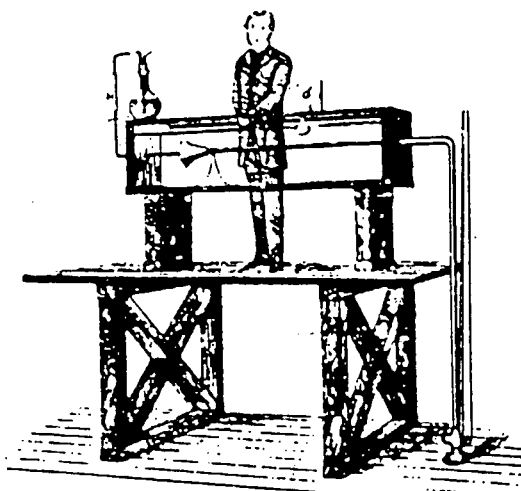


# TEKST NR 219

# 1992

## RUPNOK

- stationær strømning i elastiske rør



af

Anja Boisen  
Karen Birkelund  
Mette Olufsen

Vejledt af

Jesper Larsen

## TEKSTER fra

# IMFUFA

## ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

RUPNOK - Stationære væskestrømninger i elastiske rør.

af: Karen Birkelund, Anja Boisen og Annemette Olufsen.

Vejleder: Jesper Larsen.

IMFUFA tekst nr. 219/92, RUC. 167 sider. ISSN 0106-6242

---

## Abstract

Dette er et matematikprojekt om stationære strømninger i elastiske rør. En dynamisk strømningssmodel udviklet af C. Cancelli og T. J. Pedley gøres stationær. Denne forsimplede differentiaallignings-model kan stort set løses analytisk. Nogle få udtryk må beregnes numerisk, hvorfor computerprogrammet RUPNOK opstilles. Programmet indeholder hele strømningssmodellen og er dokumenteret og forklaret.

Ved brug af programmet undersøges modellens begrænsninger og følsomhed overfor parameterændringer. Cancelli og Pedley's statiske resultater har det dog ikke været muligt at reproducere, hvilket diskuteres.

I samarbejde med overlæge dr. med. Svend Mortensen, Glostrup Amtssygehus, relateres de simulerede strømningssprocesser til strømninger i det mandlige urinrør. Specielt forsøges det at give en forklaring på et indenfor urologien ofte observeret men endnu ikke forstået tryktab i de sidste 2/3 af urinrøret. Det må dog konkluderes, at modellen i den forbindelse er utilstrækkelig.

# Forord

Denne rapport er et resultat af projektarbejdet udført af Karen Birkelund, Anja Boisen og Mette Sofie Olufsen i efteråret 1991 ved matematik-overbygningen på Roskilde Universitetscenter. Projektet er et modul 2 projekt for Karen Birkelund samt Mette Sofie Olufsen og et modul 3 projekt for Anja Boisen.

Vi takker vores vejleder Jesper Larsen for god og engageret støtte i projektarbejdet samt overlæge Dr. med Svend Mortensen for deltagelse i diskussionen af aspekterne for relationen mellem model og virkelighed.

Januar 1992, Karen Birkelund, Anja Boisen og Mette Sofie Olufsen.

# Indhold

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Hydrodynamik generelt</b>                        | <b>5</b>  |
| 1.1      | Massebevarelse . . . . .                            | 5         |
| 1.2      | Impulsbevarelse . . . . .                           | 6         |
| 1.3      | Viskositet . . . . .                                | 8         |
| 1.4      | Reynoldstal . . . . .                               | 8         |
| 1.5      | Energibevarelse og energitab . . . . .              | 9         |
| 1.6      | En tilstandsligning . . . . .                       | 10        |
| <b>2</b> | <b>Gennemgang af Cancelli og Pedley's model</b>     | <b>11</b> |
| 2.1      | Introduktion . . . . .                              | 12        |
| 2.2      | Ligninger for rørets elastiske egenskaber . . . . . | 13        |
| 2.3      | Kontinuitetsligningen . . . . .                     | 17        |
| 2.4      | Bevægelsesligningen . . . . .                       | 19        |
| 2.5      | Systemets ligninger . . . . .                       | 25        |
| 2.6      | Ligningerne for randbetingelserne . . . . .         | 26        |
| 2.7      | Ligningerne for begyndelsesbetingelserne . . . . .  | 29        |
| 2.8      | Ligning for trykket i reservoiret . . . . .         | 30        |
| 2.9      | Ligning for trykket i kammeret $p_e$ . . . . .      | 31        |
| 2.10     | Systemet på dimensionsløs form . . . . .            | 33        |
| <b>3</b> | <b>Stationære løsninger</b>                         | <b>39</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>4</b> | <b>Fra model til resultat</b>                         | <b>53</b>  |
| 4.1      | Integralet af $P(\alpha)$ . . . . .                   | 53         |
| 4.2      | Det mindste tværsnitsareal $\alpha_{min}$ . . . . .   | 55         |
| 4.3      | Selve algoritmen for $\alpha_s$ . . . . .             | 56         |
| 4.4      | De enkelte punkter i algoritmen . . . . .             | 58         |
| 4.5      | Beregning af $\alpha(x)$ . . . . .                    | 61         |
| 4.6      | De enkelte punkter i algoritmen . . . . .             | 62         |
| 4.7      | Beregning af $H(x)$ . . . . .                         | 63         |
| <b>5</b> | <b>Numeriske metoder</b>                              | <b>65</b>  |
| 5.1      | Nulpunktssøgning . . . . .                            | 65         |
| 5.2      | Numerisk integration . . . . .                        | 73         |
| <b>6</b> | <b>Kørsler</b>  | <b>97</b>  |
| 6.1      | Kørsler med værdier fra den dynamiske model . . . . . | 98         |
| 6.2      | Kørsler med andre parameterværdier . . . . .          | 106        |
| <b>7</b> | <b>Diskussion</b>                                     | <b>115</b> |
| 7.1      | Kørsler med varierende parametervalg . . . . .        | 118        |
| 7.2      | Modellen kontra det fysiologiske system . . . . .     | 121        |
| <b>A</b> | <b>Programdokumentation</b>                           | <b>123</b> |
| <b>B</b> | <b>Selve programmet</b>                               | <b>143</b> |
|          | <b>Litteratur</b>                                     | <b>161</b> |
|          | <b>Liste over figurer</b>                             | <b>163</b> |
|          | <b>Liste over algoritmer</b>                          | <b>165</b> |
|          | <b>Indeks</b>   | <b>166</b> |

# Indledning

Lægevidenskaben beskæftiger sig blandt andet med at beskrive og forklare de processer, der foregår i den menneskelige organisme, og en stor del af forskningen i dag vedrører strømmingen i blodårer, urinveje, luftveje og tarmsystem under forskellige former for belastning.

Dette skyldes, at netop kredsløbssystemerne er af vital betydning for den levende organisme, og samtidig har de ofte en meget indviklet og kompliceret funktion. Derfor involverer forskningen på dette område i stigende grad biologiske, fysiske og matematiske modeller, der kan afspejle kredsløbssystemets indviklede funktioner.

Fælles for menneskets forskellige kredsløb er, at de består af elastiske rør, der kan kollabere, når forskellen mellem det indre tryk (i røret) og det ydre tryk (omgivelserne) overstiger en vis kritisk værdi.

Der er blevet opstillet flere mere eller mindre simple matematiske modeller for strømning i elastiske rør. En af disse modeller er udarbejdet af C. Cancelli og T.J. Pedley. Deres arbejde findes i tidsskriftet *Journal of Fluid Mechanics*, 1985, vol 157, side 375-404: "A separated-flow model for collapsible-tube oscillations".

I denne rapport vil vi beskrive strømning i elastiske rør med udgangspunkt i denne artikel. Cancelli og Pedley betragter et dynamisk system, mens vi begrænser os til at behandle det stationære tilfælde. Dels fordi en stationær strømningsmodel er lettere at overskue, når betydningen af de enkelte parameterværdier skal undersøges, og dels fordi vi har en formodning om, at den stationære model er tilstrækkelig til at beskrive de væsentlige træk ved systemet.

Først giver vi en generel indføring i hydrodynamik, for at fremme forståelsen af det fysiske system. Derpå følger en redegørelse af Cancelli og Pedley's dynamiske model, som vi derefter arbejder videre med i det stationære tilfælde.

Til løsning af det stationære system har vi udviklet et program i programmeringssproget Pascal. Hertil har vi benyttet forskellige former for numeriske løsningsmetoder, der vil blive forklaret.

Ved brug af programmet har vi forsøgt at reproducere nogle af Cancelli og Pedley's resultater. Desuden har vi undersøgt modellens følsomhed overfor ændringer af udvalgte parameterværdier. Programmet samt dokumentation hertil findes som appendiks til rapporten.

Endelig har vi haft kontakt med overlæge Dr. med Svend Mortensen, urolog ved Glostrup Amtssygehus, der har beskæftiget sig meget med forskning af det mandlige urinvejssystem.

Generelt mener Svend Mortensen, at de hidtidige matematiske modeller er utilstrækkelige, når strømmen gennem et urinrør skal beskrives. Dette gælder både for modeller vedrørende elastiske rør og for modeller vedrørende stive rør. I begge tilfælde passer de beregnede størrelser og de eksperimentelle data ikke overens. Denne uoverensstemmelse skyldes, at der i eksperimenterne ofte observeres et stort tryk- og energitab i de sidste  $2/3$  af røret, der ikke kan forklares teoretisk ved de eksisterende strømnings-modeller.

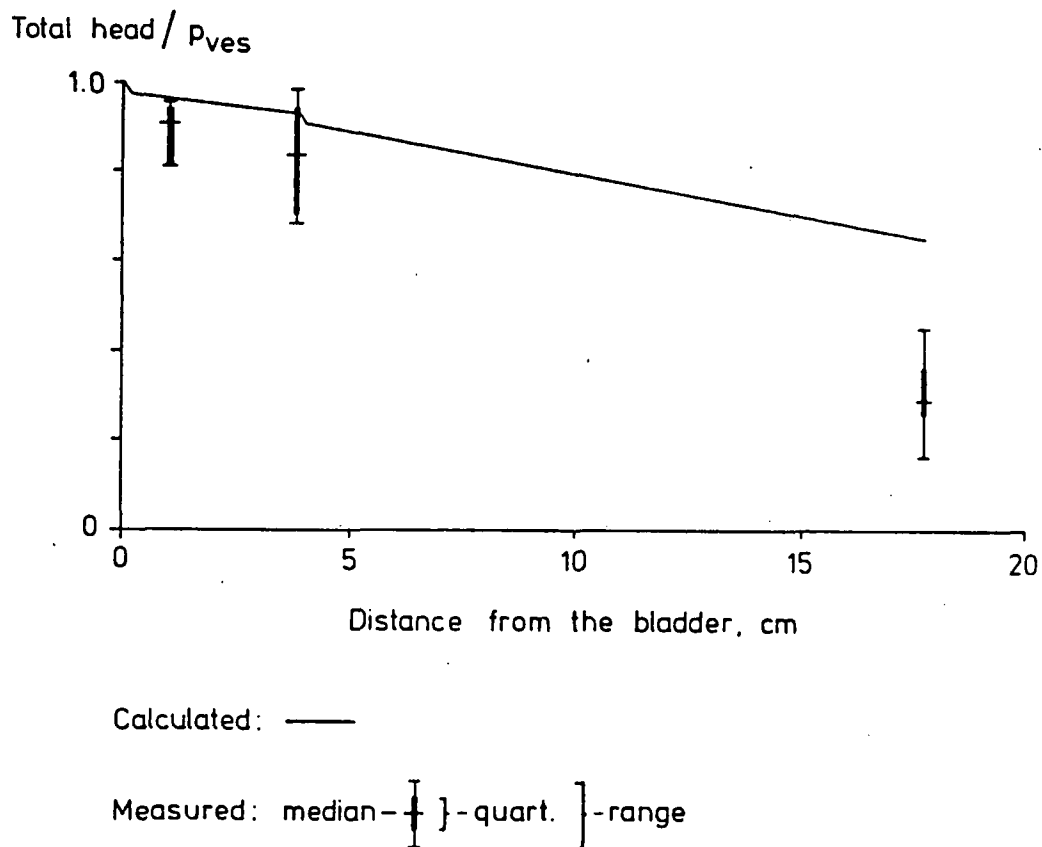
Strømningen igennem urinrøret er åbenbart mere kompliceret end som så. Den lader sig ikke forklare ved et par fysiske grundsætninger og lidt matematisk snilde. Spørgsmålet er nu, om det overhovedet er muligt at opstille en acceptabel model, der samtidig er overskuelig. Svend Mortensen tvivler, idet systemet synes meget komplekst.

En del matematikere og medicinere har beskæftiget sig med problemstillingen, men har ifølge Svend Mortensen ikke nået banebrydende resultater inden for de sidste 20 år. Derfor vil selv en undersøgelse af den stationære strømning være af interesse. (Rent biologisk vil urinstrøm være stationær i et par sekunder.) Svend Mortensen har dog på fornemmelsen, at det for urinstrømme vil være umuligt at finde stationære løsninger, idet systemet vil begynde at svinge.

Da ingen model er blevet fundet særligt egnet, fortolker urologer stadig deres måleresultater ud fra et empirisk grundlag. Ved en sædvanlig undersøgelse måles trykket i blæren, rørets tværsnitsareal og hastigheden, hvormed man lader vandet. Ud fra disse målinger er det ikke muligt at forklare årsagen til et eventuelt vandladnings-problem, men af erfaring ved man hvilken behandlingsform, der passer bedst til en given måling. Behandlingerne skulle ifølge Svend Mortensen være vellykkede i langt de fleste tilfælde.

Under strømningen i et urinrør forekommer der ifølge Svend Mortensen et stort trykfald i den midterste del af røret. Figur 0.1 viser det teoretisk beregnede relative trykfald, der er bestemt ved hjælp af den stationære Bernoulli-ligning, overfor det målte trykfald. Disse målinger er foretaget tre steder i urinrøret på 10 forskellige personer, de afsatte punkter viser således variationen over de enkelte målinger. Dette trykfald optager en del urologer og fysikere, men endnu er man ikke i stand til at forklare fænomenet. Dette skyldes primært, at de eksisterende

målemetoder til registrering af tværsnitsareal, tryk og strømningshastighed ikke kan give et præcist billede af hele strømningforløbet, men kun kan foretages udvalgte steder i røret. Derfor er det for eksempel svært at konstatere et eventuelt kollaps. Ved kollaps forstås en kraftig indsnævring af urinrøret.



**Figur 0.1:** Trykfaldet i det mandlige urinrør under vandladning, kilde: Svend Otto Mortensen, Cross-sectional areas in the normal male urethra during voiding, side 96, 1989

Ingen matematisk model har vist sig forklaringsdygtig. På trods af dette vil vi med udgangspunkt i den statistiske model forsøge at give nogle bud på årsagen/årsagerne til dette store tryk- og energitab.

Projektets formål kan følgelig opsummeres til:

- at opstille en stationær model for væskestrømning i elastiske rør.



- at undersøge om Cancelli og Pedley's resultater kan reproduceres.
- at undersøge modellens følsomhed over for parameterændringer.
- at give en mulig kvalitativ forklaring på det store tryk- og energitab i det mandlige urinrør.

De tre første punkter er medtaget, for at opstille og forstå modellen samt for at kontrollere vore resultater med dem, der er beskrevet i Cancelli og Pedley's artikel. Sidste punkt er vigtigere, idet vi her forsøger at relatere resultaterne til Svend Mortensen's arbejde med det mandlige urinrør.

# Kapitel 1

## Hydrodynamik generelt

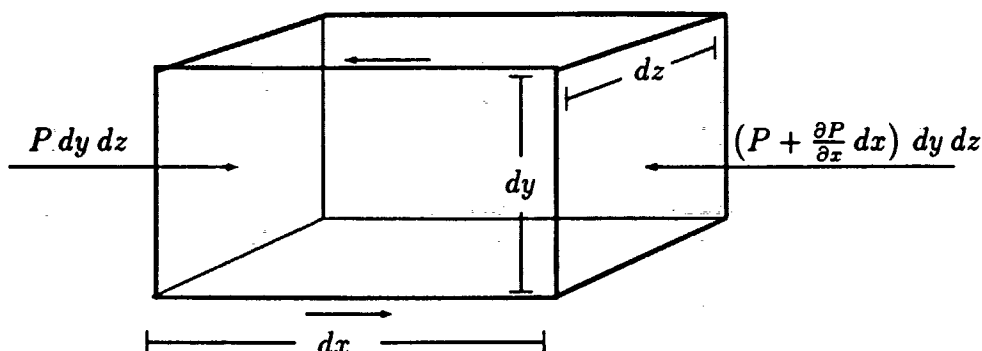
I dette kapitel vil vi kort introducere et par af hydrodynamikkens grundbegreber. Til dette formål vil vi kun betragte strømninger i en dimension i vandrette, stive rør, hvorfor enkelte af de udledte ligninger skal ændres en smule, når vi senere omtaler elastiske rør.

Nogle af hydrodynamikkens væsentligste love kan udledes på baggrund af antagelser om masse- impuls- og energibevarelse. Disse love vil blive forklaret på baggrund af de nævnte antagelser.

### 1.1 Massebevarelse

Antages det, at væskestrømmens masse er konstant, kan den såkaldte kontinuitetsligning opstilles. For langt de fleste væsker er det rimeligt at antage, at de er usammentrykkelige - det vil sige, at densiteten  $\rho$  af væsken er konstant. Da urin og vand, som er de væsker vi betragter, regnes for usammentrykkelige, vil vi her begrænse os til at arbejde med denne type væsker. Det betyder, at den førnævnte massebevarelse kan sidestilles med volumenbevarelse.

Betragtes væsketransport i et stift rør, vil et krav om volumenbevarelse betyde, at den mængde væske, der strømmer ind i røret pr. tidsenhed, er lig med den mængde væske, der strømmer ud af røret pr. tidsenhed. Dette beskriver stort set kontinuitetsligningen for stive rør i en dimension. En matematisk formulering af kontinuitetsligningen for elastiske rør findes i kapitel 2 side 17.



Figur 1.1: Kræfterne på en væskepartikel når der kun er strømning i  $x$ -aksens retning.

## 1.2 Impulsbevarelse

Hvis der i et system er impulsbevarelse, følger det, at Newton's 2. lov må gælde. Normalt benyttes Newton's dynamiske love, når vekselvirkningen mellem partikler skal beskrives, men ved at opdele væsken i såkaldte væskepartikler kan disse partikellove overføres til love for væskestrømninger. Da en væskepartikel er en infinitesimal del af væsken, hvori antallet af molekyler er konstant, vil partiklens masse  $m$  og dermed også dens volumen være konstant.

Betragtes en sådan partikel, må der ifølge Newton's 2. lov gælde, at:

$$\frac{dp(x, t)}{dt} = m \frac{du(x, t)}{dt} = \sum F(x, t) \quad (1.1)$$

hvor  $p$  og  $u$  er henholdsvis partiklens impuls og hastighed, mens  $\sum F(x, t)$  er summen af de kræfter, der virker på partiklen. Væskepartiklens masse kan beskrives ved  $(dx dy dz) \rho$ , se figur 1.1.

Kræfterne langs partiklens ydersider skyldes væskens viskositet. Disse viser sig oftest at være ubetydelige, og vil i vores beregninger blive udeladt.

I det følgende underforstås henholdsvis sted- og tidsafhængigheden af de variable.

Kræfterne virkende på partiklens endeflader er givet ved væskens tryk  $P$  på de pågældende flader. Når trykket på højre endeflade, se figur 1.1 skal bestemmes, er det nødvendigt at beregne trykket i punktet  $x + \Delta x$ .

Dette gøres ved at Taylorudvikle  $P(x + \Delta x)$  til første orden i punktet  $x = 0$ .

$$P(\Delta x) \simeq P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2$$

Den resulterende kraft i partiklens  $x$ -retning  $F_x$  er således for  $\Delta x \rightarrow 0$  givet ved:

$$F_x = P dy dz - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

Indsættes dette i ligning (1.1) fås:

$$\begin{aligned} dx dy dz \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \Leftrightarrow \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

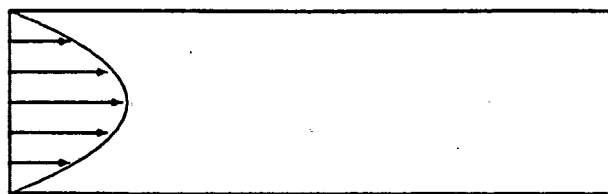
Men da  $u$  er en funktion af både  $x$  og  $t$ , kan det totale differential  $\frac{du}{dt}$  omskrives til:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u$$

hvilket indsat i ligning (1.2) giver, at

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}} \quad (1.3)$$

Denne ligning kaldes også Eulerligningen og beskriver strømmingen af en væske, der ikke påvirkes af viskose kræfter. Ønsker man at tage højde for disse kræfter, må Eulerligningen tilføjes et friktionsled.



Figur 1.2: Tværsnit af rør med laminar strømning. Hastighedsprofilen er parabelformet.

### 1.3 Viskositet

Væsker kan være mere eller mindre klæbrige eller villige til at strømme. Denne egenskab kaldes for viskositet og skyldes, at der vil være en vis friktion mellem de enkelte væskelag.

Betragtes for eksempel væskestrømning igennem et cirkelrundt rør, vil væsken langs rørets inderside ligge næsten stille, hvorefter hastigheden vil stige jævnt, når vi i et givent tværsnit nærmer os rørets centrum.

For laminare strømninger, det vil sige strømninger uden turbulens, vil hastighedsprofilen i et tværsnit af røret være parabelformet. Dette følger af Poiseuilles lov [Rubinow, side 161]. Udtrykket kan intuitivt forklares ved, at de enkelte væskeelementer trækker i hinanden.

Hvis væsken derimod ikke er viskos vil hastigheden være den samme overalt i rørets tværsnit. For at beskrive friktionen mellem væskelag med forskellig hastighed indføres den dynamiske viskositetskonstant  $\mu$ , med enheden Pa·s. Oftest benyttes i stedet den kinematiske viskositetskonstant  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  med enheden  $m^2 s^{-1}$ .

### 1.4 Reynoldstal

En anden vigtig størrelse inden for væskedynamikken er de såkaldte Reynoldstal  $Re$ . Reynoldstallet er en dimensionsløs størrelse og er defineret som:

$$Re = \frac{\rho \bar{u} a}{\mu} = \frac{\bar{u} a}{\nu}$$

hvor  $a$  er en karakteristisk længde, her radius af røret, idet det antages at dette har et cirkulært tværsnit. Størrelsen  $\bar{u}$  er en karakteristisk hastighed, her strømmens gennemsnitshastighed.

Reynoldstallet benyttes blandt andet til at klassificere strømninger. Væskestrømmen kaldes således laminar, når væsken er velordnet og  $Re \ll 1$ . Når væsken bliver kaotisk og  $Re \gg 1$  betegnes strømmen turbulent. Man kan dog ikke fastsætte en bestemt værdi, for hvilken strømmen bliver turbulent, da dette blandt andet afhænger af geometrien i røret.

## 1.5 Energibevarelse og energitab

Hvis energien i systemet bestående af væske og rør er bevaret, kan der opstilles en ligning, som udtrykker, at summen af de forskellige energiformer er konstant. Indenfor hydrodynamikken er energibevarelsen i stationære strømninger udtrykt ved Bernoullis ligning:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + P = \text{konst}$$

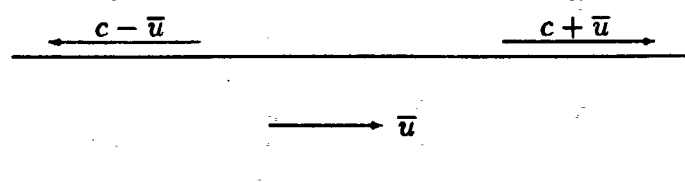
hvor  $z$  er rørets afstand fra en given referenceflade - eksempelvis jordens overflade, og  $g$  er gravitationskonstanten. Det første led kan fortolkes som væskens kinetiske energi pr. volumenenhed og det andet led som væskens potentielle energi pr. volumenenhed. Det sidste led - trykket i røret - har samme dimension som de forrige led og kan følgelig også opfattes som en form for potentiel energi pr. volumenenhed.

Da vi betragter et vandret rør, det vil sige med en konstant  $z$ -værdi, kan Bernoullis ligning forkortes til:

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho u^2 + P = \text{konst}} \quad (1.4)$$

Antagelsen om energibevarelse er yderst rimelig for stive rør med laminar strømning, men bliver tvivlsom, når strømmingen bliver turbulent eller røret elastisk.

Dette skyldes for det første, at turbulent strømning altid er forbundet med et vist energitab, (mere herom i kapitel 2). For det andet begynder elastiske rør ofte at svinge, hvorved man udover væsketransporten i



**Figur 1.3:** Et elastisk rør med den gennemsnitlige væskehastighed  $\bar{u}$  og med en bølgeudbredelse i rørets væg.

røret vil få en bølgeudbredelse i rørvæggen. Hvis den gennemsnitlige strømningshastighed  $\bar{u}$  i røret er nul, vil bølgeudbredelsen foregå med hastigheden  $c$ . For  $\bar{u} \neq 0$  fås, som vist på figur 1.3 bølgehastigheden  $c - \bar{u}$  mod strømmen og hastigheden  $c + \bar{u}$  med strømmen.

Er den gennemsnitlige væskehastighed lavere end bølgehastigheden  $c$  i rørvæggen, er bølgeudbredelse mulig i begge retninger. I dette tilfælde kaldes strømmen subkritisk  $\bar{u} < c$ . Overstiger den gennemsnitlige væskehastighed derimod størrelsen af  $c$ , er en bølgeudbredelse mod strømmen umulig, og strømmen betegnes superkritisk  $\bar{u} > c$ .

## 1.6 En tilstandsligning

Ved brug af ligningerne for masse- og impulsbevarelse, har man fået formuleret en kontinuitetsligning og en bevægelsesligning for systemet. Der mangler så kun en beskrivelse af systemets opførsel under forskellige tryk - en sådan sammenhæng beskrives i en tilstandsligning for systemet, ofte også kaldet en rørlov (af engelsk tubelaw).

For at opstille en tilstandsligning er et nøjere kendskab til strømningsforholdene nødvendigt. Ligningen kan derfor ikke beskrives generelt, men kan tænkes at afhænge af rørets tværsnitsareal og af trækket på langs af røret, også kaldet den longitudinale spænding.

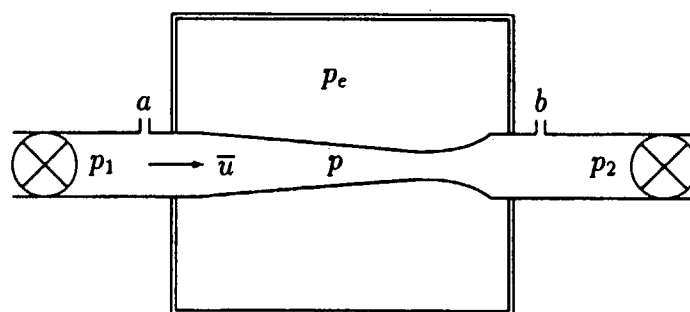
I det følgende gennemgås en konkret model af væskestrømning i elastiske rør, hvor væsken regnes for usammentrykkelig.

## Kapitel 2

# Gennemgang af Cancelli og Pedley's model

Eksperimentelle undersøgelser af væskestrømninger i elastiske rør foretages ofte ved brug af en såkaldt Starling resistor; en kasse under tryk, hvori et elastisk rør er udspændt mellem to stive rør. Starling resistoren er egentlig udviklet til at indgå i en modellering af kredsløbssystemet i den menneskelige organisme, men er siden blevet genstand for en selvstændig og mere generel forskning af fænomenet væsketransport. Et eksempel på sådan et eksperiment er gengivet på figur 2.1.

Et rør af et elastisk materiale opspændes mellem to stive rør. Trykket i de stive rør betegnes henholdsvis  $p_1$  og  $p_2$ , mens trykket i det elastiske rør benævnes  $p$ . Dette fysiske system placeres nu i et kammer med konstant tryk  $p_e$ , hvorefter man fra et reservoir med konstant tryk sender



Figur 2.1: Et typisk eksperiment med en Starling resistor.



en usammentrykkelig væske (f.eks. vand) gennem rørene. Når vi i det følgende blot refererer til røret, menes der det elastiske rør.

I disse forsøg ligger Reynoldstallene i intervallet 500 – 5000, hvilket er i overensstemmelse med tilsvarende forsøg med urinstrøm. I forsøgene observeres det dog næsten altid, at rørets ydervægge, for et stort område af parametre, begynder at svinge - selv i eksperimenter designet til at undersøge stationære strømninger.

Der har været en del forsøg på teoretisk at forklare disse svingninger, men ifølge Cancelli og Pedley's artikel har de alle været en smule mangelfulde. Enten er modellerne ikke i stand til at inddrage bølgeudbredelsen i rørets vægge, hvorfor det er umuligt at skelne mellem sub- og superkritisk strømning, eller også kan modellen ikke tage højde for eventuelle energitab under turbulente strømningsforhold.

Det er derfor Cancelli og Pedley's mål på baggrund af de eksisterende modeller at udvikle en ny og bedre modelleringsmetode, der blandt andet kan tage hensyn til bølgeudbredelse, energitab og spændingen på langs af røret. På trods af disse forbedringer skal modellen betragtes som en kvalitativ beskrivelse af de vigtigste strømningseffænomener. Det er ikke dens mål, at give en eksakt simulering af de enkelte faktorer.

I den følgende gennemgang af den konkrete model har vi valgt ikke at inddrage bølgeudbredelsen, idet vi udelukkende er interesseret i de stationære løsninger. Hvis sådanne løsninger ikke eksisterer, vil det dog være nærliggende at formode, at dette skyldes svingninger i systemet.

Først en gennemgang af Cancelli og Pedley's model, dernæst en beskrivelse af vores metode til bestemmelse af modellens stationære løsninger.

## 2.1 Introduktion

Modellen tager udgangspunkt i den en-dimensionale strømningsteori, hvilket vil sige, at strømningen kun betragtes i  $x$ -aksens retning. Dette indebærer, at de karakteristiske størrelser:  $A$  (tværsnitsarealet),  $p$  (trykket i røret) og  $\bar{u}$  (den gennemsnitlige hastighed pr. tværsnit) er funktioner af  $x$  og  $t$ .

Bemærk at man i modellen benytter den gennemsnitlige hastighed  $\bar{u}$  i stedet for  $u$ . Dette skyldes, som tidligere nævnt i kapitel 1 side 8, at hastigheden på grund af væskens viskositet ikke er ensartet i et givent tværsnit af røret.

Ved brug af tilstandsligningen samt ligningerne for masse- og impulsbevarelse vil der i det følgende blive lagt bånd på systemet, således at det bliver muligt at opstille en matematisk model. Når rand- og begyndelsesbetingelserne er fastlagt, er det herefter muligt at bestemme en entydig løsning for systemet og dermed for den matematiske model.

## 2.2 Ligninger for rørets elastiske egenskaber

Rørets elastiske egenskaber har stor betydning for strømningens karakter, og kan beskrives ved trykforskellen  $p - p_e$ , også kaldet det transmural tryk. I mange modeller antages det, at det transmural tryk kan udtrykkes ved en funktion, der kun afhænger af tværsnitsarealet  $A$ . Funktionen benævnes  $\dot{P}(A)$ , og kan i princippet bestemmes eksperimentelt.

Det er lykkedes teoretisk at finde udtryk for  $\dot{P}(A)$ , der er velegnede for henholdsvis små og mellemstore værdier af tværsnittet  $A$ . Modellen benytter et udtryk for middelstore værdier af  $A$  [Flaherty]. Dette udtryk har formen:

$$\dot{P}(A) = K_p P(\alpha), \quad \text{hvor } \alpha = \frac{A}{A_0}, \quad (2.1)$$

hvor  $A_0$  er det cirkulære tværsnitsareal, når det transmural tryk er nul, og  $K_p$  er en konstant med dimensionen  $N m^{-2}$ . I stedet for at benytte de fittede funktioner for  $\dot{P}(A)$  opgivet i [Flaherty], vælger Cancelli og Pedley i deres model at forbedre disse, således at den afledede af  $P(\alpha)$  er kontinuert. Graferne for funktionerne er vist på figur 2.2 side 15. Den modificerede udgave af  $P(\alpha)$  opgives til:

$$P(\alpha) = \begin{cases} k(\alpha - a_2 + a_3 e^{-a_1(\alpha - 0.95)}) & \text{for } \alpha > 0.95 \\ -(b_1 + \alpha^{-1.5}) & \text{for } \alpha < 0.95 \end{cases}$$

hvor konstanterne er givet ved:

$$a_1 = 12.410926$$

$$a_2 = 1 + a_3 e^{-0.05 a_1}$$

$$a_3 = \frac{1 - 1.5(0.95)^{-2.5}}{k a_1}$$

$$b_1 = k(a_2 - a_3 - 0.95) - (0.95)^{-1.5}$$

Størrelsen  $k$  er en dimensionsløs konstant, der sættes til 100.

Det er i tilstandsligningen, at Cancelli og Pedley forsøger at forbedre modellen ved at tage hensyn til den longitudinale spænding i røret. Dette er ikke medtaget i ligning (2.1), hvor der kun tages hensyn til ændringer af tværsnitsarealet.

Men ændringer i tværsnitsarealet vil i realiteten give anledning til en spænding i længderetningen, og samtidig vil der, når røret er opspændt mellem to stive rør, være en vis begyndelsesspænding. I følge Cancelli og Pedley mener McClurken et al. (1981), at denne begyndelsesspænding har en væsentlig indflydelse på trykforholdene. McClurken et al. har derfor opstillet følgende tilstandsligning:

$$p - p_e = \dot{P}(A) - \frac{T}{R} \quad (2.2)$$

hvor

- $T$  er spændingen i rørets længderetning pr. omkreds. Denne antages at være tilnærmelsesvis konstant.
- $R$  er rørets krumningsradius i længderetningen. Den er negativ når røret buler ud (konveks), det vil sige når trykket inden i røret er større end på dets yderside. Den er tilsvarende positiv, når røret kollapser, det vil sige der sker en kraftig indsnævring af røret, som følge af lavt indre tryk (konkav).

Denne nye tilstandsligning er ifølge Cancelli og Pedley stadig en grov approksimation, hvorfor det er unødvendigt at beskrive forholdet mellem  $R$  og tværsnitsarealets form mere detaljeret.

Ved et kollaps har McClurken observeret, at spændingen i rørets længderetning har den største effekt, der hvor røret er tilnærmelsesvist fladt. I det flade rør vil der være en afstand  $y$  mellem de to parallelle sider - se figur 2.3. Denne afstand er ifølge McClurken proportional med  $A$ , hvilket giver:

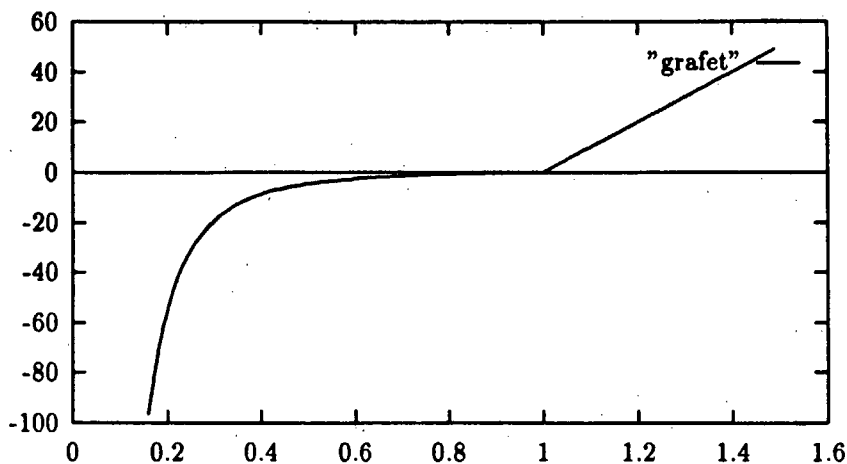
$$y = \beta A$$

Da røret ikke altid er kollapsed, antages det, at denne ligning også kan beskrive radius af det cirkelrunde rør. Det betyder at:

$$\frac{D_0}{2} = \beta A_0$$

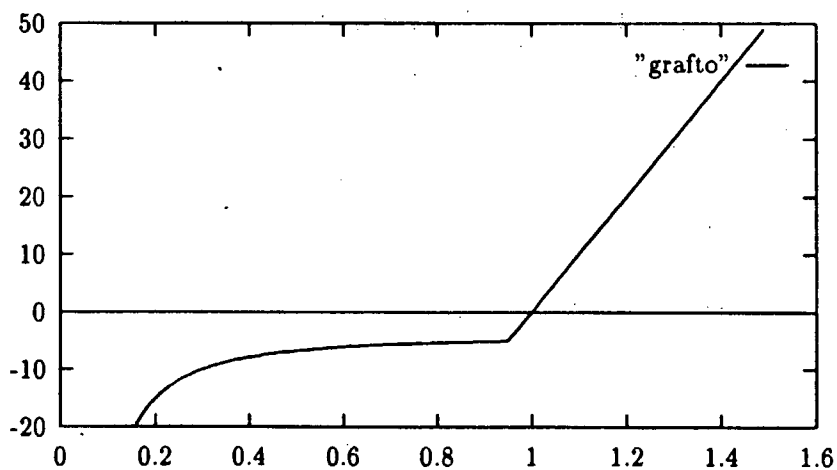
$$P(\alpha) = 1 - \alpha^{-1.5} \quad \text{for } \alpha \leq 1$$

$$P(\alpha) = k(\alpha - 1) \quad \text{for } \alpha > 1$$

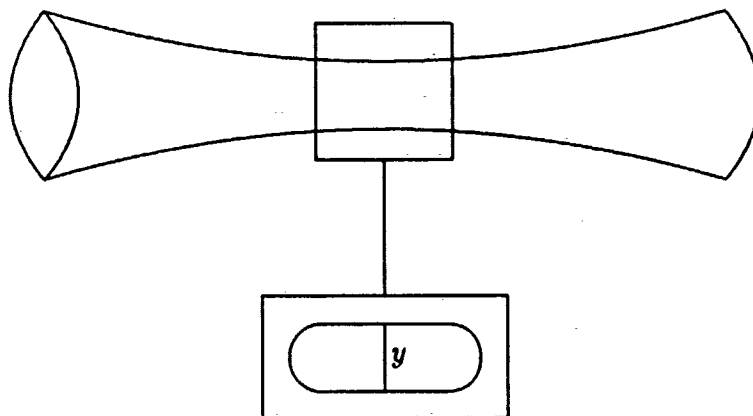


$$P(\alpha) = -(b_1 - \alpha^{-1.5}) \quad \text{for } \alpha \leq 0.95$$

$$P(\alpha) = k(\alpha - a_2 + a_3 e^{-a_1(\alpha - 0.95)}) \quad \text{for } \alpha > 1$$



**Figur 2.2:** De to forskellige funktioner for  $P(\alpha)$ , for  $k = 100$ . Den nederste graf benyttes i Cancelli og Pedley's model. Det ses, at denne kurve er forskudt lidt nedad i forhold til den oprindelige, hvorimod grafernes form er næsten identiske.



**Figur 2.3:** Et sammenklappet rør med afstanden  $y$  mellem de to parallelle sider.

hvor  $D_0$  er diameteren af det cirkelrunde rør i hvile og  $A_0$  er tværsnitsarealet af samme. Isoleres  $\beta$  i de to foregående ligninger fås sammenhængen:

$$\frac{D_0}{2 A_0} = \frac{y}{A} \Leftrightarrow y = \frac{D_0}{2 A_0} A$$

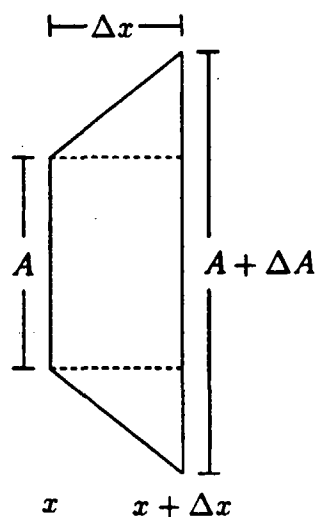
Vi beskriver nu krumningen  $\kappa = \frac{1}{R}$  som funktion af  $y$ . Fra [Fabricius, side 20], har vi, at  $\kappa$  er givet ved:

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

hvor vi kan indsætte  $y = \frac{D_0}{2 A_0} A$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{D_0}{2 A_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{D_0}{2 A_0} \frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2}$$

Indsættes dette udtryk i ligning (2.2) fås den endelige tilstandsligning:



Figur 2.4: Et udsnit af røret med tykkelsen  $\Delta x$

$$p - p_e = \dot{P}(A) - T \frac{D_0}{2A_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{D_0}{2A_0} \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \quad (2.3)$$

der som ønsket indeholder spændingen  $T$  på langs af røret.

Efter at have fundet et udtryk for rørets opførsel ved forskellige transmural tryk, benyttes det, at der i røret må være massebevarelse.

## 2.3 Kontinuitetsligningen

Hvis røret er elastisk og væsken usammentrykkelig, må det gælde, at den mængde væske, der i et givent tidsinterval  $\Delta t$  strømmer ind i et tværsnit af tykkelsen  $\Delta x$  minus den mængde væske, der strømmer ud i samme tidsrum, svarer til rørets eventuelle rumfangsændring.

Ved at betragte figur 2.4 er det muligt at opskrive udtryk for henholdsvis den indstrømne og udstrømne væskemængde i tidsrummet  $\Delta t$ . Den indstrømne væskemængde er givet ved:

$$A(x) \bar{u}(x) \Delta t \quad (2.4)$$

For at bestemme den udstrømte væskemængde må vi kende arealet og strømningshastigheden i punktet  $x + \Delta x$ . Vi Taylorudvikler henholdsvis  $A$  og  $\bar{u}$  i punktet  $x = 0$ , og får:

$$A(\Delta x) = A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2$$

$$\bar{u}(\Delta x) = \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2$$

Herved kan væskemængden, der forlader røret i tidsrummet  $\Delta t$ , skrives som:

$$\begin{aligned} & A(x + \Delta x) \bar{u}(x + \Delta x) \Delta t \\ &= A(\Delta x) \bar{u}(\Delta x) \Delta t \\ &= \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2 \right) \left( \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2 \right) \Delta t \\ &= \left( \bar{u} A + \bar{u} \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2 \right) \Delta t \end{aligned}$$

Samtidig er det muligt, at bestemme rørudsnittets volumen  $V$  til tiden  $t$  og til tiden  $t + \Delta t$ . Volumen til tiden  $t$  er givet ved:

$$V(t) = A(x) \Delta x$$

Mens vi for tiden  $t + \Delta t$  atter Taylorudvikler i  $t = 0$ , hvilket giver:

$$V(t + \Delta t) = V(\Delta t) = \left( A + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t)^2 \right) \Delta x$$

Det er efter disse udregninger muligt at indsætte i sammenhængen:

$$\text{væskemængde ind} - \text{væskemængde ud} = \text{volumenændring}$$

Det vil sige:

$$A \bar{u} \Delta t - \left( \bar{u} A + \bar{u} \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x)^2 \right) \Delta t =$$

$$A \Delta x - \left( A + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t)^2 \right) \Delta x$$

Lader vi nu  $\Delta x \rightarrow 0$  og  $\Delta t \rightarrow 0$  fås differentialligningen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A \bar{u}) dx dt + \frac{\partial A}{\partial t} dx dt = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(A \bar{u}) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0} \quad (2.5)$$

Denne ligning kaldes kontinuitetsligningen for systemet, idet det bemærkes, at den kun gælder, når den betragtede væske er usammentrykkelig. Vi mangler nu blot at opstille en bevægelsesligning.

## 2.4 Bevægelsesligningen

For usammentrykkelige, ikke viskose væsker har vi på baggrund af viden om impulsbevarelse, se side 7, udledt Eulerligningen (1.3), som er givet ved:

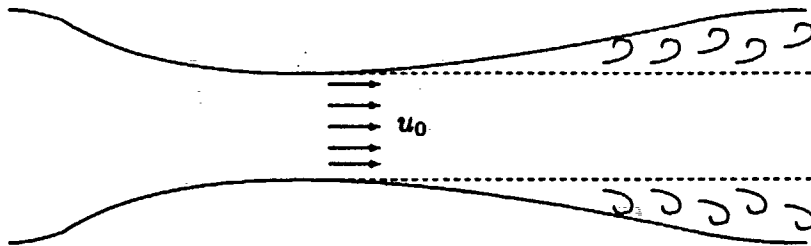
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Denne ligning tilføjes i modellen et friktionsled  $F \bar{u}$  (hvor  $F$  er funktion af  $A$  og  $\bar{u}$ ), hvis matematiske udtryk varierer afhængigt af størrelsen af  $A$  og  $Re$ . Herved fås den udvidede bevægelsesligning:

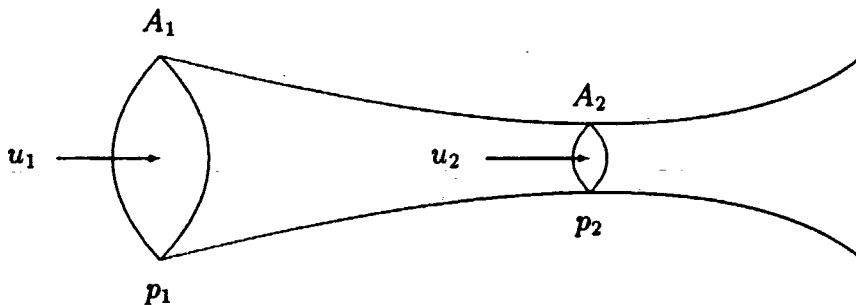
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F \bar{u} \quad (2.6)$$

Da strømmingen i modellen er turbulent, skal ligningen dog korrigeres endnu engang, da der skal tages højde for et vist energitab. Når trykgradienten i røret overstiger en given værdi, bliver strømmingen separeret. Dette separationspunkt betegnes med  $x_s$ , og det tilsvarende





Figur 2.5: Væskestømning før og efter separationspunktet  $x_s$ .



Figur 2.6: Stationær strømning i rør med varierende tværsnitsareal.

tværsnitsareal betegnes med  $A_s$ . Det meste af væsken vil efter separationen bevæge sig med en ensartet hastighed  $u_0$ . I et område langs rørets inderside vil væsken være stillestående - se figur 2.5.

Det stillestående væskelag består af en mængde strømhvirvler, der på grund af gnidning mod den omgivende væske og rør forårsager et energitab til omgivelserne.

Separationen forekommer ikke, som man intuitivt forventer, ved rørets mindste tværsnitsareal, men afhænger af trykgradienten  $\frac{dp}{dx}$ . Begrebet trykgradient lader sig nemmest forklare ved at simplificere modellen.

Vi betragter derfor en stationær strømning - det vil sige en strømning uden acceleration - i et rør med varierende tværsnitsareal. Væskens hastighed vil da være stor ved et lille tværsnitsareal og lille ved et stort tværsnitsareal, idet det kræves, at væskefluxen er konstant i hele røret. Har vi to tværsnit  $A_1$  og  $A_2$ , hvor  $A_1 > A_2$ , som vist på figur 2.6, med de tilhørende hastigheder  $u_1$  og  $u_2$ , vil det gælde, at:

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad (2.7)$$

hvilket giver, at  $u_2 > u_1$ . Herefter kan vi ved brug af Bernoullis ligning (1.4) side 9 finde sammenhængen:

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2$$

hvorefter det må konkluderes, at  $p_1 > p_2$ . Trykket varierer altså gennem røret, og trykgradienten er modsat rettet hastighedsgradienten  $\frac{du}{dx}$ . Ydermere vil trykgradienten, når den overstiger en bestemt kritisk værdi, give anledning til separation. I modellen er trykgradientens kritiske værdi givet ved:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\gamma_1 \rho \bar{u}^2}{D_0} \quad (2.8)$$

hvor  $\gamma_1$  er en numerisk konstant, der afhænger af rørets geometri.

Efter separationen antages det, at væskestrømmen forbliver separeret i resten af røret. Det vil sige fra  $x := x_s$  til  $x := L$ , hvor  $L$  er rørets længde. I dette område vil der som følge af den separerede strømning være et energitab, hvilket i det følgende skal beskrives nøjere.

Først skrives hastigheden et givent sted i røret  $u(x, y, z, t)$  ved:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, t) + u'(x, y, z, t) \quad (2.9)$$

hvor  $\bar{u}(x, t)$  er middelhastigheden pr. tværsnitsareal, og  $u'(x, y, z, t)$  en afvigelse fra denne middelhastighed. Men  $\bar{u}(x, t)$  er defineret som:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{A} \int_A u \, dA = \frac{1}{A} \int_A (\bar{u} + u') \, dA \\ &= \bar{u} + \frac{1}{A} \int_A u' \, dA \end{aligned}$$

hvilket nødvendigvis giver, at:

$$\frac{1}{A} \int_A u' \, dA = 0 \quad (2.10)$$

Dette er en nyttig observation, der benyttes i det følgende. Systemets bevægelsesligning (2.6) kan nu opstilles i  $u(x, t)$  i stedet for i  $\bar{u}(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F u \quad (2.11)$$

Størrelsen  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  kan omskrives til:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2$$

hvilket sammen med ligning (2.9) indsættes i ligning (2.11):

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F(\bar{u} + u')$$

Integreres der over tværsnitsarealet fås:

$$\begin{aligned} \int_A \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')^2 \right) dA &= - \int_A \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F(\bar{u} + u') \right) dA \Leftrightarrow \\ A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')^2 dA &= - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F \bar{u} A \end{aligned} \quad (2.12)$$

I ligning (2.12) er ligning (2.10) blevet benyttet. Det resterende integral skal nu omskrives:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')^2 dA &= \\ \frac{1}{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 dA + \frac{1}{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x} (2\bar{u} u') dA + \frac{1}{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x} (u')^2 dA \end{aligned}$$

Da  $u'(x, y, z, t) \in A \times L$ , hvor  $x \in L$  og  $y, z \in A$ , er en kontinuert funktion, der er differentiabel med hensyn til  $x$  og da den partielt afledede  $\frac{\partial u'}{\partial x}$ , ligeledes er kontinuert i mængden  $A \times L$ , kan integration og differentiation ombyttes [Elbrønd, Bind 3, side 123]. Ved endnu en gang at gøre brug af ligning (2.10), kan udtrykket forkortes til:

$$\frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA \quad (2.13)$$

Indsættes ligning (2.13) for integralet (2.12) fås, efter at have forkortet med  $A$ , følgende udtryk:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA = F \bar{u} \quad (2.14)$$

Integralet  $\int_A (u')^2 dA$  kan atter omskrives. Ved at betragte figur 2.5, er det muligt at opstille et udtryk for  $u'$  i den separerede strømning, idet hastigheden er nul ved rørets vægge:

$$u' = u - \bar{u} = \begin{cases} u_0 - \bar{u} & \text{arealet med uniform strømning.} \\ 0 - \bar{u} & \text{området langs rørets vægge.} \end{cases}$$

Da vi betragter stationære strømninger kan vi ved brug af relationen (2.7) indsætte  $\bar{u} = \frac{A_s}{A} u_0$  i forrige udtryk:

$$u' = u - \bar{u} = \begin{cases} u_0 - \frac{A_s}{A} u_0 & \text{arealet med uniform strømning.} \\ -\frac{A_s}{A} u_0 & \text{området langs rørets vægge.} \end{cases}$$

Herefter fås følgende omskrivning af integralet:

$$\int_A (u')^2 dA = \int_{A_s} \left( u_0 - \frac{A_s}{A} u_0 \right)^2 dA_s + \int_{A-A_s} \left( -\frac{A_s}{A} u_0 \right)^2 d(A - A_s)$$

Da vi betragter små ændringer af tværsnitsarealet, antages det, at integranden er konstant. Herved kan integralet beregnes som:

$$\begin{aligned} \int_A (u')^2 dA &= u_0^2 \left( 1 - \frac{A_s}{A} \right)^2 A_s + \frac{A_s^2}{A^2} u_0^2 (A - A_s) \\ &= u_0^2 \left( A_s \left( 1 - 2 \frac{A_s}{A} \right) + \frac{A_s^2}{A} \right) \\ &= u_0^2 \left( A_s - \frac{A_s^2}{A} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vi mangler nu blot at differentiere integralet (2.15) med hensyn til  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA &= \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0^2 \left( A_s - \frac{A_s^2}{A} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2A} u_0^2 A_s^2 \frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \\ &= \frac{u_0^2 A_s^2}{2A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned}$$

Da vi kun betragter stationære strømninger og da vi ser bort fra friktionsleddet, kan bevægelsesligningen (2.14) reduceres til:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA = \frac{u_0^2 A_0^2}{2A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.16)$$

Samtidig vil hastigheden  $u_0$  være konstant i den parallelsidede strøm, hvorfor trykgradienten er nul.

Udtrykket (2.16) er positivt, da vi for det betragtede område ved, at røret udvider sig  $\frac{\partial A}{\partial x} > 0$ . Herved kan det konkluderes, at arealet vil stige jævnt, hvorved der efterhånden vil blive dannet et stadigt større område uden bevægelse på begge sider af den hurtigtflydende strøm.

Da trykgradienten er nul i en parallelsidet strøm, er det umuligt at genskabe et tidligere højere tryk. Men for nogle fysiske systemer vil en trykstigning være mulig. For at tillade denne trykstigning (energitilvækst) indføres leddet  $(\chi - 1)$  i ligning (2.16):

$$(\chi - 1) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA \quad (2.17)$$

hvor  $\chi$  er en konstant mellem 0 og 1. Højresiden udtrykker middelfvigelsen fra den gennemsnitlige hastighed pr. tværsnitsareal  $\bar{u}$ . Er denne afvigelse nul, er der intet energitab, hvilket skrives som:

$$\frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (u')^2 dA = 0$$

Konstanten  $\chi$  er følgelig 1 for strømninger uden energitab, det vil sige for strømninger uden separation. Eksisterer der derimod et energitab vil middelfvigelsen stige. Jo større middelfvigelse desto større energitab. For  $\chi = 0$  har vi den tidligere beskrevne situation, hvor en trykstigning er umulig.

Vi har i denne argumentation betragtet stationære strømninger. For strømninger med acceleration vil der være en tidsforsinkelse mellem separation og udviklingen af den hurtigtflydende strøm. På baggrund af målinger udført af Pedley og Bertram i 1983 konkluderes det, at denne tidsforsinkelse er negligeabel. Herved bliver det muligt at indsætte ligning (2.17), der egentlig er udledt for stationære strømninger, i bevægelsesligningen (2.14). Efter indsættelse fås:

$$-F\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 + \frac{p}{\rho} \right) + (\chi - 1) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \chi \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F\bar{u}} \quad (2.18)$$

hvilket er bevægelsesligningen for området med separation. For strømning uden separation  $\chi = 1$ , reduceres ligning (2.18) til ligning (2.6).

## 2.5 Systemets ligninger

Hermed er ligningerne til en beskrivelse af systemet endelig blevet opstillet. Systemet består af:

Kontinuitetsligningen (2.5):

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}A)}{\partial x} = 0}$$

hvor

- $\bar{u}(x, t)$  er den gennemsnitlige strømningshastighed pr. tværsnitsareal og
- $A(x, t)$  er tværsnitsarealet af det elastiske rør

En tilstandsligning (2.2):

$$\boxed{p - p_e = \dot{P}(A) - \frac{T}{R}}$$

hvor

- $p$  er det indre tryk i røret,
- $p_e$  er trykket i det omgivende kammer,

- $\dot{P}(A)$  er et udtryk, der beskriver det transmural tryk som funktion af  $A$  og
- $T$  er spændingen i rørets længderetning.

$R$  er givet ved relationen

$$\frac{1}{R} = \frac{D_0}{2A_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{D_0}{2A_0} \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

Bevægelsesligningen (2.18):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \chi \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - F \bar{u}$$

hvor

- $F$  er friktionskræfter,
- $\chi$  er en konstant mellem 0 og 1, som angiver energitabets størrelse,
- $\rho$  er densiteten af den betragtede væske og
- $p$  er trykket i røret.

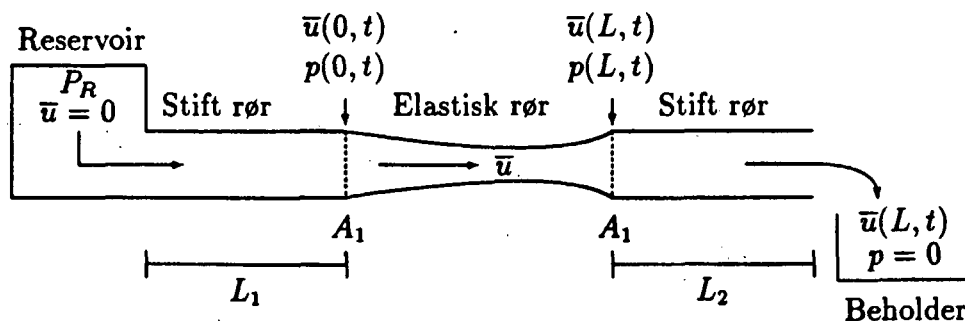
I systemet er der 4 randbetingelser, da  $x$  optræder i 3. orden i  $\frac{\partial p}{\partial x}$  og i 1. orden i  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ . Desuden er der to begyndelsesbetingelser, da  $t$  optræder i 1. orden i henholdsvis  $\frac{\partial A}{\partial t}$  og  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ . Disse betingelser skal nu behandles.

## 2.6 Ligningerne for randbetingelserne

Det elastiske rør er i begge ender fæstnet til stive rør, og i endepunkterne er tværsnitsarealet derfor fast. Dette giver, idet vi forudsætter, at de to stive rør har samme tværsnitsareal  $A_1$ , følgende randbetingelser:

$$A(0, t) = A_1$$

$$A(L, t) = A_1$$



Figur 2.7: De forskellige rørdele samt reservoiret med trykket  $P_R$

Fastspænding mellem to stive rør har samtidig en betydning for hastigheden og trykket i enderne af det elastiske rør. Dette giver anledning til yderligere to randbetingelser, der kan forklares på følgende vis :

Vi forestiller os, at væsken, som skal strømme igennem det elastiske rør, kommer fra et statisk reservoir, hvorefter den først strømmer gennem et stift rør, så gennem et elastisk rør, for til sidst at blive ledt ud af systemet gennem et tilsvarende stift rør.

Ser vi på den første del af denne proces, før det elastiske rør, vil følgende være gældende :

- Trykket i reservoiret er givet ved  $P_R$  og hastigheden her er 0.
- Trykket ved starten af det elastiske rør er  $p$  og hastigheden er  $\bar{u}$ .
- Længden af det stive rør er  $L_1$ .

Trykket i det elastiske rørs endepunkter kan nu beregnes ved at benytte bevægelsesligningen (2.18), for rør med laminar strømning  $\chi = 1$ . I den første del af systemet skal bevægelsesligningen beregnes i punktet  $(0, t)$  - se figur 2.7

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, t) + \bar{u}(0, t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(0, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) - F(A, \bar{u}(0, t)) \bar{u}(0, t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(0, t) + \frac{p(0, t)}{\rho} \right) = -F(A, \bar{u}(0, t)) \bar{u}(0, t) \quad (2.19)$$

Leddet



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(0, t) + \frac{p(0, t)}{\rho} \right)$$

kan ved approksimation af differentialkvotienten omskrives til:

$$\frac{\frac{1}{2} \bar{u}^2(0, t) + \frac{p(0, t)}{\rho} - \frac{P_R}{\rho}}{L_1} = \frac{1}{\rho L_1} \left( \rho \frac{1}{2} \bar{u}^2(0, t) + p(0, t) - P_R \right)$$

Indsættes dette i ligning (2.19) fås :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, t) + \frac{1}{2 L_1} \bar{u}^2(0, t) + \frac{p(0, t)}{L_1 \rho} - \frac{P_R}{L_1 \rho} = -F(A, \bar{u}(0, t)) \bar{u}(0, t) \quad (2.20)$$

Friktionsleddet  $F(A, \bar{u}(0, t)) \bar{u}(0, t)$  sættes i følge Cancelli og Pedley til  $\frac{k_1 A^2 \bar{u}^2(0, t)}{L_1 \rho}$ , hvor  $k_1$  er en konstant med dimensionen  $kg m^{-7}$ . Indsættes dette udtryk i ligning (2.20) og isoleres  $p(0, t)$  fås den tredje randbetingelse:

$$p(0, t) = P_R - \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2(0, t) - \rho L_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, t) - k_1 A^2 \bar{u}^2(0, t) \quad (2.21)$$

Den sidste randbetingelse beregnes på samme vis, idet vi, som vist på figur 2.7 har

- Trykket ved enden af det elastiske rør er  $p(L, t)$  og hastigheden ved enden af det elastiske rør er  $\bar{u}(L, t)$ .
- Trykket ved slutningen af det stive rør er 0 og hastigheden ved slutningen af det stive rør er stadig  $\bar{u}(L, t)$ .
- Længden af det stive rør er  $L_2$ .

I denne ende af det elastiske rør, skal bevægelsesligningen beregnes i punktet  $(L, t)$  og er derfor givet ved:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(L, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(L, t) + \frac{p(L, t)}{\rho} \right) = -F(A, \bar{u}(L, t)) \bar{u}(L, t) \quad (2.22)$$

hvor leddet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(L, t) + \frac{p(L, t)}{\rho} \right)$$

igen ved approksimation af differentialkvotienten kan omskrives til:

$$\frac{\left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(L, t) + \frac{p}{\rho} \right) - \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2(L, t) + \frac{p(L, t)}{\rho} \right)}{L_2} = -\frac{p(L, t)}{\rho L_2}$$

Indsættes dette i ligning (2.22) fås :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(L, t) - \frac{p(L, t)}{\rho L_2} = -F(A, \bar{u}(L, t)) \bar{u}(L, t) \quad (2.23)$$

Friktionsleddet  $F(A, \bar{u}(L, t)) \bar{u}(L, t)$  er som ovenfor ifølge Cancelli og Pedley givet ved  $\frac{k_2 A_1^2 \bar{u}^2(L, t)}{L_2 \rho}$ . Indsættes udtrykket i ligning (2.23), og isoleres  $p(L, t)$ , fås den fjerde og sidste randbetingelse:

$$p(L, t) = \rho L_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(L, t) + k_2 A_1^2 \bar{u}^2(L, t) \quad (2.24)$$

## 2.7 Ligningerne for begyndelsesbetingelserne

Den fysiske forklaring på begyndelsesbetingelserne er en del lettere at gennemskue end den vi har beskrevet for randbetingelserne. Til tiden  $t = 0$  antager vi, at tværsnitsarealet over hele det elastiske rør er konstant  $A_1$ . Dette giver betingelsen:

$$A(x, 0) = A_1$$

Tilsvarende antager vi, at hastigheden  $\bar{u}$  er konstant og subkritisk  $\bar{u}_1$ , til tiden  $t = 0$ , hvilket giver betingelsen:

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_1$$

## 2.8 Ligning for trykket i reservoiret

Ud fra vores begyndelses- og randbetingelser for de stive rør kan vi, hvis vi antager at

$$L_1 := L_2$$

og

$$p(0, t)|_{t=0} = p(L, t)|_{t=0}$$

beregne begyndelsesværdien for  $P_R$ . Det benyttes at  $A(x, 0) = A_1$  og  $\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_1$ . Randbetingelserne i ligning (2.21) og ligning (2.24) undersøges nu for  $t \rightarrow 0$ :

$$p(0, t)|_{t=0} = P_R - \frac{1}{2} \rho \bar{u}_1^2 - \rho L_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - k_1 A_1^2 \bar{u}_1^2$$

og

$$p(L, t)|_{t=0} = \rho L \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + k_2 A_1^2 \bar{u}_1^2$$

Da vi har antaget, at de to udtryk er identiske, kan  $P_R$  isoleres af ligningerne:

$$P_R = \frac{1}{2} \rho \bar{u}_1^2 + k_1 A_1^2 \bar{u}_1^2 + k_2 A_1^2 \bar{u}_1^2 \Leftrightarrow$$

$$P_R = \bar{u}_1^2 \left( \frac{1}{2} \rho + (k_1 + k_2) A_1^2 \right)$$

hvor det er blevet benyttet, at  $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = 0$ .

## 2.9 Ligning for trykket i kammeret $p_e$

Trykket  $p_e$  i det omgivende kammer er i den dynamiske model beskrevet ud fra henholdsvis en begyndelsesværdi  $p_{e_0}$  og en trykforøgelse  $p_{e_1}$ . Størrelsen  $p_{e_0}$  kan udledes ud fra randbetingelsen på side 29 da det forudsættes at til  $t = 0$  er det transmural tryk nul. Størrelsen  $p_{e_1}$  er en forøgelse af det ydre tryk  $p_{e_0}$  over en kort tidsperiode. Denne forårsager, at et kollaps påbegyndes i røret. Da vi ser på de stationære løsninger, er det kun interessant at betragte det ydre tryk, når der ikke længere er ændringer i systemet, det vil sige efter trykforøgelsen. Her vil det ydre tryk i røret være givet ved:

$$p_e = p_{e_0} + p_{e_1}$$

### 2.9.1 Udledning af $p_{e_0}$

Når begyndelsesværdien  $p_{e_0}$  skal bestemmes betragtes ligning (2.2), som er givet ved:

$$p_e = p(x, t) - \dot{P}(A) + \frac{T}{R}$$

Denne betragtes i et givet punkt, eksempelvis  $x = L$ , hvor randbetingelsen opstillet i ligning (2.24) for trykket i røret er givet ved:

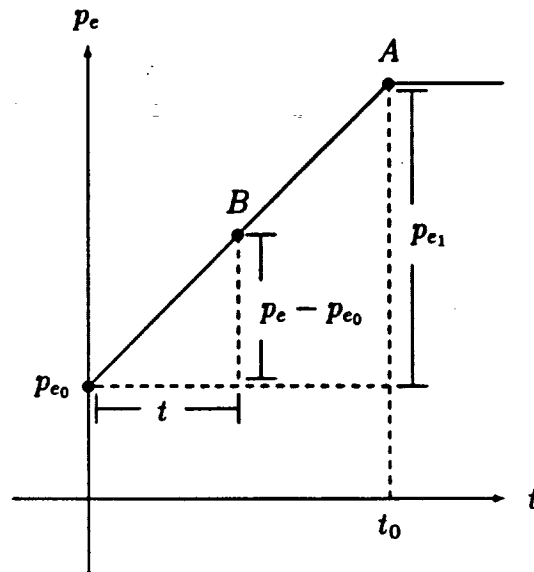
$$p(L, t) = \rho L_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(L, t) + k_2 A_1^2 \bar{u}^2(L, t)$$

Da vi ønsker at beregne  $p_{e_0}$ , skal ovenstående ligninger betragtes for  $t = 0$ , hvorfor den longitudinale spænding er nul. For hastigheden fås  $\bar{u} = u_1$ , hvilket betyder, at leddet  $\rho L_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(L, 0) = 0$ . For  $t = 0$  fås således ligningerne:

$$\begin{aligned} p_{e_0} &= p(L, 0) - \dot{P}(A) \\ p(L, 0) &= k_2 A_1^2 u_1^2 \end{aligned}$$

Ud fra disse ligninger fås hermed:

$$p_{e_0} = k_2 A_1^2 u_1^2 - \dot{P}(A) \quad (2.25)$$

Figur 2.8: Det ydre tryk  $p_e$ 

### 2.9.2 Udledning af $p_{e1}$

Kollabering i røret påbegyndes ved at hæve det ydre tryk over en kort tidsperiode  $t_0$  - se figur 2.8. For  $t \leq t_0$  kan vi betragte de to punkter  $A$  og  $B$  på figuren. Ved at beregne kurvens hældning i disse punkter, kan et udtryk for trykstigningens størrelse opstilles, idet den for  $0 \leq t \leq t_0$  er givet ved:

$$\begin{aligned} \frac{p_{e1}}{t_0} &= \frac{p_e - p_{e0}}{t} \quad \Leftrightarrow \\ p_e - p_{e0} &= p_{e1} \frac{t}{t_0} \end{aligned} \quad (2.26)$$

For  $t \geq t_0$  fås det konstante udtryk:

$$p_e = p_{e0} + p_{e1} \quad (2.27)$$

## 2.10 Systemet på dimensionsløs form

Vi har nu udledt et sæt af ligninger med tilhørende rand- og begyndelsesbetingelser, som beskriver væskestrømning i elastiske rør. For lettere at kunne arbejde med dette system af ligninger, bringes systemet på dimensionsløs form. Til dette formål introduceres nye symboler for størrelserne med dimension. Således betegnes det dimensionsbehæftede tryk eksempelvis  $p'$ , mens det dimensionsløse tryk betegnes  $p$ .

Først en oversigt over de benyttede dimensionsløse parametre:

$$\alpha = \frac{A}{A_0}$$

$$x = \frac{x'}{D_0}$$

$$u = \frac{\bar{u}}{c_0}, \quad \text{hvor } c_0 = \sqrt{\frac{k K_p}{\rho}}$$

$$p = \frac{p'}{\rho c_0^2}$$

$$t = \frac{t' c_0}{D_0}$$

$$F = \frac{F' D_0}{c_0}$$

$$\sigma = \frac{T}{\rho c_0^2 D_0}$$

$$\lambda = \frac{L}{D_0}$$

Ønsker man at kontrollere, om de enkelte udtryk virkelig er dimensionsløse, kan følgende enheder indsættes:

$$F' : \frac{1}{s}$$

$$p' : \frac{kg}{m s^2}$$

$$\begin{aligned}\rho' &: \frac{kg}{m^3} \\ c_0, \bar{u} &: \frac{m}{s} \\ K_p &: \frac{kg}{m s^2} \\ T &: \frac{kg}{s^2}\end{aligned}$$

Nogle beregninger foretages adskillige gange, hvorfor vi starter med at gennemgå disse:

$$\frac{\partial A}{\partial t'} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{c_0}{D_0} = A_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{c_0}{D_0} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x'} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{1}{D_0} = \frac{A_0}{D_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{1}{D_0} \right) \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{D_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{A_0}{D_0^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{c_0}{D_0} = \frac{c_0^2}{D_0} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{1}{D_0} = \frac{c_0}{D_0} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.32)$$

I disse beregninger har vi - udover kædereglene - gjort brug af:  $A = \alpha A_0$  og  $\bar{u} = u c_0$ .

Det er nu muligt at gå i gang med de faktiske ligninger. Vi begynder med kontinuitetsligningen (2.5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t'} + \bar{u} \frac{\partial A}{\partial x'} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} &= 0 \Leftrightarrow \\ A_0 \frac{c_0}{D_0} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{u c_0 A_0}{D_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + A_0 \alpha \frac{c_0}{D_0} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0} &\quad (2.33)\end{aligned}$$

I denne beregning er ligningerne (2.28), (2.29) og (2.32) blevet benyttet. Dernæst bevægelsesligningen (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t'} + \chi \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} - F' \bar{u} && \Leftrightarrow \\ \frac{c_0^2}{D_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \chi u \frac{c_0^2}{D_0} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\rho c_0^2}{\rho D_0} \frac{\partial p}{\partial x} - F \frac{c_0^2}{D_0} u && \Leftrightarrow \\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \chi u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - f u} &&& (2.34) \end{aligned}$$

Vi har her anvendt ligningerne (2.31) og (2.32), samt relationerne:  $p' = \rho c_0^2 p$  og  $F' = \frac{F c_0}{D_0}$ . Herefter skal systemets tilstandsligning (2.3) gøres dimensionsløs:

$$\begin{aligned} p' - p'_e &= \dot{P}(A) - T \frac{D_0}{2 A_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} \left( 1 + \left( \frac{D_0}{2 A_0} \frac{\partial A}{\partial x'} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} && \Leftrightarrow \\ p - p_e &= \frac{K_p P(\alpha)}{\rho c_0^2} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

idet vi har benyttet ligningerne (2.29) og (2.30) samt indsat:  $T = \sigma \rho c_0^2 D_0$ ,  $\dot{P}(A) = K_p P(\alpha)$  og  $p' = \rho p c_0^2$ . Udtrykket kan dog omskrives yderligere, da  $K_p = \frac{c_0^2 \rho}{k}$ :

$$\boxed{p - p_e = \frac{P(\alpha)}{k} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}} \quad (2.35)$$

Rand- og begyndelsesbetingelserne gøres nu på lignende vis dimensionsløse. Først randbetingelserne for tværsnitsarealet:

$$A(0, t') = A_1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha(0, t) = \alpha_1}$$

$$A(L, t') = A_1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha(\lambda, t) = \alpha_1}$$



Dernæst randbetingelserne for trykket:

$$p'(0, t') = P'_R - \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2(0, t') - \rho L_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t'}(0, t') - k_1 A_1^2 \bar{u}^2(0, t') \Leftrightarrow$$

$$p(0, t) = P_R - \frac{1}{2} u^2(0, t) - \frac{L_1}{D_0} \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - \frac{k_1 \alpha_1^2 A_0^2 u^2(0, t)}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$p(0, t) = P_R - \frac{1}{2} u^2(0, t) - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - \eta_1 \alpha_1^2 u^2(0, t)$$

idet vi har gjort brug af omskrivningerne:  $\lambda_{1,2} = \frac{L_{1,2}}{D_0}$  og  $\eta_{1,2} = \frac{k_{1,2} A_0^2}{\rho}$ . Størrelserne  $\eta_1$  og  $\eta_2$  fortolkes som de enkelt-energitab, der forekommer i de to stive rør. Disse tab reguleres på kontrolhanerne a og b på figur 2.1 side 11. I den anden ende af røret for  $x = L$  fås ved hjælp af de samme omskrivninger:

$$p'(L, t') = k_2 A_1^2 \bar{u}^2(L, t') + \rho L_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t'}(L, t') \Leftrightarrow$$

$$p(\lambda, t) = \eta_2 \alpha_1^2 u^2(\lambda, t) + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda, t)$$

I øvrigt er  $P'_R$  i de sidste par udledninger blevet omskrevet til  $P_R$ , hvilket bevirker at:

$$P'_R = \left( \frac{1}{2} \rho + (k_1 + k_2) A_1^2 \right) \bar{u}_1^2 \Leftrightarrow$$

$$P_R = \left( \frac{1}{2} \rho + (k_1 + k_2) \alpha_1^2 A_0^2 \right) \frac{u_1^2 c_0^2}{\rho c_0^2} \Leftrightarrow$$

$$P_R = \left( \frac{1}{2} + (\eta_1 + \eta_2) \alpha_1^2 \right) u_1^2$$

Udtrykket for det ydre tryk  $p_e$  gøres dimensionsløst, ved at gøre henholdsvis  $p_{e_0}$  og  $p_{e_1}$  dimensionsløse. Udtrykket for  $p_{e_1}$  er på forhånd en dimensionsløs konstant, hvorfor vi blot skal omskrive  $p_{e_0}$ .

Med de nye symboler, fås følgende udtryk for  $p_{e_0}$ :

$$p'_{e_0} = k_2 A_1^2 u_1^2 - \dot{P}(A_1)$$

hvilket på dimensionsløs form kan omskrives til:

$$p_{e_0} \rho c_0^2 = k_2 \alpha_1^2 A_0^2 u_1^2 c_0^2 - \frac{c_0^2 \rho}{k} P(\alpha_1) \Leftrightarrow$$

$$p_{e_0} = \frac{k_2 A_0^2}{\rho} \alpha_1^2 u_1^2 - \frac{1}{k} P(\alpha_1) \Leftrightarrow$$

$$p_{e_0} = \eta_2 \alpha_1^2 u_1^2 - \frac{1}{k} P(\alpha_1)$$

Sluttelig kan begyndelsesbetingelserne omskrives:

$$A(x', 0) = A_1 \Leftrightarrow \alpha(x, 0) = \alpha_1$$

$$\bar{u}(x', 0) = \bar{u}_1 \Leftrightarrow u(x, 0) = u_1$$

Ligningerne (2.33), (2.34) og (2.35) udgør nu sammen med de nye rand- og begyndelsesbetingelser det dimensionsløse system.



# Kapitel 3

## Stationære løsninger

På baggrund af Cancelli og Pedley's model, refereret i forrige kapitel, vil vi her opstille et udtryk for størrelsen af tværsnitsarealet  $\alpha$  som funktion af positionen  $x$  i rørets længderetning. Dette vil vi beregne ud fra det stationære tilfælde af de opstillede ligninger. Ved at betragte disse på dimensionsløs form, kan vi udlede et udtryk, der ved numerisk løsning giver et billede af sammenhængen mellem  $\alpha$  og  $x$ . Friktionen i systemet antages at være meget lille, hvorfor vi i det følgende ser bort fra denne. Hertil skal dog bemærkes, at friktionsleddet indgår i randbetingelserne. Ved at benytte disse betragtninger, bliver systemets ligninger som nedenfor, idet vi fremover vil betegne  $\alpha(x)$  med  $\alpha$ :

$$\alpha u(x) = q \quad (3.1)$$

$$u(x) \frac{du(x)}{dx} = - \frac{dp(x)}{dx} \quad \text{for } 0 \leq x < x_s \quad (3.2)$$

$$\chi u(x) \frac{du(x)}{dx} = - \frac{dp(x)}{dx} \quad \text{for } x_s < x \leq \lambda \quad (3.3)$$

$$p(x) = p_c + \frac{1}{k} P(\alpha) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.4)$$

Den første ligning er kontinuitetsligningen, de næste to er bevægelsesligningerne og sidste udtryk er tilstandsligningen for systemet. Størrelsen  $q$  er vandføringen i røret.

De tilhørende randbetingelser er:

$$\alpha(0) = \alpha(\lambda) = \alpha_1 \quad (3.5)$$

$$p(0) = P_R - \left(\frac{1}{2} + \eta_1 \alpha_1^2\right) u^2(0) \quad (3.6)$$

$$p(\lambda) = \eta_2 \alpha_1^2 u^2(\lambda) \quad (3.7)$$

$$P_R = \left(\frac{1}{2} + (\eta_1 + \eta_2) \alpha_1^2\right) u_1^2 \quad (3.8)$$

Derudover antager vi, at følgende gennemgangsbetingelser er opfyldt:

- Krumningen i separationspunktet  $x_s$  er kontinuert, det vil sige:

$$\left. \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \right|_{x_s^-} = \left. \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \right|_{x_s^+} \quad (3.9)$$

- Hældningen i separationspunktet er kontinuert.

Ifølge Cancelli og Pedley side 392 vil separationspunktet ligge lidt til højre for minimumspunktet  $x_{min}$ , det punkt hvor tværsnitsarealet af røret antager sin mindste værdi. Som tidligere forklaret (se kapitel 2 side 21) vil separationen ske, når trykgradienten bliver større end

$$\frac{dp(x)}{dx} \geq \gamma_1 u(x)^2$$

Vi antager derfor, at separationen påbegyndes når

$$\frac{dp(x)}{dx} = \gamma_1 u(x)^2$$

Ved at anvende ovenstående kriterium for separation i bevægelsesligningen (3.2) kan vi fastlægge et bånd for, hvornår separation sker. Herved fås:

$$\begin{aligned}
 u(x) \frac{du(x)}{dx} &= - \frac{dp(x)}{dx} \Leftrightarrow \\
 -u(x) \frac{du(x)}{dx} &= \gamma_1 u(x)^2 \Leftrightarrow \\
 - \frac{du(x)}{dx} &= \gamma_1 u(x)
 \end{aligned}$$

Af ligning (3.1) haves  $u(x) = \frac{q}{\alpha}$ , som indsættes i ovenstående udtryk

$$\begin{aligned}
 - \frac{d\frac{q}{\alpha}}{dx} &= \gamma_1 \frac{q}{\alpha} \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dx} &= \gamma_1 \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \\
 \frac{d\alpha}{dx} &= \gamma_1 \alpha
 \end{aligned}$$

Betingelsen i separationspunktet bliver således

$$\left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x_s} = \gamma_1 \alpha|_{x_s} \quad (3.10)$$

Af ovenstående er det nu muligt at udlede et udtryk for tværsnitsarealet som funktion af  $x$ . Udledningen foretages på baggrund af ligningssystemet (3.1) - (3.4), randbetingelserne (3.5) - (3.8) samt gennemgangsbetingelserne (3.9) og (3.10).

Bevægelsesligningerne (3.2) og (3.3) integreres.

For  $0 \leq x < x_s$  fås:

$$\int u(x) \frac{du(x)}{dx} dx = \int - \frac{dp(x)}{dx} dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2} u(x)^2 + p(x) = h_0} \quad (3.11)$$

For  $x_s < x \leq \lambda$  fås:

$$\int \chi u(x) \frac{du(x)}{dx} dx = \int - \frac{dp(x)}{dx} dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \chi u(x)^2 + p(x) = h_1} \quad (3.12)$$

Integrationskonstanterne  $h_0$  og  $h_1$  skal bestemmes, hvorefter det er muligt at fastlægge  $q$ . Indsættes tilstandsligningen (3.4) og udtrykket  $u(x) = \frac{q}{\alpha}$  i (3.11) og (3.12) fås:

$$h_0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha^2} + p_e + \frac{1}{k} P(\alpha) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_s \quad (3.13)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha^2} + p_e + \frac{1}{k} P(\alpha) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{for } x_s \leq x \leq \lambda \quad (3.14)$$

Størrelserne  $h_0$  og  $h_1$  kan nu bestemmes ved at indsætte randbetingelserne (3.6) og (3.7) i henholdsvis (3.11) og (3.12)

$$h_0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_1^2} + P_R - \left( \frac{1}{2} + \eta_1 \alpha_1^2 \right) \frac{q^2}{\alpha_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{h_0 = P_R - \eta_1 q^2} \quad (3.15)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} + \eta_2 \alpha_1^2 \frac{q^2}{\alpha_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{h_1 = \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} + \eta_2 q^2} \quad (3.16)$$

Tilbage er blot at fastlægge  $q$ . Dette gøres ved i separationspunktet  $\alpha(x_s)$  at benytte gennemgangsbetingelsen i ligning (3.9) og subtrahere (3.13) og (3.14). Det giver

$$h_0 - h_1 = \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{q^2}{\alpha_s^2} \quad (3.17)$$

idet vi fremover vil benytte skrivemåden  $\alpha_s$  for  $\alpha(x_s)$ .

Ligeledes subtraheres (3.15) og (3.16)

$$h_0 - h_1 = P_R - \eta_1 q^2 - \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} - \eta_2 q^2 \quad (3.18)$$

Sammensættes ligningerne (3.17) og (3.18) fås:

$$\frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{q^2}{\alpha_s^2} = P_R - \eta_1 q^2 - \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} - \eta_2 q^2 \Leftrightarrow$$

$$q = P_R^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{1}{\alpha_s^2} + \eta_1 + \eta_2 + \frac{1}{2} \chi \frac{1}{\alpha_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

Det er nu muligt at bestemme  $q$ , hvis  $\alpha_s$  er kendt, og derefter kan  $h_0$  og  $h_1$  fastlægges af ligningerne (3.15) og (3.16).

Men  $\alpha_s$  er endnu ikke kendt. For at bestemme  $\alpha_s$  integreres ligningerne (3.13) og (3.14).

Ligning (3.13) integreret giver således

$$\begin{aligned} \int h_0 d\alpha &= \\ \int \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha^2} + p_e + \frac{1}{k} P(\alpha) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2\alpha}{dx^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) d\alpha &\Rightarrow \\ h_0 \alpha + \text{konst} &= \quad (3.20) \\ -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} + p_e \alpha + \frac{1}{k} \int P(\alpha) d\alpha - \int \frac{\sigma}{2} \frac{d^2\alpha}{dx^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} d\alpha & \end{aligned}$$

Betragt nu det sidste led, skriv  $ds$  som  $\frac{ds}{dx} dx$  og benyt substitutionen



$$\begin{aligned}
 y &= \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \cdot 2 \frac{d\alpha}{dx} \frac{d^2\alpha}{dx^2} \Rightarrow \\
 dx &= \frac{4 dy \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{d\alpha}{dx} \frac{d^2\alpha}{dx^2}} \\
 &= \frac{4 y dy}{\frac{d\alpha}{dx} \frac{d^2\alpha}{dx^2}}
 \end{aligned}$$

da bliver integralet af det sidste led i ligning (3.20):

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{\sigma}{2} \frac{d^2\alpha}{dx^2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\alpha \\
 &= \frac{\sigma}{2} \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d\alpha}{dx} dx \\
 &= \frac{\sigma}{2} \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} \frac{d\alpha}{dx} y^{-3} \frac{4 y dy}{\frac{d\alpha}{dx} \frac{d^2\alpha}{dx^2}} \\
 &= 2\sigma \int y^{-2} dy \\
 &= -2\sigma \frac{1}{y} + \text{konst} \\
 &= \frac{-2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \text{konst}
 \end{aligned}$$

Integralet skal beregnes i intervallet fra 1 til  $\alpha$ , hvorfor ligning (3.13) for  $0 \leq x \leq x_s$  giver

$$c_0 = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} + (p_e - h_0) \alpha + \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21)$$

Ligeledes vil man i intervallet  $x_s \leq x \leq \lambda$  få integralet af (3.14) til

$$c_1 = -\frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha} + (p_e - h_1) \alpha + \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.22)$$

Integrationskonstanterne  $c_0$  og  $c_1$  kan bestemmes ved brug af gennemgangsbetingelsen i ligning (3.10).

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_s}{dx} &= \gamma_1 \alpha_s \quad \Rightarrow \\ \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha_s}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Således bliver  $c_0$ :

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_0) \alpha_s + \frac{1}{k} \int_1^{\alpha_s} P(s) ds \\ &+ \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

og  $c_1$  bliver:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_1) \alpha_s + \frac{1}{k} \int_1^{\alpha_s} P(s) ds \\ &+ \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ved at isolere  $\frac{d\alpha}{dx}$  i ligningerne (3.21) og (3.22) kommer man frem til et udtryk, hvoraf  $\alpha_s$  kan bestemmes

Sæt

$$g_0(\alpha) = c_0 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} - (p_e - h_0) \alpha - \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds$$

og

$$g_1(\alpha) = c_1 + \frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha} - (p_e - h_1) \alpha - \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds$$

Da bliver  $\frac{d\alpha}{dx}$  i intervallet  $0 \leq x \leq x_s$

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} &= g_0(\alpha) \quad \Leftrightarrow \\ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 &= \frac{4\sigma^2}{g_0(\alpha)^2} \quad \Leftrightarrow \\ \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 &= 4 \left(\frac{4\sigma^2}{g_0(\alpha)^2} - 1\right) = f_0(\alpha) \end{aligned}$$

ligeledes vil  $\frac{d\alpha}{dx}$  i intervallet  $x_s \leq x \leq \lambda$  være givet ved:

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 = 4 \left(\frac{4\sigma^2}{g_1(\alpha)^2} - 1\right) = f_1(\alpha)$$

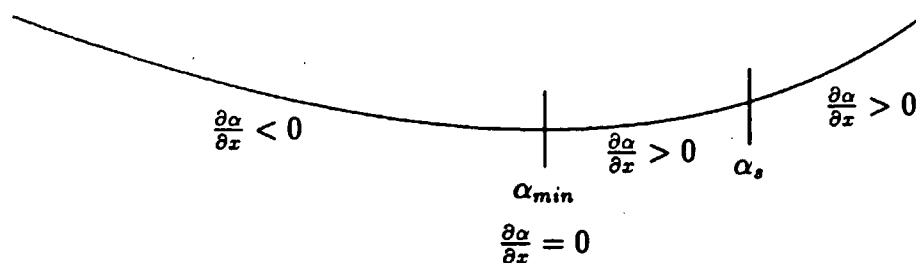
Endelig fås:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= \pm \sqrt{f_0(\alpha)} \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_s, \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \pm \sqrt{f_1(\alpha)} \quad \text{for } x_s \leq x \leq \lambda \end{aligned}$$

Da det elastiske rør antager det største tværsnitsareal i enderne og det mindste et sted derimellem, vil  $\frac{d\alpha}{dx}$  være negativ i intervallet  $0 \leq x < x_{\min}$  og positiv i intervallerne  $x_{\min} < x \leq x_s$  og  $x_s \leq x \leq \lambda$ , hvor  $x_s$  er defineret - se figur 3.1. Dette giver følgende udtryk for  $x_s$  i de to intervaller, hvor den er defineret:

$x_{\min} \leq x \leq x_s$ :

$$x_s = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{\min}} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \quad (3.25)$$



Figur 3.1: Fortegnsvariationer for  $\frac{d\alpha}{dx}$

$x_s \leq x \leq \lambda$ :

$$x_s = \lambda - \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds \quad (3.26)$$

Hvis ovenstående ligninger for  $x_s$  sættes sammen, fås følgende udtryk for  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{min}} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(\alpha)}} ds + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds \\ &= \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds \\ &= \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \\ &\quad + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda = 2 \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} + \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} \right) ds \quad (3.27)$$

I ligning (3.27) er der det problem, at  $f_0(\alpha)$  bliver nul i punktet  $\alpha_{min}$ . Dette tages der højde for ved at Taylorudvikle  $f_0(\alpha)$  i punktet  $\alpha_{min}$ . Indsættes første led af denne Taylorrække i den reciproke kvadratrod, fås et udtryk, der ligesom  $f_0$  er udefineret i  $\alpha_{min}$ . Det kan imidlertid

vises, at differensen mellem disse to udtryk er nul i  $\alpha_{min}$ , hvorfor vi i de numeriske beregninger sætter integranden i ligning (3.28) lig nul for  $\alpha = \alpha_{min}$ .

Vi Taylorudvikler  $f_0(\alpha)$  i punktet  $\alpha_{min}$ :

$$\begin{aligned} f_0(\alpha = \alpha_{min}) &= f_0(\alpha_{min}) + \frac{df_0(\alpha_{min})}{d\alpha} (\alpha - \alpha_{min}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_0(\alpha_{min})}{d\alpha^2} (\alpha - \alpha_{min})^2 + o(\alpha - \alpha_{min})^3 \\ &= f_0'(\alpha_{min})(\alpha - \alpha_{min}) + o(\alpha - \alpha_{min})^2 \end{aligned}$$

Indsættes ovenstående approksimation i integralet fås:

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(\alpha)}} d\alpha \\ &\approx \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{f_0'(\alpha_{min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{min}}} + \frac{1}{\sqrt{f_0'(\alpha_{min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{min}}} \right) d\alpha \\ &= \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{f_0'(\alpha_{min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{min}}} \right) d\alpha \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{(\alpha_s - \alpha_{min})}{f_0'(\alpha_{min})}} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Det kan nu godtgøres, at integranden i ligning (3.28) kan sættes lig nul for  $\alpha = \alpha_{min}$ .

For at vise det vil vi først Taylorudvikle  $f_0(\alpha)$  til anden orden i punktet  $\alpha = \alpha_{min}$ :

$$\begin{aligned} f_0(\alpha = \alpha_{min}) &= \\ &f_0'(\alpha_{min})(\alpha - \alpha_{min}) + \frac{1}{2} f_0''(\alpha_{min})(\alpha - \alpha_{min})^2 + o(\alpha - \alpha_{min})^3 \end{aligned}$$

Indsættes dette i integranden i ligning (3.28) fås:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min}) + \frac{1}{2} f''_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})^2}} \\
& - \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{\min}}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f''_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})}{2 f'_0(\alpha_{\min})}} - 1 \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})}} \left( 1 - \frac{f''_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})}{4 f'_0(\alpha_{\min})} - 1 \right) \\
& = - \frac{f''_0(\alpha_{\min})(\alpha - \alpha_{\min})^{\frac{1}{2}}}{4 (f'_0(\alpha_{\min}))^{\frac{3}{2}}} \\
& = 0 \quad \text{for } \alpha = \alpha_{\min}
\end{aligned}$$

Ved andet lighedstegn er det benyttet, at der for små  $x$  gælder

$$\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$$

Dette har nu givet os de mere specifikke ligninger, som skal benyttes for at finde  $x_s$  ud fra kendskabet til  $\alpha_s$ . Tilbage er at bestemme  $\alpha_s$ . Det gør vi ved iterativt at fitte en værdi, således at ligning (3.27) er opfyldt. Den præcise fremgangsmåde, vil blive forklaret i næste kapitel. Her beskrives, hvorledes konkrete talværdier findes for de opstillede udtryk.

Vores egentlige mål er som tidligere nævnt at beskrive tværsnitsarealet som funktion af stedet. For at opnå dette, skal vi generalisere ligningerne (3.25) og (3.26) til at gælde for ethvert  $x$ . Ligeledes skal vi danne en tilsvarende ligning for  $x \in [0; x_{\min}]$ . Dette kan gøres ved at integrere op til det ønskede tværsnitsareal, da vi nu har beregnet et udtryk for  $\alpha_s$ . Derved fås  $x(\alpha)$ , som ved inversion giver os det ønskede resultat:

Vi får altså ligningerne:

$$0 \leq x \leq x_{\min}$$

$$x = - \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \quad (3.29)$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_s:$$

$$x = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{\min}} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \quad (3.30)$$

$$x_s \leq x \leq \lambda:$$

$$x = \lambda - \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds \quad (3.31)$$

Dette er de ligninger, der giver  $x(\alpha)$ , men før disse ligninger kan opstilles, må adskillige konstantberegninger foretages. De væsentligste ligninger i dette kapitel vil blive opsummeret i kapitel 4. Konstantberegningernes rækkefølge gennemgås i afsnit 4.4, side 58, mens den overordnede algoritme til beregningen af  $x(\alpha)$  opstilles i afsnit 4.5, side 61.

Da vores beregninger siden skal relateres til Svend Mortensens eksperimentelle arbejde, bestemmes samtidig størrelsen:

$$H(x) = \frac{1}{2} u(x)^2 + p(x) \quad (3.32)$$

der indeholder information om energi og tryk i røret. Det relative trykfald er givet ved:

$$\frac{\Delta H}{H(x_s)} = \frac{H(x_s) - H(\lambda)}{H(x_s)} \quad (3.33)$$

idet trykfaldet først opstår efter separationspunktet  $x_s$ . Udtrykket for  $H(x)$  afhænger følgelig af positionen i røret, og kan beskrives ved hjælp af ligningerne (3.11) og (3.12).

$$H(x) = \frac{1}{2}u(x)^2 + p(x) = h_0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_s$$

og

$$H(x) = \frac{1}{2}\chi u(x)^2 + p(x) + \frac{1}{2}(1-\chi)u(x)^2 \Leftrightarrow$$

$$H(x) = h_1 + \frac{1}{2}(1-\chi)u(x)^2 \quad \text{for } x_s < x \leq \lambda \quad (3.34)$$

Ved brug af disse udtryk og ved brug af relationen  $u = \frac{q}{\alpha_1}$  kan ligning (3.33) omskrives til:

$$\frac{\Delta H}{H(x_s)} = \frac{h_0 - h_1 - \frac{1}{2}(1-\chi)\frac{q^2}{\alpha_1^2}}{h_0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta H}{H(x_s)} = 1 - \frac{h_1 - \frac{1}{2}(1-\chi)\frac{q^2}{\alpha_1^2}}{h_0}$$

Benyttes ligningerne (3.15) og (3.16) kan ovenstående udtryk omskrives endnu en gang:

$$\frac{\Delta H}{H(x_s)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\chi\frac{q^2}{\alpha_1^2} + \eta_2 q^2 - \frac{1}{2}(1-\chi)\frac{q^2}{\alpha_1^2}}{P_R - \eta_1 q^2}$$

Af ligning (3.19) isoleres  $P_R$

$$P_R = q^2 \left( \frac{1}{2}(1-\chi)\frac{1}{\alpha_1^2} + \eta_1 + \eta_2 + \frac{1}{2}\chi\frac{1}{\alpha_1^2} \right)$$

hvilket indsat i ovenstående udtryk giver det endelige udtryk for den relative ændring af funktionen  $H$ :



$$\begin{aligned}\frac{\Delta H}{H(x_s)} &= 1 - \frac{\frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} + \eta_2 q^2 - \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{q^2}{\alpha_2^2}}{q^2 \left( \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{1}{\alpha_2^2} + \eta_1 + \eta_2 + \frac{1}{2} \chi \frac{1}{\alpha_1^2} \right) - \eta_1 q^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2} \chi \frac{1}{\alpha_1^2} + \eta_2 - \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{1}{\alpha_2^2}}{\frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{1}{\alpha_2^2} + \eta_2 + \frac{1}{2} \chi \frac{1}{\alpha_1^2}} \\ &= \frac{(1 - \chi) \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \right)}{(1 - \chi) \frac{1}{\alpha_2^2} + 2\eta_2 + \chi \frac{1}{\alpha_1^2}}\end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Fra model til resultat

I det følgende kapitel vil vi beskrive en algoritme til at beregne  $\alpha$  som funktion af positionen i det elastiske rørs længderetning. Dette gør vi ved at benytte de ligninger, som er opstillet i kapitel 3. Sidst i kapitlet beskrives beregningen af  $H(x)$ . Formålet med dette kapitel er at skabe et overblik over, hvordan ligningerne opstillet i forrige kapitel skal bruges for numerisk at beregne tværsnitsarealet. Derfor er de vigtige resultater fra det forrige kapitel gentaget her.

Før beskrivelsen af beregningen af  $\alpha(x)$  er der to udtryk, som skal beregnes. Dels skal ligningen for rørets elastiske egenskaber  $P(\alpha)$  integreres fra 1 til  $\alpha$ , og dels skal vi eksplicit beregne det mindste tværsnitsareal  $\alpha_{min}$ . Størrelsen af  $\alpha_{min}$  indgår blandt andet i integralet (3.27) side 47.

For at sikre en sammenhængende gennemgang har vi valgt at foretage ovenstående beregninger før selve algoritmebeskrivelsen.

### 4.1 Integralet af $P(\alpha)$

De elastiske egenskaber ved røret, er beskrevet i kapitel 2 side 13, og er her givet ved:

$$P(\alpha) = \begin{cases} k(\alpha - a_2 + a_3 e^{-a_1(\alpha-0.95)}) & \text{for } 1 \geq \alpha > 0.95 \\ -(b_1 + \alpha^{-1.5}) & \text{for } 0 < \alpha \leq 0.95 \end{cases} \quad (4.1)$$

Som det fremgår, bliver integralet delt i to funktioner afhængigt af  $\alpha$ , se eventuelt den nederste graf på figur 2.2 side 15. Derudover skal det

bemærkes, at integralet af  $P(\alpha)$  i modellen kun optræder med faktoren  $1/k$  foran. Derfor vil vi i det følgende medtage denne faktor ved beregningen af integralet. Integralet opdeles på følgende vis:

For  $\alpha$  i intervallet  $1 \geq \alpha > 0.95$  fås:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds \\
 &= \int_1^\alpha (s - a_2 + a_3 e^{-a_1(s-0.95)}) ds \\
 &= \left[ \frac{1}{2} s^2 \right]_1^\alpha - [a_2 s]_1^\alpha + a_3 e^{a_1 \cdot 0.95} \int_1^\alpha e^{-a_1 s} ds \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) - a_2 (\alpha - 1) + a_3 e^{a_1 \cdot 0.95} \left[ -\frac{1}{a_1} e^{-a_1 s} \right]_1^\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} - a_2 \alpha + a_2 - \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1(\alpha-0.95)} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 \cdot 0.05} \quad \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\int_1^\alpha P(s) ds = k1 + \frac{1}{2} \alpha^2 - a_2 \alpha - \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1(\alpha-0.95)}$$

hvor

$$k1 = a_2 - \frac{1}{2} + \frac{a_3}{a_1} e^{a_1 \cdot 0.05}$$

For  $\alpha$  i intervallet  $0 < \alpha \leq 0.95$  fås:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds \\
 &= \int_1^{0.95} (s - a_2 + a_3 e^{-a_1(s-0.95)}) ds + \frac{1}{k} \int_{0.95}^\alpha -(b_1 + s^{-1.5}) ds \\
 &= \left[ \frac{1}{2} s^2 \right]_1^{0.95} - [a_1 s]_1^{0.95} + a_3 e^{a_1 \cdot 0.95} \left[ -\frac{1}{a_1} e^{-a_1 s} \right]_1^{0.95} \\
 &\quad - \frac{1}{k} ((b_1 s)_{0.95}^\alpha + [-2 s^{-0.5}]_{0.95}^\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (0.95^2 - 1) - a_2 (0.95 - 1) - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 0.05} \\
&\quad - \frac{1}{k} (b_1 (\alpha - 0.95) - 2 (\alpha^{-0.5} - (0.95)^{-0.5})) \\
&= -0.04875 + 0.05 a_2 - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 0.05} \\
&\quad + \frac{1}{k} (b_1 0.95 - 2 (0.95)^{-0.5} - b_1 \alpha + 2 \alpha^{-0.5}) \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^\alpha P(s) ds = k2 + \frac{1}{k} (-b_1 \alpha + 2 \alpha^{-0.5})} \quad (4.2)$$

hvor

$$\begin{aligned}
k2 &= -0.04875 + 0.05 a_2 - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 0.05} \\
&\quad + \frac{1}{k} (b_1 0.95 - 2 (0.95)^{-0.5})
\end{aligned}$$

## 4.2 Det mindste tværsnitsareal $\alpha_{min}$

Det mindste tværsnitsareal kan beregnes ved at indsætte  $\alpha_{min}$  i ligning (3.21) side 44, idet der benyttes, at for  $\alpha = \alpha_{min}$  vil  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$ . Da vi antager, at  $\alpha_{min} \leq 0.95$ , indsættes udtrykket (4.2) i ligningen. Denne kan herefter omskrives til en ligning af 4. orden i  $\sqrt{\alpha_{min}}$ .

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_{min}} + (p_e - h_0) \alpha_{min} + k2 - \frac{b_1 \alpha_{min}}{k} + \frac{2}{k \sqrt{\alpha_{min}}} + 2\sigma - c_0 \\
&= (p_e - h_0) \sqrt{\alpha_{min}}^2 - \frac{b_1 \sqrt{\alpha_{min}}^2}{k} + k2 + 2\sigma - c_0 \\
&\quad + \frac{2}{k \sqrt{\alpha_{min}}} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\sqrt{\alpha_{min}}^2} = 0
\end{aligned}$$

Sættes nu  $x = \sqrt{\alpha_{min}}$  samtidig med, at ligningen forlænges med  $x^2$  fås:

$$(p_e - h_0)x^4 - \frac{b_1 x^4}{k} + (k_2 + 2\sigma - c_0)x^2 + \frac{2x}{k} - \frac{1}{2}q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + cx + d = 0} \quad (4.3)$$

hvor

$$a = (p_e - h_0) - \frac{b_1}{k}$$

$$b = (k_2 + 2\sigma - c_0)$$

$$c = \frac{2}{k}$$

$$d = -\frac{1}{2}q^2$$

For at finde  $\alpha_{min}$  skal vi altså finde et nulpunkt for 4. gradsligningen i  $x$ , og derefter sætte  $\alpha_{min} = x^2$ .

### 4.3 Selve algoritmen for $\alpha_s$

Nu har vi fået fastlagt de udtryk, der er nødvendige for at beskrive selve algoritmen. Dette gøres i to trin, først bestemmes konstanten  $\alpha_s$ , og derefter beregnes  $\alpha(x)$ .

#### 4.3.1 Bestemmelse af $\alpha_s$

Konstanten  $\alpha_s$  bestemmes ved bisektion. Separationen sker lige efter, at røret har antaget det mindste tværsnitsareal  $\alpha_{min}$ . Da minimumspunktet ligger mellem de to stive rør hver med tværsnitsareal  $\alpha_1$ , og da  $\alpha_{min} > 0$ , må  $\alpha_s$  ligge i intervallet  $[0; \alpha_1]$ . Ved bisektion halveres dette interval kontinuerligt, og det næste  $\alpha_s$  søges i det halverede interval. Intervalendepunkterne betegnes henholdsvis  $\alpha_{mindst}$  og  $\alpha_{størst}$ . For hvert gæt af  $\alpha_s$  beregnes alle implicerede konstanter samt det mindste tværsnitsareal  $\alpha_{min}$ . Dette minimumspunkt indgår som den ene integrationsgrænse i ligning (3.27) side 47. For hvert nyt gæt kontrolleres værdien af  $\alpha_s$  ved at sammenligne integralerne i ligning (3.27) med  $\lambda$ . Dette leder frem til følgende algoritme:

**Algoritme 4.1 Bestemmelse af  $\alpha_s$** 

1. Intervaldepunkterne til bisektionen fastsættes ved:

$$\alpha_{\text{mindst}} := 0$$

$$\alpha_{\text{størst}} := 1$$

2. Så længe vi ikke har gættet et  $\alpha_s$ , som er tilstrækkeligt præcist, fortsættes bisektionen, idet følgende punkter skal udføres:

(a) Det næste  $\alpha_s$  gættes ved beregning af bisektionspunktet - midtpunktet i intervallet :

$$\alpha_s = \frac{\alpha_{\text{mindst}} + \alpha_{\text{størst}}}{2}$$

(b) Konstanten  $q$  beregnes ved ligning (3.19)

(c) Konstanten  $h_0$  beregnes ved ligning (3.15)

(d) Konstanten  $h_1$  beregnes ved ligning (3.16)

(e) Konstanten  $c_0$  beregnes ved ligning (3.23)

(f) Konstanten  $c_1$  beregnes ved ligning (3.24)

(g) Det mindste tværsnitsareal  $\alpha_{\text{min}}$  beregnes ved ligning (4.3)

(h) For at undersøge, om dette  $\alpha_s$  er tilstrækkeligt præcist, beregnes højresiden i ligning (3.27) side 47. Størrelsen af dette udtryk sammenlignes derefter med den dimensionsløse længde af røret  $\lambda$ .

$$\text{res1} := \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds$$

$$\text{res2} := \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds$$

$$\text{res3} := \int_{\alpha_{\text{min}}}^{\alpha_s} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds$$

(i) resultat := res1 + res2 + 2 res3 -  $\lambda$

(j) Hvis resultat  $\sim 0$  er  $\alpha_s$  gættet tilstrækkeligt præcist, ellers

(k) Hvis resultat  $> 0$  er gættet for højt, og vi skal lave den næste bisektion i intervallet  $[\alpha_s; \alpha_{\text{størst}}]$ , hvorfor  $\alpha_{\text{mindst}} := \alpha_s$ , ellers

- (I) Hvis resultat  $< 0$  er gættet for lavt <sup>1</sup>, og vi skal lave den næste bisektion i intervallet  $[\alpha_{\text{mindst}}; \alpha_s]$ , hvorfor  $\alpha_{\text{nytt}} := \alpha_s$

## 4.4 De enkelte punkter i algoritmen

I det følgende kommer en gennemgang af de udtryk, der benyttes til beregning af de forskellige konstanter. Størsteparten af ligningerne findes i kapitel 3, men er for overskuelighedens skyld også medtaget her.

### 4.4.1 Beregning af konstanterne $q$ , $h_0$ og $h_1$

$$q = P_R^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} (1 - \chi) \frac{1}{\alpha_s^2} + \eta_1 + \eta_2 + \frac{1}{2} \chi \frac{1}{\alpha_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$h_0 = P_R - \eta_1 q^2$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \chi \frac{q^2}{\alpha_1^2} + \eta_2 q^2$$

### 4.4.2 Beregning af konstanterne $c_0$ og $c_1$

Konstanterne  $c_0$  og  $c_1$  bliver forskellige afhængigt af, om  $\alpha$  er større eller mindre end 0.95. Når integralet af  $P(\alpha)$  fra 1 til  $\alpha_s$  indsættes, fås:

For  $\alpha > 0.95$

$$c_0 = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_0) \alpha_s + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ k_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 - a_2 \alpha - \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1(\alpha - 0.95)}$$

<sup>1</sup>Dette og ovenstående ræsonnement burde være bearbejdet analytisk, hvilket vi ikke har haft tid til at gøre. I stedet har vi testet programmet empirisk, og ud fra disse resultater dannet denne fremgangsmetode.

$$c_1 = -\frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_1) \alpha_s + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ + k_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 - a_2 \alpha - \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1(\alpha-0.95)}$$

For  $\alpha \leq 0.95$

$$c_0 = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_0) \alpha_s + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ + k_2 + \frac{1}{k} \left(-b_1 \alpha + 2\alpha^{-\frac{1}{2}}\right) \\ c_1 = -\frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha_s} + (p_e - h_1) \alpha_s + \frac{2\sigma}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma_1^2 \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ + k_2 + \frac{1}{k} \left(-b_1 \alpha + 2\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Hvor:

$$k_1 = a_2 - \frac{1}{2} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 \cdot 0.05} \\ k_2 = -0.04875 + 0.05 a_2 - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} e^{-a_1 \cdot 0.05} \\ + \frac{1}{k} \left(b_1 \cdot 0.95 - 2(0.95)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

#### 4.4.3 Beregning af $\alpha_{min}$

Minimumspunktet  $\alpha_{min}$  beregnes som beskrevet side 56 ved at finde nulpunkter i et 4. gradspolynomium. Dette gøres ved brug af Newton Raphson's algoritme, som er beskrevet i kapitel 5.



#### 4.4.4 Beregning af integralerne for et $\alpha_s$

De tre integraler, som indgår for hvert  $\alpha_s$ , beregnes forskelligt. De to integraler med grænserne fra  $\alpha_s$  til  $\alpha_1$  beregnes direkte, ved numerisk integration, hvorimod det tredje integral med grænserne fra  $\alpha_{min}$  til  $\alpha_s$  skal omskrives, som tidligere nævnt side 48

For at kunne foretage den numeriske integration, har vi brugt Romberg integration. Algoritmen hertil er beskrevet i kapitel 5. Her vil vi derfor kun beskrive de integraler, der skal beregnes.

$$\begin{aligned} \text{res1} &:= \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds & \text{for } 0 \leq x \leq x_s \\ \text{res2} &:= \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds & \text{for } x_s \leq x \leq \lambda \end{aligned}$$

For at undgå det singulære punkt i tredje integral omskrives udtrykket til:

$$\text{res3} := \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_s} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} - \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{min})}} \frac{1}{\sqrt{s - \alpha_{min}}} \right) ds + 2 \sqrt{\frac{(\alpha_s - \alpha_{min})}{f'_0(\alpha_{min})}}$$

Hvor  $f_0$  og  $f_1$  er givet ved:

$$f_n(\alpha) = 4 \left( \frac{4\sigma^2}{g_n(\alpha)^2} - 1 \right) \quad n = 0, 1$$

med

$$\begin{aligned} g_0(\alpha) &= c_0 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} - (p_e - h_0) \alpha - \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds & \text{for } 0 \leq x \leq x_s \\ g_1(\alpha) &= c_1 + \frac{\chi}{2} \frac{q^2}{\alpha} - (p_e - h_1) \alpha - \frac{1}{k} \int_1^\alpha P(s) ds & \text{for } x_s \leq x \leq \lambda \end{aligned}$$

Tilsvarende er  $f'_0$  i punktet  $\alpha_{min}$  givet ved:

$$f'_0(\alpha_{min}) = -\frac{32\sigma^2 g'_0(\alpha_{min})}{g_0^3(\alpha_{min})}$$

hvor  $g_0$  er beregnet ovenfor, blot skal  $\alpha$  erstattes med  $\alpha_{min}$ . Endelig beregnes  $g'_0$

$$g'_0(\alpha_{min}) = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha_{min}^2} - (p_c - h_0) - \frac{1}{k} P(\alpha_{min})$$

#### 4.4.5 Det samlede resultat beregnes

Resultatet af beregningerne findes ved:

$$\text{resultat} = \text{res1} + \text{res2} + 2\text{res3} - \lambda$$

Det angiver som tidligere nævnt nøjagtigheden af det valgte  $\alpha$ ,

### 4.5 Beregning af $\alpha(x)$

Efter at konstanten  $\alpha_{min}$  er beregnet kan ligningerne til beskrivelse af  $\alpha(x)$  bestemmes. Den dimensionsløse længde af røret opdeles nu i tre intervaller, hvorefter man ved brug af ligningerne (3.29), (3.30) og (3.31) side 50, kan generere data for tværsnitsarealet som funktion af stedet. Disse data kan herefter - med et andet program (gnuplot) - plottes således at vi får tegnet de inverse grafer; tværsnitsarealet som funktion af stedet. Dette program beskrives ikke, da det ingen indflydelse har på løsningen af vores problem.

#### Algoritme 4.2 Bestemmelse af $\alpha(x)$

1. Værdien for

$$x(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds$$

beregnes i et antal skridt for  $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_{min}]$ .

For hvert skridt gemmes henholdsvis værdien for  $x$  (resultatet af integrationen) og værdien for  $\alpha$  på fil.

Vi får således værdier for  $x \in [0; x_{min}]$ .

2. Værdien for

$$x(\alpha) = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \quad (4.4)$$

beregnes i et antal skridt for  $\alpha \in [\alpha_{\min}; \alpha_s]$ .

For hvert skridt gemmes henholdsvis værdien for  $x$  (resultatet af integrationen) og værdien for  $\alpha$  på fil.

Vi får således værdier for  $x \in [x_{\min}; x_s]$ . Når  $\alpha = \alpha_{\min}$  sættes integranden lig nul (jævnfør side 48 i kapitel 3).

3. Værdien for

$$x(\alpha) = \lambda + \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{f_1(s)}} ds$$

beregnes i et antal skridt for  $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_1]$ .

For hvert skridt gemmes henholdsvis værdien for  $x$  (resultatet af integrationen) og værdien for  $\alpha$  på fil.

Vi får således værdier for  $x \in [x_s; \lambda]$ .

## 4.6 De enkelte punkter i algoritmen

De to integraler beskrevet i henholdsvis punkt (1) og punkt(3) beregnes direkte ved brug af Romberg's metode til numerisk integration, som er beskrevet i kapitel 5.

Integralet i ligning 4.4 omskrives ved Taylorudvikling, for at eliminere det singulære punkt, som optræder her - se side 48. Dette giver følgende resultat:

$$\begin{aligned} x(\alpha) = & \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_s} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} - \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{\min}}} \right) ds + 2 \sqrt{\frac{\alpha_s - \alpha_{\min}}{f'_0(\alpha_{\min})}} \\ & + \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} ds \\ & + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{f_0(s)}} - \frac{1}{\sqrt{f'_0(\alpha_{\min})}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_{\min}}} \right) ds \\ & + 2 \sqrt{\frac{\alpha - \alpha_{\min}}{f'_0(\alpha_{\min})}} \quad \text{for } x_{\min} \leq x \leq x_s \end{aligned} \quad (4.5)$$

Alle de implicerede funktioner er givet nøjagtigt som beskrevet på side 60, og er derfor ikke gentaget her.

## 4.7 Beregning af $H(x)$

Størrelsen  $H(x)$ , som er udledt på side 51 er givet ved udtrykket:

$$H(x) = \begin{cases} h_0 & \text{for } 0 \leq x \leq x_s \\ h_1 + \frac{1}{2}(1 - \chi)u^2 & \text{for } x_s < x \leq \lambda \end{cases}$$

Algoritmen for denne beregning er meget analog beregning af  $\alpha(x)$ , idet resultatet, som beregnes i de samme tre tempi som  $\alpha(x)$ , gemmes på fil sammen med den tilhørende  $x$ -værdi. Disse data kan så ligeledes tegnes, eksempelvis ved at benytte programmet gnuplot.

### Algoritme 4.3 Bestemmelse af $H(x)$

- Når  $\alpha_s$  er beregnet findes

$$x_s := \lambda - \int_{\alpha_s}^{\alpha_1} \frac{1}{f_1(s)} ds$$

- Ved beregning af de tre integraler til  $\alpha(x)$  gemmes henholdsvis  $x$  og  $\alpha$  i en tabel.
- Efter hvert integral er beregnet beregnes  $H(x)$ , hvorefter både den tilhørende  $x$ -værdi og resultatet  $H(x)$  gemmes på fil.

Derudover er det ligeledes relevant at kende størrelsen af det relative energi- og tryktab, hvorfor denne også bør beregnes.



# Kapitel 5

## Numeriske metoder

I den stationære væskemodel kan næsten alle udtryk beregnes analytisk. Kun nulpunktssøgning og integration af udtrykkene i ligningerne (4.3) side 56 og (4.5) side 62 i kapitel 4 må foretages numerisk. De anvendte numeriske metoder der præsenteres i det følgende er hovedsageligt hentet fra bøgerne William H. Press: Numerical recipes in Pascal [Recipes] og J. Stoer og R. Bulirsch: Introduction to numerical analysis [Stoer].

### 5.1 Nulpunktssøgning

Når vi skal finde nulpunkterne i 4. gradspolynomiet

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d \quad (5.1)$$

hvor konstanterne som tidligere beskrevet er givet ved

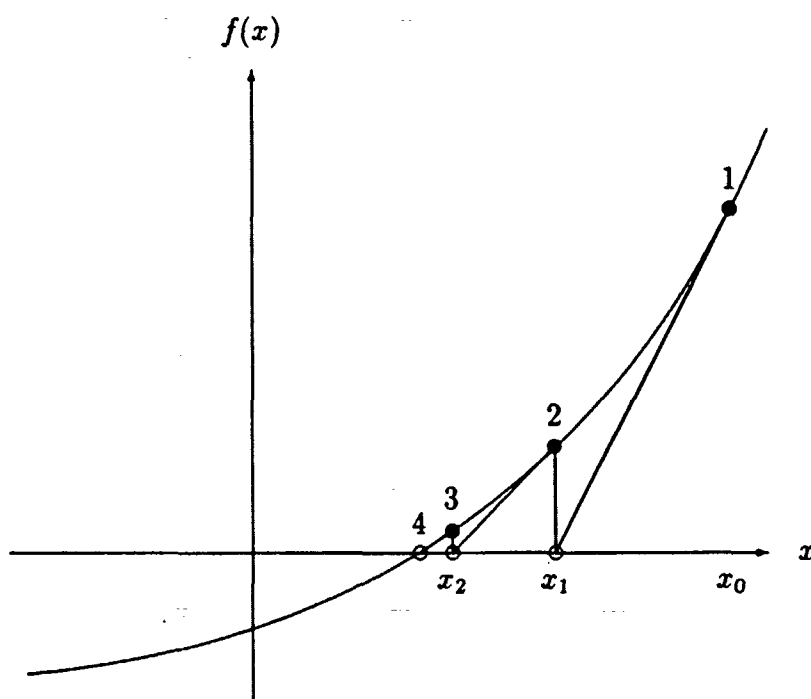
$$a = (p_e - h_0) - \frac{b_1}{k}$$

$$b = (k^2 + 2\sigma - c_0)$$

$$c = \frac{2}{k}$$

$$d = -\frac{1}{2}q^2$$

benytter vi Newton Raphson's algoritme. For at benytte algoritmen må følgende krav være opfyldt. Dels skal funktionen  $f(x)$  være kontinuert, og dels skal  $f'(x) \neq 0$  i det interval, hvori nulpunkterne søges. Det første



Figur 5.1: Ved at forlænge tangenten i det betragtede punkt findes næste approksimation af nulpunktet som liniens skæring med  $x$ -aksen.

krav er i vores tilfælde altid opfyldt. Derimod kan det ikke udelukkes, at funktionen har lokale ekstremumpunkter. For at opfylde det andet krav, må vi derfor udvide metoden en smule. Først beskrives Newton Raphson's metode, dernæst den benyttede udvidelse af algoritmen.

Newton Raphson's metode kan geometrisk forklares ved, at man ud fra en startapproksimation til nulpunktet  $x_0$  beregner henholdsvis  $f(x_0)$  og  $f'(x_0)$ . Dernæst forlænges tangentlinien i punktet  $(x_0, f(x_0))$ , således at den skærer  $x$ -aksen. Skæringen med  $x$ -aksen  $x_1$  benyttes herefter som den nye approksimation til nulpunktet, se figur 5.1. Denne procedure gentages, indtil forskellen mellem det fundne og det analytisk beregnede nulpunkt ligger indenfor en på forhånd fastsat tolerance.

Ved brug af Taylor-udvikling kan metoden udledes algebraisk. Dette gøres ved at rækkeudvikle en funktion i en omegn af punktet  $x_n$ , hvilket kan skrives som:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2 \quad (5.2)$$

hvor  $\xi \in [x_{n+1} - x_n; x_{n+1} + x_n]$

For pæne funktioner og i en lille omegn af  $x_n$ , det vil sige for små værdier af  $x_{n+1} - x_n$ , kan vi i ligning (5.2) nøjes med at betragte de første to led. Da vi er interesserede i at finde nulpunktet for den approksimerede funktion, beregnes  $f(x_{n+1}) = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= 0 && \Leftrightarrow \\ f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= 0 && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dette udtryk kaldes Newton Raphson's formel og beskriver, hvorledes vi ved hjælp af forrige approksimation kan beregne et nyt nulpunkts-gæt. Fejlen på et givent nulpunkts-gæt kan beskrives som:

$$\varepsilon_n = x_n - \alpha$$

hvor  $\alpha$  betegner det analytisk beregnede nulpunkt. For at undersøge metodens konvergenssegenskaber, udledes et udtryk for forholdet mellem  $\varepsilon_{n+1}$  og  $\varepsilon_n$ .

I det følgende antages det at  $f'(\alpha) \neq 0$ , hvilket giver at  $f(x) \neq 0$  for alle  $x$  i en given omegn af  $\alpha$ . Hermed er det muligt, at rækkeudvikle  $f$  omkring punktet  $x_n$ :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_n)^2$$

hvor  $\xi \in [x_n - \alpha; x_n + \alpha]$ . Da  $f(\alpha) = 0$  fås der ved division af ovenstående ligning med  $f'(x_n)$ , følgende udtryk:



$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n &= -\frac{f''(\xi)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} \Leftrightarrow \\ \alpha - x_{n+1} &= -\frac{f''(\xi)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} \Leftrightarrow \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \end{aligned}$$

Lader vi  $x_n \rightarrow \alpha$  fås:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad (5.3)$$

hvilket viser, at Newton Raphson's metode konvergerer kvadratisk. Denne hurtige konvergens bevirker, at algoritmen er meget anvendt inden for nulpunktssøgning. Dog har metoden et par svagheder.

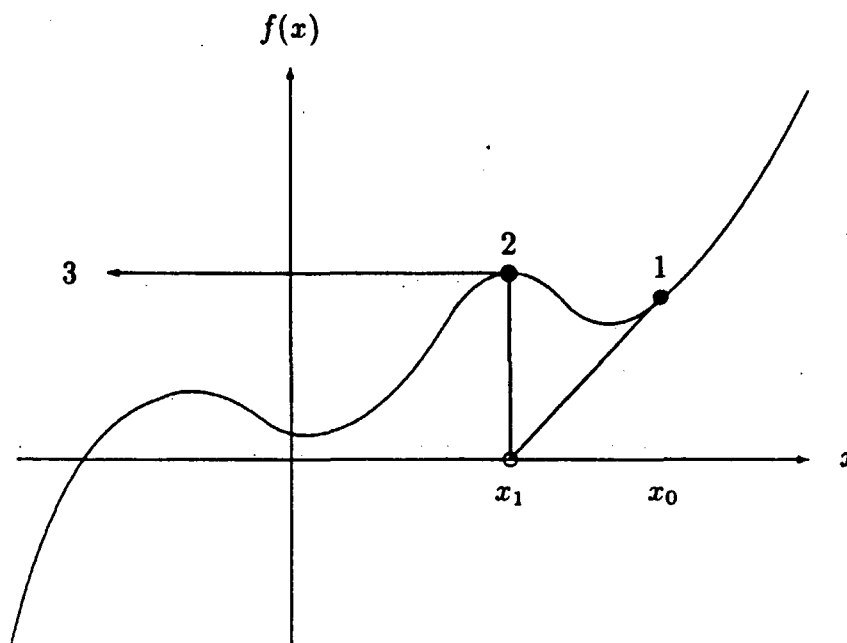
Beregnes funktionen i et punkt langt fra den søgte rod, er Newton Raphson's metode meget upræcis. I dette tilfælde burde man medtage flere led i Taylor-udviklingen i ligning (5.2), idet størrelsen  $x_{n+1} - x_n$  ikke længere kan regnes for lille.

Derudover kan funktionen have lokale ekstremumpunkter. Skal  $f$  undersøges i nærheden af et sådant punkt, vil  $f'(x)$  være meget lille og det efterfølgende nulpunktsgæt stort - se figur 5.2.

For at undgå disse former for fejlregninger kombineres Newton Raphson's algoritme med bisektion. Er vi langt fra nulpunktet, kan vi ved bisektion hurtigt indsnævre det betragtede interval. Samtidig er det med denne metode muligt at tage højde for eventuelle lokale ekstremumpunkter.

Når bisektionen anvendes, må det kræves, at funktionsværdierne i intervalendepunkterne har forskellige fortegn. Kan betingelsen om fortegnsvariation i intervalendepunkterne ikke opfyldes, benytter vi Newton Raphson's algoritme. Det antages da, at et punkt hvori  $f'(x) = 0$ , er et nulpunkt.

Dette leder frem til følgende overordnede algoritmer for henholdsvis den forbedrede version - rdsikker - og den oprindelige version - rdnewt - af Newton Raphson's algoritme.



Figur 5.2: Eksempel på funktion hvor Newton Raphson's formel ikke kan benyttes til nulpunktssøgning.

### Algoritme 5.1 nulpunkt

1.  $f_l := f(\text{start\_pkt})$  og  $f_h := f(\text{slut\_pkt})$ .
2. Hvis  $f_l$  og  $f_h$  har forskelligt fortegn ( $f_l f_h < 0$ ) så udføres rdsikker på intervallet  $[\text{start\_pkt}; \text{slut\_pkt}]$
3. ellers udføres:
  - (a) Lad  $x$  gennemløbe intervallet  $[\text{start\_pkt}; \text{slut\_pkt}[$  Fortegnet for  $f(x)$  i alle de undersøgte punkter sammenlignes med fortegnet for  $f_h$ .
  - (b) Hvis vi finder et  $f(x)$ , som har modsat fortegn af  $f_h$ , udføres rdsikker på intervallet  $[x; \text{slut\_pkt}]$ .
  - (c) Hvis alle værdier af  $f$  derimod har samme fortegn, udføres rd-newt, idet nulpunktet, hvis det eksisterer, må findes i et punkt, hvor  $x$ -aksen er tangent til grafen for  $f$ . For at finde nulpunktet så præcist som muligt, benyttes som startpunkt det af de undersøgte punkter, som numerisk set er tættest på nul.

**Algoritme 5.2** rdsikker [Recipes, side 290]

1. Hvis  $fl$  er negativ så sættes  $x_l := \text{start\_pkt}$  og  $x_h := \text{slut\_pkt}$ .
2. ellers udføres:
  - (a) en ombytning af  $fl$  og  $fh$ .
  - (b)  $x_l := \text{slut\_pkt}$  og  $x_h := \text{start\_pkt}$ .

3. Den første approksimation af nulpunktet beregnes ved

$$x_n := \frac{\text{start\_pkt} + \text{slut\_pkt}}{2}$$

4. Den første funktionstilvækst approksimeres ved

$$dx := |\text{slut\_pkt} - \text{start\_pkt}|$$

og den forrige tilvækst  $dx_{old} := dx$

5. Så længe vi ikke har fundet en approksimation, der opfylder vores krav om nøjagtighed, eller så længe vi ikke har nået grænsen for antallet af iterationer,  $i < \text{max\_it}$ , udføres:

- (a) Beregn henholdsvis  $f(x_n)$  og  $f'(x_n)$ .
- (b) Hvis hældningen  $df$  af  $f$  er lille, eller hvis vi er i et lokalt ekstremumspunkt, dvs hvis  $df = 0$ , eller hvis  $f$  er stor i forhold til  $dx_{old}$   $df$  udføres bisektion:

- i. Sæt den forrige funktionstilvækst til denne ved:

$$dx_{old} := dx$$

- ii. Vi beregner en ny funktionstilvækst

$$dx := \frac{x_l + x_h}{2}$$

- iii. Det nye  $x_n$  beregnes ved  $x_n := x_l + dx$ .

- iv. Undersøg om vi har fundet et eksakt nulpunkt, ved at checke om  $x_{n-1} = x_n$

- (c) ellers udføres Newton Raphson's algoritme:

- i. Lad  $dx := \frac{f}{df}$  og  $x_n := x_n - dx$

- ii. Undersøg om vi har fundet et eksakt nulpunkt, ved at kontrollere om  $x_{n-1} = x_n$
- (d) Undersøg nu om vi har itereret længe nok, dvs om  $|dx| < \text{tolerancen}$ . I så fald er vi færdige.
- (e) ellers udføres:
  - i. beregn den næste værdi for henholdsvis  $f(x_n)$  og  $f'(x_n)$
  - ii. hvis  $f(x_n) < 0$  sættes  $xl := x_n$  og  $fl := f$  ellers sættes  $xh := x_n$  og  $fh := f$
  - iii. Tæl antallet af iterationer op ved  $i := i + 1$
- 6. Hvis vi har fundet et nulpunkt, dvs hvis vi har itereret mindre end  $\text{max\_it}$  gange, returneres nulpunktet ved  $\text{rdsikker} := x_n$
- 7. ellers udskrives en fejlmeddelelse til brugeren, og det opnåede  $x_n$  returneres ved  $\text{rdsikker} := x_n$

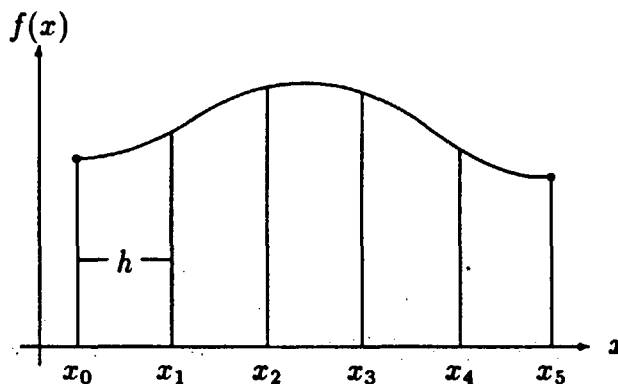
### Algoritme 5.3 rdnewt [Recipes, side 290]

1. Den første approksimation af nulpunktet beregnes ved

$$x_n := \frac{x1 + x2}{2}$$

2. Så længe vi ikke har fundet en tilstrækkelig præcis approksimation, eller så længe vi ikke har nået grænsen for antallet af iterationer,  $i < \text{max\_it}$ , udføres:
  - (a) Beregn henholdsvis  $f(x_n)$  og  $f'(x_n)$ .
  - (b) Hvis  $f'(x) > 0$ , dvs hvis  $|f'(x)| > \text{tolerance}$  så udføres Newton Raphson's algoritme:
    - i. Lad  $dx := \frac{f}{df}$  og  $x_n := x_n - dx$
    - ii. Undersøg om vi stadig er indenfor det interval, hvori nulpunkterne skal findes. Hvis ikke udskrives en fejlmeddelelse på skærmen.
    - iii. Undersøg nu om vi har itereret længe nok, dvs om  $|dx| < \text{tolerancen}$ . I så fald er vi færdige.
  - (c) ellers, hvis  $|f| > \text{tolerance}$ , findes der et lokalt ekstremumspunkt, som ikke er et nulpunkt.
  - (d) Tæl antallet af iterationer op ved  $i := i + 1$

3. Hvis vi har fundet et nulpunkt, dvs hvis vi har itereret mindre end  $\text{max\_it}$  gange returneres nulpunktet ved  $\text{rdnewt} := x_n$
4. ellers udskrives en fejlmeddelelse til brugeren, og det opnåede  $x_n$  returneres ved  $\text{rdnewt} := x_n$



Figur 5.3: Funktionens definitionsinterval opdeles i  $n$  delintervaller.

## 5.2 Numerisk integration

Der eksisterer adskillige metoder til at bestemme integralet af en funktion numerisk. I datalogiske opslagsværker som for eksempel William H. Press: Numerical recipes in Pascal [Recipes], kan man alt efter krav om nøjagtighed og funktionens udseende vælge en passende algoritme.

I vores modelbehandling benyttes Romberg's integrationsmetode, som varmt anbefales i eksempelvis [Recipes] og i J. Stoer og R. Bulirsch: Introduction to numerical analysis [Stoer].

I det følgende skal metoden beskrives matematisk. Dog har vi for at sikre en sammenhængende og overskuelig beskrivelse valgt ikke at medtage alle beviser. Beviserne er ikke trivielle men kan findes udførligt beskrevet i blandt andet [Stoer]. Er beviset udeladt, opgives i stedet en reference hertil.

### 5.2.1 Introduktion

Vi ønsker at integrere en funktion numerisk i intervallet  $[a; b]$ . Dette interval opdeles i  $n$  delintervaller af længden  $h$  - se figur 5.3.

Disse intervaller endepunkter navngives, som illustreret på figuren med  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Et vilkårligt  $x_i$  kan derfor skrives som:

$$x_i = x_0 + ih, \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n$$

Funktionsværdierne  $f(x)$  i de enkelte punkter betegnes med:

$$f(x_i) = f_i$$

Når et givent antal funktionsværdier kendes, kan funktionen approksimeres med en integrabel kurve. Ofte approksimerer man funktionen i de beregnede punkter ved hjælp af et polynomium, hvis grad afhænger af antallet af delintervaller, dette vil blive uddybet senere. Hvis funktionen er defineret i intervalendepunkterne  $x_0$  og  $x_n$ , kaldes integrationsmetoden for lukket. Disse funktionsværdier er markeret på figur 5.3 med  $\bullet$ . Er det derimod ikke muligt at beregne funktionen i intervalendepunkterne - eksempelvis på grund af en singularitet - kaldes metoden for åben.

Da lukkede integrationsmetoder er de letteste at håndtere, har vi i vores model elimineret det singulære punkt, således at vi kan benytte de lukkede metoder.

Romberg integration er baseret på en udvidelse af trapez-summen, der i sig selv er en velkendt integrationsmetode. De to integrationsmetoder er udviklet ud fra de matematiske teknikker ekstrapolation og interpolation, hvorfor ideen i disse indledningsvis skitseres.

### 5.2.2 Interpolation og ekstrapolation

I numerisk integration - også kaldet kvadratur - beregnes funktionsværdien kun i et endeligt antal punkter:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Integralet af funktionen beregnes da ved, at disse punkter forbindes med en glat, integrabel kurve. Approksimeres funktionen i intervallet mellem den mindste og den største  $x_i$ -værdi, kaldes metoden interpolation. Forlænger vi derimod funktionen ud over de kendte endepunkter benævnes metoden ekstrapolation.

Ofte søger man at danne en kurve gennem punkterne ved hjælp af polynomier, men også trigonometriske funktioner er meget anvendte. Kvadraturformlerne er udledt ved hjælp af polynomisk interpolation eller ekstrapolation. I det følgende beskrives to formler til inter- og ekstrapolation. Det er Lagrange's formel og den noget mere avancerede Neville's formel, som begge modellerer funktioner ved brug af polynomier.

**Lagrange's formel**

Lagrange's formel siger følgende:

Ud fra  $n + 1$  arbitrære støttepunkter  $(x_i, f_i)$  vil det være muligt på entydig vis at konstruere et polynomium af grad  $n$  gennem disse punkter.

Dette formuleres i følgende sætning:

**Sætning 5.1** Givet  $n + 1$  støttepunkter  $(x_i, f_i)$ , hvor  $i = 0, 1, \dots, n$  og  $x_i \neq x_k$  vil der, når  $i \neq k$ , eksistere et og kun et polynomium  $P \in \Pi_n$  med  $P(x_i) = f_i$ .

Symbolet  $\Pi_n$  betegner mængden af alle reelle eller komplekse polynomier  $P$ , hvis grad ikke overstiger  $n$ . Disse skrives på formen:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

**Bevis:**

Entydighed: Først betragtes de to polynomier  $P_1$  og  $P_2 \in \Pi_n$ , hvorom det gælder at:

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n$$

Herefter defineres polynomiet  $P(x) = P_1(x) - P_2(x) \in \Pi_n$ . Det vil da gælde, at polynomiet  $P(x)$  har mindst  $n + 1$  forskellige nulpunkter, nemlig punkterne  $x_i$ , hvor  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dette skyldes, at  $P_1(x)$  og  $P_2(x)$  i disse punkter har den samme værdi.  $P(x)$  må følgelig være identisk nul, hvilket giver at  $P_1(x) = P_2(x)$ .

Eksistens: Ved brug af hjælpepolynomier  $L_i(x) \in \Pi_n$  for  $i = 0, 1, \dots, n$  kan man konstruere et interpolerende polynomium  $P(x)$ , hvilket viser eksistens af polynomiet  $P(x)$ .

Hjælpepolynomier på formen

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = k \\ 0 & \text{hvis } i \neq k \end{cases} \quad (5.4)$$

kan benyttes til konstruktion af  $P(x)$ .

De såkaldte Lagrange polynomier opfylder denne betingelse og er givet ved:



$$\begin{aligned}
 L_i(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \\
 &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}
 \end{aligned}$$

Dette kan nu udnyttes til at generere de i sætningen opstillede krav, ved at  $P(x)$  skrives som en sum af produkter mellem  $L_i(x_k)$  og  $f_i$  idet:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f_i \underbrace{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}}_{L_i(x)} \quad (5.5)$$

□

Ovenstående udtryk opfylder kravene i sætning 5.1 og kaldes Lagrange's formel. Den har, som vi siden skal se, en stor teoretisk betydning. I praksis vælger man dog ofte en udvidet udgave af Lagrange's formel; kaldet Neville's formel. Dette skyldes at Lagrange's formel ikke giver noget estimat af den fejl, der altid optræder, når der benyttes numeriske approksimationer, og at formlens kompleksitet gør den indviklet at implementere [Recipes]. Inden Neville's algoritme beskrives, vil vi dog anskueliggøre Lagrange's formel ved et lille eksempel.

### Eksempel 5.1 Lagrange's formel

Givet støttepunkterne

$$\begin{array}{c|c|c}
 x_0 & x_1 & x_2 \\
 \hline
 0 & 1 & 3
 \end{array}$$

og funktionsværdierne

$$\begin{array}{c|c|c}
 f_0 & f_1 & f_2 \\
 \hline
 1 & 3 & 2
 \end{array}$$

skal vi finde det interpolerende polynomium  $P(x)$  og specielt værdien  $P(2)$ . Vi starter med at bestemme hjælpepolynomierne:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{x(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x(x-1)}{6}$$

Herefter kan  $P(x)$  bestemmes ved brug af ligning (5.5):

$$P(x) = \sum_{i=0}^2 f_i L_i(x)$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-3) + \frac{1}{3}x(x-1)$$

$$= -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$$

Endelig kan vi ved at indsætte  $x = 2$  bestemme  $P(2) = \frac{10}{3}$ .

### Neville's formel

Neville's formel er baseret på, at et interval med mange støttepunkter opdeles i delintervaller, som hver indeholder få støttepunkter. Der interpoleres så i hvert enkelt delinterval, hvilket tilsammen danner den fuldstændige interpolation for hele intervallet.

For en mængde af støttepunkter  $(x_i, f_i)$  beskriver Neville's formel et interpolerende polynomium ved:

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k} \in \Pi_k$$

Dette vil ifølge sætning 5.1 opfylde:

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}, \quad \text{for } j = 0, 1, \dots, k$$

Disse polynomier er forbundet indbyrdes ved følgende rekursionsformel:

$$P_{i_0}(x) = f_{i_0} \tag{5.6}$$

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}} \quad (5.7)$$

**Bevis:** For at bevise ovenstående rekursionsformel, skal det undersøges, om højresiden af udtrykket har de for  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}$  karakteristiske egenskaber. Benævner vi højresiden  $R(x)$ , kan vi nu beregne dennes værdi i yderpunkterne  $x_{i_0}$  og  $x_{i_k}$  samt i et vilkårligt punkt  $x_{i_j}$ :

$$\begin{aligned} R(x_{i_0}) &= \frac{(x_{i_0} - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_0}) - (x_{i_0} - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x_{i_0})}{x_{i_k} - x_{i_0}} \\ &= P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x_{i_0}) \\ &= f_{i_0} \end{aligned}$$

Tilsvarende fås

$$\begin{aligned} R(x_{i_k}) &= P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_k}) \\ &= f_{i_k} \end{aligned}$$

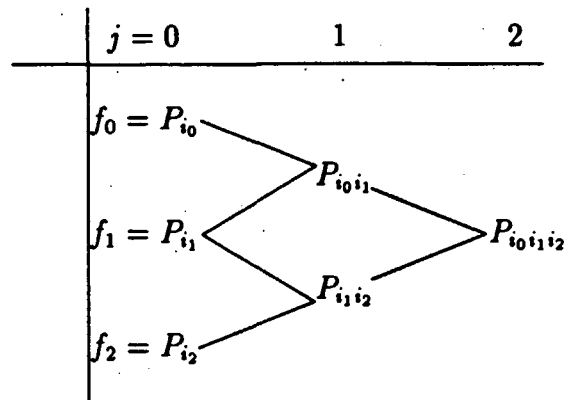
og for punktet  $x_{i_j}$ ,

$$\begin{aligned} R(x_{i_j}) &= \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_0}) - (x_{i_j} - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x_{i_0})}{x_{i_k} - x_{i_0}} \\ &= \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})f_{i_k} - (x_{i_j} - x_{i_k})f_{i_0}}{x_{i_k} - x_{i_0}} \\ &= f_{i_j} \end{aligned}$$

for  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ . Da vi tidligere har bevist, at polynomiel interpolation er entydig, må det konkluderes, at  $R(x) = P_{i_0 i_1 \dots i_k}$ .  $\square$

Ved brug af ligningerne (5.6) og (5.7) er det muligt at fastlægge et polynomium af 1. grad ved  $P_{i_0 i_1}$  og af 2. grad ved  $P_{i_0 i_1 i_2}$ .

Denne rekursive fremstilling af Neville's formel gør det muligt at illustrere brugen af den i følgende tabel:



Kender man to naboværdier i venstre kolonne, er det altså muligt at beregne det følgende polynomium rekursivt. De to naboværdier kaldes for forældrene, mens det nye polynomium betegnes datteren.

Symbolet  $P_{i_0 i_1 i_2}$  kan således tolkes som det 2. gradspolynomium, der er sammensat af de to 1. gradspolynomier,  $P_{i_0 i_1}$  og  $P_{i_1 i_2}$ . Disse 1. gradspolynomier er ligeledes dannet på baggrund af de tre punkter  $P_{i_0}$ ,  $P_{i_1}$  og  $P_{i_2}$ . Værdien  $k$  betegner således, hvor mange gange vi har benyttet rekursionsformel (5.7), det vil sige polynomiets grad.

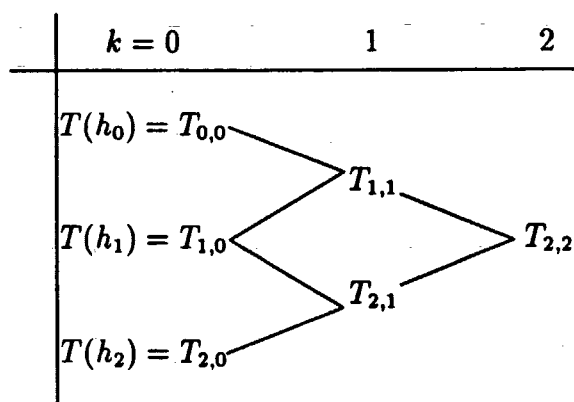
Ofte benytter man i Neville's formel en lidt anderledes notation, der direkte inddrager størrelsen af polynomiets grad  $i$  indekset. Dette leder frem til følgende konvention mellem de to notationer:

$$T_{s,k} = T_{i+k,k} = P_{i_0 i_1 \dots i_k} = P_{i, i+1, i+2, \dots, i+k}$$

På tilsvarende vis benyttes følgende notation for  $x$  idet:

$$x_s = x_{i+k} = x_{i_k}$$

Ved denne notation kan de rekursive beregninger anskueliggøres i følgende tabel:



og rekursionsformlen (5.7) kan samtidig omformuleres til

$$T_{s,0} = f_{s_0}$$

$$\begin{aligned} T_{s,k} &= \frac{(x - x_{s-k})T_{s,k-1} - (x - x_s)T_{s-1,k-1}}{x_s - x_{s-k}} \\ &= T_{s,k-1} + \frac{T_{s,k-1} - T_{s-1,k-1}}{\frac{x - x_{s-k}}{x - x_s} - 1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

hvor  $1 \leq k \leq s$ , for  $s = 0, 1, \dots, n$ . I afsnit 5.2.4, hvor ovenstående udtryk anvendes, er  $x = 0$ . Herved reduceres formlerne for  $T_{s,k}$  til:

$$T_{s,0} = f_{s_0}$$

$$T_{s,k} = T_{s,k-1} + \frac{T_{s,k-1} - T_{s-1,k-1}}{\frac{x_{s-k}}{x_s} - 1} \quad (5.9)$$

Efter denne introduktion af interpolationsmetoder, der senere også benyttes som ekstrapolationsmetoder, skal kvadraturformlerne beskrives.

### 5.2.3 Newton-Cotes integrationsformler

Betegnelsen "Newton-Cotes formler" dækker over en lang række integrationsformler, hvoraf de simpleste kendes fra gymnasiets præsentation af integralregningen; trapez-sum og Simpson's regel. Disse udtryk

og flere til kan alle udledes ud fra den samme grundformel, hvilket vises i det følgende.

Newton-Cotes metoden approksimerer integranden med et polynomium af samme grad som antallet af delintervaller, hvorefter det modellerede polynomium integreres over hele intervallet. Til approksimationen af polynomierne benyttes Lagrange's formel (5.5). Da det vil være fordelagtigt at udtrykke  $x$  i termer af intervallængden  $h$ , indføres koordinattransformationen

$$x = a + ht, \quad \text{for } t = 0, 1, \dots, n$$

hvor  $a$  er intervallets venstre endepunkt. Indsættes koordinattransformationen i ligning (5.5) fås det interpolerende polynomium af grad  $n$ :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(a + ht) \\ &= \sum_{i=0}^n f_i L_i(a + ht) \end{aligned}$$

hvor:

$$L_i(a + ht) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a + ht - a - hk}{a + hi - a - hk} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{t - k}{i - k}$$

Efter at have fundet et polynomium, der går gennem de beregnede støttepunkter, skal dette polynomium integreres:

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n(x) dx &= h \int_a^b \sum_{i=0}^n f_i L_i(a + ht) dt \\ &= h \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(a + ht) dt \\ &= h \sum_{i=0}^n f_i \alpha_i \end{aligned}$$

hvor  $\alpha_i$ 'erne kaldes vægte og er givet ved:

$$\alpha_i = \int_0^n L_i(a + ht) dt \quad (5.10)$$

Følgelig kan det konkluderes, at der for ethvert naturligt tal  $n$  kan dannes en Newton-Cotes ligning:

$$\int_a^b P_n(x) dx = h \sum_{i=0}^n f_i \alpha_i \quad (5.11)$$

hvor

$$f_i = f(a + hi) \quad \text{og} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

De førømtalte vægte er rationelle tal med den egenskab at:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = n$$

Dette kan indses ved at betragte ligning (5.11) i tilfældet  $f(x) = 1$ , det vil sige, at  $P_n(x) = 1$ . Da  $f(x) = 1$  må der derfor gælde, at  $f_i = 1$  for  $i = 0, 1, \dots, n$ . Herved fås:

$$\int_a^b 1 dx = h \sum_0^n f_i \alpha_i \Leftrightarrow$$

$$b - a = h \sum_{i=0}^n \alpha_i \Leftrightarrow$$

$$n = \sum_{i=0}^n \alpha_i$$

Ved at variere antallet af delintervaller i Newton-Cotes ligning kan der udledes forskellige integrationsregler.

Følgende eksempel viser trapez-summen:

### Eksempel 5.2

Trapez-summen fremkommer ved at beregne Newton-Cotes ligningen for tilfældet  $n = 1$ . For at udlede reglen beregnes de enkelte vægte ved brug af ligning (5.10):

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt \\ &= \int_0^1 (-t+1) dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ved at indsætte vægtene i ligning (5.11) fås

$$\int_a^b P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) \quad (5.12)$$

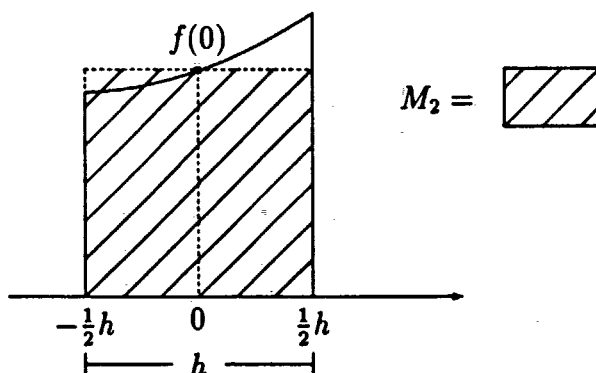
Ved at udføre tilsvarende beregninger for større værdier af  $n$ , kan mere indviklede integrationsformler findes. I nedenstående tabel har vi opgivet Newton-Cotes formlerne for  $n = 1, 2$  og  $3$

| n | vægte   | navn              | fejlestimat                     |
|---|---|-------------------|---------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$                         | trapez-sum        | $h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$ |
| 2 | $\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{3}$             | simpson-sum       | $h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$ |
| 3 | $\frac{1}{8} \frac{3}{8} \frac{3}{8} \frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ sum | $h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$ |

### Fejlvurdering

Når man skal vurdere en beregningsmetodes anvendelighed, er det oplagt at studere den valgte metodes approksimationsfejl. For Newton-Cotes formlerne og for den senere beskrevne Romberg integration kan





**Figur 5.4:** Midtsummen,  $M_2$ , skal beregnes for intervallet  $[-\frac{1}{2}h; \frac{1}{2}h]$

fejlen beregnes ved hjælp af den såkaldte Euler-Maclaurin summationsformel. Vi vil ikke gennemgå denne formel, men blot benytte et par af dens resultater i de følgende afsnit.

Dog vil vi for at illustrere fremgangsmetoden gennemgå en fejlurdering af midtsummen. Denne beregning er meget simpel og kan ikke umiddelbart generaliseres til Newton-Cotes formlerne. For uddybende forklaring kan [Stoer, side 131-136] anbefales.

Skal midtsummen beregnes for et enkelt delinterval, det vil sige ved hjælp af to støttepunkter  $(x_0, f_0)$  og  $(x_1, f_1)$  fås:

$$M_2 = f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0)$$

For at lette de følgende beregninger sættes  $x_0 = -\frac{1}{2}h$  og  $x_1 = \frac{1}{2}h$  jævnfør figur (5.4).

Stamfunktionen  $F$  til  $f$  kan herefter Taylorudvikles i  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(\xi)x^3 \\ &= F(0) + f(0)x + \frac{1}{2}f'(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)x^3 \end{aligned}$$

Herefter kan integralet over delintervallet  $[-\frac{1}{2}h; \frac{1}{2}h]$ , skrives som:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x) dx &= F\left(\frac{1}{2}h\right) - F\left(-\frac{1}{2}h\right) \\
&= F(0) + \frac{1}{2}f(0)h + \frac{1}{8}f'(0)h^2 + \frac{1}{48}f''(\xi_1)h^3 - \\
&\quad F(0) + \frac{1}{2}f(0)h - \frac{1}{8}f'(0)h^2 + \frac{1}{48}f''(\xi_2)h^3 \\
&= f(0)h + \frac{1}{48}f''(\xi_1)h^3 + \frac{1}{48}f''(\xi_2)h^3
\end{aligned}$$

Første led i dette udtryk er bidraget til midtsummen, hvorfor fejlen pr. interval er givet ved:

$$\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{48} h^3 \leq \frac{f''(\xi)}{24} h^3$$

idet vi benytter, at  $f$  er kontinuert således at der i intervallet eksisterer et  $\xi$ , for hvilket  $f(\xi_1) \leq f(\xi)$  og  $f(\xi_2) \leq f(\xi)$ .

### Udvidelse af Newton-Cotes formlerne

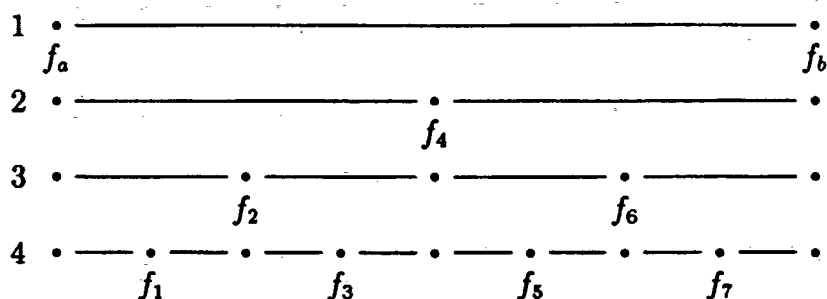
I behandlingen af Newton-Cotes formlerne har vi indtil videre kun betragtet et enkelt interval af længden  $nh$ , men formlerne kan udvides til at gælde for flere på hinanden følgende intervaller.

Eksempelvis kan Trapez-summen ( $n = 1$ ) benyttes  $N$  gange. For et enkelt interval  $[x_i; x_{i+1}]$  fås approksimationen

$$I_i = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

hvor  $x_i = a + ih$ , for  $i = 0, 1, \dots, N$  og  $h = \frac{b-a}{N}$ . Ønsker vi en tilnærmelse af integralet over hele intervallet  $[a; b]$  adderes ovennævnte approksimation af de enkelte intervaller:

$$\begin{aligned}
T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} I_i \\
&= h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$



**Figur 5.5:** Halveringer af intervallængden  $h$ . I første skridt beregnes  $f_a$  og  $f_b$ , mens det i andet skridt kun er nødvendigt at beregne  $f_4$ . I tredje skridt beregnes  $f_2$  og  $f_6$ , endelig beregnes  $f_1, f_3, f_5$  og  $f_7$  i fjerde skridt.

På lignende vis kan de øvrige Newton-Cotes formler udvides, men i det følgende vil vi kun beskæftige os med ligning (5.13), da det er denne, der benyttes i udledningen af Romberg's integrationsmetode.

At udvide formlerne er en klar fordel, idet man undgår overflødige beregninger. Hvis man efter en beregning af Trapez-summen fordobler antallet af intervaller - af hensyn til nøjagtigheden - kan de tidligere fundne funktionsværdier stadig benyttes. Man kan løst sagt genbruge de foregående beregninger, hvilket er illustreret på figur 5.5.

Ved at udvide formlerne er det samtidig muligt at opstille nye og mere forfinede integrationsmetoder, hvilket Romberg integration er et eksempel på.

### 5.2.4 Romberg's integrationsmetode

Betragter vi endnu engang den udvidede Trapez-formel (5.13), er det muligt ved hjælp af Euler-Maclaurin formlen at bestemme størrelsen af approksimationens fejl. For at foretage fejlvurderingen antages det, at der for den betragtede funktion  $f$  gælder, at  $f \in C^{2m+2}$  på intervallet  $[a; b]$ . Ved beregningen af fejleddet, som ikke er medtaget her, viser det sig, at fejlen udtrykkes i termer af intervallængden  $h$ , hvor  $h$  kun optræder i lige potenser:

$$T(h) - \int_a^b f(t) dt = \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \cdots + \tau_{m+2} h^{2m+2}$$

Hvis

$$\tau_0 = \int_a^b f(t) dt$$

kan trapez-summen skrives som:

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots + \tau_m h^{2m} + \tau_{m+2} h^{2m+2} \quad (5.14)$$

Koefficienterne:  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m+2}$  er opgivet i [Stoer, side 131] og indeholder alle en afledet af funktionen  $f$ . Ordenen af funktionens afledede er voksende og i den sidste koefficient  $\tau_{m+2}$  indgår, som ved fejlvurderingen af midtsummen, funktionens afledede i punktet  $\xi$ ;  $f^{2m+2}(\xi(h))$ .

Hvis  $m \rightarrow \infty$  kan ligning (5.14) skrives som en uendelig række, der ikke nødvendigvis konvergerer, men som i praksis giver en tilstrækkelig præcis approksimation for små værdier af  $h$ , [Stoer, side 132]. Rækken kan opfattes som et polynomium i  $h^2$ , der giver den ønskede værdi af  $\tau_0$ , når  $h = 0$ . Følgelig kan vi ved at gøre intervallængden stadig mindre, finde bedre approksimationer af integralet  $\tau_0$ .

For eksempel kan man, som vist på figur 5.5, gøre intervallængden mindre ved fortsat at halvere intervallængden

$$h_0 = b - a, \quad h_1 = \frac{h_0}{2}, \quad h_2 = \frac{h_1}{2}, \quad \dots, \quad h_m = \frac{h_{m-1}}{2}$$

For hver intervallængde  $h_j$  bestemmes så den tilsvarende Trapez-sum i de enkelte punkter.

$$T_{s,0} = T(h_j), \quad \text{for } j = s - k, s - k + 1, \dots, s$$

På samme vis som i afsnit 5.2.2 opstiller vi herefter et interpolerende polynomium  $\tilde{T}_{s,k}(h_j)$  i størrelsen  $h^2$ , hvor  $1 \leq k \leq s \leq m$ :

$$\tilde{T}_{s,k}(h) = a_0 + a_1 h^2 + \dots + a_m h^{2m} \quad (5.15)$$

Ved tidligere interpolationer krævede vi, at  $P(x_i) = f_i$  - jævnfør sætning 5.1. Dette omskrives her til betingelsen

$$\tilde{T}_{s,k}(h_j) = T(h_j), \quad j = s - k, s - k + 1, \dots, s$$

hvilket betyder, at den ekstrapolerede sum stemmer overens med trapez-summen i de kendte støttepunkter.

Efter at have opstillet det interpolerende polynomium i ligning (5.15), kan de ekstrapolerede værdier bestemmes - nærmere bestemt  $\tilde{T}_{s,k}(0)$ . Dette gøres ved at antage, at det fundne polynomium også gælder for  $h = 0$ . Når den ekstrapolerede værdi  $\tilde{T}_{s,k}(0)$  er fundet, benyttes denne som approksimation til det ønskede integral  $\tau_0$ .

Denne beregningsmetode kaldes Romberg integration. Metoden forudsætter ingen speciel ekstrapolationsmetode, men Neville's formel skulle som tidligere nævnt være særligt velegnet.

Den ekstrapolerede værdi defineres som

$$\tilde{T}_{s,k}(0) = T_{s,k}$$

hvilket kan bestemmes ved hjælp af ligning (5.9):

$$T_{s,k} = T_{s,k-1} + \frac{T_{s,k-1} - T_{s-1,k-1}}{\left(\frac{h_{s-k}}{h_s}\right)^2 - 1} \quad (5.16)$$

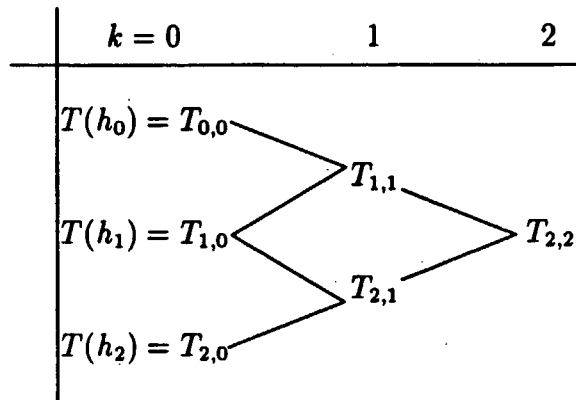
Hermed har vi fået en metode til rekursivt at beregne en arbitrær værdi af  $T_{s,k}$ . Som tidligere kan de enkelte rekursionstrin opstilles i et skema. Dette illustreres i følgende eksempel.

### Eksempel 5.3

Vi ønsker at beregne integralet:

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^4 dt$$

Ved at benytte intervallængderne:  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}$ ,  $h_2 = \frac{1}{4}$  beregnes følgende værdier:



Beregningerne i de enkelte  $T_{s,k}$  giver følgende:

Størrelsen  $T_{0,0}$  er kendt ud fra trapez-summen i ligning (5.13)

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}$$

og størrelsen  $T_{1,0}$  beregnes tilsvarende ved

$$\begin{aligned} T_{1,0} &= \frac{1}{2} \left( \frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f(1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

til sidst fås på samme måde  $T_{2,0}$  ved

$$\begin{aligned} T_{2,0} &= \frac{1}{4} \left( \frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2} \right) \\ &= \frac{113}{512} \end{aligned}$$

Størrelsen  $T_{1,1}$  beregnes af rekursionsformlen (5.16)

$$\begin{aligned}
 T_{1,1} &= T_{1,0} + \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{\left(\frac{1}{1/2}\right)^2 - 1} \\
 &= \frac{9}{32} + \frac{1}{3} \left( \frac{9}{32} - \frac{16}{32} \right) \\
 &= \frac{5}{24}
 \end{aligned}$$

og størrelsen  $T_{2,1}$  bestemmes tilsvarende ved

$$\begin{aligned}
 T_{2,1} &= T_{2,0} + \frac{T_{2,0} - T_{1,0}}{\left(\frac{1}{1/4}\right)^2 - 1} \\
 &= \frac{77}{384}
 \end{aligned}$$

Det endelige resultat  $T_{2,2}$  findes ved

$$\begin{aligned}
 T_{2,2} &= T_{2,1} + \frac{T_{2,1} - T_{1,1}}{\left(\frac{1}{1/2}\right)^2 - 1} \\
 &= \frac{77}{384} + \frac{\frac{77}{384} - \frac{5}{24}}{15} \\
 &= \frac{77}{384} + \frac{1}{5} \left( \frac{77 - 80}{384} \right) \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

hvilket er i overensstemmelse med den analytiske løsning.

### 5.2.5 Algoritmer til integration

I dette afsnit gennemgås de enkelte algoritmer, som er implementeret for at kunne benytte Romberg's integrationsmetode. Det er i alt tre forskellige algoritmer. Den første algoritme benyttes til at beregne de enkelte trapez-summer, den anden beskriver Neville's metode til ekstrapolation. Den sidste algoritme er Romberg's integrationsmetode, der benytter de to forrige algoritmer.

### 5.2.6 Trapez-summer

Vi ved fra side 85, at trapez-summer kan generaliseres til at gælde over hele integrationsintervallet  $[a; b]$ , således at der for hvert skridt beregnes en ny trapez-sum. Dette kan udtrykkes ved følgende:

$$T(h) = h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right] \quad (5.17)$$

Hvis funktionsværdierne i endepunkterne er kendte, kan resten af trapez-summen findes ved blot at betragte funktionsværdierne  $f(a+ih)$

For hver iteration beregnes kun de nye punkter i intervallet, og selve resultatet findes ved at halvere intervallængden og addere resultaterne fra denne og forrige iteration.

Disse ord leder frem til følgende algoritme, som er baseret på, at den bruges en gang for hver iteration, der beregnes.

#### Algoritme 5.4 trapez [Recipes, side 125]

1. Hvis det er den første iteration, så beregnes trapez-summen i de to endepunkter ved:

$$\text{trap\_sum} := (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

2. Ellers beregnes:

(a) Antallet af punkter `antal_pkt` gemmes til senere i variabelen `temp`.

(b) Intervallængden beregnes ved

$$\text{int\_lgd} := \frac{b - a}{\text{antal\_pkt}}$$

(c) Det første nye punkt, hvori trapez-summen skal beregnes findes ved:

$$x := a + \frac{1}{2} \text{int\_lgd}$$

(d) I alle de nye punkter `antal_pkt` beregnes summen, ifølge udtrykket i ligning (5.17) ved:

$$\text{sum} := \text{sum} + f(x)$$

$$x := x + \text{int\_lgd}$$



- (e) Den endelige trapez-sum findes som nævnt ved at halvere skridtlængden for denne og forrige iteration samt ved at addere de to summer "trap\_sum" fra den sidste iteration og summen "sum" fra denne iteration. Da vi i summen for denne iteration kun har adderet funktionsværdierne, skal vi i følge udtrykket (5.13) side 85 huske at multiplicere summen med intervalllængden. Dette giver følgende trapez-sum:

$$\text{trap\_sum} := \frac{1}{2} \left( \text{trap\_sum} + \frac{(b-a)}{\text{temp}} \text{sum} \right)$$

- (f) Til sidst fordobles antallet af punkter, hvori trapez-summen skal beregnes, således at der gøres klar til næste iteration.

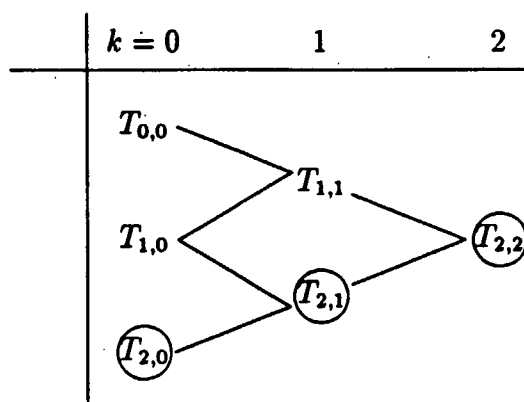
### 5.2.7 Ekstrapolation

Neville's algoritme til ekstrapolation forudsætter, at funktionsværdierne, hvilket svarer til de enkelte trapez-summer, er beregnet på forhånd. Dette er værdierne svarende til  $k = 0$ , som er opstillet i skemaet på figur 5.6. Derudover skal man vide, hvor stor fejlen må være. Dette gemmes i variabelen  $n$ , fejlen er således givet ved  $\mathcal{O}(N^{2n})$  i følge [Recipes, side 129]. I vores program har vi i de fleste kørsler valgt  $n = 5$ .

For at finde det ekstrapolerende polynomium benyttes herefter rekursionsformlen, idet vi som beskrevet på side 88 kun benytter den for  $h = 0$ :

$$T_{s,k} = T_{s,k-1} + \frac{T_{s,k-1} - T_{s-1,k-1}}{\left(\frac{h_{s-k}}{h_s}\right)^2 - 1} \quad (5.18)$$

Algoritmen beskrevet her, er som de øvrige algoritmer til integration taget fra [Recipes]. Algoritmen er programmeret iterativt, men vi vil ikke i detaljer beskrive de enkelte trin, der skal til for at følge iterationen. Pointen er, at de trin, som huskes for hver iteration, kun er resultatet svarende til  $T$ 'erne med ring om på figur 5.6. Den øvrige information der er nødvendig for at danne det endelige resultat, gemmes i to tabeller kaldet henholdsvis `rekurs_sum_1` og `rekurs_sum_2`.



Figur 5.6: Rekursionen beregnes kun i tilfældene  $T_{2,0}$ ,  $T_{2,1}$  og  $T_{2,2}$

#### Algoritme 5.5 ekstrapolation [Recipes, side 92]

1. Værdierne for trapez-summerne svarende til  $k = 0$  indsættes i tabellerne `rekurs_sum_1` og `rekurs_sum_2`.
2. Den første yderværdi, svarende til  $T_{2,0}$  på figur 5.6 gemmes i variabelen `res`.
3. For  $k$  løbende i intervallet 1 til  $n$  beregnes følgende:
  - (a) De enkelte bidrag til den endelige værdi af  $T$ , det med ring om, beregnes. Disse resultater gemmes i tabellerne `rekurs_sum_1` og `rekurs_sum_2`.
  - (b) Sidste led af rekursionsformlen (5.18) beregnes for det  $T$  med ring om, og resultatet gemmes i variabelen `rekurs_dif`.
  - (c) Det foreløbige resultat gemmes i variabelen `res`, ved at hele rekursionsformlen benyttes idet:

$$\text{res} := \text{res} + \text{rekurs\_dif}$$

### 5.2.8 Romberg integration

Romberg's integrationsmetode består som beskrevet i afsnit 5.2.4 af to trin. Først beregnes de indledende trapez-summer og dernæst udføres der ekstrapolation på disse summer. Disse trin gentages et antal gange

ved at antallet af punkter, hvori trapez-summerne skal beregnes fordobles for hver gang. En yderligere specificering af disse beregningstrin leder frem til følgende algoritme.

### Algoritme 5.6 romberg integration [Recipes, side 129]

1. Variablen, der fortæller om integrationen er konvergeret, iterations-tælleren og den første vægt initialiseres til henholdsvis falsk, 0 og 1.
2. Så længe vi ikke har fundet et tilstrækkeligt præcist resultat eller anvendt algoritmen ud over det maksimale antal iterationer `max_it` så udføres:
  - (a) Iterationstælleren tælles op med  $j := j + 1$
  - (b) Trapez-summen beregnes, idet iterationstælleren fortæller hvilken gang det gøres. Resultatet af summen til det givne antal punkter gemmes i tabellen `trap_sum`.
  - (c) Hvis der er udført så mange iterationer, at antallet af begyndelsesværdier giver den ønskede orden af ekstrapolationen så udføres følgende, idet intervallængden og begyndelsesværdierne er gemt i tabellerne `pol_1` og `pol_2`.
    - i. Ekstrapolationsalgoritmen aktiveres med ovenstående tabeller som inddata samt med variabelen  $k$ , der angiver størrelsesordenen af fejlleddet i den numeriske integration.
    - ii. Hvis den absolutte værdi af den sidste halvdel af rekursionsformlen (5.18) er mindre end `res`, så er integrationen gået godt; `ok` sættes til sand. `res` er det endelige resultat af ekstrapolationen multipliceret med den tilladte tolerance.
  - (d) Hvis `ok` stadig er falsk, dvs hvis vi enten ikke har opfyldt, at alle begyndelsestrapez-summerne til ekstrapolationen er beregnet, eller hvis antallet af punkter, hvori trapez-summerne er beregnet, medfører at ekstrapolationen ikke er præcis nok, så beregnes den næste iteration ved:

Resultatet fra denne trapez-sum gives som begyndelsessum til den næste sum; `trap_sum[j + 1] := trap_sum[j]`. Vægtene til intervallængden i ekstrapolationsproceduren justeres;

$$\text{int\_lgd}[j + 1] := \frac{\text{int\_lgd}[j]}{4}$$

3. Hvis  $\epsilon_k$  stadig ikke er sand, så har vi brugt for mange iterationskridt, og der udskrives en fejlmeddelelse til brugeren.



# Kapitel 6

## Kørsler

Efter at have beskrevet selve modellen, hvordan den skal føre til resultater samt et kapitel om anvendelsen af de numeriske metoder, vil vi nu beskrive resultatet af alle disse anstrengelser. Dette leveres i form af grafer og tabeller for de kørsler, der er udført med det til formålet udviklede pascal-program. Resultaterne præsenteres i en ukommenteret form, idet vi her tager stilling til deres betydning for modellen.

Resultaterne fra vores kørsler præsenteres i to afsnit. Først beskrives kørslerne med de parameterværdier, der i Cancelli og Pedley's dynamiske model fører til stationære løsninger. Dernæst beskrives kørsler med andre variationer over de variable. Disse afsnit indledes begge med en beskrivelse af de konstanter, som indgår i de enkelte kørsler. Vi har dog ikke medtaget værdierne for de konstanter, som indgår i udtrykket for rørets elastiske egenskaber  $P(\alpha)$ , da de ikke ændrer sig ved de forskellige kørsler. Disse er beskrevet i kapitel 4 side 53.

Ved alle kørsler angives værdier for tværsnitsarealet i separationspunktet  $\alpha_s$ , separationspunktet  $x_s$ , det mindste tværsnitsareal  $\alpha_{min}$ ,  $x$ -værdien ved  $\alpha_{min}$ , kaldet  $x_{min}$ , og det relative tryk- og energitab  $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ . Udover disse værdier præsenteres også de specielle parametre for de enkelte kørsler. Alle disse data præsenteres i tabeller.

## 6.1 Kørsler med værdier fra den dynamiske model

I Cancelli og Pedley's artikel er følgende parameterværdier benyttet til at beregne resultater for de stationære tilfælde.

$$\begin{aligned}
 \chi &= 0.20 \quad \text{eller} \quad 0.50 \\
 \eta_1 &= 50.00 \\
 \eta_2 &= 40.00 \quad \text{eller} \quad 50.00 \\
 \alpha_1 &= 1.00 \\
 u_1 &= 0.10 \\
 p_{e_1} &= 0.05 \quad \text{eller} \quad 0.20 \\
 \gamma_1 &= 0.30 \\
 \lambda &= 20.00 \\
 \sigma &= 2.00
 \end{aligned}$$

derudover indgår konstanterne

$$P_R = \left( \frac{1}{2} + (\eta_1 + \eta_2) \alpha_1^2 \right) u_1^2$$

og

$$p_{e_0} = \eta_2 u_1^2 - \frac{1}{k} P(\alpha_1)$$

som kommer fra randbetingelserne, se kapitel 2 side 31. Den sidste konstant giver sammen med  $p_{e_1}$  konstanten  $p_e = p_{e_1} + p_{e_0}$ , som direkte indgår i de opstillede ligninger. For nogle af de opstillede parameterværdier er der mulighed for flere forskellige valg, og det er ikke alle kombinationer, der giver en løsning på det opstillede system.

I kørslerne med vores program har vi i første omgang forsøgt at rekonstruere Cancelli og Pedley's resultater for stationær strømning. I dette arbejde er der imidlertid opstået et problem. For de i artiklen opgivne parameterværdier er det ikke muligt at genskabe Cancelli og Pedley's resultater. Det har kun i et enkelt tilfælde været muligt at bestemme konstanten  $\alpha_s$ , hvilket i øvrigt gav anledning til en forkert kurve for  $\alpha(x)$ , se side 100.

Cancelli og Pedley hævder på side 392 i deres artikel, at  $p_{e_1} = 0.5$ , men ellers benyttes  $p_{e_1}$ -værdierne 0.05 og 0.2 Vi valgte derfor først at afprøve disse to værdier for  $p_{e_1}$ , for dernæst at fitte os frem til de værdier for  $p_{e_1}$ , som resulterer i plots, der ligner Cancelli og Pedley's mest muligt.

I det følgende vil vi skitsere de resultater, som vi med udgangspunkt i den ovenstående strategi har opnået ved kørsler med vores program. I den forbindelse er der for hver værdi af  $p_{e_1}$  lavet tre kørsler, da Cancelli og Pedley varierer nogle af de indgående konstanter.

De gennemgående valg af parametre er:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 50.0 \\ \alpha_1 &= 1.0 \\ u_1 &= 0.1 \\ \gamma_1 &= 0.3 \\ \lambda &= 20.0 \\ \sigma &= 2.0\end{aligned}$$

De tre forskellige kørsler er lavet ved følgende valg af parametre:

Kørsel a:

$$\begin{aligned}\chi &= 0.2 \\ \eta_2 &= 50.0\end{aligned}$$

Kørsel b:

$$\begin{aligned}\chi &= 0.5 \\ \eta_2 &= 50.0\end{aligned}$$

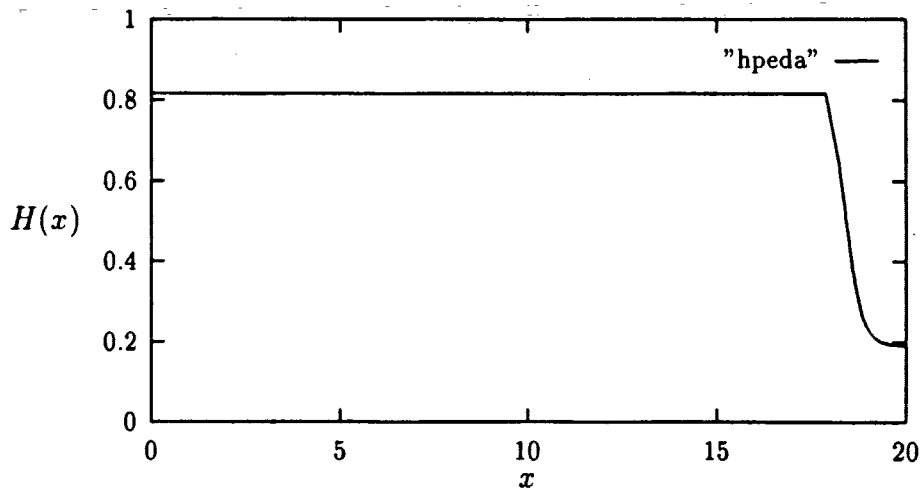
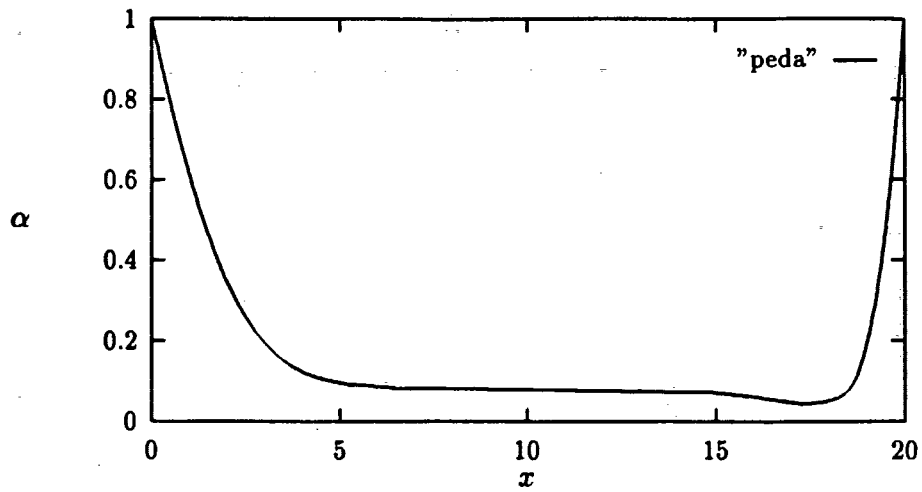
Kørsel c:

$$\begin{aligned}\chi &= 0.2 \\ \eta_2 &= 40.0\end{aligned}$$

De følgende grafer illustrerer den manglende overensstemmelse med Cancelli og Pedley's resultater. Graferne er genereret for tilfældet "a", hvor  $p_{e_1} = 0.5$  og  $p_{e_0} = 0.5$ . For tilfældene "b" og "c" har det ikke været muligt at finde løsninger. (Cancelli og Pedley's resultater forefindes på figur 7.1 side 116 i kapitel 7). I dette tilfælde er værdierne

$$\begin{aligned}x_s &= 17.90 \\ \alpha_s &= 0.05 \\ x_{min} &= 17.32 \\ \alpha_{min} &= 0.04 \\ \frac{\Delta H}{H(x_s)} &= 0.76\end{aligned}$$





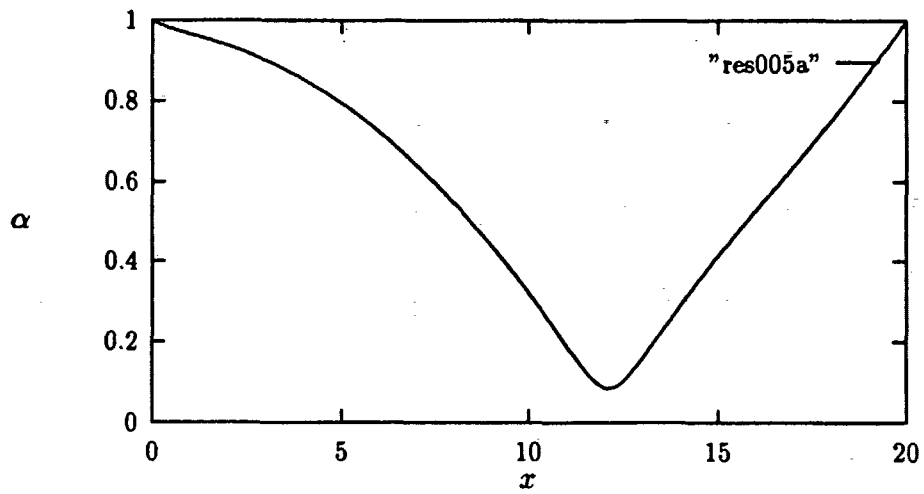
For at illustrere det relative tryk- og energitab  $\frac{\Delta H}{H(x_*)}$  har vi medtaget ovenstående graf for  $H(x)$ . Vi kunne have genereret graferne for  $H(x)$  for alle de øvrige kørsler præsenteret i dette kapitel. Da graferne alle har samme form på nær et varierende tryk- og energitab, har vi valgt kun at beskrive det relative tryk- og energitab, da det er denne information, vi senere får brug for.

De kørsler, vi har lavet for at undersøge, hvad der er problemet med det ovenstående resultat for  $\alpha(x)$ , præsenteres i det følgende.

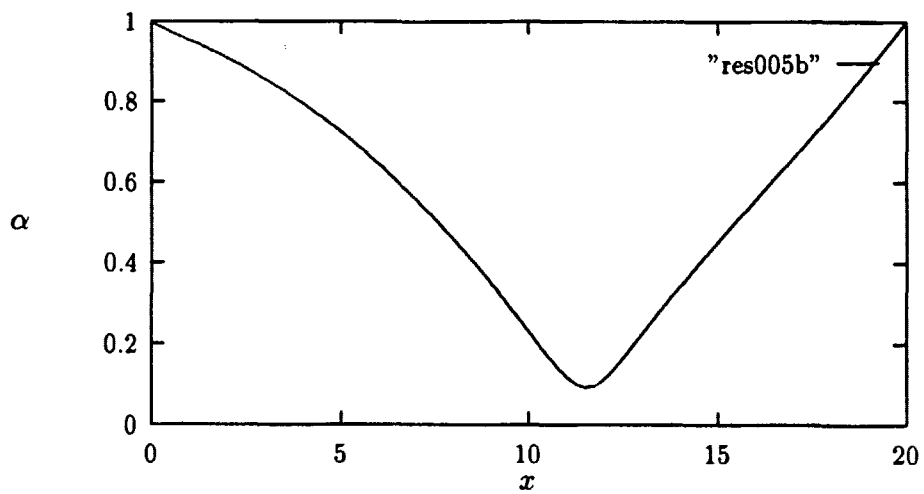
Først beskrives værdierne for  $x_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $x_{min}$ ,  $\alpha_{min}$  og  $\frac{\Delta H}{H(x)}$  for  $p_{e_1} = 0.05$  og  $p_{e_1} = 0.2$  samt for de fittede værdier af  $p_{e_1}$ . Dernæst vises de enkelte kurver for  $\alpha(x)$ . Disse kan godt virke noget ensartede, men for helhedens skyld har vi valgt at medtage dem alle.

| grafnavn | $p_{e_0}$ | $p_{e_1}$ | $x_s$ | $\alpha_s$ | $x_{min}$ | $\alpha_{min}$ | $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ |
|----------|-----------|-----------|-------|------------|-----------|----------------|---------------------------|
| res005a  | 0.50      | 0.05      | 14.85 | 0.40       | 12.05     | 0.08           | 0.04                      |
| res005b  | 0.50      | 0.05      | 14.27 | 0.37       | 11.48     | 0.09           | 0.03                      |
| res005c  | 0.40      | 0.05      | 14.87 | 0.40       | 12.08     | 0.08           | 0.05                      |
| res02a   | 0.50      | 0.20      | 17.00 | 0.10       | 16.47     | 0.09           | 0.43                      |
| res02b   | 0.50      | 0.20      | 17.19 | 0.08       | 16.93     | 0.08           | 0.44                      |
| res02c   | 0.40      | 0.20      | 16.83 | 0.11       | 16.21     | 0.10           | 0.46                      |
| resfita  | 0.50      | 0.14      | 16.32 | 0.14       | 15.41     | 0.12           | 0.29                      |
| resfitb  | 0.50      | 0.14      | 16.49 | 0.11       | 16.05     | 0.10           | 0.29                      |
| resfitc  | 0.40      | 0.14      | 16.15 | 0.15       | 15.08     | 0.12           | 0.31                      |
| refit1a  | 0.50      | 0.08      | 15.04 | 0.25       | 12.70     | 0.13           | 0.11                      |
| refit1b  | 0.50      | 0.08      | 14.74 | 0.21       | 12.97     | 0.14           | 0.10                      |
| refit1c  | 0.40      | 0.08      | 14.98 | 0.26       | 12.54     | 0.13           | 0.12                      |

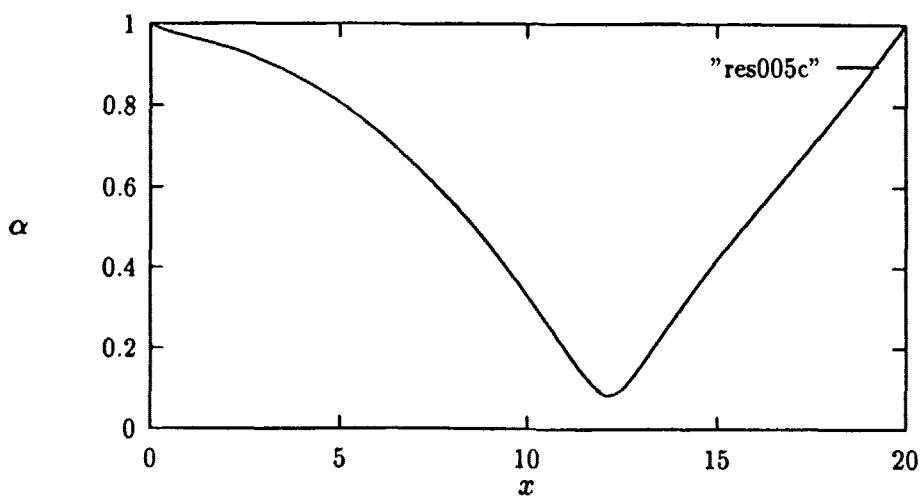
Første kørsel a med  $p_{e_1} = 0.05$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.40$



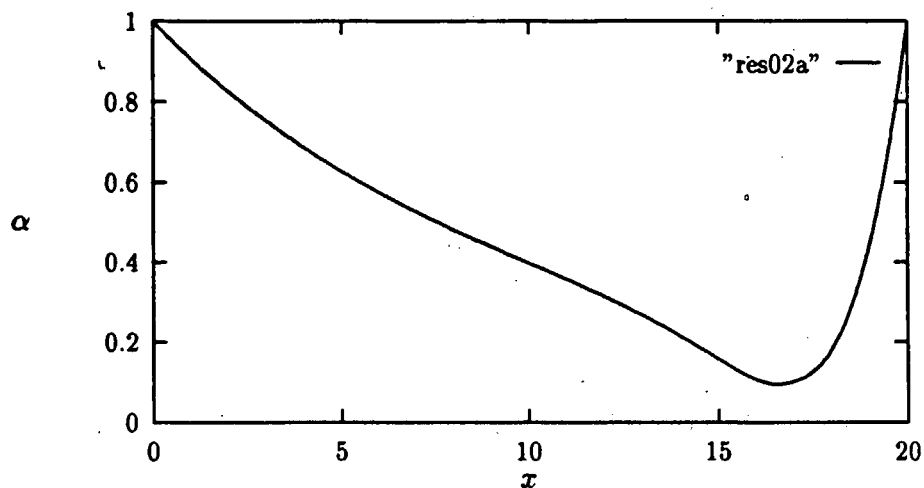
Første kørsel b med  $p_{e_1} = 0.05$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.37$



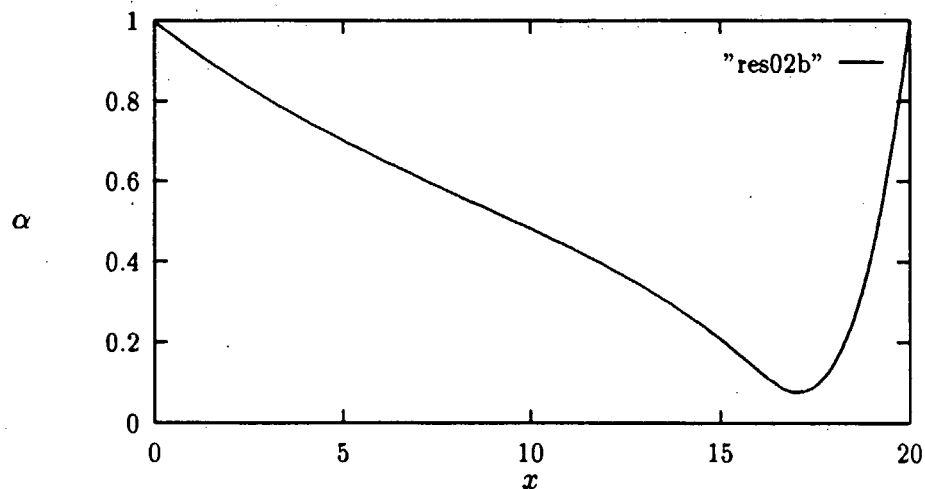
Første kørsel c med  $p_{e_1} = 0.05$ ,  $p_{e_0} = 0.4$  og  $\alpha_s = 0.40$



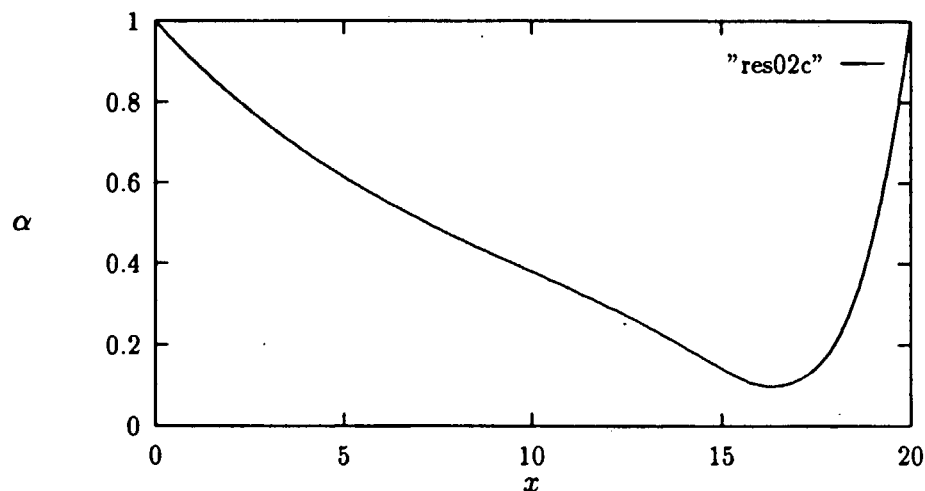
Anden kørsel a med  $p_{e_1} = 0.2$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.10$



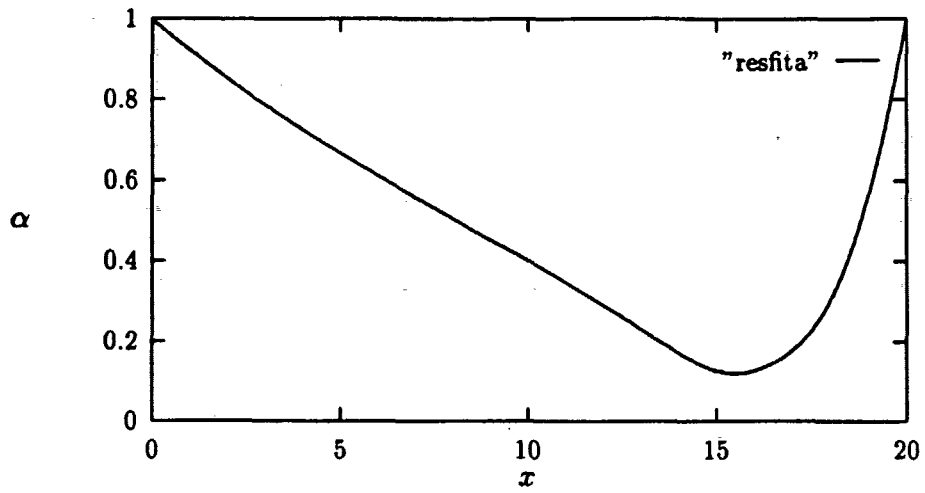
Anden kørsel b med  $p_{e_1} = 0.2$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.08$



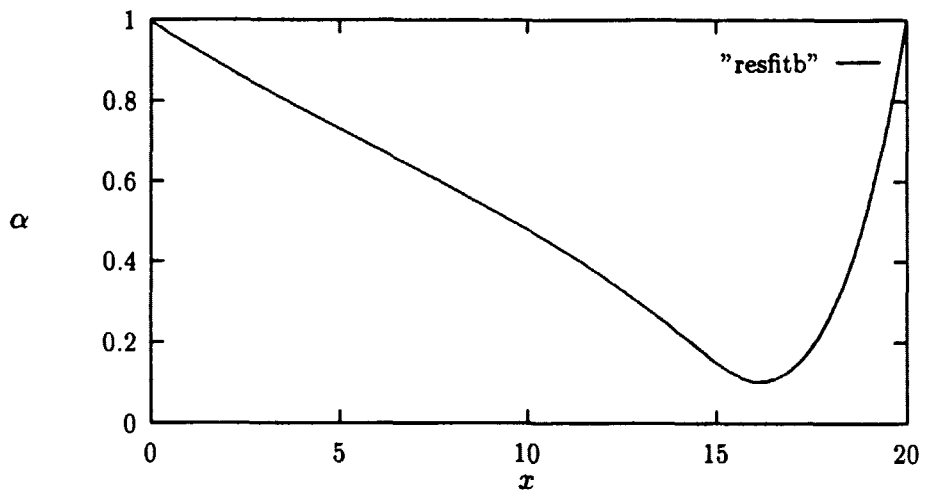
Anden kørsel c med  $p_{e_1} = 0.2$ ,  $p_{e_0} = 0.4$  og  $\alpha_s = 0.11$



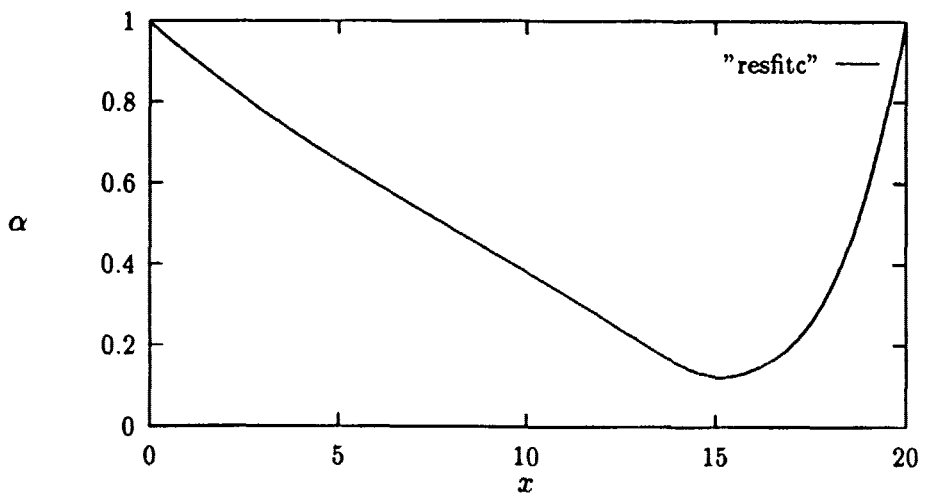
Tredie kørsel a med  $p_{e1} = 0.14$ ,  $p_{e0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.14$



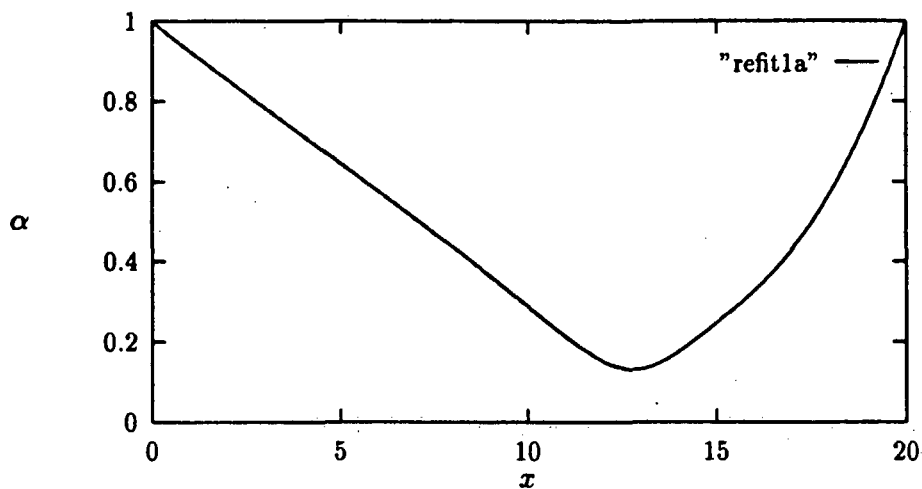
Tredie kørsel b med  $p_{e1} = 0.14$ ,  $p_{e0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.11$



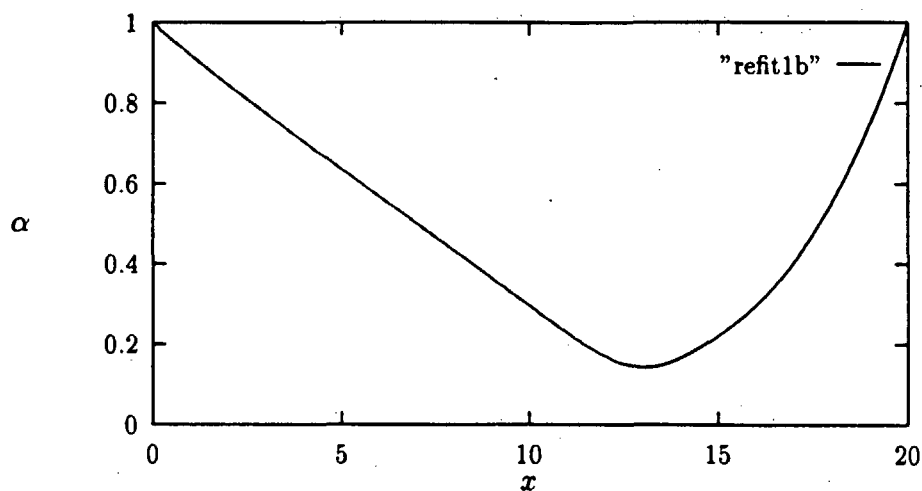
Tredie kørsel c med  $p_{e1} = 0.14$ ,  $p_{e0} = 0.4$  og  $\alpha_s = 0.15$



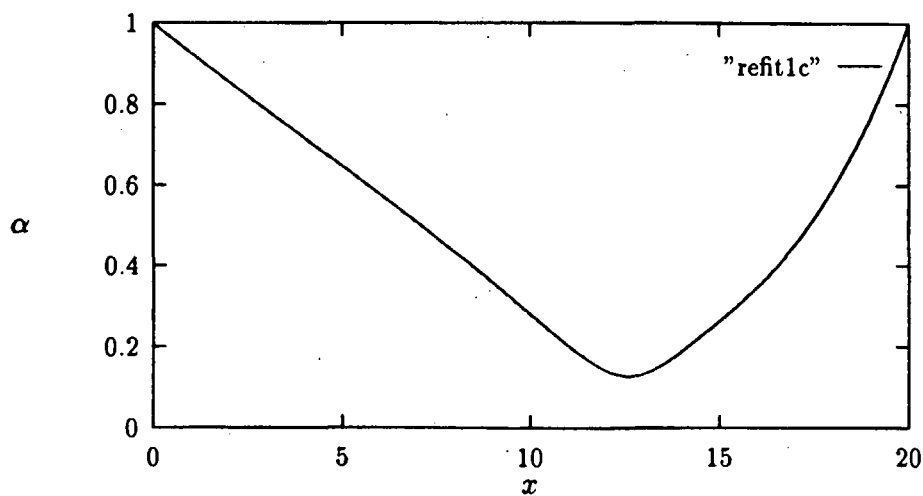
Fjerde kørsel a med  $p_{e_1} = 0.08$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.25$



Fjerde kørsel b med  $p_{e_1} = 0.08$ ,  $p_{e_0} = 0.5$  og  $\alpha_s = 0.21$



Fjerde kørsel c med  $p_{e_1} = 0.08$ ,  $p_{e_0} = 0.4$  og  $\alpha_s = 0.26$



## 6.2 Kørsler med andre parameterverdier

Vi har endvidere foretaget kørsler, hvor vi fastholder parameterverdierne for grafen "resfitc" på side 104, men på skift varierer enten  $\gamma_1$ ,  $\chi$ ,  $\sigma$  eller  $\eta_2$ . Vi har ikke medtaget grafer for alle de foretagne kørsler, da det er et meget omfattende og uoverskueligt materiale. I stedet vil vi kun vise et repræsentativt udvalg, således at grafernes ændring som følge af de enkelte parametervariationer illustreres.

Kørslerne præsenteres i følgende rækkefølge:

1. Variationer over  $\gamma_1$
2. Variationer over  $\chi$
3. Variationer over  $\sigma$
4. Variationer over  $\eta_2$

### 6.2.1 Variationer over $\gamma_1$

I dette tilfælde er værdierne af de øvrige variable sat til:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 50.00 \\ \eta_2 &= 40.00 \\ \alpha_1 &= 1.00 \\ u_1 &= 0.10 \\ \lambda &= 20.00 \\ \sigma &= 2.00 \\ p_{e_0} &= 0.40 \\ p_{e_1} &= 0.14 \\ \chi &= 0.20\end{aligned}$$

Der er foretaget kørsler med følgende værdier af  $\gamma_1$ : 0.00, 0.09, 0.20, 0.35, 0.50, 0.6, 0.69, 0.7, 0.8, 0.90 og 1.00

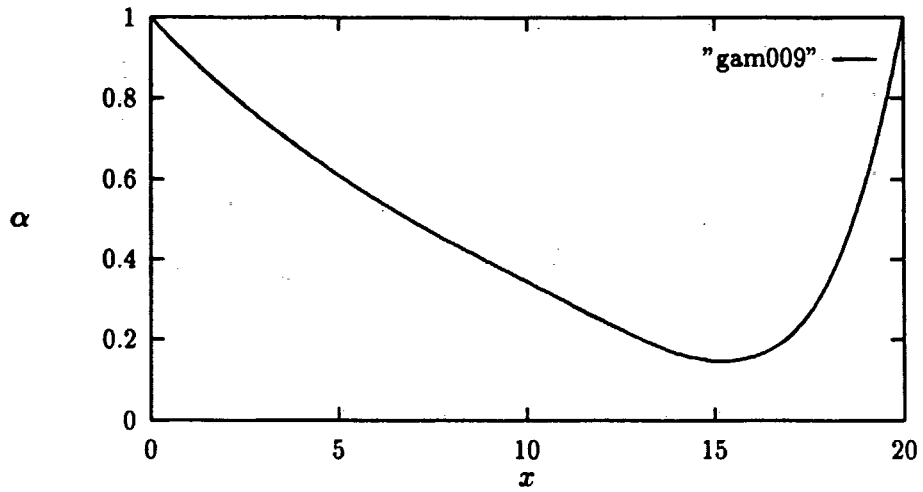
For værdierne 0.00, 0.90 og 1.00 har det ikke været muligt at finde resultater. For værdien 0.69 var det nødvendigt i den numeriske integration at ændre størrelsesordenen af fejleddet fra  $\mathcal{O}(N^{10})$  til  $\mathcal{O}(N^8)$  for at få integrationen til at konvergere. Vi har medtaget graferne for yderpunkterne  $\gamma_1 = 0.09$  og  $\gamma_1 = 0.8$ . Kørslerne med de øvrige værdier

af  $\gamma$  resulterer i kurver, hvor formen ændres løbende fra "gam009" til "gam08". I nedenstående tabel vises de beregnede størrelser for alle de nævnte værdier af  $\gamma$ .

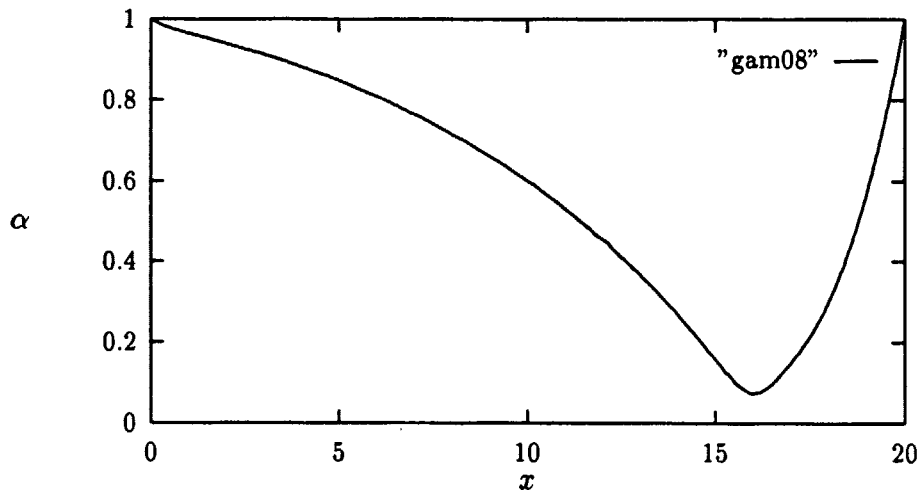
| grafnavn | $\gamma_1$ | $x_s$ | $\alpha_s$ | $x_{min}$ | $\alpha_{min}$ | $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ |
|----------|------------|-------|------------|-----------|----------------|---------------------------|
| gam009   | 0.09       | 15.59 | 0.1497     | 15.08     | 0.15           | 0.30                      |
|          | 0.20       | 15.92 | 0.1486     | 15.01     | 0.14           | 0.30                      |
|          | 0.35       | 16.25 | 0.1461     | 15.15     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 0.50       | 16.51 | 0.1433     | 15.42     | 0.10           | 0.32                      |
|          | 0.60       | 16.65 | 0.1415     | 15.59     | 0.09           | 0.33                      |
|          | 0.69       | 16.77 | 0.1399     | 15.82     | 0.08           | 0.33                      |
|          | 0.70       | 16.78 | 0.1397     | 15.78     | 0.08           | 0.33                      |
| gam08    | 0.80       | 16.90 | 0.1380     | 15.96     | 0.07           | 0.34                      |



$\gamma_1 = 0.09$  og  $\alpha_s = 0.1497$



$\gamma_1 = 0.80$  og  $\alpha_s = 0.1380$



### 6.2.2 Variationer over $\chi$

I dette tilfælde er værdierne af de øvrige variable sat til:

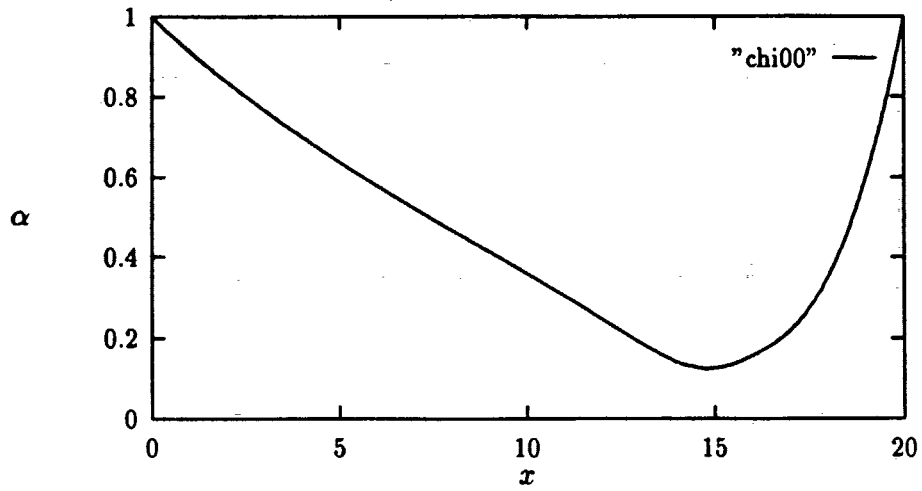
$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= 50.00 \\
 \eta_2 &= 40.00 \\
 \alpha_1 &= 1.00 \\
 u_1 &= 0.10 \\
 \gamma_1 &= 0.30 \\
 \lambda &= 20.00 \\
 \sigma &= 2.00 \\
 p_{e0} &= 0.40 \\
 p_{e1} &= 0.14
 \end{aligned}$$

Der er foretaget kørsler med følgende værdier af  $\chi$ : 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.90 og 1.0

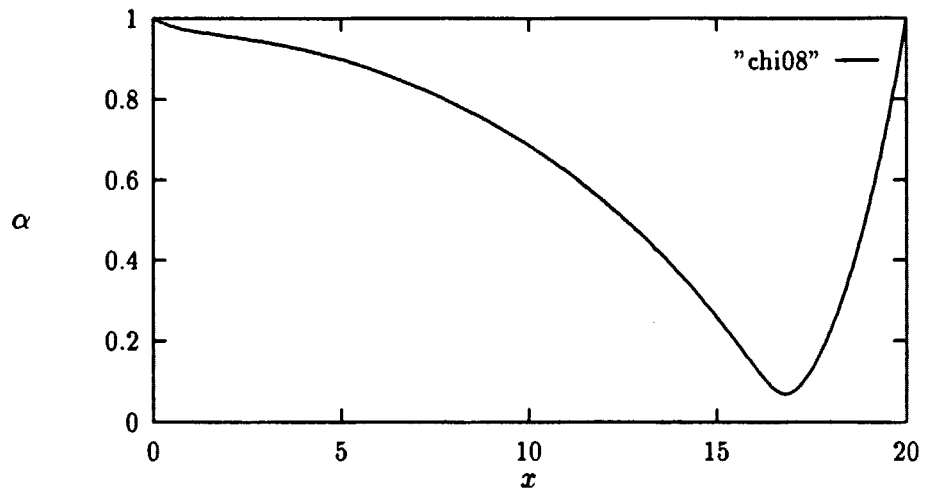
For værdierne 0.9 og 1.0 har det ikke været muligt at finde resultater. For disse variationer er alle resultater præsenteret i nedenstående tabel. Desuden har vi medtaget graferne for yderpunkterne  $\chi = 0.0$  og  $\chi = 0.8$ .

| grafnavn | $\chi$ | $x_s$ | $\alpha_s$ | $x_{min}$ | $\alpha_{min}$ | $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ |
|----------|--------|-------|------------|-----------|----------------|---------------------------|
| chi00    | 0.00   | 16.16 | 0.1646     | 14.74     | 0.13           | 0.31                      |
|          | 0.10   | 16.14 | 0.1561     | 14.89     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 0.20   | 16.15 | 0.1470     | 15.08     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 0.30   | 16.17 | 0.1372     | 15.30     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 0.40   | 16.22 | 0.1265     | 15.54     | 0.11           | 0.31                      |
|          | 0.50   | 16.29 | 0.1147     | 15.77     | 0.11           | 0.32                      |
|          | 0.60   | 16.41 | 0.1015     | 16.04     | 0.10           | 0.32                      |
|          | 0.70   | 16.59 | 0.0865     | 16.34     | 0.08           | 0.33                      |
| chi08    | 0.80   | 16.88 | 0.0687     | 16.74     | 0.07           | 0.34                      |

$\chi = 0.0$  og  $\alpha_s = 0.1646$



$\chi = 0.8$  og  $\alpha_s = 0.0687$



### 6.2.3 Variationer over $\sigma$

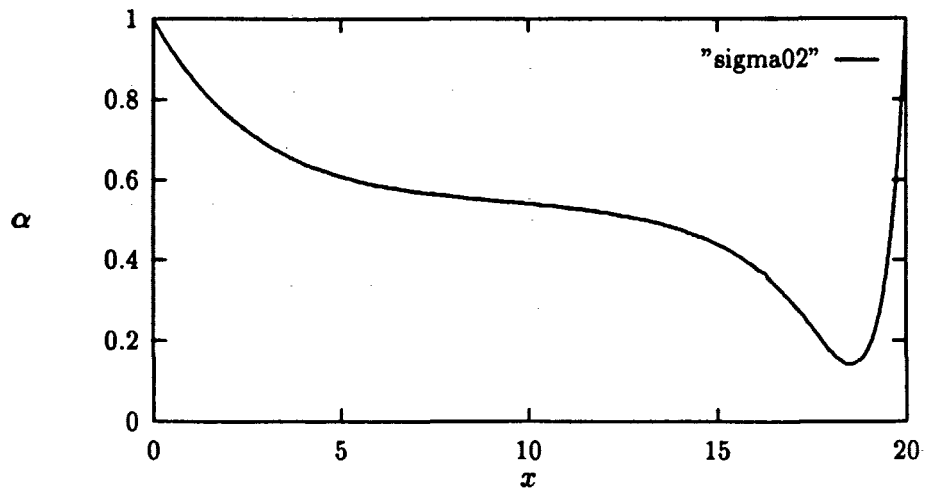
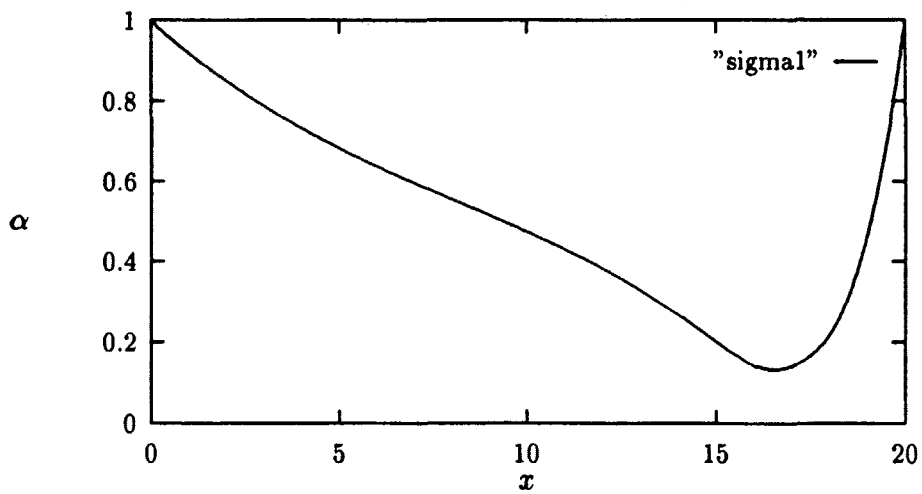
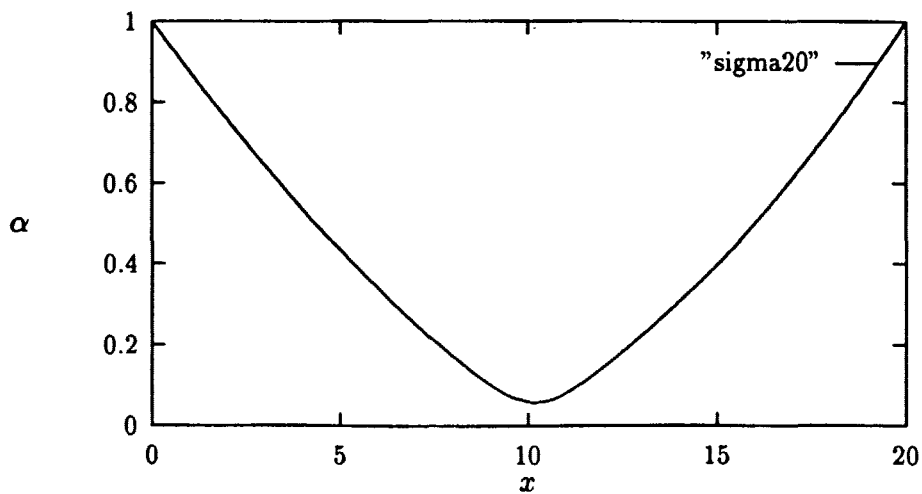
I dette tilfælde er værdierne af de øvrige variable sat til:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= 50.00 \\
 \eta_2 &= 40.00 \\
 \alpha_1 &= 1.00 \\
 u_1 &= 0.10 \\
 \gamma_1 &= 0.30 \\
 \lambda &= 20.00 \\
 p_{e_0} &= 0.40 \\
 p_{e_1} &= 0.14 \\
 \chi &= 0.20
 \end{aligned}$$

Der er foretaget kørsler med følgende værdier af  $\sigma$ : 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 10.0 og 20.0.

I dette tilfælde har vi fundet resultater for alle de afprøvede værdier. Da resultaterne er mere forskellige end ved variationerne af  $\gamma_1$  og  $\chi$ , har vi i dette tilfælde medtaget tre grafer. Det drejer sig om graferne for  $\sigma = 0.2, 1, 20$ . Derudover ses - som ved de øvrige variationer af parameterværdier - alle de beregnede størrelser i nedenstående tabel.

| grafnavn | $\sigma$ | $x_s$ | $\alpha_s$ | $x_{min}$ | $\alpha_{min}$ | $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ |
|----------|----------|-------|------------|-----------|----------------|---------------------------|
| sigma02  | 0.20     | 18.68 | 0.1456     | 18.43     | 0.14           | 0.31                      |
|          | 0.50     | 17.92 | 0.1455     | 17.39     | 0.14           | 0.31                      |
| sigma1   | 1.00     | 17.15 | 0.1457     | 16.45     | 0.13           | 0.31                      |
|          | 2.00     | 16.15 | 0.1470     | 15.08     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 3.00     | 15.46 | 0.1495     | 14.10     | 0.12           | 0.30                      |
|          | 4.00     | 14.93 | 0.1532     | 13.36     | 0.11           | 0.29                      |
|          | 5.00     | 14.49 | 0.1582     | 12.72     | 0.11           | 0.28                      |
|          | 10.00    | 13.60 | 0.2135     | 10.70     | 0.10           | 0.17                      |
| sigma20  | 20.00    | 13.82 | 0.2906     | 10.14     | 0.06           | 0.10                      |

$\sigma = 0.2$  og  $\alpha_s = 0.1456$  $\sigma = 1$  og  $\alpha_s = 0.1457$  $\sigma = 20$  og  $\alpha_s = 0.2906$ 

### 6.2.4 Variation over $\eta_2$

I dette tilfælde er værdierne af de øvrige variable sat til:

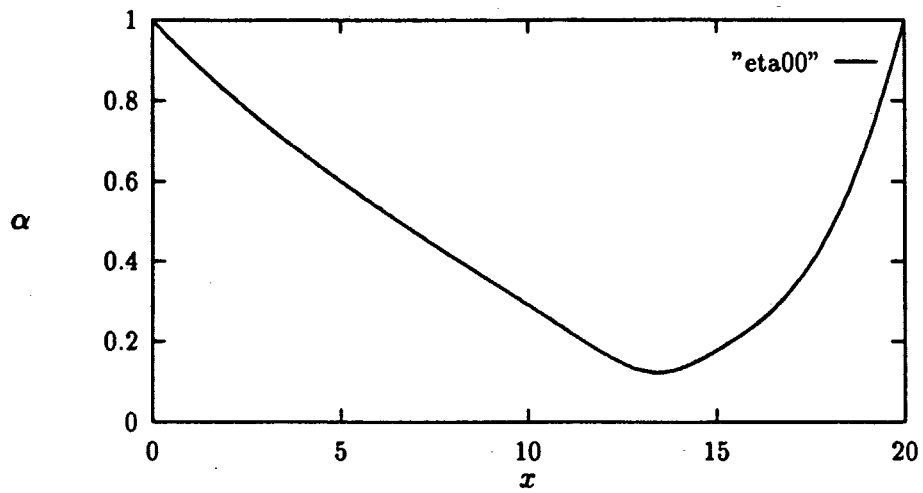
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1.00 \\ \lambda &= 20.00 \\ \eta_1 &= 50.00 \\ u_1 &= 0.10 \\ p_{e_1} &= 0.14 \\ \chi &= 0.20 \\ \gamma_1 &= 0.30 \\ \sigma &= 2.00\end{aligned}$$

Der er foretaget kørsler med følgende værdier af  $\eta_2$ : 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60 og 70.

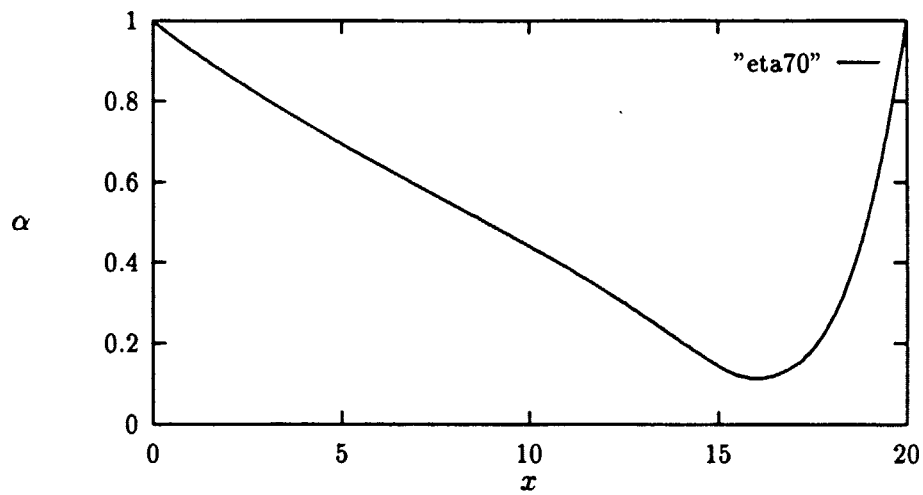
I denne sidste variation har det også været muligt at finde løsninger for alle de afprøvede værdier af  $\eta_2$ . Her er de repræsentative grafer, som vises, givet ved værdierne  $\eta_2 = 0$  og  $\eta_2 = 70$ . Alle de beregnede resultater er desuden angivet i nedenstående tabel.

| grafnavn | $\eta_2$ | $x_s$ | $\alpha_s$ | $x_{min}$ | $\alpha_{min}$ | $\frac{\Delta H}{H(x_s)}$ |
|----------|----------|-------|------------|-----------|----------------|---------------------------|
| eta00    | 0.00     | 15.33 | 0.1970     | 13.35     | 0.12           | 0.95                      |
|          | 10.00    | 15.55 | 0.1804     | 13.85     | 0.13           | 0.53                      |
|          | 20.00    | 15.78 | 0.1671     | 14.32     | 0.13           | 0.40                      |
|          | 30.00    | 15.97 | 0.1562     | 14.72     | 0.12           | 0.34                      |
|          | 40.00    | 16.15 | 0.1470     | 15.08     | 0.12           | 0.31                      |
|          | 50.00    | 16.32 | 0.1392     | 15.41     | 0.12           | 0.29                      |
| eta70    | 60.00    | 16.48 | 0.1324     | 15.74     | 0.12           | 0.27                      |
|          | 70.00    | 16.62 | 0.1264     | 15.91     | 0.11           | 0.26                      |

$\eta_2 = 0$ ,  $p_e = 0.14$  og  $\alpha_s = 0.1970$



$\eta_2 = 70$ ,  $p_e = 0.84$  og  $\alpha_s = 0.1264$



# Kapitel 7

## Diskussion

Som beskrevet i kapitel 2 har Cancelli og Pedley opstillet en model for turbulente væskestrømninger i elastiske rør. Modellen tager i modsætning til tidligere, lignende modeller også højde for longitudinale spændinger i rørvæggen, bølgeudbredelse samt energitab i strømmingen.

Modellens validitet demonstreres ved grafiske løsninger for nogle bestemte parametervalg, der er typiske i eksperimenter med Starling resistorer.

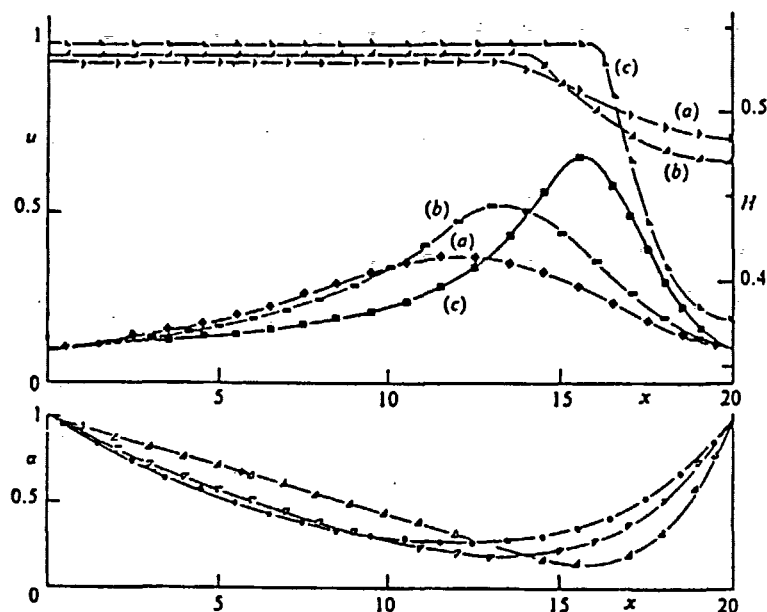
Dette er gjort ved brug af en tillempning af MacCormack's endelige differensskema, som er en af de gængse numeriske metoder til løsning af hyperbolske ligninger. Denne metode er præcis indtil anden orden både med hensyn til sted  $\Delta x$  og tidsskridt  $\Delta t$ . Vi har ikke undersøgt denne metode, men blot konstateret valget i [Cancelli/Pedley, side 385]:

Princippet i denne og tilsvarende dynamiske løsningsmetoder er, at man lader tiden gå, indtil løsningen nærmer sig en ligevægt. Når dette er tilfældet, kaldes en eventuel løsning til ligningssystemet for stationær. Sådanne løsninger ses på figur 7.1 for tre forskellige parametervalg. Den øverste graf viser hastigheden  $u$  som funktion af  $x$  samt funktionen for energibalancen  $H(x)$ ; den nederste graf viser tværsnitsarealet  $\alpha$  som funktion af stedet  $x$ .

Vi har i det forrige beskrevet, hvorledes de i modellen opstillede ligninger løses i det stationære tilfælde, og vi har forsøgt at løse dem for samme parametervalg som Cancelli og Pedley. Vores resultater er fremlagt i kapitel 6.

Det har kun været muligt at generere grafen for  $\alpha(x)$  i tilfældet "a". Dette resultat er ikke tilfredsstillende, da det ikke kvantitativt ligner





Steady-state solutions when there is dissipation due to flow separation: plots of  $H = p + \frac{1}{2}u^2$  (closed triangles),  $u$  (closed rectangles),  $\alpha$  against  $x$ . Marks on the  $\alpha$ -curves indicate the points of flow separation. Parameter values:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\lambda = 20$ ,  $\eta_1 = 50$ ,  $\sigma = 2$ ,  $u_1 = 0.1$ ,  $p_{e1} = 0.5$ ,  $f = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.3$ . Curves (a)  $\eta_2 = 50$ ,  $\chi = 0.2$ ; (b)  $\eta_2 = 50$ ,  $\chi = 0.5$ ; (c)  $\eta_2 = 40$ ,  $\chi = 0.2$ .

**Figur 7.1:** Kilde: Cancelli og Pedley: A separated-flow model for collapsible-tube oscillations, side 392

Cancelli og Pedley's resultat. Derimod er der kvalitativ overensstemmelse mellem vores og Cancelli og Pedley's graf for  $H(x_s)$ . Vi får et alt for stort tryk- og energitab og niveauet før separationspunktet er ligeledes alt for højt.

Da vi ikke har været i stand til at reproducere Cancelli og Pedley's resultater, har vi overvejet følgende:

- Er der fejl i programmet
- Er der trykfejl i Cancelli og Pedley's artikel
- Er det overhovedet stationære løsninger Cancelli og Pedley har fundet

### Test af programmet

Vi har som det første gennemregnet alle ligningerne i vores model, og undersøgt om de er rigtigt skrevet i programmet.

Derudover har vi undersøgt, om de benyttede rutiner til henholdsvis integration og nulpunktssøgning er korrekte. Dette har vi gjort ved at teste rutinerne overfor kendte funktioner, hvortil man også analytisk kan beregne henholdsvis integralet eller finde nulpunkter. I disse beregninger konstaterede vi overensstemmelse mellem de analytiske og numerisk beregnede løsninger.

Programmet som et samlet hele er imidlertid vanskeligt at teste, da samspillet mellem de indgående beregninger bliver meget komplekst. Dette skyldes, at de indeholder mange variable, der ikke kan beregnes analytisk. Vi har som alternativ testet alle konstantberegningerne i programmet, ved for givne værdier af konstanterne:  $\chi$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\lambda$ ,  $u_1$ ,  $\alpha_1$  og  $p_{e_1}$ , at beregne alle de implicerede konstanter:  $q$ ,  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $c_0$ ,  $c_1$  og  $\alpha_s$ , i et regneark, for at se om vi fik samme resultat i programmet; det gjorde vi. Ligeledes har vi for givne  $\alpha_s$  beregnet funktionsværdierne for de i integralerne indgående funktioner. Disse har vi derefter plottet i et regneark. For at teste, at programmet leverer analoge resultater, har vi her genereret de samme grafer. Denne sammenligning resulterede i helt identiske grafer fra de to forskellige beregninger.

Vi tror derfor, at programmet er korrekt, hvorfor det må være andetsteds forklaringen skal findes.

### Eventuel fejl i artiklen

Da vi ikke har fundet fejl i vores beregninger eller i programmet, har vi derfor studeret Cancelli og Pedley's artikel nøjere. De angiver, hvilke parametervalg de benytter til at fremstille de tre løsninger, og det fremgår af artiklen side 384, at  $p_{e_1}$  sædvanligvis antager værdien 0.05 og i et enkelt tilfælde værdien 0.2. Men på figur 7.1 fremgår det, at parameterværdien  $p_{e_1} = 0.5$  er benyttet. For denne værdi har det ikke været muligt at fremstille nogle tilfredsstillende løsninger.

Vi har da prøvet at ændre parameteren  $p_{e_1}$  til 0.05 og til 0.2, hvilket kvalitativt gav et pænere resultat, se graferne på side 102, men langt fra tilfredsstillende. Dette gør sig, i alle tre tilfælde, gældende for begge grafer  $\alpha(x)$  og  $H(x)$  for hvert valg af  $p_{e_1}$ .

I Cancelli og Pedley's artikel er det kun her, værdien  $p_{e_1} = 0.5$  optræder, mens værdierne  $p_{e_1} = 0.05$  og  $p_{e_1} = 0.2$  optræder flere steder. Dette samt resultatet af at benytte sidstnævnte parametervalg opfordrer os til at tro, at der er en trykfejl i Cancelli og Pedley's artikel.

Dette er dog ikke forklaring nok, da der stadig er uoverensstemmelser mellem vores og Cancelli og Pedley's resultater.

Vi har i denne forbindelse sendt et brev til T.J. Pedley i håb om, at han kunne afklare dette spørgsmål, men vi har p.t. ikke fået nogen tilbagemelding.

### **Kaotisk opførsel**

Som en sidste mulighed har vi overvejet, om Cancelli og Pedley rent faktisk har opnået en ligevægt-situation i deres simuleringer. Det fremgår ikke nogetsteds i deres artikel, hvor længe de lader simuleringen køre, så vi har ikke været i stand til at vurdere, rigtigheden af de fundne stationære løsninger.

En anden mulighed kunne være, at systemet opfører sig kaotisk sådan at forstå, at det umiddelbart kunne se ud til, at en ligevægts-tilstand var opnået, men at det til et senere tidspunkt atter bliver ustabil.

Hvis dette er tilfældet, kan det forklare uoverensstemmelsen, idet vores løsninger helt sikkert er stationære løsninger.

## **7.1 Kørsler med varierende parametervalg**

Da vi ikke har kunnet generere grafer i overensstemmelse med Cancelli og Pedley's, har vi for forskellige værdier af  $p_{e_1}$ , genereret grafer for at undersøge, for hvilke værdier af  $p_{e_1}$  vi fik grafer, der kvalitativt og kvantitativt ligner dem fra artiklen. Dette er de fittede resultater præsenteret i kapitel 6 side 104. Det er i disse kørsler bemærkelsesværdigt, at vi ikke kan finde en værdi af  $p_{e_1}$ , som tilfredsstiller alle tre parametervalg angivet på figur 7.1. I den forbindelse vil vi nævne, at parameterværdierne for "a" og "b" passer for  $p_{e_1} = 0.08$ , hvorimod parameterværdierne for "c" har  $p_{e_1} = 0.14$ .

Sluttelig har vi fundet løsninger for varierende værdier af  $\gamma_1$ ,  $\chi$  og  $\sigma$  og for fastholdte parametervalg svarende til "resfitc", jævnfør kapitel 6.

**For variationer med  $\gamma_1$  observeres følgende:**

Større værdier af  $\gamma_1$  giver anledning til en meget lille formindskelse i  $\alpha_s$ , separationen sker lidt senere og trykfaldet øges meget lidt.

Ifølge Cancelli og Pedley side 381 ændres den kvalitative opførsel ikke, hvis  $\gamma_1$  varieres fra 0.3 til 0.2. Vores grafer viser ydermere, at der ikke er nogen væsentlig forskel helt ned til  $\gamma_1 = 0.09$ . For større værdier  $\gamma_1 \geq 0.5$  viser det sig imidlertid, at grafens form ændres.

**For variationer med  $\chi$  observeres følgende:**

Mindre energitab (større værdi af  $\chi$ ) forårsager, at  $\alpha_s$  mindskes, (det vil sige større kollaps), separationspunktet rykkes mod højre og tryk- og energitabet øges, hvorimod størrelsen af det relative tryk- og energitab er næsten konstant (det stiger ubetydelig lidt).

Når vi øger  $\chi$  (energitabet mindskes) fremkommer der større kollaps i røret ( $\alpha_s$  mindskes). Dette virker umiddelbart mærkeligt,

da man for større værdier af  $\chi$  skulle forvente et mindre energitab og dermed en større gennemstrømning [Cancelli/Pedley, side 392].

Dette stemmer overens med Cancelli og Pedley's observationer i artiklen, hvor de også er overraskede over dette fænomen.

**For variationer med  $\sigma$  observeres følgende:**

For større longitudinal spænding (det vil sige for stivere rør) bliver kurverne mere glatte, hvilket kan forstås intuitivt. Separationspunktet rykkes til venstre, (det vil sige separation sker tidligere), og tværsnitsarealet i separationspunktet øges, mens det relative trykfald mindskes.

Cancelli og Pedley har i artiklen ingen resultater for forskellige værdier af  $\sigma$ .

Kvalitativt må det konkluderes, at der er overensstemmelse med Cancelli og Pedley's resultater på trods af, at vi benytter en anden værdi af  $p_{e1}$ . Vi observerer samme opførsel, når vi varierer de indgående parameterverdier.

For variationer med  $\eta_2$  observeres følgende:

Når modstanden  $\eta_2$  i enden af røret mindskes, øges det relative tryk- og energitab væsentligt, hvilket også er i overensstemmelse med udtrykket for  $\frac{\Delta H}{H(x_*)}$  side 52, da  $\eta_2$  optræder i nævneren i dette udtryk.

Samtidig sker der et lidt mindre kollaps, og det sker lidt tidligere, når  $\eta_2$  mindskes. Der er dog tale om nogle meget små ændringer, hvorfor vi må konkludere, at det væsentlige ved variationer med  $\eta_2$  er den store tilvækst i tryk- og energitabet.

Disse observationer er, som alle de øvrige observationer, i overensstemmelse med den kvalitative opførsel, som også Cancelli og Pedley har fundet. Vi mener derfor, at selv om vi ikke får de samme kvantitative resultater, så viser den generelle opførsel sig at være korrekt. Derfor kan vi kun undre os over, at vi ikke kan genskabe deres resultater præcist. Dette tyder på, at de to forskellige løsningsmetoder enten ikke stemmer fuldstændigt overens eller,

at der er de tidligere omtalte problemer med Cancelli og Pedley's resultater.

Vi mener, at vores implementering er meget pålidelig, idet vi har haft lejlighed til at sammenligne den med et lignende program, som Jesper Larsen tidligere har fremstillet. Da det viste sig, at der var uoverensstemmelser mellem vores og Cancelli og Pedley's resultater, blev dette program tilpasset den reviderede model, og kørsler herfra viste sig da at være identiske med vores.

Vi mener, at dette understreger, at forskellen mellem vores og Cancelli og Pedley's resultater ikke skyldes programmeringsfejl fra vores side.

Det ville være hensigtsmæssigt at afprøve den dynamiske model. Dels for at undersøge systemets svingninger og dels for at undersøge, om man derved ville opnå overensstemmelse med Cancelli og Pedley. Dette har desværre ikke været muligt af tidsmæssige årsager, men det er et oplagt og interessant projektemne for andre studerende.

## 7.2 Modellen kontra det fysiologiske system

I det følgende vil vi prøve at diskutere, hvordan vores teoretiske resultater stemmer overens med Svend Mortensen's observationer af det mandlige urinrør. Problemet for Svend Mortensen var, som beskrevet i indledningen at forklare et 30 % tryk- og energitab i de yderste 2/3 af urinrøret. Dette svarer til, at vi skulle kunne observere et tilsvarende tab i slutningen af det elastiske rør.

Vi mener, at kunne forklare et sådant tab, hvis der forekommer et væsentligt kollaps i røret. De kørsler vi har foretaget med den fittede værdi for "c", som er vist i tredje kørsel på side 104, understøtter denne forklaring. Dog vil variation i modstanden i enden af røret kunne medføre meget større tab (hvis  $\eta_2$  er lille).

En ændring af denne modstand, kan som beskrevet ovenfor medføre meget forskellige tryk- og energitab.

Disse tryk- og energitab forekommer kun, hvis der optræder kollaps i det elastiske rør. Svend Mortensen tvivler på, at det mandlige urinrør kollaberer. Han er dog ikke helt sikker, da der i urinrøret eksisterer et blindt område, hvor man ikke med de nuværende metoder kan måle tværsnitsarealet af urinrøret. Derfor kan der, selvom det er lident sandsynligt, være et kollaps i røret, således at denne model kan sige noget om det problematiske tryk- og energitab.

En anden forklaring kan være, at systemet begynder at svinge, hvilket er hvad Svend Mortensen mest tror på. Vi kan ikke med vores resultater afvise denne tese, men vi kan heller ikke kontrollere den, da det ligger udenfor emnet i denne rapport. Dette skyldes dels, at vi kun betragter de stationære løsninger og dels, at vi ikke har været i stand til at indsætte Svend Mortensen's faktiske værdier for strømning igennem det mandlige urinrør, da de ikke er kompatible med vores parametre.

**Alt i alt leder dette frem til følgende konklusion:**

- Vi har arbejdet med de stationære tilfælde i Cancelli og Pedley's artikel og erfaret, at der må være en fejl i enten vores måde at løse modellen på eller i deres artikel.
- Vi har ikke afkræftet formodningen om, at trykfaldet skyldes svingninger i systemet.
- Hvis der er et kollaps i det mandlige urinrør, kan vi forklare det store tryk- og energitab i røret, ellers må dette spørgsmål stadig stå åbent.

# Appendiks A

## Programdokumentation

I det følgende beskrives en dokumentation af det program, der beregner tværsnitsarealet som funktion af positionen  $x$  i det elastiske rør. Dokumentationen kan ikke stå alene, men skal læses sammen med resten af rapporten, hvor de enkelte metoder og algoritmer er beskrevet.

Formålet med de enkelte procedurer og funktioner beskrives. Derudover præsenteres de enkelte rutiners ind- og uddata, globale variable samt eventuelle funktions- og procedurekald. I udskriften for dokumentationen vises først det pågældende procedure- eller funktionshovede og derefter følger kommentarerne.

PROGRAM RUPNOK;

```
{-----+
|Navn      : Program RUPNOK      |
|         |                     |
|Funktion  : Programmet beregner stedet som funktion af tværsnits- |
|           | arealet samt tryk- og energitab i et elastisk rør, |
|           | modelleret ved en Starling resistor.             |
|         |                     |
|Uddata   : En fil ved navn "alpha_graf" bestående af to talsøj- |
|           | ler. I første søjle angives positionen  $x$  i det elas- |
|           | tiske rørs længderetning, og i anden søjle angives |
|           | størrelsen af det tilhørende tværsnitsareal  $\alpha$ . |
|           | Der genereres tilsvarende en fil ved navn "h_graf", |
|           | som angiver værdien af                             |
|           |                                                     |
|           |  $H(x) = p(x) + 1/2 u^2(x)$ .                         |
|         |                     |
|Kaldes af: Selve programmet startes ved at aktivere pascalpro- |
|           | grammet "RUPNOK.PAS"                               |
+-----}
```



## CONST

```

{-----+
|Navn      : Konstanter          |
|-----+
|Funktion : I det følgende erklæres de konstanter, som benyttes |
|          globalt i programmet. Først erklæres konstanterne, |
|          der anvendes i beregningen af q, h_0, h_1, c_0 og |
|          c_1. Dernæst erklæres de konstanter, der indgår i |
|          beregningen af nulpunkter i 4. gradspolynomiet. |
|          Endelig defineres de i integrationerne benyttede |
|          konstanter. |
|-----+

```

```
{ Konstanter til konstberegninger }
```

```
{ Konstanter til integralberegning }
```

## TYPE

```

{-----+
|Navn      : Typer              |
|-----+
|Funktion : I det følgende erklæres de i programmet benyttede |
|          typer. Der er tre forskellige typer; to array's |
|          og en funktion. Funktionstypen benævnes fx. |
|-----+
|          De to array's benyttes dels i forbindelse med inte- |
|          gration og dels i forbindelse med generering af de |
|          endelige uddata. Funktions-typen gør det muligt at |
|          overføre en funktion som parameter til andre funk- |
|          tioner og procedurer. |
|-----+

```

## VAR

```

{-----+
|Navn      : Variable           |
|-----+
|Funktion : I det følgende erklæres de variable, som benyttes |
|          globalt i programmet. De er organiseret efter |
|          samme princip som konstanterne, hvilket giver føl- |
|          gende rækkefølge for erklæringerne af de variable: |
|-----+
|          - Variable til at bestemme konstanter |
|-----+

```

```

|           - Variable til at finde alpha_s           |
|           - Variable til at finde nulpunkt (alpha_min) |
|           - Variable til integration               |
|           - Variable til at beregne det endelige resultat |
+-----+

```

```
{ Variable til at bestemme konstanter }
```

```
{ Variable til at finde alpha_s }
```

```
{ Variable til at finde nulpunkt - alpha_min }
```

```
{ Variable til integration }
```

```
{ Variable til at beregne det endelige resultat }
```

```
{***** PROCEDURER TIL GENERERING AF TEST DATAFILER *****}
```

```
PROCEDURE gemfunk(funktion: fx; c_n, h_n, ki, fra, til: double;
                  antal_skridt: integer);
```

```

+-----+
|Navn      : gemfunk                                |
|
|Inddata   : funktion - en af integranderne i de tre integra- |
|            ler, der benyttes til at finde alpha_s. Integran- |
|            den er givet ved en af funktionerne:           |
|
|            1/sqrt(f_0) eller                             |
|            1/sqrt(f_1) eller                             |
|            1/sqrt(f_0)-1/sqrt(f_0')*1/sqrt(alpha-alpha_min)|
|
|            c_n - En reel konstant, c_0 eller c_1         |
|            h_n - En reel konstant, h_0 eller h_1         |
|
|            ki  - En reel konstant, chi eller i           |
|
|            fra - En reel konstant, der angiver hvorfra da- |
|            tageneringen skal starte.                     |
|
|            til - En reel konstant, der angiver hvor datage- |
|            nereringen skal slutte.                       |
|
|            antal_skridt - Antallet af punkter, som funktionen |
|            skal beregnes i.                               |
|
|Uddata    : En datafil med to kolonner af tal, hvor der i hver |
|            kolonne er antal_skridt tal.                  |
+-----+

```

```

|Funktion : gemfunk er en procedure, der er erklæret for at
|         teste, om funktionen funktion er rigtig. Denne
|         test udføres ved:
|
|         Proceduren opretter en fil med et brugervalgt
|         navn, hvori henholdsvis funktionsværdien for funk-
|         tion, og den tilhørende x-værdi i intervallet
|         [til;fra] gemmes. I alt genereres der antal_skridt
|         x- og funktionsværdier.
|
|Kalder   : Proceduren funktion, som er parameteroverført her-
|         til.
|
|Kaldes af: Hovedprogrammet, når der ønskes en test af, om
|         funktionen funktion er rigtig.
+-----}

```

```

PROCEDURE gemfunknp(a, b, c, d: double; antal_skridt: integer);
{-----}
|Navn      : gemfunknp
|
|Inddata   : a, b, c, d - Reelle tal, som er koefficienter
|               til 4. gradspolynomiet:
|
|                $a*x^4 + b*x^2 + c*x + d$ 
|
|               antal_skridt - Antallet af punkter som 4. grads-
|               polynomiet skal beregnes i.
|
|Uddata    : En datafil med to kolonner af tal, hvor der i hver
|               kolonne er antal_skridt tal.
|
|Funktion  : Ved brug af denne procedure er det muligt at tes-
|         te om 4.gradspolynomiet er rigtigt. Denne test
|         udføres ved, at proceduren opretter en fil med et
|         brugervalgt navn, hvori henholdsvis funktionsvær-
|         dien for 4. gradspolynomiet, og den tilhørende
|         x-værdi i intervallet [0;1] gemmes. I alt genere-
|         res der antal_skridt x- og funktionsværdier.
|
|Kaldes af: Hovedprogrammet, når der ønskes en test på, om 4.
|         gradspolynomiet er rigtigt.
+-----}

```

{\*\*\*\* GENERELLE PROCEDURER, SOM BENYTTES I HELE PROGRAMMET \*\*\*\*}

```

FUNCTION integral_P(alpha: double): double;
{-----}
|Navn      : integral_P
|
|Inddata   : alpha - Den værdi, hvori integralet skal beregnes.
|
|Omgivelser: Kendskab til de globale konstanter a_1 og k.
|
|           Kendskab til de globale variable a_2, a_3 og b_1.
|           Disse beregnes i de tre første sætninger i hoved-
|           programmet.
|
|Uddata    : Værdien af integralet af P(alpha).
|
|Funktion  : Beregner integralet af funktionen for elasticite-
|           ten af det elastiske rør P i punktet alpha.
|
|Kaldes af : Funktionen er generel. Den kaldes fra flere for-
|           skellige steder, og på flere forskellige niveauer.
|           Det er i:
|
|           Hovedprogrammet,
|           funki (hvor f_n(alpha) beregnes) og i
|           anddiff1 (hvor 1/sqrt(f_0'(alpha)) beregnes)
|-----}

```

```

PROCEDURE fejl(fejltekst: string);
{-----}
|Navn      : fejl
|
|Inddata   : fejltekst - En tekst.
|
|Funktion  : Proceduren fejl skriver en tekst ud på skærmen,
|           for at gøre brugeren opmærksom på at en programdel
|           bruges forkert. Programmet stoppes ikke, da der
|           flere steder godt må opstå en enkelt fejl, som
|           senere ophæves. F.eks konvergerer den numeriske
|           integration ikke altid. Dette er ikke en fejl, der
|           behøver at stoppe programmet, men brugeren skal
|           være opmærksom på, at integrationsresultatet ikke
|           kan benyttes.
|
|Kaldes af : Proceduren er generel, og den kaldes flere for-
|           skellige steder fra, og på flere forskellige ni-
|           veauer. Det er i:
|
|           rdsikker (funktionen der finder nulpunkter. Leder
|-----}

```

```

|           vi efter nulpunkter i det forkerte in- |
|           terval eller, bruges der for mange ite- |
|           rationsskridt, udskrives en fejlmeddel- |
|           else.) |
| rdnewt   (som rdsikker, men funktionen bruges kun, |
|           se kapitel 5, hvis rdsikker ikke kan be- |
|           nyttes.) |
| polint   (ekstrapolations-procedure, der udføres, |
|           når de nødvendige begyndelsespunkter er |
|           fundet.) |
| anddiff1 (hvor  $1/\sqrt{f_0'(\alpha)}$  beregnes, hvis |
|            $f_0'(\alpha) = 0$ ) og i |
| romberg  (integrations proceduren, hvis der er |
|           brugt for mange iterationskridt.) |
+-----+

```

{\*\*\*\*\* FUNKTIONER OG PROCEDURER TIL AT FINDE NULPUNKT \*\*\*\*\*}

```

FUNCTION nulpunkt(start_pkt, slut_pkt,
                 tolerance: double): double;

```

```

+-----+
|Navn      : nulpunkt
|
|Inddata   : start_pkt og slut_pkt reelle tal, der angiver in-
|           tervalgrænserne for det interval, hvori nulpunkt-
|           erne skal søges.
|
|           tolerance; et reelt tal, som angiver, hvor præcist
|           nulpunktet skal beregnes.
|
|Uddata    : Den x-værdi hvori nulpunktet findes.
|
|Funktion  : Funktionen beregner nulpunktet i 4. gradspolyno-
|           miet
|
|            $f(x) = a*x^4 + b*x^2 + c*x + d$ 
|
|           hvor konstanterne er beregnet globalt i hovedpro-
|           grammet. Det gøres ved at benytte en udvidelse af
|           Newton Raphson's metode - rdsikker - i de tilfæl-
|           de, hvor vi i intervalendepunkterne kan finde
|           funktionsværdier med forskelligt fortegn. Newton
|           Raphson's metode - rdnewt - benyttes direkte i de
|           tilfælde, hvor alle funktionens værdier er enten
|           positive eller negative. Dermed antager vi, at
|           funktionens nulpunkt er et ekstremumspunkt. Algo-
|           ritmerne til nulpunktssøgning er gennemgået nøjere
|           i kapitel 5.

```

|Kaldes af: Proceduren  
funkt - Som beregner værdien af  $f(x)$  og  $f'(x)$ .

og funktionerne

rdnewt - Som finder nulpunkter, når funktionsværdierne i intervalendepunkterne har samme fortegn, eller

rdsikker - Som finder nulpunkter, når funktionsværdierne i intervalendepunkterne har forskellige fortegn.

|Kaldes af: Hovedprogrammet, når vi skal finde alpha\_min.

PROCEDURE funk(x: double; VAR f, df: double);

{-----  
|Navn : funk

|Inddata : x - Et reelt tal; den værdi hvori funktionen i  
proceduren skal beregnes.

|Omgivelser: Kendskab til de globalt definerede koefficienter  
a, b, c og d til 4. gradspolynomiet og dermed  
også kendskab til den første afledede i x.

|Uddata : f - Den konkrete funktionsværdi i punktet x og  
df - Funktionsværdien af den første afledede af  
funktionen i punktet x.

|Funktion : Proceduren bruges, når vi for at beregne  
alpha\_min skal finder nulpunkter i 4. gradspoly-  
nomiet. Den beregner henholdsvis funktionsværdi-  
en af selve 4. gradspolynomiet og af den første  
afledede i x.

|Kaldes af: Proceduren kaldes af funktionerne nulpunkt,  
rdnewt og rdsikker.

FUNCTION rdnewt(x1, x2: double): double;

{-----  
|Navn : Rdnewt

|Inddata : x1 - Et reelt tal som angiver, hvor vi skal  
starte med at søge efter et nulpunkt.

| x2 - Et reelt tal som angiver, hvor vi skal  
slutte med at søge efter et nulpunkt.

```

|Omgivelser: funktionen benytter procedure fejl og funk.
|
|Uddata   : Den x-værdi hvori nulpunktet findes.
|
|Funktion  : Funktionen beregner ved brug af Newton Raphson's
|            algoritme - se kapitel 5 - et nulpunkt for 4.
|            gradspolynomiet angivet i procedure funk. Hvis
|            et sådant ikke findes, vil vi bruge for mange
|            iterationskridt og brugeren får en fejlmeddel-
|            else på skærmen.
|
|Kalder    : Procedure funk, når henholdsvis funktionsværdi af
|            4. gradspolynomiet og dets x afledede skal bereg-
|            nes.
|
|           Procedure fejl, når brugeren skal meddeles at der
|           er brugt for mange iterationskridt.
|
|Kaldes af: Funktionen kaldes af funktionen nulpunkt, når
|            rdsikker ikke kan bruges - dvs hvis der ikke kan
|            findes et interval, hvori fortegnet af funktions-
|            værdierne i intervalendepunkterne skifter.
+-----+

```

```

FUNCTION rdsikker(x1, x2, f1, fh: double): double;

```

```

+-----+
|Navn      : Rdsikker
|
|Inddata   : x1 - Et reelt tal som angiver, hvor vi skal
|            starte med at søge efter et nulpunkt.
|            x2 - Et reelt tal som angiver, hvor vi skal
|            slutte med at søge efter et nulpunkt.
|            f1 - Et reelt tal som angiver funktionsvær-
|            dien i punktet x1.
|            fh - Et reelt tal som angiver funktionsvær-
|            dien i punktet x2.
|
|Omgivelser: Funktionen benytter procedure fejl og funk.
|
|Uddata    : Den x-værdi hvori nulpunktet findes.
|
|Funktion  : Funktionen beregner ved brug af en udvidelse af
|            Newton Raphsons algoritme - se kapitel 5 - et
|            nulpunkt for 4. gradspolynomiet angivet i pro-
|            cedure funk. Algoritmen bruger Newton Raphson's
|            metode direkte, i de tilfælde hvor  $f'(x_n)$  har
|            en vis størrelse. Når  $f'(x_n)$  derimod er nul el-
|            ler meget lille, benyttes i stedet bisektion til

```

```

|           at komme tættere på nulpunktet.
|
|           Hvis der ikke indenfor et begrænset antal itera-
|           tionskridt findes et nulpunkt, vil brugeren
|           modtage en fejlmeddelelse.
|
|Kalder   : Procedure funk, når funktionsværdien af henholds-
|           vis 4. gradspolynomiet og dets første afledede
|           med hensyn til x skal beregnes.
|
|           Procedure fejl, når brugeren skal meddeles, at
|           der er brugt for mange iterationskridt.
|
|Kaldes af: Hovedprogrammet, i de tilfælde hvor funktions-
|           værdierne i intervalendepunkterne har forskellige
|           fortegn.
+-----}

```

```
{***** FUNKTIONER TIL INTEGRATION *****}
```

```
{ Funktion der beregner  $1 / \sqrt{f_0'(\alpha)}$  }
```

```
FUNCTION anddiff1(alpha: double): double;
```

```

{-----}
|Navn      : anddiff1
|
|Inddata   : alpha - Et reelt tal - det tal hvori funktionen
|           skal beregnes.
|
|Omgivelser: Kendskab til de globale variable:
|
|           a_1, a_2, a_3, b_1, k  samt
|           p_e og h_0             samt
|           and_q
|
|Uddata    : Funktionen returnerer et reelt tal - en funktions-
|           værdi, se nedenfor.
|
|Funktion   : Funktionen beregner værdien af:
|
|            $1 / \sqrt{f_0'(\alpha)}$ 
|
|           Det præcise udtryk for  $f_0'$  er beskrevet mere de-
|           taljeret i kapitel 4 side 60.
|
|Kalder     : Funktionen integral_P
|
|Kaldes af: Funktionen anddiff1 kaldes dels i funk2. Her indgår

```



```

|           funktionsudtrykket, som et led i en Taylorudvik-
|           ling. Se i øvrigt kapitel 4. Derudover kaldes
|           anddiff1 fra hovedprogrammet.
|-----}

```

```
{ Funktion der beregner 1 / sqrt(f_0) }
```

```
FUNCTION funki (c_n, h_n, ki, alpha: double): double;
```

```

|-----}
|Navn      : funki
|
|Inddata   : Funktionen inddata er de reelle variable:
|
|           alpha - Det tal hvori funktionen skal beregnes.
|           c_n   - En variabel, der sættes til en af konstan-
|                   terne c_0 eller c_1 afhængigt af hvilken
|                   funktion, der skal beregnes.
|           h_n   - En variabel, der som c_n sættes til kon-
|                   stanten h_0 eller h_1.
|           ki    - En variabel, der sættes til 1 hvis c_n og
|                   h_n er sat til henholdsvis c_0 og h_0.
|                   Ellers sættes den til konstanten chi.
|
|Omgivelser: Kendskab til de globale variable:
|
|           sigma, p_e og and_q
|
|Uddata    : Funktionen returnerer et reelt tal - en funktions-
|           værdi, se nedenfor.
|
|Funktion   : Funktionen beregner værdien af:
|
|           1 / sqrt(f_0(alpha))
|
|           Det præcise udtryk for f_0 er beskrevet mere de-
|           taljeret i kapitel 3.
|
|Kalder     : Funktionen integral_P
|
|Kaldes af: funk2 og af hovedprogrammet. I hovedprogrammet skal
|           funki integreres, hvilket bevirker, at integra-
|           tionsproceduren får funki som argument.
|-----}

```

```
{ Funktion der beregner
  1/sqrt(f_0) - 1/sqrt(f_0'(alpha_min) 1/sqrt(alpha - alpha_min)
}
```

```
FUNCTION funk2 (c_n, h_n, ki, alpha: double): double;
```

```
{-----}
|Navn      : funk2
|
|Inddata   : Funktionen inddata er de reelle variable:
|
|           alpha - Det tal hvori funktionen skal beregnes.
|           c_n   - En variabel, der sættes til en af konstan-
|                   terne c_0 eller c_1 afhængigt af hvilken
|                   funktion, der skal beregnes.
|           h_n   - En variabel, der som c_n sættes til kon-
|                   stanten h_0 eller h_1.
|           ki    - En variabel, der sættes til 1 hvis c_n og
|                   h_n er sat til henholdsvis c_0 og h_0.
|                   Ellers sættes den til konstanten chi.
|
|Omgivelser: Kendskab til de globale variable:
|
|           sigma, p_e og and_q
|
|Uddata    : Funktionen returnerer et reelt tal - en funktions-
|           værdi, se nedenfor.
|
|Funktion  : Funktionen beregner værdien af:
|
|           1/sqrt(f_0) -
|           1/sqrt(f_0'(alpha_min) 1/sqrt(alpha - alpha_min)
|
|           Det præcise udtryk for henholdsvis f_0 og f_0' er
|           beskrevet mere detaljeret i kapitel 4.
|
|Kalder    : For at kunne beregne funktionsværdien af ovenstå-
|           ende udtryk, benytter vi funktionerne funk1 og
|           anddiff1, til at bestemme værdierne af 1/sqrt(f_0)
|           og 1/sqrt(f_0'(alpha_min)).
|
|Kaldes af: Hovedprogrammet, hvor vi skal integrere denne funk-
|           tion. Herved får integrationsproceduren funk2 som
|           argument.
|-----}
```

```
{ De næste procedurer bruges til integration. }
```

```
PROCEDURE polint(tab1, tab2: intarray; n: integer;
                VAR res, rekurs_dif: double);
```

```
{-----+
|Navn      : polint
|
|Inddata   : tab1 og tab2 er tabeller med reelle tal, hvori de
|            punkter, der skal ekstrapoleres ud fra, er gemt.
|
|Omgivelser: Kendskab til procedure fejl.
|
|Uddata    : Det ekstrapolerede polynomium i punktet 0.
|
|Funktion  : Selve algoritmen er beskrevet i kapitel 5 side 93
|            og vil derfor ikke her blive gennemgået i detaljer.
|            Algoritmen beregner det ekstrapolerede polynomium,
|            når skridtlængden i integrationsproceduren er nul.
|            Dette gøres ved brug af følgende rekursionsformel:
|
|            
$$T(s,k) = T(s,k) + \frac{T(s,k-1) - T(s-1,k-1)}{(h(s-k) / h(1))^2 - 1}$$

|
|            hvor (s,k) betegner indeks analogt med beskrivel-
|            sen i Neville's algoritme.
|
|Kalder    : Procedure fejl, hvis vi dividerer med nul i rekur-
|            sionsformlen.
|
|Kaldes af : Procedure romberg.
|-----+}
```

```
PROCEDURE trapez(funktion: fx; c_n, h_n, ki ,a, b: double;
                VAR trap_sum: double; ite_nr: integer);
```

```
{-----+
|Navn      : trapez
|
|Inddata   : funktion - Den funktion over hvilken trapez-summen
|            skal beregnes. Denne er af typen fx.
|            c_n, h_n og ki
|            - Reelle tal der angiver, om funktionen
|            er funk1 eller funk2.
|            a og b - Reelle tal som angiver begyndelses- og
|            slutpunkt for trapezsummen.
|            trap_sum - Selve trapez-summen er det reelle tal,
|            som proceduren returnerer. Derudover
|            indeholder den resultatet fra den for-
|            rige trapez-sum, når proceduren kaldes.
|            ite_nr - Angiver med et helt tal, hvilken ite-
|            ration der beregnes.
|-----+}
```

**Omgivelser:** Proceduren benytter den globale variabel, der hedder `antal_punkter`. Da algoritmen hele tiden fordobler antallet af punkter, hvori trapez-summen beregnes, er det nødvendigt, at denne variabel ikke nedlægges, når proceduren slutter.

**Uddata** : Trapez-summen for denne iteration beregnet i `antal_punkter` punkter.

**Funktion** : Proceduren beregner trapez-summen i en given funktion fra `a` til `b` ved at benytte algoritmen beskrevet i kapitel 5 på side 91.

**Kaldes af** : romberg integration.

```
PROCEDURE romberg(funktion: fx; c_n, h_n, ki, a, b: double;
  VAR fejlmrk: boolean;
  VAR res: double);
```

**Navn** : romberg

**Inddata** : funktion - Den funktion for hvilken integralet skal beregnes. Denne er af typen `fx`.  
`c_n, h_n` og `ki`  
 - Reelle tal som angiver om funktionen er `funk1` eller `funk2`.  
`a` og `b` - Reelle tal der angiver den nedre og øvre grænse for integrationen.  
`fejlmrk` - En boolsk variabel, der sættes sand, hvis integrationsmetoden ikke konvergerer.  
`res` - Et reelt tal hvori resultatet af integrationen returneres.

**Omgivelser:** Kendskab til procedure fejl.

**Uddata** : Resultatet af den numeriske integration fra `a` til `b` af funktionen `funktion`.

**Funktion** : Proceduren benytter rombergs integrationsmetode. Algoritmen for romberg integration kan læses i kapitel 5 på side 94.

I korte træk går metoden ud på, at den betragtede funktion først integreres ved at beregne trapez-summen for et givent antal punkter. Dette antal afhænger af den ønskede præcision. Derefter ud-

```

|           føres der for at opnå et mere præcist resultat
|           ekstrapolation over disse trapez-summer.
|
|Kalder    : trapez-sum og polint.
|
|Kaldes af : Hovedprogrammet.
+-----}

```

```
{***** PROCEDURE TIL AT GENERERE DATAFIL MED RESULTAT *****}
```

```
PROCEDURE beregn_h(tabel: resarray; VAR fil: text);
```

```
{-----}
|Navn      : beregn_h
|
|Inddata   : tabel - Et resarray - en tabel, hvori resultatet
|           for beregningen af de enkelte tværnsnits-
|           arealer gemmes.
|           fil    - En åben fil, hvor de data, der beregnes i
|           proceduren, gemmes.
|
|Omgivelser: De globale konstanter h_0, h_1, chi og and_q.
|
|Uddata    : Proceduren tilføjer en værdi af x og en værdi af
|           H til fil, hver gang den udføres.
|
|Funktion  : Proceduren beregner funktionen H(x), der indehol-
|           der information om tryk- og energitabet i det ela-
|           stiske rør. Funktion beregnes ud fra følgende
|           formler:
|
|           For  $0 \leq x \leq x_s$  fås:
|
|           
$$H(x) = h_0$$

|
|           For  $x_s < x \leq x_1$  fås:
|
|           
$$H(x) = h_1 + 0.5 \cdot (1 - \chi) \cdot \text{and}_q / \alpha$$

|
|           De enkelte værdier af x findes ved at slå op i ta-
|           bellen tabel's første række, og alpha findes på
|           tilsvarende vis ved at slå op i tabellen tabel's
|           anden række.
|
|           Selve resultatet gemmes på fil, således at der
|           senere kan genereres grafer for de fundne data.
|
|Kaldes af : Hovedprogrammet, når H(x) skal beregnes.
+-----}
```

```

{***** HOVEDPROGRAM *****)
{-----+
|Navn      : HOVEDPROGRAM
|
|Inddata   : Alle globalt erklærede variable og konstanter.
|
|Uddata    : Datafiler med alpha(x) og H(x).
|
|Funktion  : Programmet er inddelt i tre dele. I første del be-
|            regnes alle konstanter, der er ens for hvert nyt gæt
|            på alpha_s. Det er konstanterne: a_2, a_3, b_1 og
|            P_R.
|
|            Dernæst findes alpha_s. Konstanterne q, h_0, h_1,
|            c_0 og c_1 beregnes, hvorefter integralerne beskrev-
|            et i kapitel 3 på side 50 bestemmes.
|
|            Det sidste trin i programmet består i at generere
|            data til at plote henholdsvis alpha(x) og H(x). Til
|            dette formål benyttes dels integralerne på side 50
|            og dels relationerne på side 50-51.
|
|Kalder    : Programmets enkelte dele aktiveres fra hovedprogram-
|            met. Dvs at alle funktioner og procedurer enten kal-
|            des direkte eller fra underfunktioner og procedurer.
+-----+
begin

```

```

{-----+
|Omgivelser: For at beregne de her beskrevne konstanter, skal
|            tidligere globalt erklærede konstanter benyttes:
|            a_1, alpha_1, gamma_1, eta_1, eta_2, u_1 og chi.
|
|Funktion   : Her beregnes først konstanterne a_3, a_2 og b_1
|            som bruges i funktionen P(alpha) For nærmere for-
|            klaring se kapitel 4 side 53-54.
|
|            Dernæst beregnes konstanten P_R, der indgår i
|            randbetingelserne, se kapitel 2 side 36.
|
|            De næste fire konstanter and_alpha1, and_gamma1,
|            q_eta_chi_alpha og q_varfaktor er hjælpekonstan-
|            ter, der senere bruges, når konstanterne q, h_0,
|            h_1, c_0 og c_1 beregnes.
|
|            Endelig defineres variablerne min, max og fundet.
|            min og max bruges til at angive grænserne for

```

intervallet, hvori  $\alpha_s$  skal søges. Da vi søger et tværsnitsareal i intervallet fra 0 til 1, er disse variable initieret til værdierne 0 og 1. Fundet er en boolsk variabel, der angiver, hvornår  $\alpha_s$  er beregnet tilstrækkeligt præcist.

Variablen er initieret til false og sættes senere, når  $\alpha_s$  er fundet, til true.

```

-----}
|Omgivelser: Ovenstående beregnede konstanter og de globalt
|erklærede konstanter eta_1, eta_2, chi, sigma og
|p_e.
|Funktion : Den generelle funktion er en løkke, der gentages,
|indtil alpha_s er beregnet tilstrækkeligt præcist.
|Dette er implementeret ved, at løkken bliver ud-
|ført, så længe variabelen fundet er false.
|
|Løkken udfører følgende:
|
|- Det nye alpha_s gættes ved bisektion, halvvejs
|inde i det af min og max definerede interval.
|- Konstanterne q, h_0, h_1, c_0 og c_1 beregnes.
|Undervejs beregnes en hjælpekonstant, for at
|reducere antallet af beregninger. Hjælpekonstan-
|ten betegnes and_q.
|- For at beregne de tre integraler, som er beskrevet
|i algoritmen på side 50, skal vi kunne finde
|alpha_min. Dette gøres som bekendt ved at be-
|regne nulpunkter i et 4. gradspolynomium. Her
|beregnes koefficienterne a, b, c og d til poly-
|nomiet, således at de ikke skal beregnes for
|hver eneste iteration under nulpunktssøgningen.
|- Fra kapitel 3 ved vi, at alpha_min < alpha_s.
|Vi søger derfor nulpunktet i intervallet fra 0
|til sqrt(alpha_s). Vi betragter kvadratet på
|alpha_s, da den omtalte 4. gradsligning er en
|funktion af x = sqrt(alpha_s). Herved får vi
|defineret henholdsvis et start- og et slutpunkt.
|- Nulpunktet findes herefter ved at kalde procedu-
|re nulpunkt, med det fundne start og slutpunkt.
|- Efter alle disse beregninger er vi nu i stand
|til at beregne de tre integraler, som beskrevet
|i tidligere nævnte algoritme. Det gøres ved at
|kalde integrationsproceduren romberg med de tre
|funktioner, der skal beregnes. Vi har i program-
|met valgt at sætte en prik for hver gang løkken

```

gennemløbes. Herved kan brugeren se, at der stadig regnes.

- Resultatet af det tredje integral, skal på grund af det Taylorudviklede led, som adderes og subtraheres, summeres med udtrykket:

$$2 * 1/f_0'(\alpha_{\min}) * \sqrt{\alpha_s - \alpha_{\min}}$$

idet funktionen anddiff1 kaldes med argumentet  $\alpha_{\min}$ .

- Efter at integralerne er beregnet, findes resultatet, ved at benytte formlen, som beskrevet i kapitel 4 side 61:

$$\text{res1} + \text{res2} + 2 * \text{res3} - \text{lambda} = \text{resultat}$$

idet  $\text{res1}$ ,  $\text{res2}$  og  $\text{res3}$  er resultaterne af de tre integraler.  $\text{lambda}$  er en globalt defineret konstant.

- Hvis en af integrationerne ikke lykkedes, antages det, at  $\alpha_s$  var for høj og derfor sættes  $\text{max} := \alpha_s$

ellers

- Sammenlignes resultatet med 0, er det større end 0,

var  $\alpha_s$  for lav og  $\text{min} := \alpha_s$

mindre end 0,

var  $\alpha_s$  for høj og  $\text{max} := \alpha_s$

indenfor tolerancen

var  $\alpha_s$  tilstrækkelig præcis og variabelen sættes til true.

Vi afslutter hermed løkken!

Kalder : For at kunne beregne konstanterne  $c_0$  og  $c_1$  kaldes  $\text{integral\_P}$  i punktet  $\alpha_s$ .

```
while not fundet do
begin
  alpha_s beregnes;
  q beregnes;
  and_q beregnes;

  h_0 beregnes;
  h_1 beregnes;

  c_0 beregnes;
  c_1 beregnes;
```



```

{ Beregning af konstanterne a, b, c og d til 4. gradsligningen.}

{ Hvorfra - startpkt - og
  hvortil - slutpkt - skal vi finde minimumspunkter }

{ Nulpunktet findes }

{ De tre integraler beregnes }

{ Resultatet beregnes }

{ Det nye interval, hvori alpha_s skal ligge, defineres }

end;

```

```

-----}
|Funktion : Hvis programmet når hertil, er der fundet en værdi|
|for alpha_s, som udskrives på skærmen. |

```

```

|
| Herfra nås det endelige resultat, ved for et pas- |
| sende antal x-værdier at beregne x(alpha) og H(x). |
| Dette gøres efter de formler, som er beskrevet på |
| henholdsvis side 50 og på side 51 i kapitel 3. |
| Selve beregningen foregår ved, at vi på forhånd |
| har bestemt at beregne "skridt" antal skridt i |
| hver af de tre delformler. Dette har vi gjort for |
| nemhedens skyld, men det er ikke helt korrekt, |
| idet vi burde have lavet antallet af skridt rela- |
| tivt til størrelsen af de enkelte intervaller. |

```

```

|
| For at kunne plote graferne for H(x) og for tvær- |
| snitsarealet som funktion af stedet, gemmer vi |
| resultatet af ovenstående integralberegninger på |
| fil, ved at gemme resultatet for x og dernæst de |
| tilhørende værdier for alpha og H. |

```

```

|
| Til sidst i programmet beregnes det relative tryk- |
| og energitab ved: |

```

$$\text{reltab} := 1 - \frac{h_0 (1 - \chi) q^2}{h_1 2 \alpha_1^2 h_0}$$

```

|
| Dette informeres brugeren om, ved at værdien af |
| reltab skrives på skærmen. |

```

For at have al informationen om de vigtigste data  
udskrives ligeledes værdierne for `alpha_s`, `x_s`,  
`alpha_min` og `x_min`.

Når programmet er kørt færdigt, er alle data be-  
regnet og ligger gemt på fil. Der kan herefter  
tegnes grafer ved f.eks at benytte programmet  
`gnuplot`, der kræver, at input dataene er gemt på  
denne form.

Kalder : Integrationsproceduren romberg og datagenererings-  
proceduren `beregn_h`.



# Appendiks B

## Selve programmet

```
PROGRAM RUPNOK;
```

```
CONST
```

```
{ Konstanter til konstberegninger }
```

```
chi      = 0.2;  
eta_1    = 50;  
eta_2    = 0;  
alpha1   = 1.0;  
u_1      = 0.1;  
sigma    = 2;  
p_e      = 0.14;  
gamma1   = 0.3;  
lambda   = 20;  
k        = 100;  
skridt   = 100;  
skridt_p1 = 101;           {skridt + 1}  
a_1      = 12.410926;  
tolerance = 1.e-9;
```

```
{ Konstanter til integralberegning }
```

```
nmax = 75;
```

```
TYPE
```

```
resarray = ARRAY [1..skridt_p1, 0..1] of double;  
intarray = ARRAY [1..nmax] of double;  
fx       = FUNCTION (c_n, h_n, ki, x: double): double;
```

VAR

{ Variable til at bestemme konstanter }

alpha\_s,  
min, max,

q, and\_q,

h\_0, h\_1,  
c\_1, c\_0,

a\_3, a\_2, b\_1,

and\_alpha1,  
and\_gamma1,  
P\_R,  
q\_eta\_chi\_alpha,  
q\_varfaktor : double;

{ Variable til at finde alpha\_s }

lav, hoej : double;  
fundet,  
mrk1, mrk2, mrk3 : boolean;  
svar : char;

{ Variable til at finde nulpunkt - alpha\_min }

a, b, c, d,  
start\_pkt,  
slut\_pkt,  
nulpkt : double;

{ Variable til integration }

alpha\_min,  
x\_min,  
resultat,  
res1, res2, res3 : double;  
antal\_pkt : integer;

{ Variable til at beregne det endelige resultat }

alpha,  
x\_s,

```
reltab,
result1,
result2,
result3,
result4,
result5,
result6,
skridtlng      : double;

i              : integer;

alpha_fil, h_fil : text;

fejlmrk       : boolean;

alpha_tabel    : resarray;

{***** PROCEDURER TIL GENERERING AF TEST DATAFILER *****)}

PROCEDURE gemfunkt(funktion: fx; c_n, h_n, ki, fra, til: double;
                  antal_skridt: integer);

VAR
  i          : integer;
  delta, x, fkt : double;
  filnavn    : string;
  dest       : text;

begin
  write('Indtast filnavn : ');
  readln(filnavn);
  Assign(dest, filnavn);
  Rewrite(dest);

  delta := (til - fra) / antal_skridt;
  x     := fra;

  for i := 1 to antal_skridt do
  begin
    fkt := funktion(c_n, h_n, ki, x);
    write(dest, x:12:8);
    write(dest, ' ');
    writeln(dest, fkt:12:8);
    x := x + delta;
  end {** for **};

  close(dest);
end {* gemfunkt *};
```

```
PROCEDURE gemfunknp(a, b, c, d: double; antal_skridt: integer);
```

```
VAR
```

```
  i          : integer;  
  delta, x, f : double;  
  dest       : text;
```

```
begin
```

```
  Assign(dest, 'funcdata.tis');  
  Rewrite(dest);
```

```
  delta := 1 / antal_skridt;  
  x     := 0;
```

```
  for i := 1 to antal_skridt do
```

```
  begin
```

```
    f := ((a*sqr(x) + b)*x + c)*x + d;  
    write(dest, x:12:8);  
    write(dest, ' ');  
    writeln(dest, f:12:8);  
    x := x + delta;  
  end {** for **};
```

```
  close(dest);
```

```
end {* gemfunknp *};
```

```
{***** GENERELLE PROCEDURER, SOM BENYTTES I HELE PROGRAMMET *****}
```

```
FUNCTION integral_P(alpha: double): double;
```

```
VAR
```

```
  res : double;
```

```
begin
```

```
  if alpha <= 0.95
```

```
    then res := -0.04875 + 0.05*a_2 - a_3 / a_1  
              + a_3 / a_1*exp(-0.05*a_1)  
              + (b_1 / k)*0.95 - 2 / sqrt(0.95) / k  
              - (b_1 / k)*alpha + 2 / sqrt(alpha) / k  
    else res := 0.5*sqr(alpha) - 0.5 - a_2*alpha + a_2  
              - (a_3 / a_1)*exp(-a_1*(alpha - 0.95))  
              + (a_3 / a_1)*exp(-a_1*0.05);
```

```
  integral_P := res;
```

```
end {* integral_P *};
```

```
PROCEDURE fejl(fejltekst: string);
begin
  writeln(fejltekst);
end (* fejl *);
```

```
{***** FUNKTIONER OG PROCEDURER TIL AT FINDE NULPUNKT *****}
```

```
FUNCTION nulpunkt(start_pkt, slut_pkt, tolerance: double): double;
```

```
VAR
```

```
  abs_min,
  alpha_mindst,
  x,
  temp,
  fl, fh, dfl, dfh,
  df, fkt          : double;
  samme_fortegn    : boolean;
```

```
PROCEDURE funk(x: double; VAR f, df: double);
```

```
begin
  f := ((a*sqr(x) + b)*x + c)*x + d;
  df := (4*a*sqr(x) + 2*b)*x + c;
end (** funk **);
```

```
FUNCTION rdnewt(x1, x2: double): double;
```

```
CONST
```

```
  max_it = 100;
```

```
VAR
```

```
  df, dx, f, x_n : double;
  i               : integer;
  ok              : boolean;
```

```
begin
```

```
  x_n := 0.5*(x1 + x2);
  i   := 0;
  ok  := false;
  while (not ok) and (i < max_it) do
  begin
    funk(x_n, f, df);
    if abs(df) > tolerance then
    begin
      dx := f / df;
      x_n := x_n - dx;
```



```
    if ((x1 - x_n)*(x_n - x2) < 0.0) then
        fejl('pause in RDNEWT - jumped out of brackets');
    if abs(dx) < tolerance then ok := true;
end {**** abs(df) > tolerance ****} else

    if abs(f) > tolerance then
begin
    fejl('pause in RDNEWT - df = 0 ');
    ok := true;
end {**** abs(f) > tolerance ****};

    i := i + 1;
end {*** not ok og i < max_it ***};

    if ok and (abs(f) < tolerance) then rdnewt := x_n else
begin
    fejl('pause in RDNEWT - der er ikke noget nulpkt');
    rdnewt := x_n;
end {*** ok ***};
end {** rdnewt **};

FUNCTION rdsikker(x1, x2, fl, fh: double): double;

CONST
    max_it = 20;

VAR
    f, df, dx, dxold      : double;
    temp, xh, xl, x_n     : double;
    i                      : integer;
    ok                     : boolean;

begin
    if fl < 0 then
begin
    xl := x1;
    xh := x2;
end {*** fl < 0 ***} else
begin
    xh := x1;
    xl := x2;

    temp := fl;
    fl := fh;
    fh := temp;
end {*** fl >= 0 ***};
```

```
x_n := 0.5*(x1 + x2);
dxold := abs(x2 - x1);
dx := dxold;
i := 0;
ok := false;
funk(x_n,f,df);

while (not ok) and (i < max_it) do
begin
  if((((x_n - xh)*df - f)*((x_n - xl)*df - f) >= 0.0)
  or (abs(2.0*f) > abs(dxold*df))) then
  begin
    dxold := dx;
    dx := 0.5*(xh - xl);
    x_n := xl + dx;
    if (xl = x_n) then ok := true;
  end {**** bisection ****} else
  begin
    dxold := dx;
    dx := f / df;
    temp := x_n;
    x_n := x_n - dx;
    if (temp = x_n) then ok := true;
  end {**** Newton Raphson ****};

  if (abs(dx) < tolerance) then ok := true else
  begin
    funk(x_n,f,df);

    if (f < 0.0) then
    begin
      xl := x_n;
      fl := f;
    end {***** f < 0 *****} else
    begin
      xh := x_n;
      fh := f;
    end {***** f >= 0 *****};

    i := i + 1;
    end {**** abs(dx) < tolerance ****};
  end {*** not ok og i < max_it ***};

  if ok then rdsikker := x_n else
  begin
    fejl('pause in RDSIKKER - max number of iterations exceeded');
    rdsikker := x_n;
  end {*** not ok ***};
end {** rdsikker **};
```

```
begin
  funk(start_pkt, fl, dfl);
  funk(slut_pkt, fh, dfh);

  abs_min      := maxint;
  alpha_mindst := maxint;
  x            := start_pkt;

  if fl*fh < 0 then
    begin
      nulpunkt := rdsikker(start_pkt, slut_pkt, fl, fh);
    end {** fl*fh < 0 **} else
    begin
      samme_fortegn := true;

      while samme_fortegn and (x < slut_pkt) do
        begin
          x := x + 1 / 50;
          funk(x, fkt, df);

          if fkt*fl < 0 then
            begin
              samme_fortegn := false;
              start_pkt     := x;
              nulpunkt := rdsikker(start_pkt, slut_pkt, fl, fh);
            end {*** fkt*fl < 0 ***};

            if abs_min > abs(fkt) then
              begin
                abs_min      := abs(fkt);
                alpha_mindst := x;
              end {*** abs_min > abs_fkt ***};
            end {** samme_fortegn og x < slut_pkt **};

            if x >= slut_pkt then
              nulpunkt := rdnewt(alpha_mindst, slut_pkt);
            end {** fl*fh >= 0 **};
          end {* nulpunkt *};

          {***** FUNKTIONER TIL INTEGRATION *****}

          { Funktion der beregner 1 / sqrt(f_0'(alpha)) }

          FUNCTION anddiff1(alpha: double): double;

          VAR
            g_0, dg_0, P, broek : double;
```

```

begin
  if alpha <= 0.95 then
    P := - b_1 / k - 1 / alpha / sqrt(alpha) / k   else
    P := alpha - a_2 + a_3*exp(-a_1*(alpha - 0.95));

    g_0 := c_0 + 0.5*and_q / alpha - (p_e - h_0)*alpha -
          integral_P(alpha);
    dg_0 := - 0.5*and_q / sqrt(alpha) - (p_e - h_0) - P;

    broek := - sqrt(g_0)*g_0 / dg_0 / 2;
    if broek > 0 then
      anddiff1 := sqrt( broek ) / sigma / 4   else
      fejl('pause in ANDLDIFF1 leddet -g_0^3 / (2*dg_0) er nul');
    end (* anddiff1 *);

{ Funktion der beregner 1 / sqrt(f_0) }

FUNCTION funk1 (c_n, h_n, ki, alpha: double): double;

VAR
  g_n, f_n   : double;
  i          : integer;

begin
  g_n := c_n + 0.5*ki*and_q / alpha - (p_e - h_n)*alpha -
        integral_P(alpha);
  f_n := 4*(4*sqrt(sigma) / sqrt(g_n) - 1);

  if f_n > 0 then funk1 := 1 / sqrt(f_n)
    else funk1 := 0;
end (* funk1 *);

{ Funktion der beregner
  1 / sqrt(f_0) -
  1 / sqrt(f_0'(alpha_min)) 1 / sqrt(alpha - alpha_min)
}

FUNCTION funk2 (c_n, h_n, ki, alpha: double): double;

VAR
  part1, part2 : double;

begin
  if abs(alpha - alpha_min) < tolerance then funk2 := 0 else

```

```
begin
  part1 := funk1(c_n, h_n, ki, alpha);
  part2 := anddiff1(alpha_min);

  funk2 := part1 - part2 / sqrt(alpha - alpha_min);
  end (** |alpha - alpha_min| < tolerance **);
end (* funk2 *);

{ De næste procedurer bruges til integration }

PROCEDURE polint(tab1, tab2: intarray; n: integer;
                VAR res, rekurs_dif: double);

VAR
  k, i                : integer;
  t1, t2, t3, nv     : double;
  rekurs_sum1, rekurs_sum2 : intarray;

begin
  for i := 1 to n do
    begin
      rekurs_sum1[i] := tab2[i];
      rekurs_sum2[i] := tab2[i];
    end (** for **);

    res := tab2[n];

    for k := 1 to n - 1 do
      begin
        for i := 1 to n - k do
          begin
            t1 := tab1[i];
            t2 := tab1[i + k];
            t3 := rekurs_sum1[i + 1] - rekurs_sum2[i];
            nv  := t1 - t2;

            if (nv = 0.0) then fejl('pause in routine POLINT');
            nv := t3 / nv;
            rekurs_sum2[i] := t2*nv;
            rekurs_sum1[i] := t1*nv;
          end (** for i **);

          rekurs_dif := rekurs_sum2[n - k];
          res := res + rekurs_dif;
        end (** for k **);
      end (* polint *);
```

```

PROCEDURE trapez(funktion: fx; c_n, h_n, ki, a, b: double;
                VAR trap_sum: double; ite_nr: integer);

VAR
  j                : integer;
  x, temp,
  sum, int_lgd     : double;

begin
  if (ite_nr = 1) then
    begin
      trap_sum := 0.5*(b - a)*
                (funktion(c_n, h_n, ki, a) + funktion(c_n, h_n, ki, b));
      antal_pkt := 1;
    end {** ite_nr = 1 **} else
    begin
      temp := antal_pkt;

      int_lgd := (b - a) / temp;
      x := a + 0.5*int_lgd;
      sum := 0.0;

      for j := 1 to antal_pkt do
        begin
          sum := sum + funktion(c_n, h_n, ki, x);
          x := x + int_lgd;
        end {*** for ***};
        trap_sum := 0.5*(trap_sum + (b - a)*sum / temp);
        antal_pkt := 2*antal_pkt;
      end {** it_nr > 0 **};
    end {* trapez *};

```

```

PROCEDURE romberg(funktion: fx; c_n, h_n, ki, a, b: double;
                 VAR fejlmrk: boolean;
                 VAR res: double);

```

```

CONST
  eps      = 1.0e-5;
  max_it   = 15;
  max_it1  = 16;   { jmax + 1 }
  k        = 5;

```

```

VAR
  i, j                : integer;
  res_dif             : double;
  int_lgd, trap_sum  : ARRAY[1..max_it1] of double;
  pol1, pol2         : intarray;
  ok                 : boolean;

```

```
begin
  fejlmrk := false;
  int_lgd[1] := 1.0;
  j := 0;
  ok := false;

  while (not ok) and (j < max_it) do
    begin
      j := j + 1;

      trapez(funktion, c_n, h_n, ki, a, b, trap_sum[j], j);

      if (j >= k) then
        begin
          for i := 1 to k do
            begin
              pol1[i] := int_lgd[j - k + i];
              pol2[i] := trap_sum[j - k + i];
            end {**** for ****};
            polint(pol1, pol2, k, res, res_dif);
            if (abs(res_dif) < eps*abs(res)) then ok := true;
          end {*** j >= k ***};

          if not ok then
            begin
              trap_sum[j + 1] := trap_sum[j];
              int_lgd[j + 1] := 0.25*int_lgd[j];
            end {*** not ok ***};
          end {** not ok og j < max_it **};

          if not ok then
            begin
              fejl('pause in ROMBERG - too many steps');
              fejlmrk := true;
            end {** not ok **};
          end {* romberg *};

          {***** PROCEDURE TIL AT GENERERE DATAFIL MED RESULTAT *****}

          PROCEDURE beregn_h(tabel: resarray; VAR fil: text);

          VAR
            i : integer;
            res : double;

          begin
            for i := 1 to skridt_p1 do
```

```

begin
  if (tabel[i,0] <= x_s) then
    begin
      write(fil, tabel[i,0]:12:8);
      write(fil, ' ');
      writeln(fil, h_0:12:8);
    end {*** tabel[i,0] <= x_s ***} else
    begin
      res := h_1 + 0.5*(1 - chi)*and_q / (tabel[i,1]*tabel[i,1]);

      write(fil, tabel[i,0]:12:8);
      write(fil, ' ');
      writeln(fil, res:12:8);
    end {*** tabel[i,0] > x_s ***};
  end {** for **};

  { Beregning af det relative tryk- og energitab }

end {* beregn_h *};

{***** HOVEDPROGRAM *****}

begin

  a_3 := ( 1 - 1.5 / sqrt(0.95) / sqrt(0.95) ) / k / a_1;
  a_2 := 1 + a_3*exp(-0.05*a_1);
  b_1 := k*( a_2 - a_3 - 0.95 ) - 1 / 0.95 / sqrt(0.95);

  and_alpha1 := sqrt(alpha1);
  and_gamma1 := sqrt(gamma1);
  P_R := (0.5 + (eta_1 + eta_2)*and_alpha1 )*sqrt(u_1);
  q_eta_chi_alpha := (eta_1 + eta_2) + 0.5*chi / and_alpha1;
  q_varfaktor := 0.5*(1 - chi);

  min := 0;
  max := 1;

  fundet := false;

  while not fundet do
    begin
      alpha_s := (min + max) / 2;
      q := sqrt(P_R /
        (q_varfaktor / sqrt(alpha_s) + q_eta_chi_alpha));
      and_q := sqrt(q);

      h_0 := P_R - eta_1*and_q;
      h_1 := 0.5*chi*and_q / and_alpha1 + eta_2*and_q;
    end
  end
end

```



```

c_0    := -0.5*and_q / alpha_s + (p_e - h_0)*alpha_s +
          integral_P(alpha_s) +
          2*sigma / sqrt(1 + 0.25*and_gamma1*sqr(alpha_s));

c_1    := -0.5*chi*and_q / alpha_s + (p_e - h_1)*alpha_s +
          integral_P(alpha_s) +
          2*sigma / sqrt(1 + 0.25*and_gamma1*sqr(alpha_s) );

{ Beregning af konstanterne a, b, c og d til 4. gradsligning }

a := p_e - h_0 - b_1 / k;
b := 2*sigma - c_0 - 0.04875 + 0.05*a_2 - a_3 / a_1 +
     a_3 / a_1*exp(-0.05*a_1) + 0.95*b_1 / k -
     2 / sqrt(0.95) / k;
c := 2 / k;
d := - 0.5*and_q;

{ Hvorfra - startpkt - og
  hvortil - slutpkt - skal vi finde minimumspunkter }

start_pkt := 0;
slut_pkt  := sqrt(alpha_s);

{ Nulpunktet findes }

nulpkt    := nulpunkt(start_pkt, slut_pkt, tolerance);
alpha_min := sqr(nulpkt);

{ De tre integraler beregnes }

write(' ');
romberg(funk1, c_0, h_0, 1 , alpha_s,  alpha1,  mrk1, res1);
romberg(funk1, c_1, h_1, chi, alpha_s,  alpha1,  mrk2, res2);
romberg(funk2, c_0, h_0, 1 , alpha_min, alpha_s, mrk3, res3);

res3 := res3 + 2*anddiff1(alpha_min)*sqrt(alpha_s - alpha_min);

{ Resultatet beregnes }

resultat := res1 + res2 + 2*res3 - lambda;

```

```

{ Det nye interval hvori alpha_s skal ligge defineres }

if (mrk1 = true) or
   (mrk2 = true) or
   (mrk3 = true)           then   min := alpha_s else
if abs(resultat) < tolerance then fundet := true   else
if resultat < 0           then   max := alpha_s else
if resultat > 0           then   min := alpha_s;

end {** not fundet **};

x_s := lambda - res2;
writeln;
writeln('alpha_s er nu   : ', alpha_s);

Assign(alpha_fil, 'xxx');
Assign(h_fil,     'hxxx');
Rewrite(alpha_fil);
Rewrite(h_fil);

skridtling := (alpha1 - alpha_min) / skridt;
alpha      := alpha_min;
for i := 1 to skridt + 1 do
begin
  romberg(funk1, c_0, h_0, 1, alpha, alpha1, fejlmrk, result1);
  resultat := result1;
  write(alpha_fil, resultat:12:8);
  write(alpha_fil, ' ');
  writeln(alpha_fil, alpha:12:8);

  alpha_tabel[i,0] := resultat;
  alpha_tabel[i,1] := alpha;

  alpha := alpha + skridtling;
end {** for **};

writeln(alpha_fil);

bereg_n(alpha_tabel, h_fil);
writeln(h_fil);

skridtling := (alpha1 - alpha_s) / skridt;
alpha      := alpha_s;
for i := 1 to skridt + 1 do
begin
  romberg(funk1, c_1, h_1, chi, alpha, alpha1, fejlmrk, result2);
  resultat := lambda - result2;
  write(alpha_fil, resultat:12:8);
  write(alpha_fil, ' ');

```

```
writeln(alpha_fil, alpha:12:8);

alpha_tabel[i,0] := resultat;
alpha_tabel[i,1] := alpha;

alpha := alpha + skridtlng;
end (** for **);

writeln(alpha_fil);

bereg_n_h(alpha_tabel, h_fil);
writeln(h_fil);

skridtlng := (alpha_s - alpha_min) / skridt;
alpha     := alpha_min;

romberg(funk1, c_0, h_0, 1, alpha, alpha1, fejlmrk, result3);
resultat := result3;
x_min    := result3;
write(alpha_fil, resultat:12:8);
write(alpha_fil, ' ');
writeln(alpha_fil, alpha:12:8);

alpha_tabel[1,0] := resultat;
alpha_tabel[1,1] := alpha;

alpha := alpha + skridtlng;

for i := 2 to skridt + 1 do
begin
  romberg(funk2, c_0, h_0, 1, alpha_min, alpha_s, fejlmrk, result4);
  romberg(funk1, c_0, h_0, 1, alpha_s, alpha1, fejlmrk, result5);
  result4 := result4 +
    2*anddiff1(alpha_min)*sqrt(alpha_s - alpha_min);

  romberg(funk2, c_0, h_0, 1, alpha_min, alpha, fejlmrk, result6);
  result6 := result6 +
    2*anddiff1(alpha_min)*sqrt(alpha - alpha_min);

  resultat := result4 + result5 + result6;

  write(alpha_fil, resultat:12:8);
  write(alpha_fil, ' ');
  writeln(alpha_fil, alpha:12:8);

  alpha_tabel[i,0] := resultat;
  alpha_tabel[i,1] := alpha;
```

```
    alpha := alpha + skridtlng;
end {** for **};

bereg_n_h(alpha_tabel, h_fil);

close(alpha_fil);
close(h_fil);

reltab := 1 - (h_1 / h_0) -
           ( ( 1 - chi ) * q*q ) / ( 2 * alpha1 * alpha1 * h_0 );

writeln;
write('Det relative tab på h er ');
writeln(reltab:10:8);
writeln;

write('alpha_s er ');
writeln(alpha_s:10:8);
writeln;

write('x_s er ');
writeln(x_s:10:8);
writeln;

write('alpha_min er ');
writeln(alpha_min:10:8);
writeln;

write('x_min er ');
writeln(x_min:10:8);
readln;

end {* RUPNOK *}.
```



# Litteratur

- [Rubinow] I. S. Rubinow,  
Introduction to mathematical biology, kapitel 4,  
John Wiley, New York 1975
- [Cancelli/Pedley] C. Cancelli og T.J. Pedley,  
A separated-flow model for collapsible-tube oscillations,  
J.Fluid Mech. vol. 157, pp 375-404, Great Britain 1985
- [Flaherty] Joseph E. Flaherty et al.,  
Post buckling behavior of elastic tubes and rings with  
opposite sides in contact,  
Siam Journal on applied mathematics, vol. 23, no. 4  
,Dec. 1972
- [Fabricius] Fr. Fabricius-Bjerre,  
Lærebog i geometri II,  
femte udgave, 2.oplag, Gjellerup 1970
- [Mortensen] Svend Otto Mortensen,  
Cross-sectional areas in the normal male urethra during  
voiding,  
Mortensens forlag 1989
- [Elbrønd] Helge Elbrønd Jensen,  
Matematisk analyse, bind 3, 2.udgave,  
Matematisk institut, DTH 1976
- [Smith] G. D. Smith,  
Numerical solution of partial differential equations: Fi-  
nite difference methods,  
Third edition, Clarendon press, Oxford 1985
- [Recipes] William H. Press et al.,  
Numerical recipes in Pascal-The art of scientific com-  
puting,  
Cambridge University Press 1986, 1989

- [Dahlquist] Germund Dahlquist, Åke Björck,  
Numerical methods, Prentice-Hall 1974
- [Stoer] J. Stoer og R. Bulirsch,  
Introduction to numerical analysis,  
Springer-Verlag 1980
- [Ralston] A. Ralston og P. Rabinowitz,  
A first course in numerical analysis,  
Second edition, McGraw-Hill 1978
- [Alonso/Finn] M. Alonso og E.J. Finn,  
Fundamental university physics, vol. 1, Mechanics and  
thermodynamics,  
Second edition, Addison Wesley 1980

# Liste over figurer

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 0.1 | Trykfaldet i det mandlige urinrør under vandladning, kilde: Svend Otto Mortensen, Cross-sectional areas in the normal male urethra during voiding, side 96, 1989 . . . . .   | 3  |
| 1.1 | Kræfterne på en væskepartikel når der kun er strømning i $x$ -aksens retning. . . . .  | 6  |
| 1.2 | Tværsnit af rør med laminar strømning. Hastighedsprofilen er parabelformet. . . . .  | 8  |
| 1.3 | Et elastisk rør med den gennemsnitlige væskehastighed $\bar{u}$ og med en bølgeudbredelse i rørets væg. . . . .  | 10 |
| 2.1 | Et typisk eksperiment med en Starling resistor. . . . .  | 11 |
| 2.2 | De to forskellige funktioner for $P(\alpha)$ , for $k = 100$ . Den nederste graf benyttes i Cancelli og Pedley's model. Det ses, at denne kurve er forskudt lidt nedad i forhold til den oprindelige, hvorimod grafernes form er næsten identiske. . . . . | 15 |
| 2.3 | Et sammenklappet rør med afstanden $y$ mellem de to parallelle sider. . . . .  | 16 |
| 2.4 | Et udsnit af røret med tykkelsen $\Delta x$ . . . . .  | 17 |
| 2.5 | Væskestrømning før og efter separationspunktet $x_s$ . . . . .   | 20 |
| 2.6 | Stationær strømning i rør med varierende tværsnitsareal. . . . .   | 20 |
| 2.7 | De forskellige rørdele samt reservoiret med trykket $P_R$ . . . . .  | 27 |
| 2.8 | Det ydre tryk $p_e$ . . . . .  | 32 |
| 3.1 | Fortegnsvariationer for $\frac{d\alpha}{dx}$ . . . . .   | 47 |
| 5.1 | Ved at forlænge tangenten i det betragtede punkt findes næste approksimation af nulpunktet som liniens skæring med $x$ -aksen. . . . .   | 66 |



|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5.2 | Eksempel på funktion hvor Newton Raphson's formel ikke kan benyttes til nulpunktssøgning. . . . .  | 69  |
| 5.3 | Funktionens definitionsinterval opdeles i $n$ delintervaller. . .  | 73  |
| 5.4 | Midtsummen, $M_2$ , skal beregnes for intervallet $[-\frac{1}{2}h; \frac{1}{2}h]$ .  | 84  |
| 5.5 | Halveringer af intervallængden $h$ . I første skridt beregnes $f_a$ og $f_b$ , mens det i andet skridt kun er nødvendigt at beregne $f_4$ . I tredje skridt beregnes $f_2$ og $f_6$ , endelig beregnes $f_1$ , $f_3$ , $f_5$ og $f_7$ i fjerde skridt. . . . . | 86  |
| 5.6 | Rekursionen beregnes kun i tilfældene $T_{2,0}, T_{2,1}$ og $T_{2,2}$ . . .  | 93  |
| 7.1 | Kilde: Cancelli og Pedley: A separated-flow model for collapsible-tube oscillations, side 392 . . . . .  | 116 |

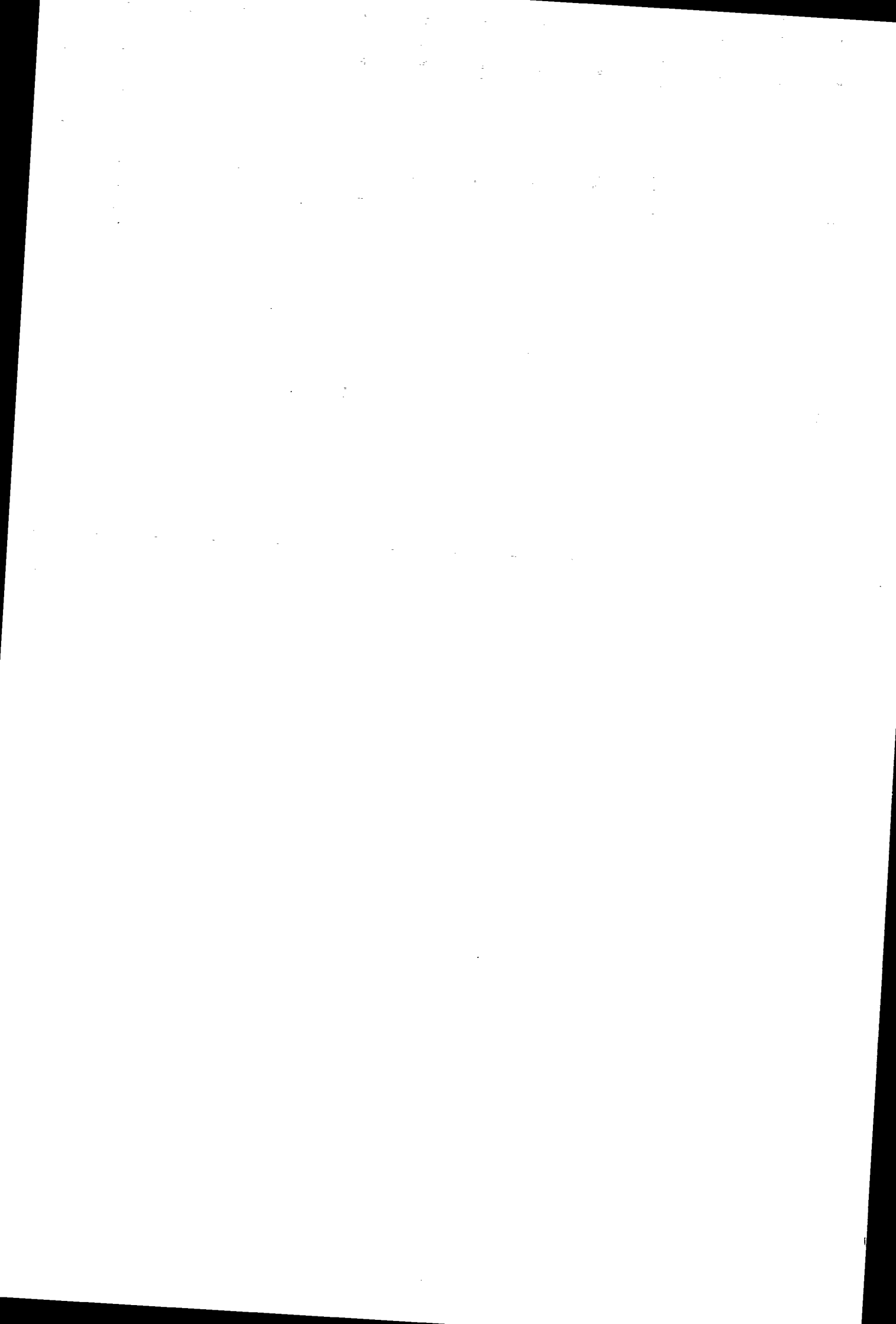
## Liste over algoritmer

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Bestemmelse af $\alpha$ , . . . . .               | 57 |
| 4.2 | Bestemmelse af $\alpha(x)$ . . . . .              | 61 |
| 4.3 | Bestemmelse af $H(x)$ . . . . .                   | 63 |
| 5.1 | nulpunkt . . . . .                                | 69 |
| 5.2 | rdsikker [Recipes, side 290] . . . . .            | 70 |
| 5.3 | rdnewt [Recipes, side 290] . . . . .              | 71 |
| 5.4 | trapez [Recipes, side 125] . . . . .              | 91 |
| 5.5 | ekstrapolation [Recipes, side 92] . . . . .       | 93 |
| 5.6 | romberg integration [Recipes, side 129] . . . . . | 94 |

# Stikordsregister

- $\alpha$ , algoritme til, 61
- $\alpha(x)$ , 39
- $\alpha_{min}$ , algoritme til, 59
- $\alpha_{min}$ , beregning af, 55
- $\alpha_s$ , 43
- $\alpha_s$ , algoritme til, 60
  
- bølgeudbredelse, 10
- begyndelsesbetingelserne, 29, 35, 37
- Bernoullis ligning, 9, 21
- bevægelsesligning, 19, 21, 24–27, 29, 39
- bisektion, 56, 68
  
- $c_0$ , 45, 58
- $c_1$ , 45, 58
- Cancelli og Pedley's model, 11, 12, 39
  
- dimensionsløse parametre, 33
  
- eksistens, 75
- ekstrapolation, 74, 88, 93
- energibevarelse, 5
- energitab, 12, 20, 21, 24
- entydighed, 75
- Euler-Maclaurin summationsformel, 84, 86
- Eulerligningen, 7
  
- fejlvurdering, 83, 84, 86, 92
- friktion, 39
  
- $g_0(\alpha)$ , 46
- $g_1(\alpha)$ , 46
- gennemgangs-betingelser, 40, 42
  
- $H(x)$ , 50, 63
- $h_0$ , 42, 43, 58
- $h_1$ , 42, 43, 58
- hastighedsgradienten, 21
- hydrodynamikkens grundbegreber, 5
  
- impulsbevarelse, 5, 6, 10
- integration, numerisk, 73
- integrationsmetode, lukket, 74
- integrationsmetode, åben, 74
- interpolation, 74, 87
  
- kædereglene, 34
- kontinuitetsligning, 5, 17, 19, 25, 39
- konvergenssegenskaber, 67
- krumning i separationspunktet, 16, 40
- krumningsradius, 14
- kvadratisk konvergens, 68
- kvadratur, 74, 80
  
- Lagrange's formel, 74–76
- $\lambda$ , 47
- laminare strømninger, 8, 9, 27
- longitudinal spænding, 10
  
- massebevarelse, 5, 10, 17
  
- Neville's formel, 74, 76, 92
- Newton Raphson's formel, 59, 65–67
- Newton's 2. lov, 6
- Newton-Cotes formler, 80, 82, 83, 85
- nulpunktssøgning, 65, 69

- numerisk integration, 73  
 $P(\alpha)$ , integralet af, 53  
 parallelsidet strømning, 24  
 $p_c$ , 31  
 $p_{c0}$ , udledning af, 31  
 $p_{c1}$ , udledning af, 32  
 Poiseuilles lov, 8  
  
 $q$ , 39, 42, 43, 58  
  
 $R$ , 26  
 randbetingelser, 35, 40  
 rdnewt, 68, 71  
 rdsikker, 68, 70  
 rekursionsformel til integration,  
     80, 92  
 relative trykfald, 50, 51  
 resultater, 97  
 resultater, saml. med Cancelli og  
     Pedley, 99  
 resultater, variation over  $\chi$ , 109  
 resultater, variation over  $\eta_2$ , 113  
 resultater, variation over  $\gamma_1$ , 106  
 resultater, variation over  $\sigma$ , 111  
 Reynoldstal, 8, 12  
 Romberg integration, 60, 62, 73,  
     74, 83, 86, 93, 94  
  
 separation, 19, 21, 24  
 Simpson's regel, 80  
 spænding, i begyndelsen, 14  
 stationær strømning, 20, 23, 24  
 stationære løsninger, 39  
 strømninger med acceleration, 24  
 subkritisk strømning, 10, 12, 30  
 superkritisk strømning, 10, 12  
 svingninger, 12  
 systemets ligninger, 25  
  
 tilstandsligning, 14, 16, 25, 35, 39  
 transmuralt tryk, 13  
 trapez-sum, 74, 80, 85, 86, 91, 93  
 trykforøgelse, 31  
 trykgenskaben, 24  
  
 trykgradient, 20, 21, 40  
 trykket i kammeret  $p_c$ , 31  
 tværsnitsareal, 20, 39, 49  
  
 udledning af, Newton Raphson's  
     algoritme, 66  
 usammentrykkelige væsker, 5  
  
 væsker, usammentrykkelige, 5  
 væskestrømning, 33  
 væsketransport, 5  
 vandføring, 39  
 viskositet, 6  
 viskositetskonstant, dynamisk, 8  
 viskositetskonstant, kinematisk, 8  
 volumenbevarelse, 5  
  
 $x_s$ , 19, 46



- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projekt rapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss. Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum". Projekt rapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projekt rapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projekt rapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality". Af: Helge Kragh.
- 
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE". a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projekt rapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projekt rapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS". Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DILETTANTISK RELAXATION" - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller". Projekt rapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projekt rapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MØSSBAUEREFFEKTMÅLINGER". Projekt rapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen. Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIRKLING".  
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".  
Fire artikler.  
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".  
ENERGY SERIES NO. 2.  
Af: Bent Sørensen.
- 
- 38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".  
Projekt rapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.  
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.  
Nr. 38 er p.t. udgæet.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".  
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".  
Projekt rapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.  
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".  
ENERGY SERIES NO. 3.  
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".  
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".  
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".  
ENERGY SERIES NO. 4.  
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".  
Projekt rapport af: Niels Thor Nielsen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".  
Projekt rapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BÅRSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".  
ENERGY SERIES NO. 5.  
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".  
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Jørnen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showlki.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".  
Projekt rapport af: Preben Nørregaard.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".  
ENERGY SERIES NO. 6.  
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".  
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".  
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".  
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.  
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi.  
Af: Else Højrup.  
  
Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -  
En undersøgelse af matematisk økologi.  
Projekt rapport af: Troels Lange.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -  
Skjulte variable i kvantemekanikken?  
Projekt rapport af: Tom Juul Andersen.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.  
Nr. 57 er udgæet.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.  
Projekt rapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES NO. 7.  
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.  
Projekt rapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".  
Projekt rapport af: Annette Post Nielsen.  
Vejledere: Jens Højrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi 2. rev. udgave.  
Af: Else Højrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES No. 8.  
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".  
Af: Bernhelm Booss og Jens Højrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".  
Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Håbekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".  
Projekt rapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEAR PROGRAMMERING?".  
Projekt rapport af: Lone Billmann og Lars Boye.  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.  
Projekt rapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSENINGER I FYSIK"  
- en test i l.g med kommentarer.  
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".  
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glorup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"  
- et problem og en udfordring for skolen?  
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFVLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"  
- økologisk contra traditionelt.  
ENERGY SERIES NO. 9  
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.  
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.  
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"  
- Case: Lineær programmering.  
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.  
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et hørings svar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.  
ENERGY SERIES No. 10  
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"  
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.  
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITIERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".  
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".  
Projektrapport af: Henrik Ooster, Mikael Wernberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.  
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUMATERIALE TIL MATEMATIK B".  
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig ledningsevne i amorft germanium".  
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".  
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.  
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1  
Af: Bent Sørensen  
nr. 83 er p.t. udgæet
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".  
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".  
Specialrapport af: Per Hødegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2  
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".  
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".  
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 
- 90/84 "ENERGI I L.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".  
Af: Albert Chr. Paulsen.
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
1. Lærervejledning  
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
2. Materiale  
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".  
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3  
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEOFORSYNING".  
Af: Bjarne Lillethorup.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDEREN".  
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".  
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSISTEMETS OPBYGNING".  
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERIURBATIVE FORM".  
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØRS FODEROPTAGELSE OG - OMSETNING".  
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.  
Vejleder: Klaus Grünbaum.



- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".  
 Projekt rapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.  
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".  
 Af: Jens Jøger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS TRANSITION".  
 Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".  
 Af: Jeppe C. Dyre.  
 Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".  
 Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".  
 - flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.  
 Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
 Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -  
 Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.  
 Projekt rapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.  
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".  
 Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".  
 Projekt rapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".  
 Projekt rapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.  
 Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".  
 Af: Bernhard Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENTABELLER".  
 Projekt rapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.  
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".  
 Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING".  
 Af: Jacob Mørch Pedersen.  
 Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFELDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".  
 Af: Peder Voetmann Christiansen
- 120/86 "ET ANVAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".  
 Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".  
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".  
 Fysiklærerforeningen, IMFUA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".  
 Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY,  $\theta$  - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".  
 Projekt rapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".  
 Projekt rapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen  
 Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".  
 Projekt rapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅRYB" - om ikke-standard analyse.  
 Projekt rapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintonp.  
 Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"  
 Lecture Notes 1983 (1986)  
 Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"  
 Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.  
 Projekt rapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.  
 Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNEELSE"  
 Projekt rapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.  
 Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15."  
 Af: Bent Sørensen.
- 
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"  
 Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"  
 MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen  
 Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"  
 Projekt rapport af Frank Colding Ludvigsen  
 Vejledere: Historie: Ib Thiersen  
 Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling  
 Af: Jeppe Dyre  
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMPEN".  
 Af: Iben Maj Christiansen  
 Vejleder: Mogens Niss.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."  
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"  
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek  
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"  
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"  
Projekt rapport af Finn C. Physant  
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og  
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach  
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"  
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987  
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"  
- en ny frekvensbaseret målemetode.  
Fysikspeciale af Jan Vedde  
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"  
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"  
af: Peter Colding-Jørgensen DLH  
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"  
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"  
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"  
Matematikprojekt af:  
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal  
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek  
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITERE OG CIVILE KREFTER"  
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie  
Historiespeciale  
Af: Hans Hedal  
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"  
By: Jeppe Dyre
- 155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"  
by: Michael Pedersen
- 156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"  
by: Jeppe C. Dyre
- 157/88 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."  
by: Michael Pedersen
- 158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"  
by: Jeppe Dyre
- 159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"  
by: Bent Sørensen
- 160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"  
by: Jens Gravesen
- 161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"  
by: Michael Pedersen
- 162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"  
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"  
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/88 "Vurdering af matematisk teknologi  
Technology Assessment  
Technikfolgenabschätzung"  
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med  
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"  
by: Jens Gravesen

- 166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"  
Af: Jørgen Larsen
- 167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"  
Af: Jørgen Larsen
- 167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"  
Af: Jørgen Larsen
- 168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"  
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.  
Fysikspeciale af:  
Birger Lundgren  
Vejleder: Jens Martin Knudsen  
Fys.Lab./HCB
- 169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."  
Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.  
Introduktion og oversættelse:  
Peder Voetmann Christiansen
- 170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"  
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988
- 171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"  
af: Johnny Tom Ottesen
- 172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"  
Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.  
Fysikprojekt af:  
Erik Lund og Kurt Jensen  
Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen
- 
- 173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATIONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"  
af: Michael Pedersen
- 176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"  
af: Jeppe Dyre
- 177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"  
af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"  
af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden  
vejleder i matematik: Jesper Larsen  
biologi: Erling Lauridsen
- 179a/89 "LERERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"  
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal  
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen  
Karin Beyer
- 179b/89 "ELEVHEFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"  
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal  
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen  
Karin Beyer
- 180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".  
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"  
by: Jeppe Dyre
- 183/89 "MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction  
by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)
- 184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmeyfælde af en underafkølet væske ved glasovergangen"  
af: Tage Emil Christensen
- 
- 185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"  
Et matematisk projekt  
af: Steen Grode og Thomas Jessen  
Vejleder: Jacob Jacobsen
- 186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"  
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen
- 187/90 "RSA - et kryptografisk system"  
af: Annesette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk
- 188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"  
by: Jeppe Dyre
- 189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER  
af: Finn Langberg

- 190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"  
by: Jeppe Dyre
- 191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON  $C^*$ -ALGEBRAS"  
by: Iain Raeburn and Dana P. Williams
- 192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"  
by: Viggo Andreasen
- 193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"  
by: Stig Andur Pedersen
- 194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"  
Projektrapport af : Frank Olsen
- 194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"  
Kørselsrapport  
Projektrapport af: Frank Olsen
- 195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"  
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.  
Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:  
Anja Boisen, Thomas Hougaard, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"  
- en projektrapport om kaos' paradigmatisk status i fysikken.  
af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL"  
af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"  
Speciale  
af: Frank Olsen
- 199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling  
af: Jens Højgaard Jensen
- 200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"  
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.  
af: Mogens Niss
- 201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraction"  
af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen  
Vejledere: Petr Višćor, Ole Bakander
- 202/90 "TEGN OG KVANTER"  
Foredrag og artikler, 1971-90.  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990  
afleser tekst 170/88
- 204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"  
et Breddemodul Fysik Projekt  
af: Thomas Jessen  
Vejleder: Petr Višćor
- 205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"  
by: Claudine Engel-Tiercelin  
Department of Philosophy  
Université de Paris-1  
(Panthéon-Sorbonne)
- 206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"  
Eksperimentelt Fysikspeciale  
af: Jeanne Linda Mortensen og Annette Post Nielsen  
Vejleder: Petr Višćor
- 207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"  
by: Jeppe C. Dyre
- 208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"  
by: Jeppe C. Dyre
- 209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.  
af: Helge Kragh
- 210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition."  
by: Lars Kadison
- 211/91 "J SANDHEDENS TJENESTE"  
- historien bag teorien for de komplekse tal.  
af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.  
Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek
- 212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"  
by: Lars Kadison
- 213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host"  
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

214|91 "Hælløj i æteren" - om  
elektromagnetisme. Oplæg  
til undervisningsmateriale  
i gymnasiet.  
Af: Nils Kruse, Peter Gastrup,  
Kristian Hoppe, Jeppe Guldager  
Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal

215|91 "Physics and Technology of Metal-  
Insulator-Metal thin film structures  
used as planar electron emitters  
by: A. DeLong, M. Drsticka, K. Hladil,  
V. Kolarik, F. Olsen, P. Pavelka and  
Petr Viscor.

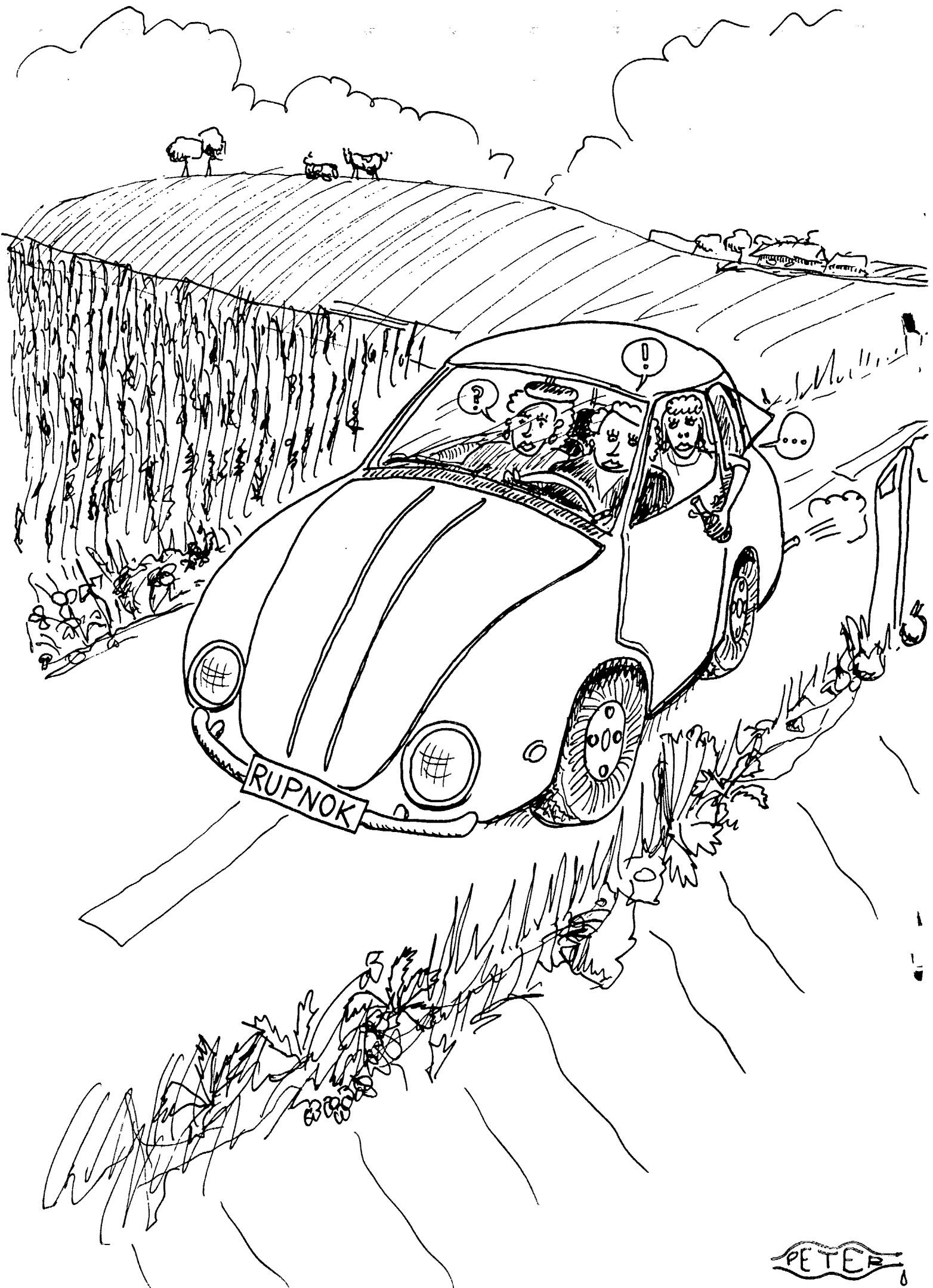
216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"  
af: Thomas Jessen

---

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING  
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"  
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"  
by: Lars Kadison





PETER