen bevægeligheden β , givet ved

$$\beta = \frac{1}{6\pi\eta a} \quad (7)$$

hvor η er shear viscositeten for væsken og a er kuglens radius. D.v.s. systemet beskrives som en o-læk, og breddefunktionen er (for $t > 0$) givet ved

$$\Gamma(t) = 2\theta\beta t \quad (8)$$

Sandsynlighedsfordelingen for partiklens position, betinget af, at den ligger i nulpunktet kl. 0 er så den tredimensionale gaussiske fordeling med et spredningskvadrat, der vokser lineært med tiden:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= (2\pi\Gamma(t))^{-3/2} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2\Gamma(t)} \\ &= (4\pi\theta\beta t)^{-3/2} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\theta\beta t)} \end{aligned} \quad (9)$$

Udtrykket (9) er en løsning til diffusionsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 \rho \quad (10)$$

hvor $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ er Laplace operatoren, og

D er diffusionskonstanten, givet ved

$$D = \theta \cdot \beta \quad (11)$$

Ligning (8) kan altså udtrykkes på formen

$$\Gamma(t) \stackrel{!}{=} 2Dt \quad (12)$$

Diffusionsligningen, som beskriver udbredelsen af en sky af kolloide partikler i en væske, og udtrykket (12), som repræsenterer den specielle gaussiske løsning, som er en deltafunktion for $t=0$, var kendt længe før F.D.teoremet. Sammenhængen (11) mellem diffusionskonstanten og bevægeligheden af den enkelte partikel blev først formuleret af Einstein i 1905 og er det historisk første udtryk for F.D. teoremet. Relationen blev eftervist eksperimentelt af Perrin. I årene efter Einsteins diskussion blev en del andre specielle situationer undersøgt (ref.23). Den mest benyttede metode var opstilling af Langevin ligninger, d.v.s. bevægelsesligninger, hvor støjen introduceres i form af en "tilfældig kraft". Med den semiotiske definition af responsefunktioner, som her er benyttet, og den almindelige sammenhæng mellem breddefunktion og krybefunktion (5) kan det statistiske problem altid føres over i et responseproblem, og diskussionen simplificeres betydeligt.

Den simpleste generalisation af Einsteins resultat fås ved at tage hensyn til trægheden af de Brownske partikler. Dette gøres ved at erstatte spændingslækken β med et Brown element, fig.1.4.4.2 med $R = 1/\beta$. Lethedsfunktionen for Brown elementet er (sml. 1.2.5.10)

$$F(t) = \frac{1}{m} e^{-t/\beta m} = \frac{1}{m} e^{-t/\tau_B}$$

Ved to gange integration af dette udtryk findes

$$J(t) = \beta \cdot t - \beta^2 m (1 - e^{-t/\tau_B}) \quad (13)$$

For $t \gg \tau_B$ finder vi som før, at breddefunktionen vokser lineært med tiden, men for $t \ll \tau_B$ er tidsafhængigheden kvadratisk, og partiklen virker, som om den var fri.

$$\Gamma(t) \approx \begin{cases} \frac{\theta}{m} t^2 & \text{for } t \ll \tau_B \\ 2\theta\beta(t-\tau_B) & \text{for } t \gg \tau_B \end{cases} \quad (14)$$

Det første af disse to asymptotiske udtryk, med $\theta=kT$, kan i øvrigt vises at gælde også i kvantemekanikken.

Den tilfældige bevægelse af en atomar partikel beskrives ofte via den såkaldte van Hove selvkorrelations- eller selvdiffusionsfunktion $G_s(\vec{r}, t)$. I den klassiske grænse er $G_s(\vec{r}, t)$ en sandsynlighedstæthed for partiklens bevægelse, svarende til funktionen $\rho(\vec{r}, t)$ i ligning (9). For et bestemt system i et ensemble vil partiklens stedvektor kl.t have en bestemt værdi $\vec{R}(t)$ og "sandsynlighedstætheden" er en deltafunktion $\delta(\vec{r} - (\vec{R}(t) - \vec{R}(0)))$. D.v.s. $G_s(\vec{r}, t)$ kan defineres ved ensemblemiddelværdien

$$G_s(\vec{r}, t) = \langle \delta(\vec{r} - (\vec{R}(t) - \vec{R}(0))) \rangle = \rho(\vec{r}, t) \quad (15)$$

For et rumligt kontinuert og isotropt lineært system må vi regne med en gaussisk sandsynlighedstæthed, og vi kan da udtrykke G_s ved breddefunktionen $\Gamma(t)$ på samme måde som i (9):

$$G_s(\vec{r}, t) = [2\pi\Gamma(t)]^{-\frac{1}{2}} e^{-r^2/2\Gamma(t)} \quad (16)$$

Den rumligt (men ikke tidsligt) Fouriertransformerede af selvdiffusionsfunktionen $G_s(\vec{r}, t)$ kaldes den intermediære spredningsfunktion $I_s(\vec{k}, t)$. Af definitionen (15) fås:

$$\begin{aligned} I_s(\vec{k}, t) &= \int d\vec{r} \langle \delta(\vec{r} - (\vec{R}(t) - \vec{R}(0))) \rangle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}(0)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Skrevet på denne måde kan definitionen af $I_s(\vec{k}, t)$ overfø-

res direkte til kvantemekanikken, hvor funktionen bruges til udregning af det inkoherente spredningstværsnit for en bølge (lys, γ -stråling eller neutroner) med bølgevektoren $\vec{\kappa}$. I den klassiske grænse, hvor G_s er den gaussiske fordeling (16), finder vi ved Fouriertransformation af (16):

$$I_s(\vec{\kappa}, t) = e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 \Gamma(t)} \quad (18)$$

Ved tidslig Fouriertransformation af den intermediære spredningsfunktion $I_s(\vec{\kappa}, t)$ defineres den såkaldte strukturfunktion $S_s(\vec{\kappa}, \omega)$, som er et direkte udtryk for det inkoherente spredningstværsnit (ref.24).

$$S_s(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_s(\vec{\kappa}, t) e^{i\omega t} dt \quad (19)$$

Af det gaussiske udtryk (18) fås for små værdier af κ : (på grund af isotropien kan vi stryge vektorstregen og nøjes med at angive den numeriske værdi $\kappa = |\vec{\kappa}|$)

$$I_s(\kappa, t) \approx 1 - \frac{1}{2} \kappa^2 \Gamma(t)$$

d.v.s. (19) bliver i samme grænse

$$S_s(\kappa, \omega) \approx \delta(\omega) - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{F}\{\Gamma(t), \omega\} \quad (20)$$

Vi benytter nu F.D.teorem (5) og får

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\{\Gamma(t), \omega\} &= \frac{\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{\theta}{\pi} [\mathbf{L}\{J(t), -i\omega\} + \mathbf{L}\{J(t), i\omega\}] \\ &= \frac{\theta}{\pi} \left[\frac{\tilde{J}(-i\omega)}{-i\omega} + \frac{\tilde{J}(i\omega)}{i\omega} \right] \\ &= -\frac{\theta}{\pi} \left[\frac{\hat{Y}(\omega)}{\omega^2} + \frac{\hat{Y}(-\omega)}{\omega^2} \right] = -\frac{2\theta}{\pi} \hat{Y}_1(\omega) \quad (21) \end{aligned}$$

For en endelig værdi af ω kan vi se bort fra deltafunktionen i (20), og vi finder da:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{\kappa^2} S_s(\kappa, \omega) = \frac{\theta}{\pi} \hat{Y}_1(\omega) \quad (22)$$

D.v.s. i den klassiske grænse, hvor strukturfunktionen $S_s(\kappa, \omega)$ er reel og en lige funktion af frekvensen vil det inkoherente neutronsprengningstværsnit for små bølgevektorer kunne bruges til at bestemme den atomare (molekylære) responsefunktion. Vi kan også bruge F.D.teoremet 1.4.3.23 den modsatte vej sammen med Wiener-Khinchin teoremet 1.4.1.17 og udtrykke sammenhængen med autokorrelationsfunktionen for hastigheden $v(t)$ af den atomare partikel:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{\kappa^2} S_s(\kappa, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \langle v(t)v(t+\tau) \rangle \cos \omega \tau d\tau \quad (23)$$

Denne relation, som er udledt af Egelstaff (1967), vil også gælde i kvantemekanikken, når man på venstresiden nøjes med den lige del af funktionen $S_s(\omega)$. Grænseovergangen i (22) og (23) er dog ret vanskelig at udføre præcist (ref.25), og i almindelighed må man uddrage informationen numerisk af de ligninger, som definerer strukturfunktionen, d.v.s. i den klassiske grænse (18) og (19).

Til bestemmelse af væskers viscoelastiske egenskaber i den lavfrekvente grænse er andre metoder mere velegnede end neutronsprengningen. Det blev således vist teoretisk af Singwi og Sjölander (ref.26), at Mössbauereffekten giver ret direkte information om breddefunktionen. Responsefunktionerne og fluktuationsegenskaberne af en atomar partikel vil afspejle de makroskopiske viscoelastiske egenskaber af det stof, partiklen indgår i, og den molekylære dynamik peger ud over sig selv ved at bidrage til forståelse af de materialeegenskaber, som har teknologisk relevans. Det er denne forbindelse i mikro-makro dimensionen, som har været et af de vigtigste udgangspunkter for nærværende fremstilling af responseteorien i forbindelse med

den eksperimentelle forskning, der for tiden finder sted på RUC.

Ud over det, at den atomare partikel afspejler makroegenskaberne ved at deltage i den kollektive bevægelse af det omgivende stof, må vi regne med, at den har sin egen individuelt diffusive bevægelse. Hvis vi bestemmer admittansfunktionen \tilde{Y}_a for en atomar partikel ved at gribe fat i den med en kraft og måle dens hastighed, får vi et blandet udtryk for de kollektive og de individuelle aspekter og for de kontinuerte og diskrete stofegenskaber.

For at få en grov reticulation af problemstillingen kan vi beskrive den resulterende kraft på partiklen som en differens mellem den udefra pålagte kraft og en viscoelastisk responsekraft fra det omgivende medium. Denne konservative relation mellem kræfterne beskrives ved en x -sampler, hvis distributive strømvariabel er partiklens faktiske hastighed v_p . Denne kan så opløses i en individuel, diffusiv hastighed v_d og en kollektiv hastighed v_k . Vi kan forestille os partiklerne indgående i et mere eller mindre regelmæssigt "krystalgitter", således at v_k beskriver den kontinuerte bevægelse af et gitterpunkt og v_d den springvise bevægelse af partiklen i forhold til gitteret.

Vi skal i kapitel 3 se, at det kollektive response kan bestemmes med tilnærmelse ud fra de makroskopiske (hydrodynamiske) bevægelsesligninger, når man tilføjer et kildeled, som beskriver en impulsoverførsel til systemet over et område af atomar udstrækning. Den således bestemte responsefunktion \tilde{Y}_k medtager imidlertid ikke den diffusive springbevægelse på samme direkte måde som den rigtige atomare responsefunktion \tilde{Y}_a , hvilken fremgår af grovreticulationen fig.3, hvor de to forskellige porte hørende til \tilde{Y}_a og \tilde{Y}_k er angivet. Det er naturligvis alt for simpelt at beskrive den individuelle bevægelighed \tilde{Y}_i og den kollektive modstand \tilde{Z}_k ved to uafhængige sorte kasser, som vist

på figuren. Det ville være mere rigtigt at slå de to kasser sammen til en toport kasse med en overføringsfunktion \tilde{H} (sml. afsnit 1.2.5). De kvalitative resultater i den statiske grænse (for frekvensen nul) ændres imidlertid ikke af overføringsfunktionen, så vi udelader den i denne omgang.

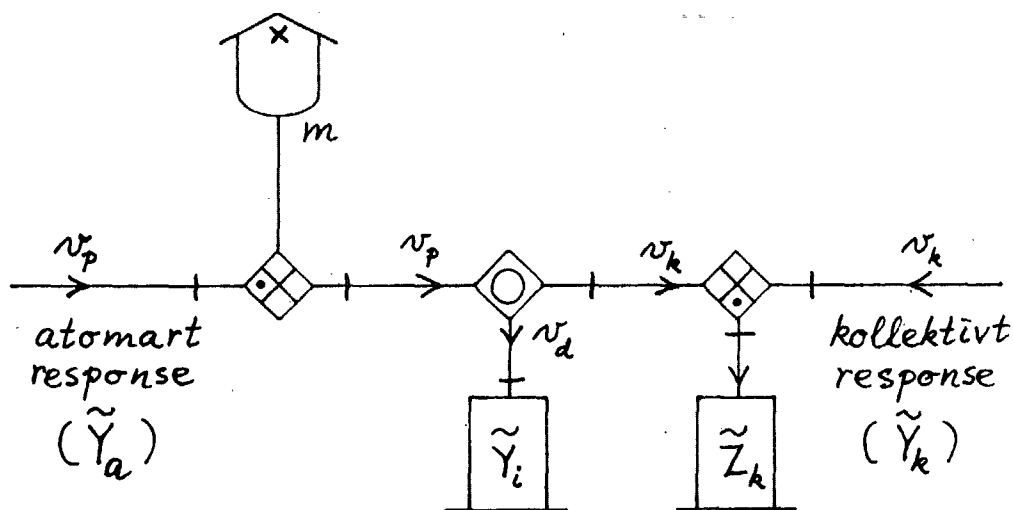


Fig.3. Grovreticulation af den atomare og kollektive responsesituation.

Ved at se bort fra den kollektive port finder vi af fig.3 den atomare admittans:

$$\tilde{Y}_a = \frac{1}{ms + \frac{1}{\tilde{Y}_i + \frac{1}{\tilde{Z}_k}}} \quad (26)$$

hvor m er massen af den atomare partikel. Tilsvarende finder vi den kollektive admittans ved at se bort fra den atomare port

$$\tilde{Y}_k = \frac{1}{\tilde{Z}_k + \frac{1}{\tilde{Y}_i + \frac{1}{ms}}} \quad (27)$$

Det ses, at de to responsefunktioner er forskellige. Spe-

cielt findes i den statiske grænse, for frekvensen nul:

$$\tilde{Y}_a(0) = \tilde{Y}_i(0) + \frac{1}{\tilde{Z}_k(0)} ; \quad \tilde{Y}_k(0) = \frac{1}{\tilde{Z}_k(0)} \quad (26)$$

Den makroskopiske opdeling af stofferne i flydende og faste afspejler opførselen af den kollektive impedans \tilde{Z}_k i lavfrekvensgrænsen. Værdien $\tilde{Z}_k(0)$ er endelig for væsker, men uendelig for faste stoffer. Vi ser da af (26), at den atomare bevægelighed $\tilde{Y}_a(0)$ kan have en endelig værdi, selv om stoffet er fast. Den individuelle atomare diffusionskonstant, som hænger sammen med bevægeligheden ved Einstein relationen (11):

$$D_i = \theta \cdot \tilde{Y}_i(0) \quad (27)$$

er en rent mikroskopisk parameter, som ikke giver nogen kvalitativ information om stoffets makroegenskaber.

En simpel model for faste stoffer fås ved at udelade admittansen \tilde{Y}_i og for \tilde{Z}_k indsætte et Voigt element

$$\tilde{Z}_k(s) = \frac{m\omega_E^2}{s} + R \quad (28)$$

Tilsammen udgør x-lageret i fig.3 og o-lageret i Voigt elementet en såkaldt Einstein oscillator med egenfrekvensen ω_E (d.v.s. stivheden af o-lageret er $m\omega_E^2$). Den udartede dæmpning, som skyldes lækken R antages at være svag, således at den atomare krybefunktion for små tider er som for den udæmpede oscillator

$$J_a(t) \approx \frac{1}{m\omega_E^2} (1 - \cos\omega_E t) \quad (29)$$

Dæmpningen vil imidlertid bevirke, at oscillationerne i (29) dør ud for store tider, således at kun det konstante led bliver tilbage. Den atomare admittans er jo givet ved (24) og (28) med $\tilde{Y}_i=0$, d.v.s.

$$\tilde{Y}_a(s) = \frac{s}{m(\omega_E^2 + s^2) + Rs} \quad (30)$$

og den Laplace transformerede af $J_a(t)$ er derfor

$$\mathbf{L}\{J_a(t), s\} = \frac{\tilde{Y}_a(s)}{s^2} = \frac{1}{s[m(\omega_E^2 + s^2) + Rs]} \quad (31)$$

Denne funktion har en pol i nulpunktet og to poler i venstre halvplan. For store tider er det kun polen i nulpunktet, som giver et bidrag til $J_a(t)$ lig med residuet af funktionen (31), altså

$$J_a(\infty) = \frac{1}{m\omega_E^2} \quad (32)$$

Af F.D.teoremet (5) og udtrykket (18) ser vi så, at den intermediære spredningsfunktion også vil have en endelig grænseværdi for $t \rightarrow \infty$.

Denne konstante værdi definerer den såkaldte f-faktor og Debye-Waller faktoren W på følgende måde:

$$f = e^{-2W} = I_s(\kappa, \infty) = e^{-\frac{1}{2}\kappa^2\Gamma(\infty)} \quad (33)$$

Med den ovenfor benyttede Einstein model har vi altså følgende udtryk for Debye-Waller faktoren

$$W = \frac{1}{4} \kappa^2 \Gamma(\infty) = \frac{\kappa^2 \theta}{2m\omega_E^2} \quad (34)$$

Den fysiske betydning af W fremgår af følgende betragtning: Oscillatorens middel-potentielle energi i termisk ligevægt er

$$\frac{1}{2}m\omega_E^2 \langle x_{\max}^2 \rangle = \frac{1}{2}\theta$$

hvor x_{\max} er amplituden af partiklens svingende bevægelse. Middelværdien af kvadratet på det faktiske udsving $x(t)$ er jo for en harmonisk svingning halvdelen af amplitudekvadratet, d.v.s.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle x_{\max}^2 \rangle = \frac{\theta}{2m\omega_E^2}$$

og Debye-Waller faktoren er altså

$$W = \kappa^2 \langle x^2 \rangle = \kappa^2 \overline{x^2} \quad (35)$$

idet vi jo for et ergodisk system har identitet af ensmeblemiddelværdier og tidsmiddelværdier. Middelværdierne i (35) må ikke forveksles med breddefunktionen, som jo er

$$\Gamma(t) = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = \langle (x(t'+t) - x(t'))^2 \rangle$$

og som for store værdier af t , når $x(t')$ og $x(t'+t)$ er statistisk uafhængige, bliver

$$\Gamma(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle x(t'+t)^2 \rangle + \langle x(t')^2 \rangle] = 2\langle x^2 \rangle \quad (36)$$

Definitionen og diskussionen af Debye-Waller faktoren og breddefunktionen demonstrerer endnu engang, at man skal passe på med at anbringe totalerne på de rigtige steder i responseteorien!

Den konstante grænseværdi af $I_s(\kappa, t)$ for $t \rightarrow \infty$ medfører, at det totale deltafunktionsbidrag for frekvensen 0 til strukturfunktionen $S_s(\kappa, \omega)$ (sml. (20)) får arealet f :

$$\begin{aligned} S_s(\kappa, \omega) &= f \cdot \delta(\omega) + S'_s(\kappa, \omega) \\ &= e^{-2W} \delta(\omega) + S'_s(\kappa, \omega) \end{aligned} \quad (37)$$

hvor $S'_s(\kappa, \omega)$ er uden delta-singularitet. Den skarpe linje i (37) for $\omega=0$ er udtryk for elastisk spredning og forklarer Mössbauer resonansen i faste stoffer, hvor f -faktoren kan identificeres med arealet af Mössbauer linjen.

Vi skal nu se, at den diffusive bevægelse for lange tider, som skyldes en fra nul forskellig værdi af $\tilde{Y}_a(0)$ i væsker eller faste stoffer ikke nødvendigvis ødelægger Mössbauer-resonansen. Argumentet skyldes Jens Højgaard Jensen (ref. 27). Hvis diffusionen foregår tilstrækkelig langsomt til at den elastiske indsvingning (over tider af størrelsesordenen $1/\omega_E$) for længst er overstået, før diffusionsbidraget bliver signifikant, vil vi for lange tider kunne udtrykke breddefunktionen på formen (som et Maxwell element)

$$\Gamma(t) \approx \frac{4W}{\kappa^2} + 2D_a \cdot |t| \quad \text{for } t \gg \frac{1}{\omega_E} \quad (38)$$

hvor W er givet ved (34) og $D_a = \theta \tilde{Y}_a(0)$ er diffusionskonstanten. Tilsvarende fås så af (18)

$$I_s(\kappa, t) \approx e^{-2W + \kappa^2 D_a |t|} \quad \text{for } t \gg \frac{1}{\omega_E} \quad (39)$$

og den lavfrekvente del af strukturfunktionen bliver ifølge (19):

$$\begin{aligned} S_s(\kappa, \omega) &\approx \frac{e^{-2W}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\kappa^2 D_a t} \cos \omega t dt \quad (\text{for } \omega \ll \omega_E) \\ &= e^{-2W} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\kappa^2 D_a}{\omega^2 + (\kappa^2 D_a)^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Vi ser altså, at deltafunktionen i (37) af diffusionen udvides til en Lorentz-funktion med samme areal, men med den endelige halvværdibredde $\kappa^2 D_a$.

Når man skal afgøre, om der bliver resonansabsorption af Mössbauerstråling med bølgevektoren κ , må man sammenligne $\kappa^2 D_a$ med den naturlige linjebredde Γ_0 for den udsendte γ -stråling. Med opløsningsevner, som er normale for Mössbauerudstyr, kan man forvente, at linjen bliver synlig, hvis

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 D_a &\lesssim 10 \cdot \Gamma_0 \approx 7 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \\ D_a &\lesssim 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{for Fe}^{57} \\ \text{stråling} \end{array} \quad (41)$$

Denne betingelse kan let opfyldes i faste stoffer, hvor al diffusion kan henføres til den individuelle term D_i i ligning (27). For væsker kan D vurderes ud fra Stokes' lov (sml. (7) og (11))

$$D_a \approx D_i + \frac{\theta}{6\pi\eta a} \approx \frac{\theta}{6\pi\eta a} \quad (42)$$

hvor $a \approx 10^{-8} \text{ cm}$ er den atomare radius. Betingelsen (41) vil så være opfyldt, når shear viscositeten η tilfredsstiller betingelsen

$$\eta \gtrsim \frac{6\pi \cdot 10^{-8} \text{ cm}}{\theta} \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\approx 0.05 \text{ poise ved stuetemperatur} \quad (43)$$

$$(\theta = 1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \text{ erg} \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ erg}$$

$$\text{for } T = 300 \text{ K})$$

Denne værdi er en hel del større end (5 gange) viscositeten af normale, tyndtflydende væsker som vand og alkohol ved stuetemperatur, og for sådanne væsker vil det derfor være vanskeligt at anvende Mössbauer effekten, hvorimod en væske som glycerol, der har en ca. 1000 gange så stor viscositet, vil være velegnet.

Betingelsen (43), som alene går på viscositeten, er dog ikke tilstrækkelig. Det må naturligvis også kræves, at f-faktoren er rimelig stor, hvis Mössbauerlinjen skal kunne observeres. Dette stiller krav til den elastiske stivhed af stoffet. Den såkaldt Newton'ske grænse for væskedynamikken, hvor stivhedsmodulet for shear bevægelsen regnes for uendeligt, skulle give de bedste betingelser.

1.4.6. Hopdiffusion.

Vi er kommet ind på den tankegang, at bevægelsen af en atomar partikel i en væske eller en krystal må opløses i et kollektivt bidrag, som beskriver den koherente bevægelse af stofbaggrunden, og et individuelt, diffusivt bidrag. Set over afstande, som er store i forhold til den interatomare afstand, men små i forhold til makroskopiske afstande, ligner stofbaggrunden et krystalgitter, selv om tilstandsformen er en væske (dog ikke for langt over smeltepunktet). Den individuelt diffusive bevægelse må derfor beskrives som en "random walk", hvor partiklen hopper fra position til position i et diskret gitter.

Ser vi på hoppebevægelsen i én dimension, f.eks. x-retningen, kan vi betragte partiklens position som en tilfældig variabel, der kun kan antage de diskrete værdier $n \cdot \ell$, hvor n er heltallig og ℓ er kantlængden i gitteret. Hvis vi betragter det enkelte hop som en proces, der ikke tager tid, kan partiklens hastighed udtrykkes på formen

$$v_x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ell \cdot \eta_i \cdot \delta(t-t_i) \quad (1)$$

Her er t_i en række tilfældige tider, hvor springene sker, og η_i er en tilfældig variabel, som kan antage værdierne $+1$ og -1 . Partiklens position til tiden t er så

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ell \cdot \eta_i \cdot E(t-t_i) \quad (2)$$

og det stykke, partiklen har flyttet sig efter kl.0 er

$$x(t) - x(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \ell \cdot \eta_i \cdot E(t-t_i) \quad (3)$$

hvor t_0 er tidspunktet for det første hop efter kl.0.

Hvis systemet er upåvirket udefra og der heller ikke er indre kræfter, som trækker i partiklen, må vi regne med, at hoppene sker med lige stor sandsynlighed til højre og til venstre, d.v.s. ensemblemiddelværdien af hvert enkelt η_i vil være nul. Hvis vi nu yderligere antager, at de enkelte η er statistisk uafhængige, får vi

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

Breddefunktionen er så givet ved:

$$\Gamma(t) = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = \lambda^2 \langle n(t) \rangle \quad (5)$$

hvor $n(t)$ er antallet af hop, som sker efter kl.0 og før kl.t.

For et tidshomogent system vil ensemblemiddelværdien af antallet af hop i et givet tidsinterval være et interval-mål, d.v.s. den afhænger kun af intervallets længde, men ikke af dets beliggenhed på tidsaksen, og den er additiv over for en opdeling af intervallet i subintervaller. Det følger heraf, at $\langle n(t) \rangle$ i ligning (5) må være proportional med t :

$$\langle n(t) \rangle = \frac{t}{\tau} \quad (6)$$

hvor τ er middelventetiden for et hop. Ligning (5) kan derfor udtrykkes på samme måde som diffusionsloven 1.4.5.12

$$\Gamma(t) = 2Dt \quad (7)$$

hvor diffusionskonstanten D er givet ved

$$D = \frac{\lambda^2}{2\tau} \quad (8)$$

Efter at have bestemt fluktuationsloven for det upåvirkede system vender vi os nu til responseegenskaberne, idet vi antager, at der kan defineres en lineær responsefunktion. Hvis partiklen påvirkes med en kraft F_x i x-retningen, som er nul for $t < 0$ og konstant derefter, vil middelforskydningen kl. t være

$$\langle x(t) - x(0) \rangle = \lambda \cdot \langle \eta_i \rangle \cdot \langle n(t) \rangle = F_x \cdot J(t) \quad (9)$$

hvor $J(t)$ pr. definition er partiklens krybefunktion. I almindelighed kunne man regne med, at hopfrekvensen og dermed $\langle n(t) \rangle$ påvirkes af tilstedeværelsen af en kraft, f.eks. således at der optræder to forskellige middelværdier, én for hop til venstre og én for hop til højre. Vi vil dog her antage, at hopfrekvensen er konstant, medens middelværdien af η_i er en lineær funktion af F_x . Begrundelsen er, at der er tale om to forskellige tilfældige processer, svarende til de to slags tilfældige variable t_i og η_i : en retningsindifferent "skalar" proces, som blot afgør, om partiklen skal hoppe til et givet tidspunkt, samt en retningsbestemt "vektoriel" proces, som afgør til hvilken side, partiklen skal hoppe, givet, at den er blevet aktiveret til et hop af den første proces. Ifølge et generelt symmetriargument, Curie-Prigogine princippet (ref.III), kan der i den lineære systemteori ikke forekomme koblinger mellem skalare "strømme" og vektorielle "kræfter" og vice versa. Da kraften F_x er en vektorkomponent, kan den altså ikke påvirke middelværdien τ for den skalare hop-proces.

Ligning (9) giver da

$$J(t) = \lambda \cdot \frac{\langle \eta_i \rangle}{F_x} \cdot \frac{t}{\tau} \quad (10)$$

d.v.s. krybefunktionen er lineær i tiden og bevægeligheden $Y(t) = \beta$ må være en tidsuafhængig konstant

$$\beta = \frac{\ell \langle \eta_i \rangle}{\tau \cdot F_x} \quad (11)$$

Nu er den hoppende bevægelse af en partikel rundt i et gitter jo ikke umiddelbart sammenlignelig med den tidsligt kontinuerte støjmodel 1.4.1.1, som hidtil har ligget til grund for diskussionen. Der er nu tale om en "kvantiseret" støj, såkaldt "shot noise" (ref.28), og det er ikke fra starten indlysende, at F.D.teoremet kan anvendes. Alligevel ser vi, at F.D.teoremets direkte proportionalitet mellem breddefunktion og krybefunktion er gældende, og vi kan derfor definere støjenergien θ for hopbevægelsen ud fra ligning 1.4.5.5:

$$\theta = \frac{\Gamma(t)}{2J(t)} = \frac{D}{\beta} = \frac{\ell^2}{2\beta\tau} \quad (12)$$

Vi ser da af (11) og (12), at en pålagt kraft ændrer midelværdien af "springretningen" η_i efter følgende lineære lov:

$$\langle \eta_i \rangle = F_x \cdot \frac{\tau}{\ell} \beta = F_x \cdot \frac{\ell}{2\theta} \quad (13)$$

På grundlag af helt generelle antagelser er vi nået frem til, at den såkaldte Poisson proces, som beskriver hopbevægelsen, svarer til et bestemt energibåndselement, nemlig en o-læk med bevægeligheden

$$\beta = \frac{\ell^2}{2\theta\tau} \quad (14)$$

I simulationsmodeller med kontinuert tid vil en o-læk med Nyqvist-støj efter formlen

$$\langle (\overline{\delta f}^{\Delta t})^2 \rangle = \frac{2\beta\theta}{\Delta t} \quad (15)$$

(sml. 1.4.4.9) give en tilnærmet beskrivelse af Poisson

processen, hvis skridtlængden Δt kan vælges betydelig større end middelværditiden τ for det enkelte hop. I denne grænse har Poisson processens shot noise altså et hvidt spektrum. Denne egenskab hænger sammen med antagelsen (4) om statistisk uafhængighed af η_i erne. Når vi senere skal lave hopdiffusionsmodeller svarende til skala-invariante energibåndselementer med tidsekspONENTER forskellig fra 1 (Weibull modeller), er det derfor antagelse (4), vi skal lave om på. Vi skal dog først arbejde lidt videre med Poisson modellen.

I overensstemmelse med den almindelige filosofi i den lineære responseteori, at støjen er upåvirket af tilstedeværelsen af et response, må spredningskvadratet af forskydningen i den drevne bevægelse være det samme som breddefunktionen i ligevægt, d.v.s.

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle - \langle x(t) - x(0) \rangle^2 = \ell^2 \langle n(t) \rangle \quad (16)$$

Når vi udregner (16) ud fra udtrykket (3), får vi brug for middelværdien $\langle \eta_i \eta_j \rangle$, som er 1 for $i=j$, men ikke længere nul for $i \neq j$, da η_i og η_j begge har en fra nul forskellig middelværdi, givet ved (13). Da vi stadig kan regne med, at afvigelserne af η_i erne fra deres fælles middelværdi er statistisk uafhængige, fås:

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ \langle \eta_i \rangle^2 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

eller

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij} + \langle \eta_i \rangle^2 \cdot (1 - \delta_{ij}) \quad (17)$$

Venstresiden af (16) bliver da

$$\Gamma(t) = \ell^2 \langle n(t) \rangle + \ell^2 \langle \eta_i \rangle^2 \cdot \langle n(t) \cdot (n(t) - 1) \rangle - \ell^2 \langle \eta_i \rangle^2 \cdot \langle n(t) \rangle^2$$

D.v.s. (16) giver

$$\langle n(t)^2 \rangle - \langle n(t) \rangle^2 = \langle n(t) \rangle \quad (18)$$

Den statistiske fordeling af heltallet $n(t)$ for en Poisson proces (Poisson fordelingen) har altså den specielle egenskab, at spredningskvadratet $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ altid er lig med middelværdien $\langle n \rangle$. For store tider, når $\langle n \rangle \gg 1$, vil Poisson fordelingen med tilnærmelse kunne beskrives ved en gaussisk fordeling, hvis relative spredning er lig med $1/\sqrt{\langle n \rangle}$.

Inden vi bestemmer udtrykket for Poisson fordelingen $P_t(n)$ vil vi bestemme de såkaldte ventetidsfordelinger $g_n(t)$, som er sandsynlighedstæthederne for den tid, det tager for partiklen at udføre n hop. Af ligning (6) ser vi, ved at lade t være infinitesimal, at intensiteten, d.v.s. sandsynligheden pr. tidsenhed for, at der sker ét hop har den konstante værdi

$$\lambda = \frac{1}{\tau}$$

Ser vi på et stort ensemble af partikler og lader $N(t) (\gg 1)$ betegne det antal partikler, som endnu ikke har hoppet mellem $kl.0$ og $kl.t$, har vi som følge af de store tals lov:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= -\lambda N(t) \\ N(t) &= N(0) \cdot e^{-\lambda t} = N(0) \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Hvis en partikel har hoppet $kl.0$ er sandsynligheden for, at den endnu ikke har hoppet igen $kl.t$ altså givet ved

$$G_1(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/\tau} \quad (20)$$

Sandsynligheden for, at det første hop sker mellem t og $t+dt$ er så

$$g_1(t)dt = G_1(t) - G_1(t+dt)$$

d.v.s.

$$g_1(t) = - \frac{dG_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (21)$$

Ventetidsfordelingen for to hop kan nu udregnes ved et foldningsintegral, som udtrykker, at det første hop sker i et vilkårligt tidspunkt t' mellem 0 og t og det næste tiden $t-t'$ efter første hop:

$$g_2(t) = \int_0^t g_1(t') g_1(t-t') dt' = \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

Tilsvarende kan ventetidsfordelingen for n hop udtrykkes ved rekursionsformlen

$$g_n(t) = \int_0^t g_{n-1}(t') g_1(t-t') dt' \quad (22)$$

Man viser let ved induktion, at $g_n(t)$ er givet ved

$$g_n(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{(t/\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-t/\tau} \quad (23)$$

Denne familje af sandsynlighedsfordelinger, som kaldes gammafordelingerne kan også defineres for ikke-heltallige, positive værdier af n , når fakultetsfunktionen defineres ved hjælp af den analytiske gammafunktion (ref.V)

$$(n-1)! = \Gamma(n) \quad (24)$$

Rekursionsformlen (22) vil stadig gælde, selv om n ikke er hel. Specielt, hvis $n = \nu/2$, hvor ν er heltallig, bliver (23) den såkaldte χ^2 -fordeling med ν frihedsgrader, som spiller en stor rolle i statistikken.

Vi kan nu let bestemme udtrykket for Poisson fordelingen $P_t(n)$. Sandsynligheden for, at der sker n hop i tidsrummet t kan så udtrykkes ved betingelsen, at de n hop sker i tidsrummet $t' < t$ og at der ikke sker hop i tidsrummet

$t-t'$. Af (20) og (23) fås så:

$$\begin{aligned}
 P_t(n) &= \int_0^t g_n(t') \cdot G_1(t-t') dt' \\
 &= \int_0^t \frac{1}{\tau} \frac{(t'/\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t'/\tau} \cdot e^{-(t-t')/\tau} dt' \\
 &= e^{-t/\tau} \cdot \frac{(t/\tau)^n}{n!}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Det vises let, at middelværdien $\langle n \rangle$ er givet ved (6) og spredningskvadratet $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ ved (18).

Vi kan nu bestemme sandsynlighedsfordelingen for partiklens positionsforskydning $x(t)-x(0)$. Den heltallige variabel

$$v = \frac{x(t)-x(0)}{\lambda} \tag{26}$$

kan antage værdier i intervallet $[-n, n]$ hvor n er det antal hop, partiklen har foretaget; men v må have samme paritet som n , d.v.s. v er lige, hvis n er lige og ulige, hvis n er ulige. Hvis antallet af hop til højre og til venstre betegnes hhv. n_h og n_v har vi

$$\begin{aligned}
 n_h + n_v &= n \\
 n_h - n_v &= v
 \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned}
 n_h &= \frac{n+v}{2} \\
 n_v &= \frac{n-v}{2}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Den betingede sandsynlighed for v , givet værdien n er så givet ved binomialfordelingen

$$P(v|n) = \frac{n!}{\frac{n-v}{2}! \frac{n+v}{2}!} \cdot 2^{-n} \tag{28}$$

Den samlede sandsynlighed for n kan udtrykkes på formen

$$P_t(v) = \sum_{n=|v|}^{\infty} P_t(n) P(v|n)$$

hvor $P_t(n)$ er Poisson fordelingen (25), og hvor mærket på sumtegnet betyder, at der kun skal summeres over n -værdier af samme paritet som v . Af (25) og (28) fås:

$$P_t(v) = e^{-t/\tau} \sum_{n=|v|}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2\tau}\right)^n}{\frac{n-v}{2}! \frac{n+v}{2}!} \quad (29)$$

Det er muligt at udtrykke summen (29) på sluttet form ved hjælp af modificerede Bessel funktioner af første art (ref.V). Vi vil imidlertid gå en anden vej og i stedet bestemme de rumligt og tidsligt Fourier-transformerede. Sandsynlighedsfordelingen $P_t(v)$ er jo den diskrete udgave af den i foregående afsnit indførte van Hove funktion $G_s(r,t)$. Den intermediære spredningsfunktion $I_s(\kappa,t)$ bestemmes derfor ved rumlig Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} I_s(\kappa,t) &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} P_t(v) e^{iv\kappa\ell} \\ &= e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2\tau}\right)^n \sum_{v=-n}^n \frac{e^{iv\kappa\ell}}{\frac{n-v}{2}! \frac{n+v}{2}!} \end{aligned}$$

Ved substitutionen $p = \frac{1}{2}(n-v)$ fås

$$\begin{aligned} I_s(\kappa,t) &= e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2\tau}\right)^n \sum_{p=0}^n \frac{e^{i\kappa\ell(n-2p)}}{p! (n-p)!} \\ &= e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2\tau} e^{i\kappa\ell}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{-2ip\kappa\ell} \end{aligned}$$

Binomialformlen anvendt på den inderste sum giver så

$$I_s(\kappa,t) = e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2\tau} e^{i\kappa\ell}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(1 + e^{-2i\kappa\ell}\right)^n =$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{t}{2\tau} \left(e^{i\kappa l} + e^{-i\kappa l} \right) \right]^n \\
 &= e^{-t/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{t}{\tau} \cos \kappa l \right]^n
 \end{aligned}$$

Vi genkender nu i den sidste sum rækkeudviklingen for e^x og kan derfor udtrykke resultatet på den pæne form

$$I_s(\kappa, t) = e^{-\frac{t}{\tau} \cdot (1 - \cos \kappa l)} \quad (30)$$

I den tilsvarende formel 1.4.5.18 for den rumligt kontinuerte situation så vi, at eksponenten i udtrykket var proportional med κ^2 , svarende til den gaussiske form af $G_s(r, t)$. Vi ser nu en anden κ -afhængighed i det diskrete tilfælde. Kun for $\kappa l \ll 1$ kan vi bruge rækkeudviklingen

$$\frac{t}{\tau} (1 - \cos \kappa l) \approx \frac{1}{2} \kappa^2 l^2 \frac{t}{\tau} = \frac{1}{2} \kappa^2 \Gamma(t) \quad (31)$$

For meget små bølgevektorer, d.v.s. over store rumlige afstande virker det diskrete gitter som et kontinuum, og fordelingen er gaussisk. For $t/\tau \gg 1$ vil $I_s(\kappa, t)$ kun være mærkbart forskellig fra nul for små værdier af κ , og den rumlige fordeling

$$G_s(x-x(0), t) = \frac{1}{l} P_t(v) \quad (32)$$

kan med god tilnærmelse beskrives som en gaussisk sandsynlighedstæthed med middelværdien nul og spredningskvadratet $\Gamma(t) = l^2 t/\tau$.

Strukturfunktionen $S_s(\kappa, \omega)$, som fås ved tidslig Fouriertransformation af (30) bliver (sml. 1.4.5.19):

$$\begin{aligned}
 S_s(\kappa, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{\tau}(1-\cos\kappa\ell) + i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}(1-\cos\kappa\ell)} \cos\omega t dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(1-\cos\kappa\ell)/\tau}{(1-\cos\kappa\ell)^2/\tau^2 + \omega^2} \quad (33)
 \end{aligned}$$

D.v.s. S_s som funktion af ω er en Lorentz funktion med arealet 1 og halvvardibredden $(1-\cos\kappa\ell)/\tau$. Der er altså ikke nogen "elastisk linje" svarende til deltafunktionen i 1.4.5.37, og f-faktoren er nul, undtagen når bølgetallet κ falder i et af de "reciproke gitterpunkter" $\kappa_q = 2\pi q/\ell$, hvor

$$1 - \cos\kappa_q \ell = 0 \quad (34)$$

Diskussionen har hidtil været éndimensional, men kan let generaliseres til et kubisk gitter i flere dimensioner. Hvis τ_d betegner middelvektiden for hop i en vilkårlig af d -dimensioner ($d=1,2$ eller 3), må det tidligere benyttede τ , som er middelvektiden for hop i en bestemt dimension (f.eks. x -retningen) være givet ved

$$\tau = d \cdot \tau_d \quad (35)$$

Udtrykket (8) for diffusionskonstanten kan altså skrives på formen

$$D = \frac{\ell^2}{2d\tau_d} \quad (36)$$

og bevægeligheden (14) bliver

$$\beta = \frac{D}{\theta} = \frac{\ell^2}{2d\tau_d\theta} \quad (37)$$

Argumentet, som ledte frem til udtrykket (30) for den in-

termediære spredningsfunktion vil stadig være rigtigt, når bølgevektoren går i retning af én af kanterne, men ellers må man udtrykke $I_s(\vec{k}, t)$ som et produkt over de forskellige dimensioner af faktorer som (30).

Tiden er nu inde til at reticulere lidt igen! Vi holder os til den endimensionale diskussion og starter med at se på den situation, som blev beskrevet i ligning (19), hvor vi har et ensemble af partikler, som endnu ikke er hoppet væk fra en bestemt plads i gitteret. Vi så da, at den oprindelige population reduceredes eksponentielt med relaxationstiden τ (halveringstiden $\tau/\ln 2$). Den samme slags eksponentielle relaxation fremkommer, når vi slutter en o-læk til et o-lager, som i Maxwell elementet uden ydre port. Relaxationstiden er så givet ved forholdet mellem lagerets kapacitet (føjelighed) og lækkens ledningsevne. Nu har vi set, at bevægeligheden af én diffunderende partikel er givet ved størrelsen β i ligning (14). Output strømmen fra vores læk i relaxationselementet skal imidlertid ikke være partikelhastigheden v , men "hoppetningen" $\dot{v} = v/l$, så vi skal bruge lækparameteren β/l^2 (fig.1)

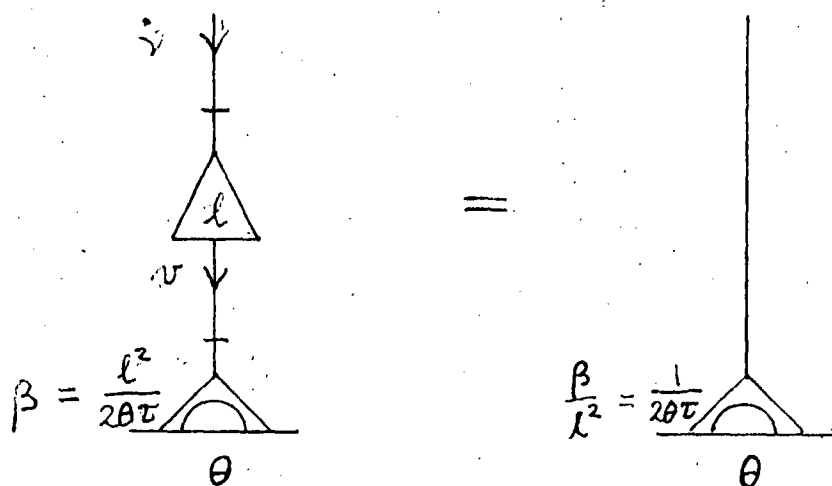


Fig.1. Lækken i relaxationselementet for én partikel.

For at skildre relaxationen af et ensemble med oprindeligt

N_0 partikler på en bestemt gitterplads må vi bruge to læk-ke til samme lager, fordi partiklerne kan hoppe enten til højre eller til venstre, og lækparameteren må gøres N_0 gange så stor. Lagerets kapacitet C bliver da bestemt ved

$$C = 2N_0 \frac{\beta}{\ell^2} \tau = \frac{N_0}{\theta}$$

og vi når frem til billedet på fig.2

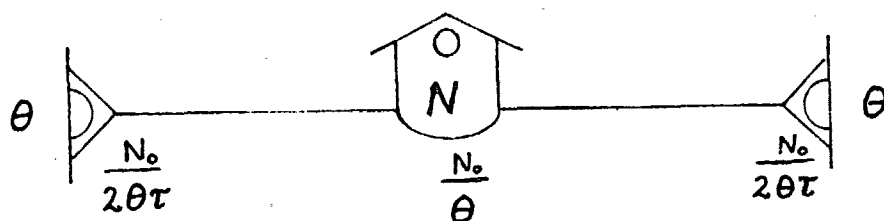


Fig.2. Relaxationselementet for et ensemble med N_0 systemer, hvor alle systemer til at begynde med har en partikel siddende på den plads, som afbildes ved lageret.

Når vi i fig.2 har angivet støjenergi θ ved de to lække, betyder det, at disse skal opfattes som kilder for Nyqvist støj. Nu gør der sig imidlertid nogle specielle forhold gældende for Poisson processen, idet level variabelen N kun kan antage heltallige, ikke negative værdier. Støjen må derfor have karakter af shot-noise, d.v.s. den består af deltafunktions pulser. Da middelværditiden for en sådan puls er τ for det enkelte system, må den være τ/N_0 for N_0 -ensemblet, så hvis N_0 er meget stor, vil der være mange pulser inden for skridtlængden Δt , selv om denne er betydeligt mindre end τ , og vi kan da bruge Nyqvist formlen (15). Selvom N_0 skal være stor, behøver den ikke at være uendelig, og for et endeligt ensemble betyder tilstedeværelsen af støjkilderne, at den deterministiske ligning (19) må erstattes med en Langevin ligning. Middelværdien $\langle N \rangle$

vil så udvikle sig efter ligning (19), men der vil være en spredning, således at for $t \rightarrow \infty$, når $\langle N \rangle \rightarrow 0$, går $\langle N^2 \rangle$ mod en værdi givet ved ligefordelingsloven $\frac{1}{2}\theta \langle N^2 \rangle / N_0 = \frac{1}{2}\theta$, d.v.s. $\langle N^2 \rangle \rightarrow N_0$. I grænsen $N_0 \rightarrow \infty$ bliver den relative spredning nul som udtryk for de store tals lov, og ensemblets udvikling kan beskrives ved den deterministiske ligning (19).

Relaxationsmodellen på fig.2 foregiver, at de omgivende pladser i gitteret er tomme til at begynde med, og den kan derfor ikke beskrive bevægelsen af flere partikler rundt i gitteret. For at opnå dette, må vi have de andre pladser med i form af lagre, og lækkene må påsættes forbindelsen mellem to lagre med en x-samler, således at en partikel, som forlader en celle (et gitterpunkt), bliver sendt ind i nabocellen til højre eller til venstre. Det totale antal partikler er da en bevaret størrelse, og i ligevægt må der være en endelig sandsynlighed ρ_0 for at en vilkårlig gitterplads er besat. Hvis vi som før betragter et ensemble med N_0 systemer, vil level variablene for alle lagrene have middelværdien $N_0 \cdot \rho_0$ i ligevægt, og sandsynlighedsfordelingen vil være en binomialfordeling

$$P_n = \binom{N_0}{n} \rho_0^n \cdot (1-\rho_0)^{N_0-n}$$

Kun i grænsen $\rho_0 \rightarrow 0$ kan partiklerne betragtes som uafhængige, og kun i den grænse er der tale om en "ren" diffusionsmodel, hvor ligevægts-binomialfordelingen bliver til en Poisson fordeling, således at spredningskvadratet er lig med middelværdien $N_0 \rho_0$. Lagerkapaciteten C er så givet ved ligefordelingsloven: $N_0 \rho_0 = C\theta$, d.v.s. for at skildre den udbredte diffusion med hoptiden τ , må vi ændre i modellen på fig.2 ved at gange både lagerkapaciteten og lækstørrelsen med ρ_0 og så i øvrigt forudsætte, at $\rho_0 \ll 1$.

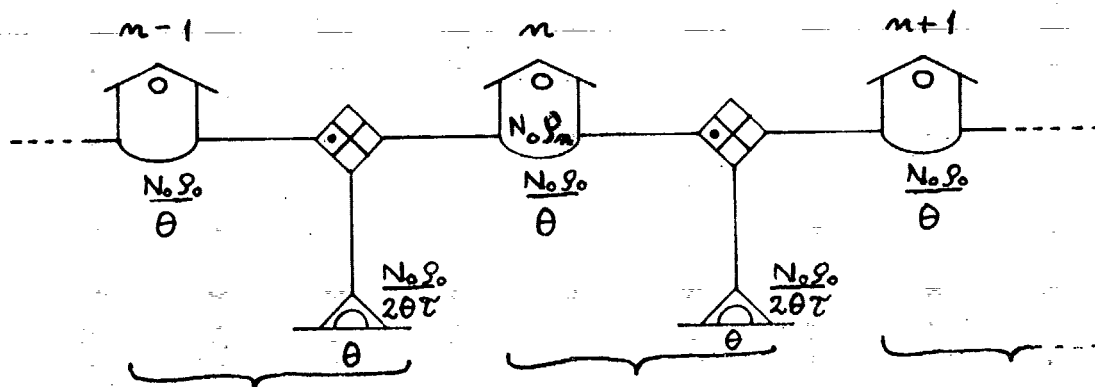


Fig.3. Diskret model for éndimensional hopdiffusion. Ensemble med N_0 systemer. Hvert lager svarer til en celle (et gitterpunkt). ρ_0 er sandsynligheden (i ligevægt) for at en celle er besat. Segmentet over "tuborgen" repeteres uendeligt.

Hvis sandsynligheden ρ_n (for at celle nr. n er besat) varierer meget langsomt hen over kæden, kan vi slå flere segmenter sammen til et enkelt segment med længden Δx ($> \ell$). Vi kan tænke os, at $\Delta x / \ell$ er et helt tal, således at det nye segment indeholder $\Delta x / \ell$ af de oprindelige segmenter. Da lageret i segmentet er tilsluttet en o-samler, må vi opfatte lageret i det nye segment som $\Delta x / \ell$ lagre af den oprindelige slags sat til en fælles o-samler, d.v.s. kapaciteten af det nye lager må være $\Delta x / \ell$ gange den gamle kapacitet. Tilsvarende må den nye o-læk opfattes som $\Delta x / \ell$ af de gamle lække sat til en fælles x-samler, d.v.s. den nye ledningsevne fås af den gamle ved division med $\Delta x / \ell$. Hvis $\Delta x / \ell$ er et stort tal, vil hvert enkelt lager indeholde et stort antal gitterpositioner og derved udgøre et "ensemble" for det enkelte system, så vi kan sætte $N_0 = 1$. Den resulterende model på fig.4 lægger op til en kontinuumsbeskrivelse af diffusionsprocessen.

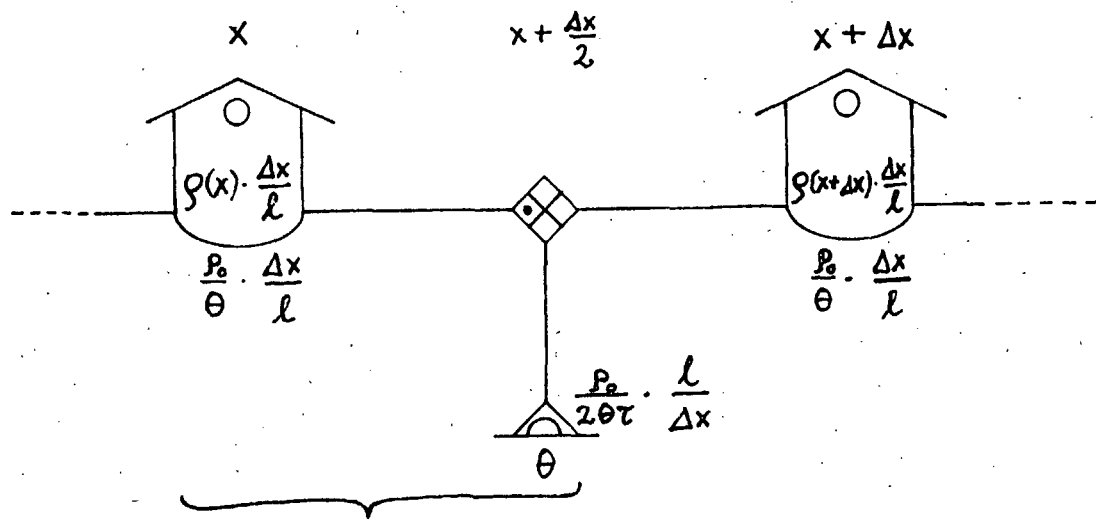


Fig.4. Kontinuumsdiagram for endimensional diffusion.

Hvis tætheden $\rho(x)$ kan betragtes som en differentiabel funktion af x , der varierer langsomt over stykket Δx , vil spændingsinputtet til lækken i fig.4 kunne udtrykkes på formen

$$\frac{\theta}{\rho_0} [\rho(x) - \rho(x + \Delta x)] = - \frac{\theta}{\rho_0} \Delta x \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x + \frac{\Delta x}{2}}$$

Strøminputtet til lageret i punktet x er så:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{2\theta\tau} \cdot \frac{l}{\Delta x} \cdot \frac{\theta}{\rho_0} \Delta x \left\{ \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x + \frac{\Delta x}{2}} - \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x - \frac{\Delta x}{2}} \right\} \\ = \frac{l}{2\theta\tau} \Delta x \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|_x \end{aligned}$$

Da denne strøm er den tidsligt afledede af level variabelen $\rho(x) \cdot \Delta x / l$, kan bevægelsesligningen for $\rho(x)$ udtrykkes ved følgende partielle differentiaalligning, som er diffusionsligningen i én dimension:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{l^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (38)$$

Vi ser, at diffusionskonstanten D er den samme, som blev indført i ligning (8).

Indførelsen af en energibandsstruktur, som er fast knyttet til gitteret i stedet for til den enkelte partikel muliggør definition af nogle kollektive responsefunktioner, som adskiller sig væsentligt fra den frekvensafhængige individuelle bevægelighed β . Som det første eksempel vil vi beregne impedansen \tilde{Z}_k af en halvuendelig kæde, svarende til fig.3 med $N_0=1$. Vi beregner \tilde{Z}_k ved en rekursiv metode, som fremgår af fig.5:

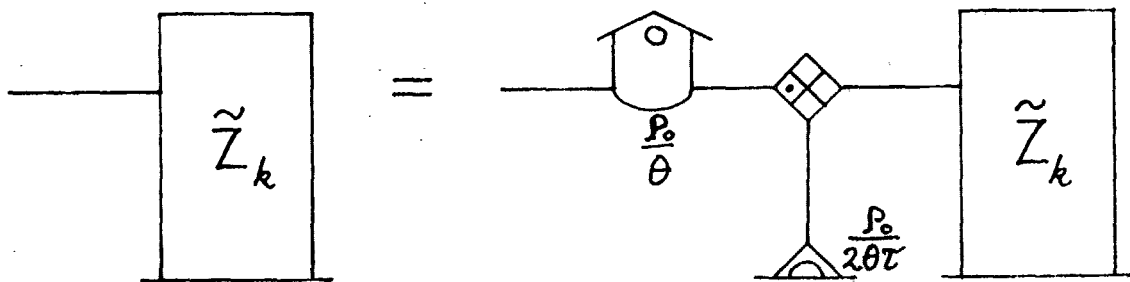


Fig.5. Rekursiv ikonformel til beregning af impedansen af halvuendelig diffusionskæde (\sim fig.3 med $N_0=1$).

Ved oversættelsen af ikonformlen på fig.5 til symboler fås

$$\tilde{Z}_k(s) = \frac{1}{s \frac{\rho_0}{\theta} + \frac{1}{\frac{2\theta\tau}{\rho_0} + \tilde{Z}_k(s)}} \quad (39)$$

D.v.s. \tilde{Z}_k er bestemt ved andengradsligningen

$$\tilde{Z}_k^2 + 2 \frac{\theta\tau}{\rho_0} \tilde{Z}_k - \frac{2\theta^2\tau}{\rho_0 s} = 0$$

Vi vælger den løsning, som er positiv på den reelle s-akse og får:

$$\tilde{Z}_k(s) = \frac{\theta\tau}{\rho_0} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{s\tau}} - 1 \right) \quad (40)$$

I højsfrekvensgrænsen $s \gg 1/\tau$ går \tilde{Z}_k som $\theta/(\rho_0 s)$, d.v.s. vi mærker kun det første lager på fig.5. Mere interessant er det, at vi i lavfrekvensgrænsen $s \ll 1/\tau$ finder

$$\tilde{Z}_k(s) \approx \frac{\theta\tau}{\rho_0} \sqrt{\frac{2}{s\tau}} \quad (41)$$

D.v.s. for tider, som er store i forhold til τ , er systemet skalainvariant med tidseksponenten

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (42)$$

(sml. 1.2.3.14).

Vi kan nu beregne en "kollektiv bevægelighed" \tilde{Y}_k , som er responset på en kraft, der virker på en bestemt plads i gitteret. På fig.6 vises, hvorledes denne responsefunktion defineres diagrammatisk. Til sammenligning er en "individuel port" indtegnet punkteret, således at ligheden med grovreticulationen fig.1.4.5.3 fremgår.

Af diagrammet fig.6 og ligning (40) fås

$$\tilde{Y}_k(s) = \frac{l^2}{\frac{2\theta\tau}{\rho_0} + 2\tilde{Z}_k(s)} = \frac{l^2 \rho_0}{2\theta\tau \sqrt{1 + \frac{2}{s\tau}}} = \frac{\beta \rho_0}{\sqrt{1 + \frac{2}{s\tau}}} \quad (43)$$

I lavfrekvensgrænsen fås

$$\tilde{Y}_k(s) \approx \frac{l^2 \rho_0}{2\theta\tau} \sqrt{\frac{s\tau}{2}} \quad (s \ll \frac{1}{\tau}) \quad (44)$$

hvilket igen viser, at systemet er skalainvariant for lange tider med tidseksponenten $\frac{1}{2}$. Den tidsafhængige admittans $Y_k(t)$, svarende til (44) kan beregnes af 1.2.4.38, idet vi sætter $s = -i\omega$ og benytter den kvadratrods, som har positiv realdel:

$$\hat{Y}_{k1}(\omega) = \frac{l^2 \rho_0}{4\theta\tau} \sqrt{\omega\tau} \quad (45)$$

og dermed

$$Y_k(t) = \frac{l^2 \rho_0}{4\theta\sqrt{\tau}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega^{-\frac{1}{2}} \sin \omega t d\omega = \frac{l^2 \rho_0}{4\theta\sqrt{\tau}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \quad (46)$$

Ved integration findes krybefunktionen

$$J_k(t) = \frac{l^2 \rho_0}{\theta} \sqrt{\frac{t}{2\pi\tau}} \quad (47)$$

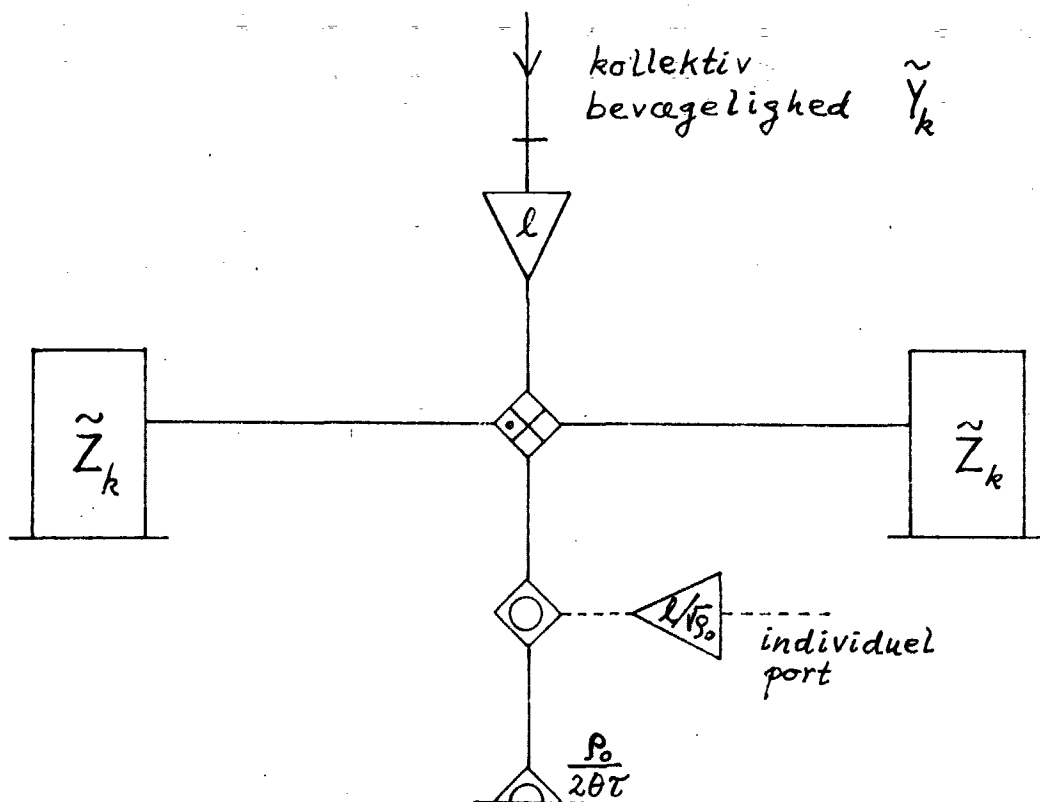


Fig. 6. Definition af den "kollektive bevægelighed" \tilde{Y}_k , svarende til en bestemt gitterplads. En "individuel port", svarende til den "atomare port" på fig. 1.4.5.3 er indtegnet punkteret. Impedansen \tilde{Z}_k er den halvuendelige kæde fra fig. 5.

De skalainvariante responsefunktioner for spændingsinput (44) - (47) fremtræder som uegentlige, idet $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, således at krybefunktionen har lodret tangent for $t = 0$. Imidlertid gælder kvadratrodsafhængigheden jo kun i langtidsgrensen. Tager man hensyn til den diskrete gitterstruktur ved at benytte det fuldstændige udtryk (43), forsvinder divergenserne for $t = 0$, og funktionerne viser sig som egentlige.

1.4.7. Dimensionsfunktioner og væskedynamik.

Det kontinuerte diffusionsproblem i forskellige dimensionstal kan benyttes til indførelse af responsefunktioner, som er skalainvariante for lange tider med ikke-heltallige værdier af tidseksponenten α .

I d dimensioner ($d=1,2$ eller 3) er diffusionsmodellen en d -dimensional gitterstruktur, svarende til fig.1.4.6.3 ($N_0=1$), hvor o -lagrene sidder i hjørnerne af d -dimensionale terninger og x -samlerne midt på kanterne. Vi definerer den cellulære stivhedsfunktion i d dimensioner $G^{(d)}(t)$ som responset fra et vilkårligt lager (svarende til et gitterpunkt) på en stimulus, som er tilførsel af én partikel til lageret kl.0. Hvis $\rho(t)$ betegner sandsynligheden for at finde partiklen i det samme lager kl. t , har vi

$$\left. \begin{aligned} \rho(0) &= 1 \\ \rho(t) &< 1 \quad \text{for } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

For tider, som er lange i forhold til hoptiden τ_d , vil sandsynlighedsfordelingen for den injicerede partikel være en gaussisk fordeling med centrum i det gitterpunkt, som partiklen blev injiceret i og med et spredningskvadrat, som er proportionalt med t . D.v.s. sandsynligheden for at finde partiklen i punktet $\vec{v} = (v_x, v_y, \dots)$ er for $t \gg \tau_d$:

$$P_t(\vec{v}) \approx \prod_{\alpha=1}^d \left(\frac{2\pi t}{d\tau_d} \right)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{v_\alpha^2 \cdot d\tau_d}{2t}} \quad (2)$$

Da det cellulære lager har stivheden $\frac{\theta}{\rho_0}$ fås:

$$G^{(d)}(t) = \frac{\theta}{\rho_0} \rho(t) = \frac{\theta}{\rho_0} P_t(\vec{0}) \approx \frac{\theta}{\rho_0} \left(\frac{d\tau_d}{2\pi t} \right)^{d/2} \quad (3)$$

for $t \gg \tau_d$.

Når vi har fundet udtrykket for den tidsafhængige stivhed, kan vi finde den frekvensafhængige impedans ved Laplacetransformation

$$\tilde{Z}^{(d)}(s) = \mathbf{L}\{G^{(d)}(t), s\} \quad (4)$$

Imidlertid er det asymptotiske udtryk (3) ikke lige til at Laplacetransformere, da det har en ikke-integrabel singularitet for $t = 0$, hvis $d \geq 2$. Imidlertid ved vi, at stivheden har den endelige værdi $\frac{\theta}{\rho_0}$ for $t = 0$, så i stedet for (3) vil vi bruge udtrykket

$$G^{(d)}(t) \approx \frac{\theta}{\rho_0} \left(\frac{\frac{d\tau_d}{2\pi}}{t + \frac{d\tau_d}{2\pi}} \right)^{d/2} \quad (5)$$

Den Laplacetransformerede af (5) kan så udtrykkes på formen

$$\tilde{Z}^{(d)}(s) \approx \frac{\theta}{\rho_0} \frac{d\tau_d}{2\pi} \cdot \tilde{h}^{(d)}\left(\frac{d\tau_d s}{2\pi}\right) \quad (6)$$

hvor dimensionsfunktionen $h^{(d)}(x)$ er givet ved

$$\tilde{h}^{(d)}(x) = e^x \cdot x^{\frac{d}{2}-1} \cdot \Gamma\left(1-\frac{d}{2}, x\right) \quad (7)$$

Funktionen $\Gamma(a, x)$ er den ufuldstændige gammafunktion (ref.V):

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty u^{a-1} e^{-u} du \quad (8)$$

Dimensionsfunktionerne beregnes lettest ved brug af formelen (dog kun for $d \neq 2$)

$$\tilde{h}^{(d)}(x) = e^x \left[\left(-\frac{d}{2}\right)! \cdot x^{\frac{d}{2}-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1-\frac{d}{2}) \cdot n!} \right] \quad (9)$$

For store værdier af x er det mere bekvemt at bruge kædebrøksudviklingen

$$\tilde{h}^{(d)}(x) = \frac{1}{x + \frac{d/2}{1 + \frac{1}{x + \frac{d/2 + 1}{1 + \frac{2}{x + \frac{d/2 + 2}{1 + \frac{3}{x + \dots}}}}}}} \quad (10)$$

Imidlertid må man huske på, at udtrykket (5) kun er en interpolationsformel, som er korrekt i grænserne $t = 0$ og $t \rightarrow \infty$. Man skal derfor ikke lægge for meget i udtrykket for dimensionsfunktionerne og kun de første led i (9) og (10) kan anses for kvantitativt korrekte.

I den lavfrekvente grænse $s \ll 1/\tau_d$ kan vi nøjes med det mest betydende led i formel (9), d.v.s. for $d < 2$:

$$\tilde{z}^{(d)}(s) \approx \frac{\theta}{\rho_0} \cdot \frac{d\tau_d}{2\pi} \cdot \left(-\frac{d}{2}\right)! \cdot \left(\frac{d\tau_d s}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}-1} \quad (11)$$

Til denne formel kan man indvende, at den ikke siger noget nyt. Da den ikke gælder for $d \geq 2$, gælder den kun for det endimensionale tilfælde, som vi allerede har løst (eksakt) i foregående afsnit. Formel (11) med $d = 1$, giver præcist halvdelen af impedansen $\tilde{z}_k(s)$ i formel 1.4.6.41. Grunden til, at vi kun får halvdelen af \tilde{z}_k er, at vi nu går ind på "midten" af en uendelig kæde, hvor vi før stod for enden af en halvuendelig kæde. Formel (11) siger altså kun noget nyt, hvis det har mening at lade d antage værdier i det åbne interval mellem 1 og 2. Den fysiske betydning af sådanne brudne dimensionstal er tvivlsom, men bør nok ikke helt afskrives. F.eks. kunne man tænke sig, at diffusion på en overflade og i nærheden af en kant kan beskrives approximativt ved at tilskrive d en passende værdi mellem 1 og 2.

Tilfældet $d=2$ kan ikke beskrives ved formel (9), men den ufuldstændige gammafunktion i (7) er i dette tilfælde det samme som det såkaldte eksponentialintegral

$$E_1(x) = \Gamma(0, x) \approx -\gamma - \ln x \quad \text{for } x \ll 1 \quad (12)$$

hvor γ er Euler's konstant. I det todimensionale tilfælde afhænger impedansen altså logaritmisk af frekvensen i den lavfrekvente grænse.

Endelig finder vi, for $d > 2$, at det dominerende led i udtrykket (9) er en konstant

$$h^{(d)}(x) \approx \frac{1}{\frac{d}{2} - 1} \quad \text{for } x \ll 1 \quad (13)$$

Værdien af denne konstant skal man dog ikke fæste lid til. En numerisk udregning for $d=3$ giver værdien

$$\tilde{z}^{(3)}(0) = 1.516 \cdot \frac{\theta \tau_d}{\rho_0} \quad (14)$$

medens formel (13), indsat i (6) giver en værdi, som er 37% for lille.

I en eksakt udregning må fordelingen (2) erstattes med udtrykket

$$P_t(\vec{v}) = \prod_{\alpha=1}^d e^{-\frac{t}{d\tau_d}} I_{\nu_\alpha} \left(\frac{t}{d\tau_d} \right) \quad (15)$$

hvor $I_\nu(x)$ er en modificeret Bessel funktion af første art og ν te orden (ref. V). Udtrykket (5) må så ændres til

$$G^{(d)}(t) = \frac{\theta}{\rho_0} e^{-\frac{t}{\tau_d}} \cdot \left[I_0 \left(\frac{t}{d\tau_d} \right) \right]^d \quad (16)$$

og den statiske impedans for $d > 2$ bliver

$$\begin{aligned} \tilde{z}^{(d)}(0) &= \frac{\theta}{\rho_0} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau_d}} \left[I_0 \left(\frac{t}{d\tau_d} \right) \right]^d dt \\ &= \frac{d\tau_d \theta}{\rho_0} \int_0^\infty \left[e^{-x} I_0(x) \right]^d dx \end{aligned} \quad (17)$$

Det kvalitative forhold, at den statiske impedans er uendelig for $d \leq 2$ og endelig for $d > 2$, er uændret, og værdien af $\tilde{Z}^{(d)}(0)$, som fås af (13) vil være asymptotisk korrekt for $d-2 \ll 1$.

Vi ser, at det diffusive system optræder som skalainvariant for $t \gg \tau_d$, undtagen i det todimensionale tilfælde. Værdien af tidsekspONENTEN α fås af loven (sml. 1.2.3.14)

$$\tilde{Z}^{(d)}(s) \propto s^{\alpha-1} \quad \text{for } s \ll \frac{1}{\tau_d}$$

og vi ser, at

$$\alpha = \begin{cases} \frac{d}{2} & \text{for } d < 2 \\ 1 & \text{for } d > 2 \end{cases} \quad (18)$$

Selv om den asymptotiske tidsekspONENT er 1 i det tredimensionale tilfælde, vil der være en ret tydelig afvigelse fra opførselen af en simpel læk, idet det næstmest betydende led i formel (9) går som kvadratroden af $s\tau_d$. Koefficienten til dette led er eksakt i (9), hvorimod det konstante led som nævnt må bestemmes numerisk og er anført i (14). Den asymptotiske formel for $\tilde{Z}^{(3)}(s)$ i den lavfrekvente grænse bliver så

$$\tilde{Z}^{(3)}(s) \approx \frac{\theta\tau_d}{\rho_0} \cdot \left\{ 1,516 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{2s\tau_d} \right\} \quad (19)$$

Den reciproke funktion, admittansen i tre dimensioner, bliver i samme grænse, $s \ll 1/\tau_d$:

$$\tilde{Y}^{(3)}(s) = \frac{1}{\tilde{Z}^{(3)}(s)} \approx \frac{\rho_0}{\theta\tau_d \cdot 1,516} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\pi \cdot 1,516} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{2s\tau_d} \right\} \quad (20)$$

Admittansen af den éndimensionale diffusionskæde i lavfrekvensgrænsen er

$$\tilde{Y}^{(1)}(s) = \frac{\rho_0}{\theta\tau_d} \sqrt{2s\tau_d} \quad (21)$$

Vi ser altså ved sammenligning af (20) og (21), at det

tredimensionale system i den lavfrekvente grænse kan reticuleres, som vist på fig.1, ved at forbinde en simpel læk og en éndimensional diffusionskæde via en o-samler til en fælles ydre port.

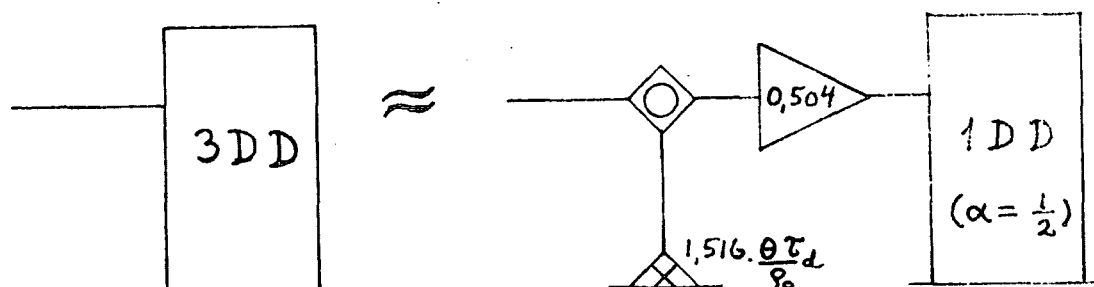


Fig.1. Lavfrekvens-reticulation ($s \ll 1/\tau_d$) af det cellulære diffusionsresponse i tre dimensioner. Betegnelserne "3DD" og "1DD" står for henholdsvis tre-dimensional- og endimensional diffusion.

Hvis vi holder os til de heltallige værdien 1,2 og 3 for dimensionstallet d , ser det ud til, at der kun kan forekomme én type af skalainvariant opførsel med bruden tids-eksponent, nemlig den éndimensionale kæde med $\alpha = \frac{1}{2}$. Derudover er den todimensionale diffusionsmodel exceptionel ved sin logaritmiske opførsel, som ikke er skalainvariant i nogen grænse. Blot det, at vi har fundet et par systemer, som er kvalitativt anderledes end de diskrete systemer, vi studerede i afsnit 1.3.3., åbner imidlertid op for en stor mængde nye syntesemuligheder og indikationer til teoridannelse, ikke mindst inden for væskedynamikken.

Hvis vi laver den duale udgave af den éndimensionale diffusionskæde, fås et system med tidsekspONENTEN $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Dette system beskriver shear bevægelse i en Newton'sk væske i én dimension; lagrene beskriver den transversale impuls af væskedelene, og lækkene den indre gnidning, hvis størrelse angives med shear viscositeten η .

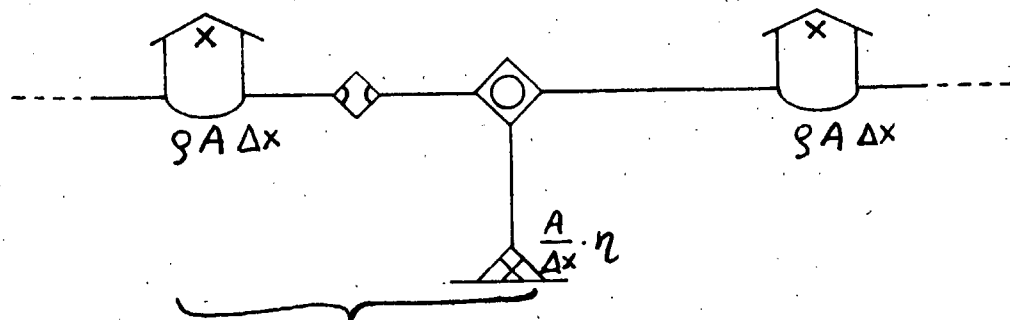


Fig.2. Kontinuumsmodel for shear bevægelse i én dimension i Newton'sk væske med massefylden ρ og viscositeten η . Segmentet forestiller et udsnit med længden Δx og tværsnitsarealet A . Tidseksponenten er $3/2$, da modellen er dual til diffusionskæden fig.1.4.6.4.

Som konsekvens af væskemodellen på fig.2 må man forvente, at den "atomare" responsefunktion for en partikel i væsken ikke alene er bestemt ved et Brown element med gnidningskoefficienten fastsat ved Stokes' lov, men indeholder et ekstra bidrag med tidseksponenten $3/2$ (allerede Stokes var vist klar over dette). Forsøg på eksperimentel påvisning af dette bidrag ud fra neutronsprejningsdata (ref.25) har dog ikke vist sig særligt overbevisende.

Der er heller ingen særlig grund til at blive forbavset, hvis det skulle vise sig, at $3/2$ -bidraget aldeles mangler for de fleste væsker. Sagen er jo den, at den Newton'ske væskemodel er højst ufuldstændig, bl.a. fordi den mangler et elastisk bidrag til shear dynamikken. Et sådant kan inkluderes i fig.2 i form af et o-lager påsat o-samlere, hvorved modellen bliver til den Maxwell'ske væske model. En sådan model, som indfører en ny karakteristisk tid (Maxwell's relaxationstid) er i stand til at bryde skala-invariansen over et begrænset område for forholdsvis lange tider og kan derved delvist forklare fravær af $3/2$ -loven.

Til gengæld ser det ud til, at der er en anden form for skalainvariant opførsel, specielt i seje væsker, som Maxwell modellen ikke kan forklare, men som til gengæld kan forklare fravær af 3/2-loven for vilkårligt lange tider.

Målinger af bølgeimpedansen for plane-shear bølger i forskellige seje væsker (underafkølede), udført af Barlow, Erginsav og Lamb (BEL, ref.29) har klart påvist, at det "element", som skal tilkobles o-samlere i væskemodellen fig.2, foruden en læk (viscositeten) og et o-lager (shear elasticiteten) også må indeholde en skalainvariant komponent med tidseksponenten 1/2. Eksistensen af et sådant bidrag medfører, at den atomare admittans for små værdier af s har formen

$$\tilde{Y}_a(s) = \tilde{Y}(0) + k_{1/2} \cdot s^{1/2} \quad (22)$$

hvor $k_{1/2}$ er en positiv konstant. I modsætning hertil vil et Newton'sk lavfrekvensbidrag med tidseksponenten 3/2 medføre at impedansen går som (22), d.v.s. admittansen må have den asymptotiske form

$$\tilde{Y}_a(s) \approx \tilde{Y}(0) - k_{3/2} \cdot s^{1/2} \quad (23)$$

hvor $k_{3/2}$ også er en positiv konstant. Begge former for skalainvariant opførsel medfører altså, at realdelen af den atomare admittans som funktion af ω har en spids for $\omega = 0$, men i "1/2-tilfældet" vender spidsen nedad, og i "3/2-tilfældet" vender den opad. BEL modellen kan altså forklare et totalt fravær af en "3/2-lov", fordi den lige som denne er et udtryk for skalainvariant opførsel til lange tider. Naturligvis vil den "inertielle diffusion", som en årsag til "3/2-loven" i Newtonske væsker, også gøre sig gældende ved bølgeudbredelse i BEL-væsker, men den vil formentlig ikke kunne observeres for atomare partikler, da den overdøves af "1/2-loven".

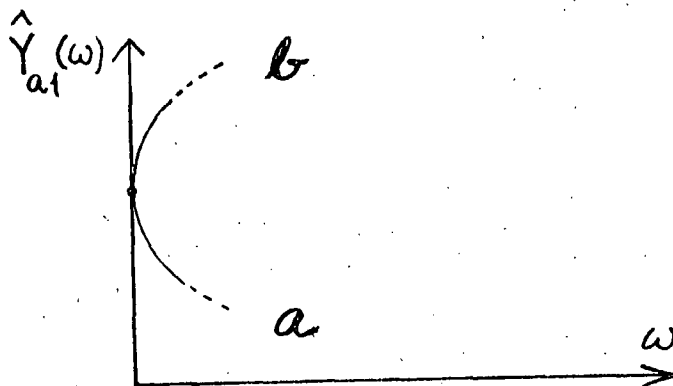


Fig.3. To former for lavfrekvent skalainvarians i væskedynamikken afspejlet i realdelen af den atomare admittans. a: Newton'sk væske, $\alpha = 3/2$. b: BEL-væske, $\alpha = 1/2$.

BEL-modellen er indtil videre en parameterfri, fænomenologisk model, som kan beskrive en stor række forskelligartede målinger, herunder Mössbauer effekt og dielektrisk relaxation. En redegørelse for sådanne målinger, udført af specialestuderende på IMFUFA under vejledning af Niels Boye Olsen forventes udsendt senere dette år. En egentlig mikroskopisk, kvantitativ teori for BEL-mekanismen savnes stadig, men overvejelserne i dette afsnit antyder, hvilken vej, man kan gå for at få, i det mindste en kvalitativ forståelse af, at tidsekspONENTEN $1/2$ kan spille en rolle i viscoelastisk adfærd.

Allerede Frenkel, en af væskedynamikkens pionerer (ref.30), påviste, at viscositetens aftagen med voksende temperatur i væsker (i modsætning til gasser) er et tegn på, at væskens molekyler er stærkt hæmmede i deres bevægelse af de andre molekyler, således at en simpel diffusionsmodel for partiklerne er utilstrækkelig. Man må snarere forestille

sig, at en hopbevægelse af et molekyle er betinget af tilstedeværelsen af et "hul i væsken" en såkaldt vacance i den umiddelbare nærhed af molekylet, og at vacancerne bevægelse kan beskrives med en diffusionsmodel, fordi de er så relativt få, at de ikke "kommer i vejen for hinanden". Vacancediffusionsmodellen blev udarbejdet med henblik på viscoelastiske responsefunktioner af Glarum (1960) og senere af Phillips, Barlow og Lamb (PBL, 1972, ref.31) til forklaring af BEL-modellen. Forklaringen er dog højst ufuldstændig, bl.a. fordi den er éndimensional, og fordi den indfører dubiøse approximationer. Vi skal her nøjes med et kvalitativt billede, som indeholder nogle af de samme træk, men også en kritik af PBL.

Et simpelt dimensionsargument vil vise Frenkel's pointe. Hvis partiklerne kan diffundere frit, er diffusionskonstanten givet ved 1.4.6.36 og ved Stokes' lov samt Einsteins relation 1.4.5.42. Størrelsesordensmæssigt har vi altså (vi sætter $\epsilon \approx 6\pi \approx 1$)

$$D \approx \frac{\ell^2}{\tau_d} \approx \frac{\theta}{\eta \ell}$$

Hoptiden τ_d er bestemt ved partiklernes termiske hastighed

$$\tau_d \approx \frac{\ell}{\langle v \rangle} \approx \frac{\ell}{\sqrt{\theta/m}}$$

d.v.s. vi får

$$\eta \approx \ell^2 \sqrt{m\theta}$$

d.v.s. viscositeten må vokse med temperaturen som \sqrt{T} , hvilket er korrekt for gasser, men ukorrekt for væsker.

Hvis partiklernes bevægelse er betinget af vacancediffusion, er det lækken i fig.1.4.6.6, som bestemmer deres bevægelighed, d.v.s. vi får

$$D \approx \frac{\ell^2 \rho_0}{\tau_d} \approx \frac{\theta}{\eta \ell} ; \quad \eta \approx \frac{\theta \tau_d}{\ell^3 \rho_0}$$

Sandsynligheden for, at en bestemt plads er besat med en vacance må være givet ved en Boltzmann faktor

$$\rho_0 \approx e^{-u_0/\theta}$$

hvor u_0 er den aktiveringsenergi, som skal til for at skabe en vacance. Temperaturafhængigheden af ρ_0 er langt kraftigere end temperaturafhængigheden af de øvrige faktorer, så stort set kommer viscositeten til at afhænge af temperaturen som $1/\rho_0$:

$$\eta \propto e^{u_0/\theta}$$

d.v.s. η er en aftagende funktion af temperaturen på en måde, som stemmer godt med den såkaldte Arrhenius lov for væsker.

Lad os betragte en partikel, som sidder på en bestemt gitterplads kl.0, og lad $\rho(t)$ betegne sandsynligheden for, at partiklen sidder på den samme plads kl.t. Hvis partiklen kan diffundere frit, vil $\rho(t)$ relaxere eksponentielt med relaxationstiden τ_d , og forløbet kan skildres med et Maxwell-element som fig.1.4.6.2. Vi kan opfatte dette Maxwell-element på to forskellige måder:

- a) Elementet skildrer en ligevægtssituation for et ensemble og funktionen $\rho(t)$ er den brøkdelt af ensemblet, hvor partiklen sidder på samme plads kl.t, svarende til ventetidsfunktionen $G_1(t)$ i foregående afsnit.
- b) Elementet skildrer en situation med elastisk spænding (stress), fremkaldt af partikelophobning et bestemt sted, og $\rho(t)$ angiver, hvorledes stresset relaxerer på grund af partiklernes bevægelighed.

Der er altså for den simple diffusionsproces, Poisson processen, en fuldstændig overensstemmelse mellem den statistiske ventetidsfunktion og stress-relaxationsfunktionen ($G(t)/G_0$ for Maxwell elementet), og Maxwells relaxationstid for stress er den samme som hoptiden τ_d . Kurven er en tidshomogen funktion e^{-t/τ_d} , hvilket hænger sammen med, at intensiteten $\lambda = 1/\tau_d$ for Poisson processen er tidsuafhængig (jfr. ligning 1.4.6.19).

Glarum og PBL går ud fra, at ventetidsfunktionen og stress-relaxationsfunktionen også stemmer overens, når Poisson modellen ikke kan bruges, og dette er i almindelighed forkert, som den følgende analyse vil vise.

Lad os antage, at partiklen kun kan forlade sin plads, når

der ankommer en vacance til stedet. Den individuelle bevægelighed $\tilde{Y}_a(s)$ for partiklen vil så være givet ved den kollektive bevægelighed $\tilde{Y}_{kv}(s)$ for vacancesystemet. Hvis vacancerne diffunderer efter en d-dimensional Poisson proces, vil vi i den lavfrekvente grænse kunne sætte

$$\tilde{Y}_{kv}(s) = \frac{1}{\tilde{Z}^{(d)}(s)} \quad (24)$$

hvor $\tilde{Z}^{(d)}(s)$ er den cellulære impedans, som blev bestemt i begyndelsen af dette afsnit. I almindelighed må vi derfor skildre stressrelaxationen som vist på fig.4 med et "Maxwell element", hvor lækken er erstattet med en sort kasse med en krybefunktion $J^{(d)}(t)$, svarende til (24).

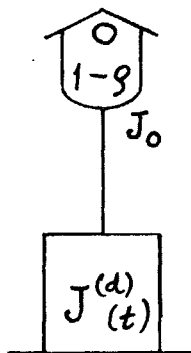


Fig.4. Relaxation via vacancer.

Vi ser først på et ensemble i ligevægt, hvor $\rho(0) = 1$, d.v.s. alle systemerne i ensemblet har en partikel siddende på den bestemte gitterplads kl.0. Til at begynde med er der ikke noget spændingsinput til "vacancekassen" på fig. 4, idet vi regner med, at den elastiske spænding i gitteret er nul, når partiklerne sidder på deres pladser. En forstyrrelse af ligevægten i det enkelte system vil først opstå, når der ankommer en vacance til stedet, og dette svarer i modellen fig.4 til, at der udsendes en shot-noise puls fra kassen.

Breddefunktionen for støjen er jo

$$\Gamma^{(d)}(t) = 2\theta J^{(d)}(t) \quad (25)$$

og denne funktion angiver så i hvor stor en brøkdel af ensemblet, ankomsten er sket kl.t, forudsat at spændingen hele tiden er nul. Intensiteten af processen, d.v.s. sandsynligheden pr. tidsenhed for ankomst af en vacance er så

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt} \Gamma^{(d)}(t) = 2\theta \frac{dJ^{(d)}(t)}{dt} = 2\theta Y^{(d)}(t) \quad (26)$$

og ensemblets relaxation er derfor styret af differential-ligningen

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot \rho(t) = -\rho(t) \frac{d\Gamma^{(d)}(t)}{dt} \quad (27)$$

Det ses umiddelbart, at løsningen til (27) er

$$\rho(t) = e^{-\Gamma^{(d)}(t)} \quad (28)$$

Hvis vacancesystemet beskrives ved en skalainvariant krybefunktion med tidsekspONENTEN α , siger vi, at ensemblets udvikling er styret af en Weibull-proces. Så er

$$\rho(t) = e^{-2\theta J_1 \cdot (t/\tau)^\alpha} = e^{-\lambda' t^\alpha} \quad (29)$$

Kun for $\alpha=1$ er det en Poisson-proces, som har "Markov-egenskaben", en tidsuafhængig intensitet. For Weibull processen med $\alpha \neq 1$ kan man indføre en "krumlinjet tids-transformation" ved at benytte den indre systemtid t_i^* , der blev indført i afsnit 1.1.5 og derved opnå en formel lighed med Poisson processen

$$\rho(t_i^*) = e^{-\lambda^* t_i^*} \quad (30)$$

Til gengæld går man så glip af tidshomogeniteten, da den

indre systemtid har et uflytteligt nulpunkt.

Weibull-modellen (29) blev indført i statistikken af danskeren G. Rasch. Modellen blev dels benyttet til fysiske fænomener som metaltræthed og dels til sociale problemstillinger såsom kriminelle personers tilbagevending til fængslerne.

Adfærdsbiologen Iven Reventlow studerede redebygningsaktiviteten af hundestejler i brunst og fandt at ventetidsfordelingen for påbegyndelse af en bestemt adfærd ikke kunne beskrives med en Poisson proces, men fittede godt til en Weibull model med en værdi af tids-eksponenten α på ca. 1.5. Da Iven Reventlow forsvarede sin disputats, opponerede statistikerne Benny Karpatschhof ex auditorio og påpegede her, at Weibull-modellen ikke skulle opfattes som en tilfældig model, der fittede til de givne data, men kunne begrundes videnskabssteoretisk ud fra betragtninger om ratio-skalainvarians (ref.31) og derfor måtte betragtes som det eneste rimelige valg af statistisk model. (Senere har Karpatschhof dog modificeret sine synspunkter noget, uden at fratage kravet om skalainvarians).

Bemærkningen blev taget til følge af samfundsforskeren Ib Damgaard Petersen, som var på udkig efter en rimelig statistisk model til beskrivelse af ventetidsfordelingen for politiske begivenheder, såsom internationale topmøder og konferencer mellem magtens udøvere. Damgaard Petersen fandt, at Hitlers mødeaktiviteter i begyndelsen af krigen (før sammenbruddet på Østfronten) kunne beskrives som en række parallelt løbende Poissonprocesser ($\alpha = 1$) med vekslende intensiteter og fortolkede dette som et tegn på, at det politiske system var i en tilstand af relativ balance. Andre begivenhedsrækker måtte beskrives med $\alpha \approx 0.5$, hvilket fortolkedes som tegn på opløsning, og atter andre med $\alpha \approx 1.5$, hvilket blev fortolket som tegn på interesse og opbygning af struktur i systemet (ref. 32).

Rent behavioristisk kan man konstatere, at $\alpha < 1$ betyder aftagende intensitet og stor uregelmæssighed af ventetiderne, hvorimod $\alpha > 1$ betyder voksende intensitet og større regelmæssighed (mindre spredning på ventetiderne) end for Poisson processen. Det virker slående, at det er de samme værdier af α , nemlig 0.5, 1.0 og 1.5, som interessen samler sig om, både i de socialvidenskabelige og i de væskedynamiske sammenhænge. Måske er det ikke helt ved siden af at tænke på visse samfundsmæssige begivenheder som betinget af en slags diffusion i det sociale system (?).

En egentlig stress relaxation ville fås af modellen på fig. 4, hvis level variabelen og dermed spændingen har en værdi forskellig fra nul. Dette vil dog ikke føre til et forløb magen til (28), medmindre krybefunktionen er lineær. Poisson processen er altså ene om at have samme relaxationslov for elastisk stress som for populationen af partikler i

venteposition. Antagelsen om identitet af de to funktioner kan kun forsvares, hvis spændingen i fig.4 har en konstant værdi, d.v.s. hvis elementet har konstant stress, indtil der ankommer en vacance, som så bevirker en fuldstændig udløsning og afstressning. Denne antagelse anføres også af PBL som nødvendig for teorien, uden at de på overbevisende måde kan begrunde den fysisk. Det er nok for optimistisk at forvente, at en rent statistisk random-walk model for fejlsteder i væsker og faste stoffer kan gøre rede for de viscoelastiske responseegenskaber. En egentlig mikroskopisk teori kan ikke undgå en nærmere redegørelse for, hvordan elastisk stress indvirker på vacancesystemets dynamik. Resten følger så af F.D.teoremet, d.v.s. den atomare van Hove funktion kan i det væsentlige beregnes ud fra en kollektiv 1-port responsefunktion, hvis man har reticuleret rigtigt.

1.4.8. Kvantestøj.

Den kvantemekaniske teori for støj giver på flere måder en vis afklaring af den klassiske teori, men peger også på nogle problemer, som stort set er uløste. Medens kvanteteorien for systemer i termisk ligevægt er i en langt bedre form end den klassiske statistiske mekanik, dukker der problemer op, så snart man vil skildre irreversible processer. Dette hænger sammen med, at kvantemekanikken er modelleret over den klassiske reversible mekanik på grundlag af Hamilton's ligninger, som ikke kan skildre dissipation af energien, uden at man bryder deres smukt afrundede form. En kvantemekanisk energibåndsteknik, som tillader lække, er endnu ikke færdigudviklet, selv om vi har set antydninger af den vej, man kan gå (fig.1.4.2.2). En sådan udvidelse af energibåndsteknikken må nødvendigvis også blive en udvidelse af kvantemekanikken og kan derfor ikke blot modelleres over eksisterende teorier.

Fluktuations-dissipationsteoremet er en hovedhjørneste på vejen fra ligevægts- til ikke-ligevægts statistisk mekanik. Det benyttes i sin kvantemekaniske formulering som grundlag for spredningsteori (van Hove funktioner) og til beregning af irreversible transportkoefficienter (Kubo-formalismen) og repræsenterer omtrent grænsen for, hvor langt man kan gå med en irreversibel kvantedynamik, før problemerne for alvor melder sig.

Den følgende gennemgang forudsætter en vis fortrolighed med den kvantemekaniske begrebsverden: operatoralgebra, kommutatorer, tæthedsmatricer, middelværdier og bevægelsesligninger, som det ville være for pladsrøvende at introducere nu (se f.eks. ref. 33). Det skulle dog nok være muligt for den uindviiede læser, som har fulgt med så langt, at få et vist indtryk af, hvad det drejer sig om

ved at skimme formlerne, af hvilke flere har været omtalt i de foregående afsnit.

Vi starter med at udlede Kubo's formel for den tidsafhængige admittans af et kvantemekanisk system (ref.34). Som vist på fig.1 tænker vi os systemet forbundet med en klassisk spændingskilde $F(t)$. At spændingskilden er klassisk, betyder at styrken $F(t)$ er en almindelig funktion af tiden (altså ikke en operator). Hamiltonoperatoren er så

$$H = H_0 - F(t) \cdot Q \quad (1)$$

hvor Q er operatoren for den cykliske output level i det energibånd, som forbinder systemet med spændingskilden. (Vi benytter ligesom tidligere fede typer for operatorer).

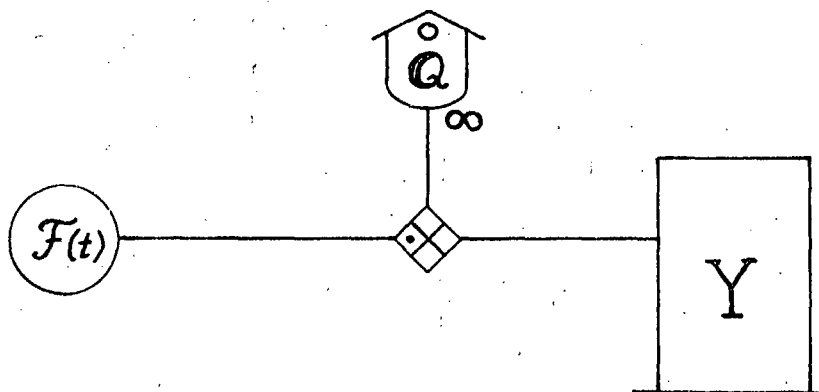


Fig.1. Kvantemekanisk system forbundet med klassisk spændingskilde $F(t)$.

Systemets statistiske egenskaber beskrives ved den såkaldte tæthedsmatrix $\rho(t)$, som udvikler sig i tid efter v. Neumann ligningen

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{i}{\hbar} [\rho, H] \quad (2)$$

hvor den firkantede parentes betyder kommutatoren:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Vi vil nu se på et bestemt stimulus-response forsøg, hvor $F(t)$ har formen

$$F(t) = p_0 \delta(t) \quad (3)$$

og vi antager, at systemet har været i termisk ligevægt op til kl.0 med tæthedsmatricen

$$p_0 = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_0}$$

hvor $\beta = \frac{1}{kT}$

og $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H_0})$ er tilstandssummen,

og størrelsen Q tænkes defineres således at dens middelværdi har været nul lige op til forsøget starter kl.0.

Hvis impulstilførslen p_0 er tilstrækkelig lille, må vi regne med, at middelværdien af Q til et bestemt tidspunkt t efter kl.0 er proportional med p_0 , og forholdet mellem denne middelværdi og p_0 er så pr. definition systemets tidsafhængige admittans $Y(t)$. (Egentlig burde vi sige level-admittans, men da den uforstyrrede Hamilton-operator H_0 er tidsuafhængig, er systemet tidshomogent, og der er ingen forskel på level- og rate-admittansen, jfr. afsnit 1.1.3).

Da vi søger et lineært response, må det være på sin plads at bruge lineær perturbationsregning, d.v.s. vi skriver tæthedsmatricen

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_1(t) \quad (4)$$

og nøjes med at bestemme afvigelsen fra ligevægt, $\rho_1(t)$, til første orden i perturbationen p_0 . Lad os starte med

at bestemme tæthedsmatricen til tiden $0+$, d.v.s. umiddelbart efter tilførselen af impulsen p_0 . Ved at indsætte Hamiltonoperatoren (1) og (3) i bevægelsesligningen (2), finder vi

$$\rho_1(0+) = \frac{p_0}{i\hbar} [\rho_0, Q] \quad (5)$$

Vi har så benyttet, at p_0 kommuterer med H_0 . Det er i udledningen af (5), at vi antager linearitet, selv om det kan være svært at se, at (5) ikke er helt eksakt. I virkeligheden må vi forestille os, sker impulsoverførselen ikke momentant, og tæthedsmatricen på højre side af (2) ændres i løbet af processen. En hensyntagen til dette forløb vil resultere i forekomsten af højere potenser af p_0 på højresiden af (5)

Når først impulsen er overført, behøver vi ikke mere perturbationsregning, for systemet er uforstyrret, og den forstyrrelse af tæthedsmatricen, som introduceredes kl. 0 vil blot udvikle sig i tid, styret af den uperturberede Hamiltonoperator. D.v.s. til tiden $t > 0$ har vi

$$\rho_1(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \cdot \frac{p_0}{i\hbar} [\rho_0, Q] e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (6)$$

Responsefunktionen $Y(t)$ er jo

$$Y(t) = \frac{1}{p_0} \langle Q \rangle_t = \frac{1}{p_0} \text{Sp}\{\rho(t)Q\} \quad (7)$$

hvor "Sp" betyder "sporet", d.v.s. summen af diagonalelementerne af den pågældende matrix. Når vi for $\rho(t)$ indsætter opspaltningen (4) i en uforstyrret del og en forstyrrelse, kan vi undlade den uforstyrrede del, fordi vi har defineret Q således, at den har middelværdien nul i ligevægt. Vi får da ved at indsætte (6) i (7):

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= \frac{1}{i\hbar} \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} (\rho_0 Q - Q \rho_0) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} Q \right\} \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \text{Sp} \left\{ \rho_0 Q e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} Q e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} - e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} Q e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} Q \rho_0 \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Vi har her benyttet os af, at sporet er invariant over for en ombytning af to af de indgående operator-faktorer. Da funktionen er en ulige funktion af tiden, bør venstresiden egentlig skrives $Y(|t|) \text{sign}(t)$.

Nu har vi hidtil arbejdet i det såkaldte Schrödinger-billede, hvor de observable repræsenteres ved tidsuafhængige operatorer, medens systemets tilstand beskrives ved en tidsafhængig bølgefunktion eller tæthedsmatrix. Der findes imidlertid et ækvivalent billede, Heisenberg-billedet, hvor bølgefunktionen eller tæthedsmatricen er tidsuafhængig, medens operatorerne ændres i tidens løb. Sammenhængen mellem en Schrödinger-operator A og den tilsvarende tidsafhængige Heisenberg-operator $A(t)$ er så, når Hamilton-operatoren H er tidsuafhængig, givet ved:

$$A(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (9)$$

Vi ser da, at (8) kan udtrykkes på følgende måde:

$$\begin{aligned}
 Y(|t|) \text{sign}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \text{Sp} \{ \rho_0 [Q(0), Q(t)] \} \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \langle [Q(0), Q(t)] \rangle_{(0)} \quad (10)
 \end{aligned}$$

hvor $\langle \quad \rangle_{(0)}$ betyder middelværdien over ligevægtsensemblet med den statistiske operator ρ_0 . Ligning (10) er Kubo's formel for responsefunktionen.

Vi ser nu på den intermediære spredningsfunktion (sml. 1.4.5.17)

$$I_s(\kappa, t) = \langle e^{-i\kappa Q(0)} \cdot e^{i\kappa Q(t)} \rangle \quad (11)$$

(vi har nu droppet mærket (0) på middelværditegnet, som imidlertid stadig refererer til ligevægtsensemblet). De i (11) indgående faktorer er nu operatoren, så det er væsentligt, at man skriver dem i en bestemt orden. Lige som tidligere kan $I_s(\kappa, t)$ opfattes som den rumligt Fourier-transformerede af van Hove selvkorrelationsfunktionen $G_s(r, t)$ men denne bliver nu en kompleks funktion af sted og tid og kan altså ikke længere fortolkes som en sandsynlighedstæthed. Formlen for $G_s(r, t)$ udtrykt ved stedoperatoren $Q(t)$ bliver også noget mere indviklet end 1.4.5.15, så vi undlader at anføre den her (ref.26). Den kvantemekaniske van Hove funktion må imidlertid for tider, som er store i forhold til $\tau_0 = \beta\hbar$, gå over i den klassiske sandsynlighedstæthed, som i kontinuumsgrænsen er gaussisk og kan udtrykkes ved breddefunktionen $\Gamma(t)$ som i ligning 1.4.5.16. Også den intermediære spredningsfunktion (11) må kunne approximeres gaussisk: hvis vi rækkeudvikler $I_s(\kappa, t)$ i κ , kan der af symmetri Grunde kun forekomme lige potenser af κ , så til laveste orden har vi

$$I_s(\kappa, t) = e^{-\frac{\kappa^2}{2} B(t)} \quad (12)$$

Funktionen $B(t)$, som i almindelighed er kompleks, er altså den kvantemekaniske generalisation af den klassiske breddefunktion $\Gamma(t)$, så ifølge korrespondensprincippet må det gælde, at

$$B(t) \approx \Gamma(t) \quad \text{for } t \gg \beta\hbar \quad (13)$$

For lange tider er $B(t)$ altså en lige og reel funktion, men i det kvantemekaniske tidsområde vil der være et ulige og imaginært bidrag, som vi nu skal bestemme.

Af (11) fås:

$$\begin{aligned}
 I_s(\kappa, -t) &= \langle e^{-i\kappa Q(0)} e^{i\kappa Q(-t)} \rangle \\
 &= \langle e^{-i\kappa Q(t)} e^{i\kappa Q(0)} \rangle = I_s^*(\kappa, t) \quad (14)
 \end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at systemet er tidshomogent, ved at lægge t til begge tidsargumenter. Det må derfor også gælde, at

$$B(-t) = B^*(t) \quad (15)$$

hvilket demonstrerer det ovenfor fremhævede, at den lige del af B -funktionen er reel, medens den ulige del er imaginær. Som funktion af κ er $I_s(\kappa, t)$ imidlertid lige, så ved at skifte fortegn på κ i (14) fås:

$$I_s^*(\kappa, t) = I_s^*(-\kappa, t) = \langle e^{i\kappa Q(t)} e^{-i\kappa Q(0)} \rangle \quad (16)$$

Vi vil nu udføre nogle manipulationer med dette udtryk, som nok i første omgang vil virke lidt besynderlige, fordi de tilsyneladende gør tiden til en kompleks variabel. Baggrunden for dette trick er den formelle analogi mellem tidsudviklingsoperatoren

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} Ht}$$

og den statistiske operator

$$\rho(\beta) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

som tillader os, når vi møder et produkt af disse to operatorer at trække dem sammen:

$$e^{\frac{i}{\hbar} Ht} \cdot e^{-\beta H} = e^{\frac{i}{\hbar} H(t+i\beta\hbar)} = U(t+i\beta\hbar) \quad (17)$$

og sige, at denne operator bestemmer systemets udvikling hen til "tidspunktet" $t+i\beta\hbar$. Vi får så af (16):

$$\begin{aligned}
 I_s^*(\kappa, t) &= \frac{1}{Z} \text{Sp} \left\{ e^{-\beta H} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{i\kappa Q(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{-i\kappa Q(0)} \right\} \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Sp} \left\{ e^{-i\kappa Q(0)} e^{\frac{i}{\hbar} H(t+i\hbar\beta)} e^{i\kappa Q(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t+i\hbar\beta)} e^{-\beta H} \right\} \\
 &= \langle e^{-i\kappa Q(0)} e^{i\kappa Q(t+i\hbar\beta)} \rangle = I_s(\kappa, t+i\hbar\beta) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Vi har dermed rent formelt defineret en analytisk fortsættelse af den intermediære spredningsfunktion ud i den komplekse t -plan. Betydningen af dette kunstgreb ses klarere, når vi ved en tidslig Fouriertransformation af $I_s(\kappa, t)$ indfører strukturfunktionen (sml. 1.4.5.19)

$$S_s(\kappa, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_s(\kappa, t) e^{i\omega t} dt \quad (19)$$

og omvendt:

$$I_s(\kappa, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\kappa, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (20)$$

Hvis vi først bestemmer strukturfunktionen af (19) ved at integrere på den reelle t akse, kan vi bagefter ved brug af (20) problemfrit give t en positiv imaginærværdi.

Af (14) og (19) ser vi, at $S_s(\kappa, \omega)$ er reel på den reelle ω -akse, hvilket stemmer med, at funktionen angiver absorptionstværsnittet (differentielt) for en plan bølge med frekvensen ω , der sendes ind i systemet. I den klassiske mekanik gælder desuden, at strukturfunktionen er en lige funktion af frekvensen, men dette gælder ikke i kvantemekanikken. Af (18) og (20) fås nemlig

$$\begin{aligned}
 I_s^*(\kappa, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\kappa, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\kappa, -\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= I_s(\kappa, t+i\hbar\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\kappa, \omega) e^{-i\omega(t+i\hbar\beta)} d\omega
 \end{aligned}$$

d.v.s. det må gælde, at

$$S_s(\kappa, -\omega) = e^{\beta\hbar\omega} S_s(\kappa, \omega) \quad (21)$$

Man plejer at sige, at denne ligning udtrykker princippet om den detaljerede balance (afsnit 1.4.3), fordi venstresiden udtrykker emissionstværsnittet for frekvensen ω . Ligningen udtrykker altså en balance mellem emission og absorption af stråling med frekvensen ω , idet faktoren

$$e^{\beta\hbar\omega} = e^{\beta\Delta E}$$

er en Boltzmann faktor, som udtrykker forholdet mellem den statistiske vægt af en given tilstand og den statistiske vægt af den tilstand, som systemet kommer i efter absorption af et kvantum med energien $\Delta E = \hbar\omega$.

Når vi sammenligner udtrykkene (11) og (16) ser vi, at rækkefølgen af de to faktorer ikke er ligegyldig. Dette udtrykkes mest bekvemt ved hjælp af kommutatorfunktionen

$$\begin{aligned} K_s(\kappa, t) &= \langle [e^{-i\kappa Q(0)}, e^{i\kappa Q(t)}] \rangle \\ &= I_s(\kappa, t) - I_s^*(\kappa, t) = I_s(\kappa, t) - I_s(\kappa, -t) \\ &= I_s(\kappa, t) - I_s(\kappa, t+i\hbar\beta) \end{aligned} \quad (22)$$

Denne funktion er en rent imaginær, ulige funktion af t . For meget små værdier af κ finder vi ved rækkeudvikling

$$\begin{aligned} K_s(\kappa, t) &\approx \langle [1-i\kappa Q(0), 1+i\kappa Q(t)] \rangle \\ &= \kappa^2 \langle [Q(0), Q(t)] \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

Ved brug af Kubo-formlen (10) får vi derfor

$$\left. \frac{d^2 K_s(\kappa, t)}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=0} = 2i\hbar Y(|t|) \text{sign}(t) \quad (24)$$

Ved at indsætte definitionsligningen (12) for den kvante-

mekaniske breddefunktion $B(t)$ i ligning (22) og udføre samme dobbelte differentiation som i (24) finder vi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 K_s(\kappa, t)}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=0} &= -B(t) + B(t+i\hbar\beta) \\ &= -B(t) + B(-t) \\ &= -B(t) + B^*(t) \end{aligned} \quad (25)$$

En sammenligning af (24) og (25) viser så, at den ulige imaginærdel af $B(t)$ må være givet ved funktionen $-i\hbar Y(|t|)\text{sign}(t)$. Hvis vi identificerer den lige realdel af $B(t)$ med den rigtige breddefunktion $\Gamma(t)$, har vi altså

$$B(t) = \Gamma(t) - i\hbar Y(|t|)\text{sign}(t) \quad (26)$$

Endvidere har vi set, at en komplekskonjugering af $B(t)$ giver samme resultat som at lægge $i\hbar\beta$ til tidsargumentet. Vi får da af (26)

$$\Gamma(t) - \Gamma(t+i\hbar\beta) = -i\hbar[Y(|t|)+Y(|t|+i\hbar\beta)] \cdot \text{sign}(t) \quad (27)$$

Denne sætning er faktisk en kvantemekanisk version af F.D.teoremet. For at indse dette går vi til den klassiske grænse $|t| \gg \hbar\beta$. Vi kan så regne med, at både Γ og Y varierer langsomt over tider af størrelsesordenen $\hbar\beta$, således at venstresiden af (27) kan udtrykkes ved en differentialkvotient:

$$-i\hbar\beta \frac{d\Gamma(t)}{dt} \approx -2i\hbar Y(|t|)\text{sign}(t)$$

og heraf, ved integration

$$\Gamma(t) = \frac{2}{\beta} \int_0^{|t|} Y(t') dt' = 2kTJ(|t|) \quad (28)$$

hvilket er det klassiske F.D.teorem 1.4.5.5.

For at få et frekvensafhængigt F.D.teorem benyttes

1.2.4.38:

$$\begin{aligned} Y(|t|)\text{sign}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega)}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (29)$$

Højresiden af (27) kan da udtrykkes

$$\begin{aligned} -i\hbar[Y(|t|) + Y(|t| + i\hbar\beta)]\text{sign}(t) \\ = \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{Y}_1(\omega)}{\omega} e^{-i\omega t} [1 + e^{\beta\hbar\omega}] d\omega \end{aligned} \quad (30)$$

For at få hold på venstresiden af (27) må vi først med beklagelse konstatere, at kvantemekanikken ikke leverer en så simpel definition af breddefunktionen $\Gamma(t)$ som den klassiske definition 1.4.5.1, og derfor har vi måttet gå omvejen over den intermediære spredningsfunktion, som har en mere direkte eksperimentel relevans. Ved som i (23)-(25) at gå til grænsen $\kappa \rightarrow 0$ finder vi

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \frac{1}{2}(B(t) + B^*(t)) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\kappa^2} [I_s(\kappa, t) + I_s^*(\kappa, t)]_{\kappa=0} \\ &= \langle Q(0)^2 + Q(t)^2 - Q(0)Q(t) - Q(t)Q(0) \rangle \end{aligned} \quad (31)$$

Den afledede af $\Gamma(t)$ kan så udtrykkes ved hastighedsoperatoren $v(t) = dQ(t)/dt$ (strømmen i stimulus responseporten). Ved at udnytte tidshomogeniteten fås

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \langle 2Q(t)v(t) - Q(0)v(t) - v(t)Q(0) \rangle \\ &= - \langle Q(-t)v(0) + v(0)Q(-t) \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

En ekstra differentiation giver så:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma(t)}{dt^2} &= \langle \mathbf{v}(-t)\mathbf{v}(0) + \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(-t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t)\mathbf{v}(0) \rangle \\ &= 2\hat{\phi}_f(t) \end{aligned} \quad (33)$$

Vi ser altså, at den dobbelt-tidsafledede af breddefunktionen er lig med 2 gange autokorrelationsfunktionen af strømstøjen, som nu er defineret ved et symmetriseret produkt.

Ved brug af Wiener-Khinchin teoremet 1.4.1.16 får vi støjspektret $\hat{\phi}_f(\omega)$ ind i billedet:

$$\frac{d^2\Gamma(t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (34)$$

Ved en enkelt integration af (34) fås

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \int_0^t \frac{d^2\Gamma(t')}{dt'^2} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_f(\omega) \cdot \frac{e^{-i\omega t} - 1}{(-i\omega)} d\omega \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}_f(\omega)}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at $\Gamma(t)$ er lige og dens afledede derfor nul for $t = 0$, samt at $\hat{\phi}_f(\omega)$ er lige. Endnu en integration giver så, da $\Gamma(0)$ er nul:

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}_f(\omega)}{\omega^2} \cdot [1 - e^{-i\omega t}] d\omega \quad (35)$$

Vi får så, når vi indsætter (35) i venstresiden af (27)

$$\Gamma(t) - \Gamma(t+i\hbar\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}_f(\omega)}{\omega^2} e^{-i\omega t} \cdot [e^{\beta\hbar\omega} - 1] d\omega \quad (36)$$

Sammenligning af (30) og (36) giver så det frekvensafhængige kvantemekaniske F.D.teorem (Callen-Welton teoremet, sml. 1.4.3.23)

$$\hat{\phi}_f(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\pi} \hat{Y}_1(\omega) \frac{e^{\beta\hbar\omega} + 1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{2}{\pi} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \theta(\omega, T) \quad (37)$$

hvor $\theta(\omega, T)$ er det kvantemekaniske udtryk for støjenergien, som jo er energien af en harmonisk oscillator med egenfrekvensen $|\omega|$ i termisk ligevægt med temperaturen T ($\beta = 1/kT$):

$$\begin{aligned}\theta(\omega, T) &= \frac{1}{2} \hbar \omega \cdot \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \\ &= \frac{\hbar |\omega|}{e^{\beta \hbar |\omega|} - 1} + \frac{1}{2} \hbar |\omega|\end{aligned}\quad (38)$$

I det sidste udtryk for støjenergien i (38) har vi udskilt den såkaldte nulpunktsenergi $\frac{1}{2} \hbar |\omega|$ fra det termiske støjbidrag, som er givet ved Planck's formel. Da nulpunktsleddet vokser med frekvensen, vil det give anledning til divergensproblemer i (37), hvis ikke den dissipative responsfunktion falder meget hurtigt af for høje frekvenser. Man taler da om en "ultraviolet katastrofe". Nogle forfattere mener, at nulpunktsleddet af den grund skal udelades helt (ref.28) fra støjformlen, hvilket dog nok vil være at gå for vidt, da det hænger uløseligt sammen med hele den kvantemekaniske formalisme og i mange tilfælde ikke giver divergensproblemer.

En simpel o-læk vil give en ultraviolet katastrofe, og man kan derfor ikke have en kvantemekanisk version af Nyqvist's formel, medmindre man smider nulpunktsfluktuationerne væk. En anden, nok så klassisk problemstilling dukker frem i forbindelse med elektromagnetisk stråling. Ser vi på en punktpartikel med ladning q og lader partiklen vibrere med frekvensen ω , så der frembringes en svingende strøm, vil der udsendes elektromagnetiske bølger (ref.6). Det kan vises, at strålingsimpedansen, d.v.s. forholdet mellem amplituderne af den elektriske feltstyrke på partiklens plads og strømmen har en dissipativ realdel, givet ved

$$\hat{Z}_1(\omega) = \frac{2}{3c^3} \cdot \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (39)$$

Systemet er altså skalainvariant, men med tidsekspONENTEN 3, som jo ligger uden for normalområdet. Funktionen (39) kan derfor ikke være gældende for alle frekvenser, men en diskussion af afvigelserne for høje og lave frekvenser synes at være sagen uvedkommende. Hvis vi blot benytter udtrykket i forbindelse med den duale udgave af Callen-Welton teoremet (37) og regner nulpunktsfluktuationerne med, vil vi få en ret så voldsom ultraviolet katastrofe; endnu værre end hvis vi benyttede det klassiske F.D.teorem og nøjedes med at gange (39) med den frekvensuafhængive konstant $2kT/\pi$.

Den klassiske udgave af F.D.teoremet, anvendt på strålingsimpedansen, fører til Raleigh-Jeans formel for spektret af den elektromagnetiske hulrumsstråling. Det var faktisk den ultraviolette katastrofe, som følger heraf, som var det paradoks, der medførte kvantemekanikkens fødsel. Det kan altså siges at være et "held", at Planck ikke tog nulpunktsfluktuationerne med, da han reviderede udtrykket for den termiske energi af den harmoniske oscillator. F.D.teoremet giver spektret for den elektriske feltstyrke. Hvis man ganger dette med $\epsilon_0/2$ derefter med 2 (for at få den magnetiske feltenergi med), fås Planck's formel for spektraltætheden af energitætheden af hulrumsstrålingen ($\omega > 0$):

$$\hat{P}_{e.m.}(\omega) = \frac{\omega^2}{3\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (40)$$

Det er muligt af gennemføre en analyse (byggende på "koherente tilstande"), som viser, at nulpunktsfluktuationerne ikke kommer med, når man måler støjen i et "klassisk energibånd", som leder ind til et kvantemekanisk system. Det vil dog føre for vidt at gå længere ind i denne diskussion nu. Når man diskuterer rent kvantemekaniske forhold, må man tage nulpunktsfluktuationerne med; de er reelle nok og giver sig til kende på mange måder.

Der er imidlertid divergensproblemer i formalismen, når man insisterer på at tale om støjspektrum, og den symmetriserede autokorrelationsfunktion (33) må betragtes med en vis portion skepsis, da det ikke er klart, om den kan måles, og hvordan. Alt i alt står man sig nok bedst ved at benytte "den integrerede form" for F.D.teoremet (27), som imidlertid ikke er almindeligt kendt.

Lad os til slut undersøge, hvordan de anførte formler tager sig ud for et konkret modelsystem.

Hvis systemet er et x-lager i form af en fri partikel med massen m , f.eks. et molekyle i en ideal gas, har vi (sml. 1.2.4.22)

$$Y(t) = \frac{t}{m} \quad ; \quad \hat{Y}_1(\omega) = \frac{\pi}{m} \delta(\omega) \quad (41)$$

Af (34) og (37) fås så

$$\frac{d^2 \Gamma(t)}{dt^2} = \frac{2}{m} \theta(0, T)$$

og da grænseværdien af $\theta(\omega, T)$ i (38) for $\omega \rightarrow 0$ jo er den klassiske værdi kT , har vi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma(t)}{dt^2} &= \frac{2}{m} kT \\ \Gamma(t) &= \frac{kT}{m} t^2 = 2kT \cdot J(|t|) \end{aligned} \quad (42)$$

altså samme resultat som i den klassiske diskussion (sml. 1.4.5.14). Den komplekse breddefunktion $B(t)$ i (26) er så

$$B(t) = \frac{kT}{m} t^2 - i\hbar \frac{t}{m} \quad (43)$$

Når vi så indsætter dette i udtrykket (12) for den intermediære spredningsfunktion og derefter udfører Fouriertransformationen (19), finder vi strukturfunktionen

$$S_s(\kappa, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi m}{\kappa^2 kT}} \cdot e^{-\left(\omega - \frac{\hbar \kappa^2}{2m}\right)^2 / \left(\frac{2}{m} \kappa^2 kT\right)} \quad (44)$$

Vi ser altså, at spredningstværsnittet for en bølge, som ændrer bølgevektoren med beløbet κ er en gaussisk funktion af ω . Centret for absorptionsenergien $\hbar\omega$ ligger ved "rekylenenergien"

$$R = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \quad (45)$$

som jo netop er den energi, partiklen får tildelt, når den fra hvile optager impulsen $\hbar\kappa$. Partiklernes termiske bevægelse giver anledning til en "Doppler-udbredning" af linjen, proportional med temperaturen. Denne sidste effekt vil også fremgå af en rent klassisk behandling, hvorimod rekylenenergien, som fremkommer via det imaginære led i (26), ikke har noget klassisk sidestykke.

Appendix A.Komplekse tal og funktioner.

Et komplekst tal c kan udtrykkes som en sum af et reelt bidrag a og et imaginært bidrag ib :

$$c = a + ib$$

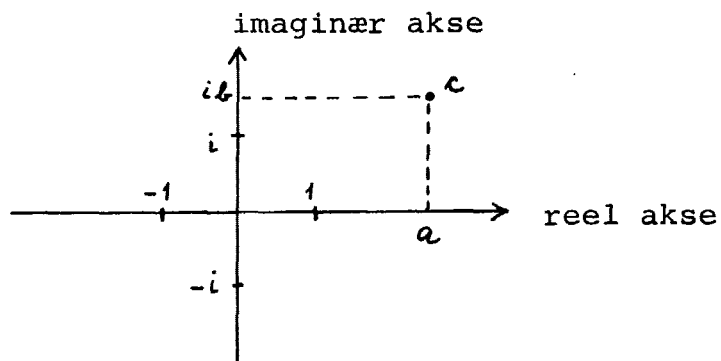
hvor a og b er reelle tal og i den imaginære enhed, der defineres som den ene af de to løsninger til ligningen

$$z^2 + 1 = 0$$

Vi skriver derfor $i = \sqrt{-1}$ og den anden løsning er $-i = -\sqrt{-1}$. Størrelserne a og b kaldes henholdsvis realdelen og imaginærdelen af det komplekse tal c

$$a = \operatorname{Re}(c) \quad ; \quad b = \operatorname{Im}(c) \quad ; \quad c = \operatorname{Re}(c) + i \cdot \operatorname{Im}(c)$$

Komplekse tal afbildes som punkter i en plan, hvor den reelle akse afsættes vandret og den imaginære akse afsættes lodret



Addition: $c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$
 $= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

afbildes ved "kræfternes parallelogram".

Kommutativ lov: $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$

Associativ lov: $(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$

Multiplikation: $c_1 \cdot c_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$
 $= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

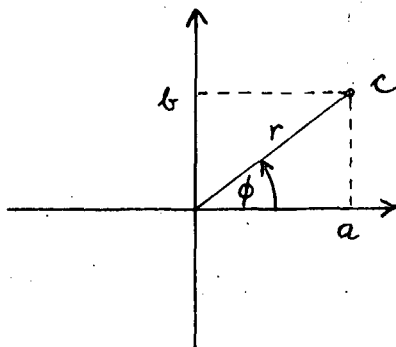
Kommutativ lov: $c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1$

Associativ lov: $(c_1 \cdot c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot (c_2 \cdot c_3)$

Distributiv lov: $c_1 \cdot (c_2 + c_3) = c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3$

Numerisk værdi og fase (modulus og argument).

Skrivemåden $c = a + ib$ svarer, som vi har set til angivelse af et punkt i planen ved hjælp af de retvinklede koordinater (a, b) . Det samme punkt kan også angives ved de polære koordinater (r, ϕ) , hvor r er længden af radiusvektor og ϕ er vinklen mellem radiusvektor og den reelle akse, regnet med fortegn efter den positive omløbsretning mod uret.



De polære koordinater r og ϕ kaldes henholdsvis den numeriske værdi (modulus) og fasen (argumentet) af det komplekse tal

$$\left. \begin{aligned} r &= |c| = \text{mod}(c) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \arg(c) = \text{Arcsin} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + n \cdot 2\pi \end{aligned} \right\} \begin{cases} a = r \cos \phi \\ b = r \sin \phi \end{cases}$$

Sædvanligvis angives fasen i radianer:

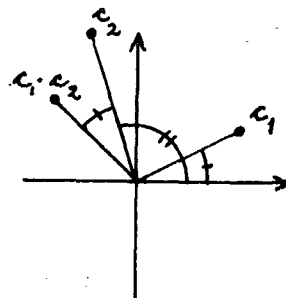
$$\arg(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-1) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arg(1) = 0, \quad \arg(-1) = \pi$$

Multiplikation udtrykt ved numerisk værdi og fase.

$$\text{mod}(c_1 \cdot c_2) = \text{mod}(c_1) \cdot \text{mod}(c_2)$$

$$\arg(c_1 \cdot c_2) = \arg(c_1) + \arg(c_2)$$



Eksponential- og logaritmefunktionen

For en vilkårlig reel fase ϕ defineres

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

d.v.s. som det komplekse tal på enhedscirklen, der har fasen ϕ . Et komplekst tal kan derfor skrives på formen

$$c = |c| \cdot e^{i\phi}$$

Om funktionen $e^{i\phi}$ gælder nogle regler, som berettiger brugen af eksponentialnotationen:

$$e^{i\phi} = 1 \quad \text{for} \quad \phi = 0 \quad (\text{og for } \phi = n \cdot 2\pi)$$

$$e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

sammenlign med ovenstående multiplikationsregel. Eksponentialfunktionen af et vilkårligt komplekst argument:

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i\sin b)$$

Den naturlige logaritmefunktion er den omvendte funktion til eksponentialfunktionen:

$$\ln c = \ln\{|c| \cdot e^{i\phi}\} = \ln|c| + i\phi$$

Imaginærdelen af $\ln c$ er altså kun defineret på nær et helt multiplum af 2π .

Komplekskonjugering.

For $c = a+ib$ defineres det komplekskonjugerede tal:
 $c^* = a-ib$. Så er

$$\operatorname{Re}(c) = a = \frac{1}{2}(c+c^*)$$

$$\operatorname{Im}(c) = b = \frac{1}{2}(c^*-c)$$

$$\operatorname{mod}(c^*) = \operatorname{mod}(c) \quad , \quad \text{eller } |c^*| = |c|$$

$$\operatorname{arg}(c^*) = -\operatorname{arg}(c)$$

$$\text{Absolutkvadrat: } |c|^2 = c^*c = a^2+b^2$$

$$\text{Reel nævner: } \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 \cdot c_2^*}{|c_2|^2}$$

Algebraens fundamentalsætning.

Et komplekst polynomium af n 'te grad

$$P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

har netop n komplekse rødder, d.v.s.

$$P_n(z) = c_n \prod_{i=1}^n (z-z_i)$$

evt. kan visse af rødderne z_i være sammenfaldende. Hvis koefficienterne c_i er reelle, er rødderne z_i enten reelle, eller parvist komplekskonjugerede.

Beregningsteknikker.

I det følgende serveres nogle programstumper for en lom-
meregner med omvendt polsk notation og rullestak (f.eks.
HP25). Programmerne demonstrerer elementære regneopera-
tioner med komplekse tal, som kan kombineres til udreg-
ning af en stor klasse af komplekse funktioner.

Maskinens rullestak består af 4 registre X, Y, Z og T. For
de operationer, som involverer to komplekse tal, $c_1 = a_1 + ib_1$
og $c_2 = a_2 + ib_2$ og med et enkelt tal $c_3 = a_3 + ib_3$ som resultat,
benyttes rullestakken på følgende måde

	X	Y	Z	T
før operation	a_1	b_1	a_2	b_2
efter operation	a_3	b_3		

For operationer, der kun virker på et enkelt tal c , er dette
før og efter operationen anbragt i X og Y.

I visse af beregningerne omregnes til polære koordinater
ved funktionstasten " $\rightarrow P$ ", hvorved tallets numeriske værdi
kommer i X og fassen (i intervallet $-\pi, \pi$) i Y (hvis fassen
ønskes i radianer, skal maskinen først sættes i radian mo-
de. Dette er dog kun nødvendigt ved beregning af eksponen-
tial og logaritmefunktionen). Tilbageregning fra polære
til rektangulære koordinater sker ved funktionstasten " $\rightarrow R$ ".

<u>trin</u>	<u>operation</u>	<u>kommentar</u>
01	CHS	<u>Subtraktion</u> $c_2 - c_1$
02	$x \rightleftarrows y$	
03	CHS	
04	$x \rightleftarrows y$	fortegnsskift på c_1 , derefter:

05	$x \rightleftarrows y$	<u>Addition</u>
06	R \downarrow	
07	+	
08	R \downarrow	

09	+	
10	$x \rightleftarrows y$	
11	R↓	
12	$x \rightleftarrows y$	
13	GTO 00	Stop. resultat $c_2 \pm c_1$
<hr/>		
14	→P	<u>reciprok værdi</u> $1/c_1$ evt. som ind-
15	1/x	ledning til division c_2/c_1
16	$x \rightleftarrows y$	
17	CHS	
18	$x \rightleftarrows y$	
19	→R	
20	R/S	Stop. resultat $1/c_1$
<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>		
21	→P	<u>multiplikation</u> $c_1 \cdot c_2$
22	R↓	
23	R↓	
24	→P	begge tallene nu omregnet til po-
25	$x \rightleftarrows y$	lære koordinater
26	R↓	
27	x	mult. af numeriske værdier
28	R↓	
29	+	addition af faser
30	$x \rightleftarrows y$	
31	R↓	
32	$x \rightleftarrows y$	
33	→R	tilbageregn. til rektang. koord.
34	GTO 00	Stop. resultat $c_1 \cdot c_2$ eller c_2/c_1

Disse programtrin kan passende sammenbygges til et enkelt program, som så kan udføre de elementære regneoperationer:

Subtraktion: GTO 00, R/S
addition: GTO 05, R/S
reciprok værdi: GTO 14, R/S
division: GTO 14, R/S , R/S
multiplikation: GTO 21, R/S

Andre operationer:

Kvadrering: $\rightarrow P, x^2, x \dot{z} y, 2, x, x \dot{z} y, \rightarrow R$

Ekspontialfunktion (radian mode): $e^x, \rightarrow R$

Logaritmfunktion (- -): $\rightarrow P, \ln$

Komplekskonjugering: $x \dot{z} y, CHS, x \dot{z} y$

Kvadratrod: $\rightarrow P, \sqrt{x}, x \dot{z} y, 2, \div, x \dot{z} y, \rightarrow R$

(Da maskinens fase er en vinkel i intervallet

$]-\pi, \pi]$ fås f.eks.: $\sqrt{-1}=i, \sqrt{-1} = (1-i)/\sqrt{2}$)

Appendix B

Resumé af de vigtigste formler fra den komplekse response-teori (paragraf 1.2 og 1.3).

Responsefunktionerne defineres ud fra den semiotiske matrix fig.1.2.3.1, side 86. Funktioner, som står symmetrisk om hoveddiagonalen er hinandens reciproke, medens funktioner som står symmetrisk om skemaets midtpunkt er hinandens duale. De anførte formler er invariante over for en dualitetstransformation, som udføres ved de symbolske substitutioner

$$\begin{array}{lcl} e & \longleftrightarrow & f \\ p & \longleftrightarrow & q \\ F & \longleftrightarrow & G \\ Y & \longleftrightarrow & Z \\ J & \longleftrightarrow & M \end{array}$$

Nogle af formlerne i dette appendix er udtrykt på en lidt anden måde end i hovedteksten, men i de fleste tilfælde er der en ret nær korrespondance, og nummeret på den tilsvarende formel i hovedteksten er angivet.

a. Det tidshomogene standardsignal

$$\phi_s(t) = Ke^{st} = Ke^{-izt} \quad (1.2.1.7)$$

Laplace frekvens $s = \epsilon - i\omega \quad (1.2.1.9)$

Fourier - - $z = is = \omega + i\epsilon \quad (1.2.2.15)$

Reel - - ω

Tilkoblingsparameter ϵ (>0 for retarderet response)

Reelt standardsignal

$$\phi_s^{(r)}(t) = \text{Re}\phi_s(t) = \phi_0 e^{\epsilon t} (\cos\omega t - \phi_1) \quad (1.2.1.14)$$

b. Den frekvensafhængige standardresponsefunktion.

Spændingsinput:

$$\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}\{F(t), s\} = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt \quad (1.2.1.18)$$

$$\tilde{Z}(s) = 1/\tilde{Y}(s) \quad (1.2.1.19)$$

Strøminput:

$$\tilde{Z}(s) = \mathcal{L}\{G(t), s\} = \int_0^{\infty} G(t) e^{-st} dt \quad (1.2.1.20)$$

$$\tilde{Y}(s) = 1/\tilde{Z}(s)$$

Real- og imaginærværdier:

$$\tilde{Y}(s) = \tilde{Y}_1(s) + i\tilde{Y}_2(s)$$

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{Z}_1(s) + i\tilde{Z}_2(s)$$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{Y}_1}{\tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2} \quad (1.2.1.22)$$

$$\tilde{Z}_2 = -\frac{\tilde{Y}_2}{\tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2} \quad (1.2.1.23)$$

Overgang til Fourierfrekvens:

$$\tilde{R}(s) = \hat{R}(z)$$

hvor R symboliserer en vilkårlig af de seks responsefunktioner.

c. Dissipation for reelt standardsignal.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_s^{(r)}(t) = \frac{1}{2} [\tilde{e}_s e^{-i\omega t} + \tilde{e}_s^* e^{i\omega t}]$$

$$w_{\omega} = \frac{1}{2} |\tilde{e}_s|^2 \cdot \hat{Y}_1(\omega) = \frac{1}{2} |\tilde{f}_s|^2 \cdot \hat{Z}_1(\omega) \quad (1.2.1.25-28)$$

d. Fouriertransformation, analytisk udvidet.

$$z = \omega + i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$F\{\phi(t), z\} = \hat{\phi}'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{izt} dt \quad (1.2.2.14)$$

$$F^{-1}\{\hat{\phi}'(z), t\} = \phi(t) = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \hat{\phi}'(z) e^{-izt} dz \quad (1.2.2.19)$$

$$\tilde{\phi}'(s) = \hat{\phi}'(is) = F\{\phi(t), is\} \quad (1.2.2.17)$$

e. Laplacetransformation af responsefunktion.

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{Y}'(s)}{\tilde{\phi}'(s)} = sL\{R(t), s\} \quad (1.2.3.1-9)$$

for en vilkårlig af de 6 responsefunktioner.

$$L\{R(t), s\} = \int_0^{\infty} R(t) e^{-st} dt = 2\pi F\{R(t), is\} \quad (1.2.2.26)$$

$$R(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\tilde{R}(s)}{s}, t \right\} \quad (1.2.5.1)$$

$$\text{hvor } L^{-1}\{\tilde{g}(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \tilde{g}(s) e^{st} ds \quad (1.2.2.27)$$

Skema over Laplacetransformationer side 82,
skema over Responsefunktioner side 86.

f. Skalainvariant system, $J(t) = J_1 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha$

$$\tilde{J}(s) = \alpha! J_1 \cdot (s\tau)^{-\alpha} = \frac{1}{\tilde{G}(s)} \quad (1.2.3.13)$$

$$\tilde{Y}(s) = \alpha! \frac{J_1}{\tau} \cdot (s\tau)^{1-\alpha} = \frac{1}{\tilde{Z}(s)} \quad (1.2.3.14)$$

$$\tilde{F}(s) = \alpha! \frac{J_1}{\tau^2} \cdot (s\tau)^{2-\alpha} = \frac{1}{\tilde{M}(s)} \quad (1.2.3.15)$$

g. Paritet og fortegn.

$$\tilde{R}(s^*) = \tilde{R}^*(s) \quad (1.2.3.10)$$

Specielt for $\tilde{R} = \tilde{Y}$:

$$\tilde{Y}_2(\varepsilon) = 0$$

$$\hat{Y}_1(-\omega) = \hat{Y}_1(\omega) \geq 0 \quad (1.2.3.23 \text{ og } 31)$$

$$\hat{Y}_2(-\omega) = -\hat{Y}_2(\omega) \quad (1.2.3.24)$$

h. Cosinus og sinustransformationer.

$$\hat{Y}_1(\omega) = \int_0^\infty F(t) \cos \omega t \, dt \quad (1.2.3.21)$$

$$\hat{Y}_2(\omega) = \int_0^\infty F(t) \sin \omega t \, dt \quad (1.2.3.22)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{Y}_1(\omega) \cos \omega t \, d\omega = F(|t|) \quad (1.2.3.27)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_2(\omega) \sin \omega t \, d\omega = F(|t|) \cdot \text{sign}(t) \quad (1.2.4.43)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega = Y(|t|) \cdot \text{sign}(t) \quad (1.2.4.38)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{Y}_1(\omega) \cdot \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \, d\omega = J(|t|) \quad (1.2.4.39)$$

i. δ_+ -funktion og principale integraler.

$$s = \varepsilon - i\omega ; \quad z = is = \omega + i\varepsilon$$

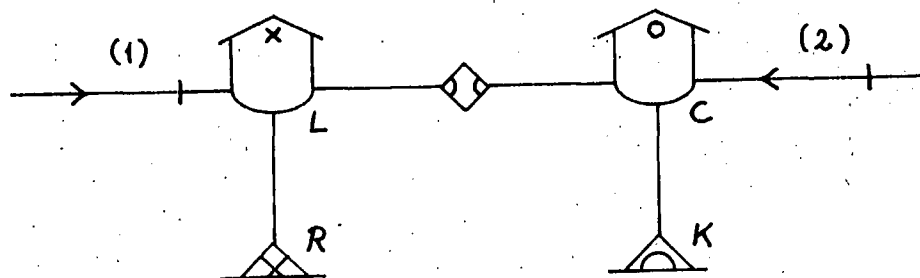
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} = \pi \delta_+(\omega) ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} = -i\pi \delta_+(\omega) \quad (1.2.4.24)$$

$$\delta_+(\omega) = \delta(\omega) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{\omega} \quad (1.2.4.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega - \omega_k} \, d\omega = \text{sign}(t) \cdot \cos \omega_k t \quad (1.2.4.41)$$

j. Dæmpet harmonisk oscillator.



$$\begin{pmatrix} \tilde{f}'_1 \\ \tilde{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & -\tilde{H} \\ \tilde{H} & \tilde{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}'_1 \\ \tilde{f}'_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.5.17)$$

Overføringsfunktion $\tilde{H}(s) = [1 + (K + Cs)(R + Ls)]^{-1}$ (1.2.5.22)

Admittans i port 1 $\tilde{Y}(s) = (K + Cs)\tilde{H}(s)$ (1.2.5.23)

Impedans i port 2 $\tilde{Z}(s) = (R + Ls)\tilde{H}(s)$ (1.2.5.24)

Fysiske parametre:

Egenfrekvens $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (1.2.5.27)

Karakteristisk impedans $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (1.2.5.28)

Matematiske (dimensionsløse) parametre:

Symmetrisk dæmningsforhold $\gamma = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} + \frac{C}{K} \right)$ (1.2.5.29)

Asymmetrisk dæmningsforhold $\delta = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} - \frac{C}{K} \right)$ (1.2.5.30)

Lækproduktet $\lambda = RK = \gamma^2 - \delta^2$ (1.2.5.36)

Q-værdien $Q = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1+\lambda}}$ (1.2.5.39)

Den kvalitative adfærd i de forskellige områder af γ - δ planen fremgår af fig.1.2.5.3.

Karakteristiske frekvenser; poler og residuer:

Svingningsfrekvens $\omega_\delta = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$ (1.2.5.35)

Resonnansfrekvens $\omega_\lambda = \omega_0 \sqrt{1 + \lambda}$ (1.2.5.38)

Resonnansfrekvensen er her defineret som den frekvens for hvilken overføringsfunktionen er rent imaginær. D.v.s. fasedrejningen ved resonansen er $\frac{\pi}{2}$, amplitudeforstærkningen er Q:

$$\hat{H}(\pm\omega_\lambda) = \pm iQ \quad (1.2.5.42)$$

Responsefunktionens poler i s-planen er

$$\begin{aligned} s_1 &= -\gamma\omega_0 - i\omega_\delta \\ s_2 &= -\gamma\omega_0 + i\omega_\delta \end{aligned} \quad (1.2.5.26)$$

Residuer i det underdæmpede tilfælde ($|\delta| < 1$)

$$\begin{aligned} \text{Res}\tilde{H}(s_1) &= \frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \text{Res}\tilde{Y}(s_1) &= \frac{1}{2L} \left[1 + i \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right] \\ \text{Res}\tilde{Z}(s_1) &= \frac{1}{2C} \left[1 - i \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5.47)$$

Residuerne i s_2 fremfår heraf ved komplekskonjugering.

Energibandsparametre:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{Z_0}{\omega_0} \quad ; \quad C = \frac{1}{\omega_0 Z_0} \\ R &= Z_0 (\gamma + \delta) \quad ; \quad K = \frac{1}{Z_0} (\gamma - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5.32)$$

k. Spektralformler og dispersionsrelationer.

$$\hat{Y}(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \hat{Y}_1(\omega') \left[\frac{1}{z-\omega'} + \frac{1}{z+\omega'} \right] d\omega' \quad (1.3.1.7)$$

En anden måde at udtrykke samme relation på:

$$\tilde{Y}(s) = \frac{2s}{\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{s^2 + \omega'^2} d\omega' \quad (1.3.3)$$

$$\hat{Y}(z) - Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{Y}_2(\omega') \left[\frac{1}{z+\omega'} - \frac{1}{z-\omega'} \right] d\omega' \quad (1.3.1.12)$$

$$Y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{Y}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \tilde{Y}(\epsilon)$$

Kramers-Kronig relationerne:

$$\hat{Y}_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{Y}_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.3.1.17)$$

$$\hat{Y}_1(\omega) - Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{Y}_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.3.1.18)$$

1. Retarderede, avancerede og symmetriske responsefunktioner.

$$F^S(t) = \frac{1}{2} F(|t|) \text{sign}(t) \quad (1.3.2.17)$$

$$\hat{Y}^S(z) = \text{sign}(\epsilon) \cdot \int_0^{\infty} F(t) \cos zt dt + i \int_0^{\infty} F(t) \sin zt dt \quad (1.3.2.23)$$

$$\hat{Y}^S(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} F(t) e^{izt} dt = \hat{Y}^R(z) = \hat{Y}(z) & \text{for } \epsilon > 0 \\ - \int_0^{\infty} F(t) e^{-izt} dt = \hat{Y}^A(z) & \text{for } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (1.3.2.24)$$

$$\hat{Y}^A(-z) = -\hat{Y}^R(z) \quad (1.3.2.25)$$

Appendix CLommeregner (HP25) program vedrørende den dæmpede harmoniske oscillator.

Det følgende program, som er anvendt til udregning af fig. 1.2.5.4, giver et eksempel på implementering af response-teoriens undertiden indviklede formler til praktisk brug i laboratoriet.

Vi sætter os for at udregne overføringsfunktionen for den dæmpede oscillator

$$\hat{h}(x) = [1 + \lambda - x^2 - 2i\gamma x]^{-1} \quad (1)$$

hvor $x = \omega/\omega_0$ forudsættes reel. Resultaterne ønskes opgivet i form af den numeriske værdi $|\hat{h}|$, amplitudeforstærkningen, og fasedrejningen ϕ , normeret til intervallet $[0, \pi[$. Udregningen af \hat{h} kræver kendskab til parametrene λ og γ (som begge er ikke-negative ifølge lækaxiomet), og programmet indeholder derfor et par formler, som udregner λ og γ ud fra parametrene δ og Q :

$$\lambda = -\frac{1+\delta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\delta^2}{2}\right)^2 - \delta^2 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (\text{givet } \delta, Q) \quad (2)$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda + \delta^2} \quad (\text{givet } \delta, \lambda) \quad (3)$$

I andre tilfælde, hvor én af parametrene λ og γ er kendt, må udregningen af den anden ske manuelt ved brug af en af formlerne

$$\lambda = \gamma^2 - \delta^2 \quad (\text{givet } \gamma, \delta) \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{4\gamma^2 Q^2} - 1 \quad (\text{givet } \gamma, Q) \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{1}{2Q\sqrt{1+\lambda}} \quad (\text{givet } \lambda, Q) \quad (6)$$

Registrene i maskinen bruges af programmet på følgende måde:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \gamma \\
 R_1 &= \delta \\
 R_2 &= \lambda \\
 R_3 &= Q \\
 R_4 &= x \\
 R_5 &= \delta^2 \\
 R_6 &= (1+\delta^2)/2 \\
 R_7 &\text{ bruges ikke.}
 \end{aligned}$$

Start med at indlæse programmet:

trin	ordre	kommentar
01	STO 4	variablen x, som står i X-registret, lagres i R_4
02	2	her starter beregningen af $\hat{h}(x)$
03	x	
04	RCL 0	(γ)
05	x	udregning af $-2\gamma x$
06	CHS	
07	RCL 2	
08	1	
09	+	
10	RCL 4	(x)
11	x^2	
12	-	Nu er $X=\text{Re}(\hat{h}^{-1})=1+\lambda-x^2$ og $Y=\text{Im}(\hat{h}^{-1})=-2\gamma x$
13	→P	Omregn. til pol.koord. $X= \hat{h}^{-1} , Y=\arg(\hat{h}^{-1})$
14	1/X	Nu er $X= \hat{h} $
15	R/S	Resultatet aflæses.
16	$x \geq y$	
17	CHS	Nu er $X=\arg(\hat{h})$
18	π	Hvis denne vinkel er <0 , skal maskinen lægge π til, så vi får resultatet $X=\phi$ i intervallet $[0, \pi[$.
19	$x \geq y$	
20	$x < 0?$	
21	+	

trin	ordre	kommentar
22	GTO 00	Klar til udregning af $\hat{h}(x)$ med nyt x .
23	STO 1	Omregn. fra (Q, δ) til (λ, γ) ; $X=\delta$, $Y=Q$
24	x^2	
25	STO 5	δ^2 lagres i R_5
26	1	
27	+	
28	2	
29	\div	
30	STO 6	$(1+\delta^2)/2$ lagres i R_6
31	x^2	
32	RCL 5	(δ^2)
33	-	
34	$x \geq y$	Q bringes frem
35	STO 3	og lagres
36	x^2	
37	$1/x$	
38	4	
39	\div	$x = 1/(4Q^2)$
40	+	
41	\sqrt{x}	Nu er $\sqrt{\quad}$ i formel (2) udregnet
42	RCL 6	$((1+\delta^2)/2)$
43	-	
44	STO 2	Resultatet λ lagres i R_2
45	R/S	og aflæses. Hvis $\lambda < 0$, er $ \delta $ for stor.
46	RCL 5	start så forfra, og sørg for, at $ \delta \leq$
47	+	$(2Q)^{-1}$. Der fortsættes direkte (tryk R/S)
48	\sqrt{x}	fra trin 46 med formel (3) og lagring af
49	STO 0	γ . Maskinen er nu klar til at udregne $\hat{h}(x)$.

Brug af programmet.

1. Da fasedrejningen ϕ skal opgives i radianer, skal maskinen bringes i radian mode: tryk g RAD
2. Vi forudsætter først, at δ og Q er de kendte parametre (ellers gå videre til punkt 3):

indlæs Q
 tryk ENTER↑
 indlæs δ
 tryk GTO 23
 tryk R/S
 aflæs λ og kontroller, at $\lambda \geq 0$, ellers start for-
 fra: $|\delta| \leq (2Q)^{-1}$
 tryk R/S
 aflæs γ

Gå herefter videre til punkt 4.

3. Hvis én af parametrene λ og γ er kendt og den anden ukendt, må man starte med at lagre den kendte i det rigtige register, (γ i R_0 , λ i R_2). Derefter udregnes den ukendte manuelt med én af formlerne (3), (4), (5) eller (6), og lagres. Hvis begge parametrene λ og γ er kendte, skal de blot lagres. Sørg for, at maskinen starter fra trin 00, (tryk f PRGM) før udregningen i punkt 4. I det tilfælde, hvor λ og δ er de givne parametre kan man få lidt hjælp fra programmet ved at gå frem på følgende måde:

indlæs δ
 tryk $g x^2$
 indlæs λ
 tryk STO 2
 tryk GTO 47
 tryk R/S
 aflæs γ

og gå så videre med punkt 4.

4. Udregning af amplitudeforstærkningen $|\hat{h}|$ og fasedrejningen ϕ for en given værdi af den reelle frekvensvariabel $x = \omega/\omega_0$:

indlæs x
 tryk R/S
 aflæs $|\hat{h}|$
 tryk R/S
 aflæs ϕ

og start evt. forfra under dette punkt med ny x-værdi.

Refencer.

Denne litteraturliste består af to dele:

- a) Hovedrefencer, nummereret med romertal. Disse kan være nyttige som forudsætninger eller opslagsværker i forbindelse med stort set hele teksten.
- b) Baggrundsreferencer, nummereret med arabertal. Kildemateriale, oversigtsartikler og lærebøger, som har en mere specifik forbindelse til punkter i teksten. Hvert punkt i denne liste er forsynet med sidetal, der refererer tilbage til teksten.

Hovedreferencer

- I. P.V.Christiansen: "Dynamik og diagrammer". IMFUFA tekst nr. 8, 1978.
- II. J. Gundermann: "Grundlæggende energibåndsteknik". Københavns Universitet, Fysisk Laboratorium I, 1976.
- x III. P.V.Christiansen, E.B.Hansen, L.Josephsen og J.Gundermann: "Ecophysics, part 1: Energy and information". Københavns Universitet, Fysisk Laboratorium I, 2.udgave, 1977.
- IV. Mogens Brun Heefelt: "Lineære differentiaalligninger og differentiaalligningssystemer". IMFUFA tekst nr. 12, 1979.
- V. M.Abramowitz and I.A.Stegun: "Handbook of Mathematical Functions", Dover, 1965.

Baggrundsreferencer

1. J.Buchler (ed.): "The Philosophical Writings of Peirce". Hartcourt, Brace and Comp. N.Y. 1955. (s.7)
2. Roman Jacobson: "Elementer, funktioner og strukturer i sproget. Udvalgte artikler om sprogvidenskab og semiotik". Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, København 1979. (s.8)
3. A.F.Andersen, H.Bohr og Rich.Petersen: "Lærebog i matematisk analyse". Bind IV. Jul.Gjellerup, København 1959. (s.59)
4. H.Dym and H.P.McKean: "Fourier Series and Integrals", Academic Press, New York 1972. (s.71)
5. T.M.Apostol: "Mathematical Analysis", Addison-Wesley, 1957. (s.71)
6. R.P.Feynmann, R.B.Leighton and M.Sands: "The Feynmann Lectures on Physics", vol.I. Addison-Wesley, 1963. (s. 125, s. 279)
7. M.E.Van Valkenburg: "Network Analysis", Prentice Hall, 1964. (s. 125)
8. J.C.Slater and N.H.Frank: "Elektromagnetism", McGraw-Hill, 1947. (s. 140)
9. J.Teuber og L.Schiøler: "Universet før og nu". GAMMA nr. 40, juni 1979. (s. 156)
10. J.V.Narlikar: "Time Asymmetry in Electrodynamics and Cosmology".
D.Layzer: "Cosmic Evolution and Thermodynamic Ir-

reversibility".

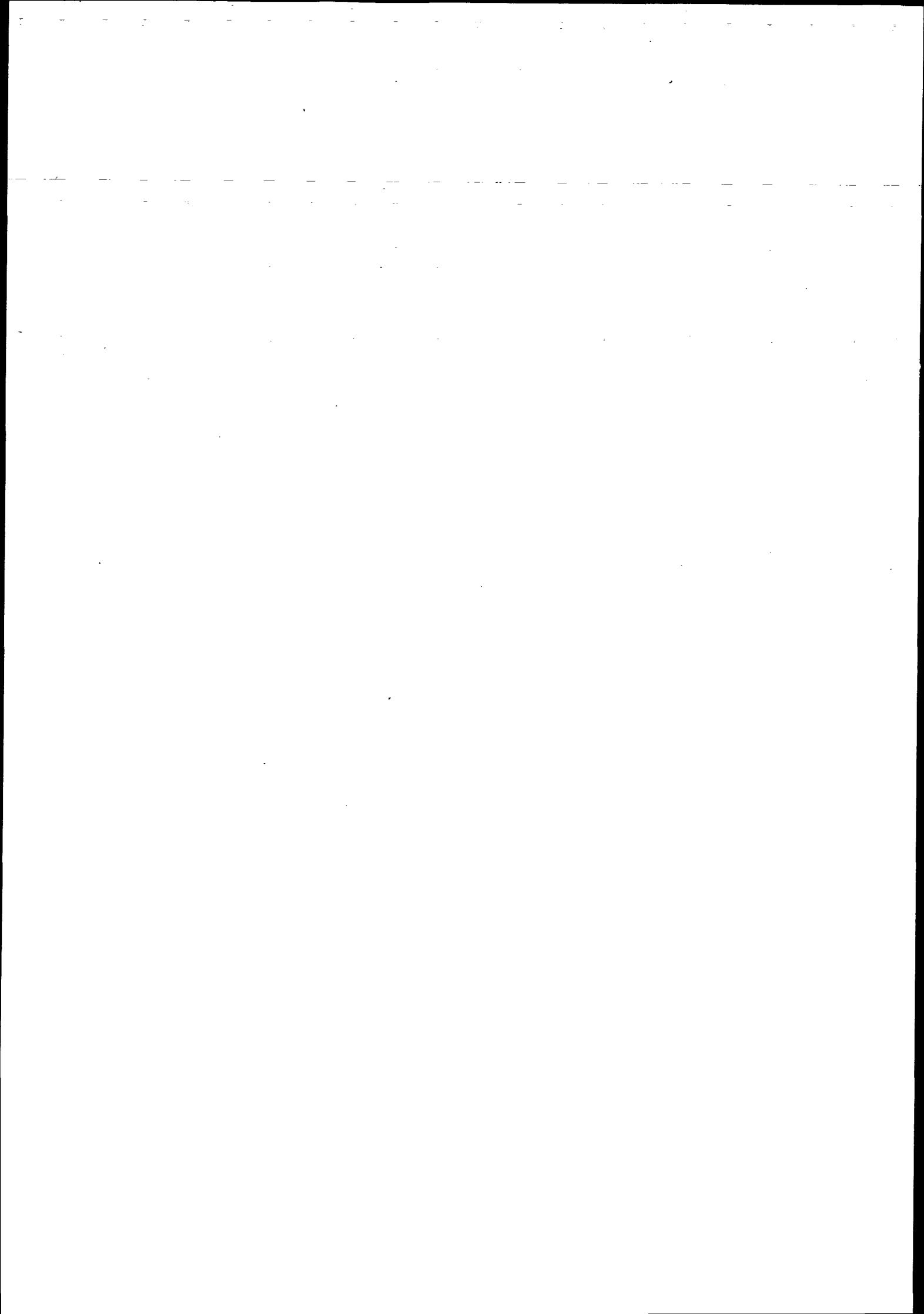
Begge artikler findes i:

IUPAC & IUPAP, Proceedings of the International Conference on Thermodynamics, Cardiff U.K., april 1970, ed. P.T.Landsberg. (s. 156)

11. P.V.Christiansen: "Maxwell's dæmon". GAMMA nr. 23, februar 1975. (s. 157)
12. R.D.Mattuck: "Thermal Noise Theory of Psychokinesis: Modified Walker Model with Pulsed Information Rate". Udkommer i tidsskriftet Psychoenergetic Systems, Gordon and Breach, 1979. (s. 157)
13. H.J.Morowitz: "Energy Flow in Biology". Academic Press, 1968. (s. 158)
14. P.V.Christiansen: "Nobelprisen i Kemi". GAMMA nr. 33, november 1977. (s. 158)
15. M.E.Van Valkenburg: "Introduction to Modern Network Synthesis", Wiley 1960. (s. 159, s. 169)
16. I.Gullvåg: "Charles Sanders Peirce". Pax Forlag, Oslo, 1972. (s. 186)
17. L.Szilard: "Über die Ausdehnung der phänomenologischen Thermodynamik auf die Schwankungserscheinungen". Zeitschr. für Physik, 32, 52 (1925). (s. 187)
18. W.Feller: "An Introduction to Probability Theory and its Applications", vol.I. Wiley, 1950. (s. 190)
19. A.I.Khinchin: "Mathematical Foundations of Statistical Mechanics". Dover, 1949. (s. 190)

20. N.Wiener: "The Fourier Integral and Certain of its Applications". Cambridge University Press, 1933.
Genoptrykt af Dover, New York. (s. 191)
21. H.B.Callen: "Thermodynamics". Wiley, 1960. (s. 204)
22. H.B.Callen and T.A.Welton: "Irreversibility and Generalized Noise". Phys. Rev. 83, 34 (1951). (s. 208)
23. "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes".
ed. Nelson Wax, Dover. (s. 223)
24. J.P.Hansen and I.R.McDonald: "Theory of Simple Liquids". Academic Press, 1976. (s. 225)
25. K.Carneiro: "Velocity-autocorrelation Function in Liquids, Deduced from Neutron Incoherent Scattering Results". Phys. Rev. A 14, 517 (1976). (s. 226, s. 259)
26. K.S.Singwi and A.Sjölander: "Resonance Absorption of Nuclear Gamma Rays and the Dynamics of Atomic Motions". Phys. Rev. 120, 1093 (1960). (s. 226, s. 272)
27. J.Højgaard Jensen: "Mössbauer Effect and Molecular Motion in Condensed Systems with Diffusion". Phys. kondens. Materie 13, 273 (1971). (s. 231)
28. D.K.C. McDonald: "Noise and Fluctuations: an Introduction". Wiley, 1962. (s. 237, s. 279)
29. A.J.Barlow, A.Erginsav and J.Lamb: "Viscoelastic Relaxation of Supercooled Liquids. II". Proc. Roy. Soc. A 298, 481 (1967).
En udførlig diskussion af BEL modellen og dens forudsætninger findes også i:

- G.Harrison: "The Dynamic Properties of Supercooled Liquids". Academic Press, 1976. (s. 260)
30. J.Frenkel: "The Kinetic Theory of Liquids". Dover, 1955. (s. 261)
31. B.Karpatschhof: "Eksponentielle og generaliseret eksponentielle skalainvariante modeller med særligt henblik på inkonsistensen af Lebesguemålet på ratio-skalaen". Optryk af foredrag på Matematisk Institut, København, 15. oktober 1975. (s. 266)
32. Ib Damgaard Petersen: "Kybernetiske systemers udviklingslove". Københavns Universitets Institut for Samfundsfag, 1979. (s. 266).
33. A.Messiah: "Quantum Mechanics I & II". North Holland, 1961. (s. 268)
34. H.B.Callen: "The Fluctuation-Dissipation Theorem and Irreversible Thermodynamics". Artikel i bogen "Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems", ed. D.Ter Haar, Oliver and Boyd, 1962. (s. 269)



- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen"
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde
university centre (Denmark), 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.