TEKST NR 211 1991

I SANDHEDENS TJENESTE

- historien bag teorien for de komplekse tal.

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter,
Postbox 260, 4000 Roskilde.

Matematik, 1.modul.

I SANDHEDENS TJENESTE
- historien bag teorien for de komplekse tal.

1.udgave, 1.oplag, juni 1991.
2.udgave, 1.oplag, oktober 1991

Af Lise Arleth,
Charlotte Gjerrild,
Jane Hansen,
Linda Kyndlev,
Anne Charlotte Nilsson
og Kamma Tulinius.

Vejledere: Jesper Larsen og
Bernhelm Booss-Bavnbek

Abstract:

Projektrapporten rummer en historisk beskrivelse af vigtige dele af de komplekse tals udvikling, set i forhold til diskussionen af ren og anvendt matematik.

Første del af rapporten består af en redegørelse for diskussionen af ren og anvendt matematik som den har taget sig ud i de seneste 50 år, eksemplificeret ved udvalgte forfatteres holdning til ren og anvendt matematik.

Anden del består af en historisk redegørelse for de komplekse tals udvikling, med udgangspunkt i løsningsformlen for trediegradsligningen.

Tak til:

- Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek for vejledning i projektperioden.

- Ole Andersen uden hvis hjælp Bilag E aldrig var blevet til.

- Christina Risi og Marianna Boglino Schmidt for hjælp til de italienske oversættelser.

I

SANDHEDENS

TJENESTE

Matematik 1.modul

Juni 1991

UNIVERSITAS ROSKILDENSIS · IN TRANQUILLO MORS · IN FLUCTU VITA ·

Roskilde Universitets Trykkeri

INDHOLDSFORTEGNELSE

Anekdoten

Begivenhederne bag Anekdoten om Tredie-gradsligningens Loesning udspillede sig i Renaissancens Italien i Starten af 1500-tallet.

Bologna-Professoren Scipione dal Ferro fandt i ca. Aar 1500 Loesningsformlen til
$x^3 + ax = N$. Han blev senere paa Grund af denne Begivenhed hoejt aeret i Bologna som "Dottore Eminente, Matematico eccelentissimo". Han offentliggjorde ikke Loesningen, men overgav den til sin Elev Antonio Maria Fiore og sin Svigersoen Hannibal della Nave.

I 1535 udfordrede Fiore Matematikeren og Laereren Nicolo Fontana, ogsaa kaldet Tartaglia ("Stammeren"), fra Brescia til en matematisk Duel.

Tartaglia fik sit Oegenavn paa Grund af en Episode, der skete, da han var 12 Aar. I 1512 under den franske Besaettelse af Brescia, maatte Tartaglia og hans Moder paa et Tidspunkt soege Tilflugt i en Kirke, men Soldaterne traengte ind i Kirken, og slaebte dem ud igen. Her blev Tartaglia slaaet med et Svaerd af en Soldat under Garton de Foix, som var Nevoe til Kongen af Frankrig. Saarene var frygtelige, men Moderen forsoegte at slikke dem rene, saa de kunne hele. Dette lykkedes paa naer et, som oedelagde hans Kaebe uhelbredeligt. Hans Taender var efter denne begivenhed loese, hvilket var skyld i, at han kun kunne tale ved en Stammen.

Fiores Udfordring til Tartaglia bestod af en Konkurrence, hvor hver af Deltagerne stillede den anden 30 matematiske Spoergsmaal, som skulle besvares inden et vist Tidsrum. Fiores Spoergsmaal tog alle Udgangspunkt i Trediegradsligningen, og han haabede paa denne Maade at kunne ydmyge Tartaglia.

Natten inden Kappestriden udloeb fandt Tartaglia imidlertid en Loesning, svarende til dal Ferros, og han kunne derfor svare ubesvaeret paa Spoergsmaalene.

Girolamo Cardano var kendt som Laege, Naturvidenskabsmand og Spiller. Han lagde ogsaa Horoskoper og blev paa et Tidspunkt faengslet af Inkvisitionen for at have lagt Jesus' Horoskop. Cardano blev engang tilbudt et Job som Laege i Koebenhavn, men afslog paa Grund af Danmarks Klima og Religion.

Cardano fik en Dag Nys om, at der var fundet en Formel til Loesning af Trediegradsligningen. Han blev meget ivrig for at faa fat i denne, og pressede gennem laengere Tid Tartaglia for at give den fra sig. Det lykkedes til sidst, og Tartaglia viderebragte Loesningsformlen paa Verseform. Cardano havde dog svaert ved at tyde Versene, hvorfor han sendte endnu et Brev til Tartaglia. Mod at afgive Tavshedsloefte modtog Cardano et mere uddybende Brev om Tredie-gradsligningens Loesning.

Cardano og hans Plejebarn og Elev Lodovico Ferrari begyndte straks derefter at studere Trediegradsligningen. Ferrari var som For-aeldreloes flyttet ind hos Cardano i en Alder af 15 Aar. Ferrari havde et voldsomt Temperament, og 17 Aar gammel, smadrede han alle Fingrene paa hoejre Haand i et Slagsmaal. Paa trods af sit voldsomme Temperament blev han betegnet som et matematisk Geni, og det var selvsamme Ferrari, der senere fandt den generelle loesning til Fjerdegradsligningen.

I 1544 tog Cardano og Ferrari til den italienske By Firenze. Undervejs gjorde de Ophold i Bologna, hvor de besoegte della Nave. Han viste dem dal Ferros Manuskript. De fandt saaledes ud af, at det ikke var Tartaglia, men dal Ferro, der var den foerste, der havde loest Tredie-gradligningen. Cardano foelte sig derfor ikke laengere bundet af sit Tavshedsloefte til Tartaglia.

Cardano udgav som den foerste Loesningen til Trediegradsligningen i 1545 i Vaerket "Artis Magnae". Baade dal Ferro og Tartaglia naevntes i Bogen, men alligevel blev Tartaglia rasende, og der opstod en Strid om Ophavsretten til Loesningsformlen mellem Tartaglia, Cardano og Ferrari. Tartaglia udgav saaledes i 1546 "Questi et inventione diverse". Heri skrev han bla. om Trediegradsligningen. I hans Behandling af denne er der Spor af Cardanos Arbejde "Artis Magnae".

Cardano trak sig stille og roligt ud af Striden, og Ferrari, som i oevrigt benaegtede at Cardano skulle have aflagt noget Tavshedsloefte, foerte den videre.

Udgaver af "Cartelli di Matematica di sfida" ("Udfordring til matematisk Duel") cirkulerede rundt i de stoerre Byer i Italien, og var oejensynlig en Brevveksling mellem Tartaglia og Ferrari. I denne Brevveksling opfordrede Tartaglia til en ny matematisk Duel. Tilsyneladende vandt Ferrari denne.

Saa vidt vides sultede Cardano sig ihjel, for at opfylde sin egen Forudsigelse om at doe i 1576. Ferrari blev forgiftet af sin Soester, men hvordan Tartaglia doede staar hen i Det uvisse.

Indledning.

Nogle har formodentlig hørt en eller anden udgave af anekdoten om løsningen af trediegradsligningen. Det er ikke sikkert, at vores udgave giver den fulde sandhed, men som i de fleste andre anekdoter er der formodentlig et gran af sandhed i den.

Anekdoter og mere saglig matematik-historie er spændende, fordi det er med til at sætte den matematiske viden, vi har i dag, i relief; dels bliver matematik mere vedkommende, når man kender dens baggrund, dels kan historien belyse matematikkens sammenhæng med resten af det naturvidenskabelige område.

Der er ingen, der præcist ved, hvornår matematikken er opstået. Da menneskene begyndte at organisere sig i små landsbysamfund, må det imidlertid have været nødvendigt for dem at kunne tælle og lave simple regneoperationer.

Senere har dele af matematikken fået en mere filosofisk karakter. I det gamle Grækenland var mange af filosofferne bl.a. beskæftigede med de tre klassiske geometriske problemer: cirklens kvadratur, terningens fordobling og vinklens tredeling.

Det er i dag bevist, at disse tre problemer er uløselige, hvis man kun tillader brug af passer og lineal. Problemerne var imidlertid centralt placeret i matematikken helt op til Renaissancen.

Fra og med Renaissancen begyndte den matematiske udvikling og den naturvidenskabelige forskning generelt at accelerere i Europa, og mange af de problemer, som Renaissancens førende matematikere beskæftigede sig med, anses i dag for at være så enkle, at folkeskole- og gymnasieelever kan undervises i dem.

På grund af den kraftige, nogle mener endog eksponentielle, vækst i forskningen og antallet af forskere i de sidste århundreder, er behovet for en kvalitetsvurdering af forskningen blevet stor.

På det matematiske område diskuteres specielt, om forskningskapaciteten udnyttes bedst indenfor den såkaldt rene eller anvendte matematik. Hvis matematik udvikles for dens egen skyld, kaldes den "ren". Hvis matematik derimod udvikles for at blive brugt uden for matematikken, kaldes den "anvendt".

Ét aspekt i denne diskussion er henholdsvis ren og anvendt matematiks nytteværdi.

I denne projekt-rapport gives en historisk beskrivelse af udviklingen af et område indenfor matematikken: de komplekse tals udvikling fra løsningen af trediegradsligningen til indførelsen af den komplekse talplan. Samtidig redegøres for, hvilke bevæggrunde tidligere matematikere har haft til at forske i matematik.

Dette gøres med henblik på at kunne klassificere matematikernes matematik som ren eller anvendt og derved forholde den historiske beskrivelse til diskussionen om ren og anvendt matematik.

Projektrapporten er således skrevet udfra følgende målsætning :

> Med udgangspunkt i trediegradsligningen vil vi undersøge og beskrive tilblivelsen af teorien for de komplekse tal. Vi vil søge at fastlægge de bevæggrunde tidligere matematikere havde til at beskæftige sig med imaginære tal, belyst af diskussionen om forholdet mellem ren og anvendt matematik.

I første del af projekt-rapporten (kap.1) redegøres der for diskussionen om ren og anvendt matematik.

Først bliver det defineret, hvad vi mener med ren og anvendt matematik. Dette har været nødvendigt for at kunne lave nogle fornuftige klassificeringer af den matematik, der bliver beskrevet i anden del. Derefter redegøres for en række matematikeres holdninger til hhv. ren og anvendt matematik og deres opfattelser af matematik i det hele taget.

I anden del af projektrapporten (kap.2-kap.5) beskrives den historiske udvikling af de komplekse tal, fra løsningen af trediegradsligningen i 1500-tallet til deres geometriske fortolkning i slutningen af 1700-tallet; det hele belyst af ren/anvendt diskussionen.

Det er anden del, vi har valgt at lægge mest vægt på.

I den historiske beskrivelse fokuseres på den enkelte matematiker og pågældendes motivation for at udvikle matematikken istedet for at sætte selve matematikken ind i en større, samfundsmæssig sammenhæng. Denne metode har vi fundet mest interessant.

Beskrivelsen koncentrerer sig om følgende fire matematikere:

Kap.2. Girolamo Cardano (1501 - 1576)
Kap.3. Rafael Bombelli (1526 - 1572)
Kap.4. Leonhard Euler (1707 - 1783)
Kap.5. Caspar Wessel (1745 - 1818).

Del I

Når matematikere diskuterer matematikkens grundlag og matematikkens placering i forhold til andre videnskaber, fremføres normalt tre dogmer: Platonisme, formalisme og konstruktivisme. (Davis & Hersh 1981). Derudover er der et fjerde dogme "Logicisme", som af og til nævnes i den slags diskussioner.

Platonisme: For platonisterne eksisterer matematikken i den virkelige verden, og matematikeren bliver derfor en empirisk videnskabsmand, "All he can do is discover". (Ibid, s. 322). For en platonist vil en teori, der ikke passer, være forårsaget af, at matematikeren ikke har fundet den sande teori.

Formalisme: For formalisterne eksisterer matematik ikke som objekt, i modsætning til platonisterne. Matematik er for formalisterne kun rækker af symboler uden selvstændig betydning, som man ikke har nogen mulighed for at kontrollere sandheden af. Det eneste, man kan gøre, er at opstille axiomer og definitioner og derfra logisk udlede nogle teoremer. Disse teoremers rigtighed kan ikke diskuteres, idet man bare kan opstille nye axiomer, hvis der opstår en modstrid i et teorem. (Ibid)

Konstruktivisme (intuitionisme): Konstruktivisterne er af den overbevisning, at al matematik skal kunne bevises i et endeligt antal operationer. I det hele taget accepterer konstruktivisten ikke begrebet uendeligt. Matematik skal kunne konstrueres, dvs. alle begreber og tal, som man bruger i et bevis, skal først konstrueres. (Ibid)

Logicisme: Logicisternes mål er at vise, at al matematik er en del af logikken. For en logicist er et matematisk bevis kun et bevis, hvis det kan bevises "generelt", dvs. fulstændigt uafhængigt af den sammenhæng, som det eventuelt optræder i. (Snapper 1979).

Ovenstående viser, at matematikkens grundlag kan diskuteres. Der eksisterer også andre områder indenfor matematikken, hvor der ikke er entydige svar. Nytteværdien af henholdsvis ren og anvendt matematik er genstand for diskussion. De holdninger til ren og anvendt matematik samt forholdet mellem dem, som nogle matematikere giver udtryk for, er emnet i del I.

De matematikeres holdninger, som vi redegør for, er udvalgt således, at læseren kan få et indblik i forskellige meninger om, hvorvidt rent eller anvendt matematik er mest nyttig, og hvad den i så fald er mest nyttig for.

Kapitel 1

Ren og anvendt matematik

1. Ren og anvendt matematik

En definition på ren og anvendt matematik:

Når intet andet anføres, benyttes nedenstående definition på ren og anvendt matematik i resten af teksten[1]. Det skal understreges, at ved brug af denne definition vurderes matematikken i udviklingsfasen, ikke når matematikken er udviklet.

Ren matematik: Matematik der udvikles for matematikkens egen skyld.

Anvendt matematik: Matematik der udvikles med udgangspunkt i ikke-matematiske problemer.

I denne definition er det afgørende, om matematikerens formål er at udvikle matematikken for dens egen skyld eller for - om muligt - at få svar på problemer uden for matematikken.

Kategoriseringen af matematikken som ren eller anvendt afhænger ikke af, om matematikken eventuelt senere bliver brugt uden for matematikken. Der er i så fald tale om anvendelse af matematik.

Lidt historie.

Der er næppe tvivl om, at der har eksisteret både ren og anvendt matematik som fænomen, sålænge matematikken har eksisteret, hvorimod begreberne "ren" og "anvendt" ikke altid er blevet benyttet. Fx citerer Paul R. Halmos følgende fra den engelske oversættelse af Platons "Philebus":

> "SOCRATES: Are there not any two kinds of arithmetic, that of the people and that of the philosophers?...And how about the arts of reckoning and measuring as they are used in

[1] Definitionen er opstillet på baggrund af eksisterende, almindeligt forekommende definitioner, men er ikke en "autoriseret" definition, da en sådan ikke eksisterer.

building and in trade when compared with philosophical geometry and elaborate computations - shall we speak of each of these as one or two?

PROTARCHUS:... I should say that each of them was two."
(Halmos 1981)

Hvornår der blev sat navn på begreberne har det ikke været muligt at finde ud af, men de ses dog brugt i en dansk lærebog i matematik fra 1795: "De første Grunde til den rene eller abstrakte Mathematik."

I denne bog findes følgende definitioner på ren og anvendt matematik:

"...Den rene Mathematik er den Videnskab som lærer at udmaale og beregne abstrakte Størrelser; Den anvendte Mathematik lærer at udmaale og beregne konkrete Størrelser. Da de specielle Sætninger altid maae Grunde sig paa de Almindelige Sætninger, saa seer man, at den anvendte Mathematik forudsætter den rene Mathematik." (Bugge 1795,§2)

I 1800-tallet skete der for første gang en bevidst, uddannelsesmæssig opdeling i ren og anvendt matematik. På de nyoprettede, tyske ingeniør-skoler opfattedes matematik som et hjælpemiddel til løsningen af tekniske problemer, mens matematik på universiteterne var et fag i sig selv med egne problemstillinger.
(Jacobsen og Pedersen 1990)

Denne opdeling findes stadig, men på Danmarks Tekniske Højskole ses der idag en tendens til opblødning af den skarpe adskillelse af matematik som redskabsfag og som selvstændigt fag. En ny, fælleseuropæisk uddannelse som industrimatematiker er etableret, og baggrunden er bla. følgende:

"In modern industry, mathematical methods play an increasingly important role in research and development, production, distribution and management. These methods not only come from classical applied mathematics (mathematical physics, numerical mathematics, probability theory and statistics); they also involve e.g. operations research, control theory, signal processing and discrete mathematics. Furthermore, mathematicians are more and more involved in the formulation, analysis and evaluation of mathematical models." ("Informationsmateriale om ECMI" 1991)

Af de nye industrimatematikere vil der både blive krævet viden om rent teoretisk matematik, praktisk anvendelse af matematik samt teknisk viden. (Sletten nr. 5, 1991)

Allerede omkring 1807 - og måske endnu tidligere - forekom der noget, der lignede en diskussion af ren og anvendt videnskab, herunder matematik. Efter Københavns bombardement og brand i 1807, blev der fremsat et ønske om at omdanne Rundetårn til brandvagttårn fremfor astronomisk observatorium. Den matematiske klasse tilsluttede sig en indstilling fra Videnskabernes Selskab[2] om at bevare observatoriet. Selskabet udbad sig:

> "...ærbødigst, at der i et Land, som kan være stolte af T. Brahe, C. Longomontan, O. Rømer og P. Horrebow, dog maatte fremdeles vedblive at være offentligt Sted, som er helliget Uranias Dyrkelse; da det er en uimodsigelig Sandhed, at naar og hvor det Praktiske ikke tillige forenes med det Theoretiske, der kan en Videnskab aldrig dyrkes til anvendelig Nytte. (Ved Andersen 1968,s. 32)

Det følgende vil dog udelukkende handle om dele af den diskussion om ren og anvendt matematik, der har fundet sted i det 20.årh., da diskussionen ikke var så fremtrædende tidligere. I første omgang beskrives forskellige matematikeres holdninger til ren og anvendt matematik uden hensyntagen til, hvad de vurderer matematikken i forhold til, eller hvilken definition på matematik de har.

Senere undersøges det, om der er sammenhæng mellem holdningen til ren/anvendt matematik, og hvilken matematik-definition forfatterne har, samt om der er sammenhæng mellem holdningen og det, som matematikken vurderes i forhold til.

Kapitlet afsluttes med at se på, hvordan matematikerne Felix E. Browder og Richard Courant kategoriserer konkrete matematiske eksempler som ren eller anvendt matematik.

---

[2] Det kongelige Videnskabernes Selskab, stiftet i 1742, beskæftiger sig med at belønne fortjenstfulde personer indenfor historie, matematik, naturvidenskab og filosofi, bla. ved at stille prisopgaver.

1.1. Et udvalg af holdninger til ren og anvendt matematik.

Flere forfattere mener, at anvendt matematik er dårlig matematik bla. den anerkendte rene matematiker **Paul R. Halmos** samt den mere ukendte **A.M. Davie.**

Halmos skriver i artiklen "Applied Mathematics is Bad Mathematics":

> "When I try to listen to a lecture about fluid mechanics, I soon start wondering and puzzling at the (to me) ad hoc seeming approach; then the puzzlement is replaced by bewilderment, boredom, confusion, acute discomfort, and before the end, complete chaos."
> ...
> "To many pure mathematicians applied mathematics is nothing but a bag of tricks, with no merit except that they work,
> ..." (Halmos 1981)

Og **Davie:**

> "På mig virket anvendt matematikk frastøtende fordi mange av argumentene som ble brukt i anvendte kurs ikke var matematisk riktige, og fordi jeg ikke forstod disse."
> (Davie 1980 [3])

Til gengæld er **Halmos og Davie** uenige, når berettigelsen af ren matematik diskuteres.

Halmos har den holdning, at matematik skal ses som en storartet kunst, der ikke behøver en anvendelse, da det er nok, at det er smukt i sig selv:

> "Is there really something wrong with saying that mathematics is a glorious creation of the human spirit and deserves to live even in the abscence of any practical application?
> ...
> "I like the subject for its own sake, in medicine as much as in music; and I like it in mathematics". (Halmos 1968)

Det er dermed ikke sagt, at **Halmos** udelukkende går ind for ren

[3] Fra den norske oversættelse.

matematik. Han er af den opfattelse, at ren og anvendt matematik har et symbiotisk forhold. Ren matematik har glæde af anvendt matematik som inspirationskilde men er dog ikke afhængig af anvendt, hvorimod anvendt er dødeligt afhængig af det teoriapparat, som ren matematik producerer.

> "Applied mathematics can not get along without pure, as the anteater cannot get along without ants, but not necessarily the reverse." (Halmos 1981)

I modsætning til Halmos mener **Davie**, at man har en pligt til at tænke på samfundsnytten af den (rene) matematik, man beskæftiger sig med:

> "...På den anden side tror jeg det er galt å forfølge en hvilken som helst karriere man finner attraktiv uden hensyn til dens sosiale verdi."
>
> ...
>
> "Jeg føler at mange ren-matematikere tar fatt på sine behov uten å ta hensyn til om det de gjør kan forsvares utfra sosiale behov,...." (Davie 1980)

Foruden den sociale dimension mener **Davie** også, at ren matematik helt afskåret fra anvendelse vil være dårlig for matematikken. Der vil da ikke være nogen, der kan bruge den rene matematik, fordi den hurtigt bliver for indviklet at forstå for andre:

> "I virkeligheten er det en tendens til innavl i små spesialområder, slik at en liten gruppe eksperter ender opp med å publisere arbeider som bare andre medlemmer i gruppen kan forstå"
>
> ...
>
> "...rimeligt at tro at bare en liten del av ren matematikk vil finne noen praktisk anvendelelse i fremtiden, og denne delen vil helt sikkert avta etter hvert som emnet blir mer spesialisert og fjernt fra røttene i natur vitenskapene. Videre vil spesialiseringen i metoder og språkbruk sannsynligvis gjøre potensielt nyttige deler av denne matematikken utilgjengelig for mulige brukere" (Davie 1980)

En anden anerkendt matematiker **G.H. Hardy** (1877-1947) mener, at ren matematik er den bedste matematik. Ikke alene bruger den "ordentlige beviser", men den er faktisk også mere nyttig end anvendt matematik:

"One rather curious conclusion emerges, that pure mathematics is on the whole distinctly more useful than applied. A pure mathematician seems to have the advantage on the practical as well as on the aesthetic side. For what is useful above all is technique, and mathematical technique is taught mainly through pure mathematics."

(Hardy 1940,s.134)

Hardy foretrækker desuden ren matematik, da han mener, at anvendt matematik er kedeligt. Der er 3 grunde til, at han har valgt at forske i ren matematik: søgen efter sandheden, professionel stolthed og ærgerrighed.

"The first (without which the rest must come to nothing) is intellectual curiosity, desire to know the truth. Then, professional pride, anxiety to be satisfied with one's performance, the shame that overcome any self-respecting craftsman when his work is unworthy of his talent."

(Hardy 1940,s.79)

Hans holdning er, at andre matematikere har den samme motivation, og at det vil være uærligt af dem at hævde, at de skulle lave matematik for at hjælpe andre.

Marshall Stone mener, at matematikkens udvikling (bla. mod større abstraktion) kun har været mulig, fordi den er blevet skilt fra dens anvendelser. Ren matematik er altså bedst for matematikkens egen skyld men også i forbindelse med anvendelse udenfor matematikken, er den rene matematik mest nyttig. Stone er overbevist om, at jo mere abstrakt matematik er, jo mere nyttig er den:

"When we stop to compare the mathematics of today with mathematics as it was at the close of the nineteenth century we may well be amazed to note how rapidly our mathematical knowledge has grown in quantity and in complexity, but we should also not fail to observe how closely this development has been involved with an emphasis upon abstraction and an increasing concern with the perception and analysis of broad mathematical patterns. Indeed, upon closer examination we see that this new orientation, made possible only by the divorce of mathematics from its applications, has been the true source of its tremendous vitality and growth during the present century."

...

"It may seem to be a stark paradox that, just when mathematics has been brought close to the ultimate in abstractness, its applications have begun to multiply and proliferate in an extraordinary fashion." (Stone 1961)

Ifølge Stone har fremskridtet indenfor matematikken kun kunnet lade sig gøre, fordi matematikken er blevet afskåret fra al anvendelse. Det forekommer derfor paradoksalt for Stone, at samtidig med, at matematikken har nået det ultimative hvad abstraktion angår, så har den opnået en anvendelse udenfor matematikken som aldrig før.

Felix E. Browder (1927- ☺) mener, at al ren matematik vil finde en anvendelse udenfor matematikken. Derudover mener han, at der gennem tiden er gået kortere og kortere tid, fra noget ren matematik er blevet udviklet, og til det er blevet anvendt udenfor matematikken. I forbindelse med ren matematiks udvikling skriver Browder bla:

"...I should say that with the increasing momentum of mathematical and scientific activity (and contrary to some people's impressions) the speed of application has also increased." (Browder 1976)

Dog mener **Browder** ikke, som Stone, at matematik bevidst skal adskilles fra dens anvendelser, tværtimod opnås de bedste resultater, hvis der er en konstant vekselvirkning mellem matematik og andre videnskaber.

Richard Courant (1888-1972) er ligeledes kendt for altid at have bestræbt sig på at bevare enheden mellem abstrakt og anvendt matematik. Her beskriver han den levende matematiks væsen som en bestandig vekselvirkning mellem den virkelige og den abstrakte verden:

"Die Wechselwirkung zwischen Allgemeinheit und Individualität, Deduktion und Konstruktion, Logik und Imagination - das ist das fundamentale Wesen der lebendigen Mathematik ..., der Flug in die abstrakte Allgemeinheit muss vom Konkreten und spezifischen aus starten und auch wieder dahin zurückführen." (Courant 1964)

John von Neumann (1903-1957) skriver i "The Mathematician" om den forunderlige måde, hvorpå matematik udvikles fra empiri til ren æstetik. Samtidig pointerer von Neumann faren for degenerering af det matematiske emne, hvis det bliver for æstetisk:

> "I think that it is a relatively good approximation to the truth - which is much too complicated to allow anything but approximations - that mathematical ideas originate in empirics, although the genealogy is sometimes long and obscure. But once they are so conceived, the subject begins to live a peculiar life of its own and is better compared to a creative one, governed by almost entirely aesthetical motivations, than to anything else and, in particular, to an empirical science. There is however, a further point which I believe, needs stressing. As a mathematical discipline travels far from its empirical source, or still more, if it is a second and third generation only indirectly inspired by ideas coming from "reality", it is beset with very grave dangers . It becomes more and more purely aestheticizing, more and more purely l'art pour l'art. This need not be bad, if the field is surrounded by correlated subjects, which still have closer empirical connections, or if the discipline is under the influence of men with an exceptionally well-developed taste. But there is a grave danger that the subject will develop along the line least resistance, that the stream, so far from its source, will separate into a multitude of insignificant branches, and that the discipline will become a disorganized mass of details and complexities. In other words, at a great distance from its empirical source, or after much "abstract" inbreeding, a mathematical subject is in danger of degeneration." (von Neumann 1947)

1.2. Hvor forskellige er holdningerne.

Som det fremgår af ovenstående, er der en del holdninger til, hvilken matematik der er den mest nyttige. Spørgsmålet er, om disse holdninger virkelig er så forskellige, som de ser ud til. To muligheder for at undersøge dette er ved at se på, om der er sammenhæng mellem forfatternes holdning til ren/anvendt matematik og

1) forfatternes opfattelse af matematik,

2) hvad forfatterne mener matematikken skal være nyttig for.

1.2.1. Opfattelser af matematik.

Som man vil se i de efterfølgende citater, er der ingen af de i afsnittet citerede forfattere, der kan opstille en klar og præcis definition af matematik. De fleste har dog en mening om, hvad matematik er.

Halmos synes, at anvendt matematik er dårlig matematik, hvilket ikke er overraskende, når man ser på hans "definition" af matematik. Halmos opererer med to former for matematik: mathology som svarer til ren matematik, og mathophysics som svarer til anvendt.

> "I've been describing mathematics, but, the truth to tell, I've had mathology (pure) in mind, more than mathophysics (applied)". (Halmos 1968)

At Halmos, som tidligere nævnt, anser anvendt matematik for dårlig matematik, er ikke så overraskende, hvis man ser på hans "definition" af matematik. Han mener slet ikke, at anvendt matematik er matematik.

Courant skriver, at det er svært at definere matematik, hvilket han sammenligner med at skulle beskrive musik eller malerkunst:

> "Die Frage "Was ist Mathematik?" kann nicht durch philosophische Allgemeinheiten, semantische Definitionen oder journalistische Umschreibungen beantwortet werden. Beschreibungen dieser Art werden ja auch der Musik oder der Malerei nicht gerecht. Niemand kann ein richtiges Verständnis für diese Künste aufbringen ohne einige Erfahrung mit Rhythmus, Harmonie und Struktur bzw. mit Form, Farbe und Komposition. Um die Mathematik verstehen zu können, ist der tatsächliche Kontakt mit ihrer Substanz in sogar noch höherem Masse erforderlich". (Courant 1964)

Selvom det er svært at definere, hvad matematik er, prøver Courant alligevel at give en forklaring:

> "Wie so oft gesagt wird, zielt die Mathematik auf fortschreitende Abstraktion, logisch strenge, axiomatische Deduktion und immer grössere Verallgemeinerung. Eine solche Charakterisierung entspricht der Wahrheit, jedoch nicht der ganzen Wahrheit; sie ist einseitig, nahezu eine Kari-

katur der lebendigen Realität. Zunächst einmal besitzt die Mathematik kein Monopol auf Abstraktion. Die Begriffe Masse, Geschwindigkeit, Kraft, Spannung und Strom sind alle miteinander abstrakte Idealisierungen der physikalischen Realität. Mathematische Begriffe, wie beispielsweise Punkt, Raum, Zahl und Funktion sind lediglich offensichtlicher abstrakt." (Ibid)

Ifølge Courant er matematikkens mål altså fortsat abstraktion, logisk streng, aksiomatisk deduktion og stadig større udvidelse og generalisering. Denne karakteristik er næsten i overensstemmelse med sandheden, skriver Courant, omend ikke helt. Matematiken kan vha. sine abstrakte begreber som punkt, rum, tal og funktion give en karikatur af den virkelige verden. Dvs. at matematikken er i stand til at tegne et billede af den omgivende verden, omend dette billede er en smule forvrænget. Matematikken alene kan således ikke give et fuldstændigt billede af om verdenen.

Da Courant ikke har en konkret definition af hvad matematik er, er det svært at forholde denne svævende beskrivelse af matematik, til hans mening om, at vekselvirkningen er det bedste. Det er bemærkelsesværdigt, at matematikkens mål om fortsat abstraktion, deduktion og generalisering, opnås bedst gennem en vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik. Dvs. at der ikke umiddelbart er sammenhæng mellem Courants definition på matematik og holdningen til ren og anvendt matematik.

Hardy beskriver matematik som kunst. Han ser matematikken som en kreativ kunst, hvor matematikkens "mønster" må være smukt, ideerne må passe sammen i harmoni (som ordene i et digt):

> "Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."
> ...
> "It may be very hard to <u>define</u> mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind - we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognizing one when we read it."
> (Hardy 1940,s.85)

Hardy mener, at den kunstneriske, rene matematik simpelthen er matematik.

Stone har den holdning, at matematik er abstrakt, hvorfor det ikke er til at sige, om matematik er sandt eller falsk. Samtidig er matematik vejen til forståelse af verdenen:

> "...mathematics is abstract - `we do not know what we are talking about' - and that the notion of mathematical truth is purely formal - we do not know whether what we say is true, in any factual sense."
> ...
> "A whole new world of thought and understanding opens out before us to which mathematics alone is the key."
> (Stone 1961)

Hvis matematik er abstrakt og samtidig er vejen til at forstå verdenen, er der vel mening i, at Stone mener ren matematik er den mest nyttige.

Stone skriver, at matematisk sandhed er formalistisk, dvs. han mener, at matematikken bliver opfundet af de mennesker, der skal bruge den. Matematikken er altså ikke givet på forhånd.

Sammenlignes forfatternes beskrivelse af matematik med deres holdninger til, hvad der er bedst, er det forståeligt, at ingen udelukkende går ind for anvendt matematik. De, der beskriver matematik, bruger udtryk som: "smuk", "abstrakt" eller "storslået". Så selvom nogle af forfatterne faktisk ser vekselvirkningen som det mest nyttige, har de alligevel en "definition" af matematik, der svarer til deres definition af ren matematik.

1.2.2. Matematikkens nytteværdi.

Blandt forfatterne er der forskellige holdninger til ren og anvendt matematiks nytteværdi. Uenigheden kan skyldes, at forfatterne ikke vurderer matematikken på samme måde. Man kunne foranlediges til at tro, at holdningen var, at anvendt matematik er bedst for samfundet, mens ren er bedst for matematikken. Det viser sig imidlertid, at så firkantet kan tingene ikke stilles op.

Davie skriver en del om, at man skal tænke på matematikkens sociale værdi. Som en konsekvens heraf er Davie imod, at der bliver lavet meget ren matematik, som ikke forholdes til anvendelse. Man skal dog ikke ligefrem vælge ud fra, hvordan man bedst kan redde Jorden eller menneskeheden fra undergang. Han mener, at man skal balancere mellem, hvad man selv har lyst til, og hvordan man kan være til nytte for andre.

Et samspil mellem ren og anvendt matematik fører altså til den matematik, der har størst nytteværdi for samfundet.

Browder har omtrent samme holdning som Davie, da han mener, det er vigtigt, at der er et samspil mellem ren matematik og naturvidenskab. Ikke kun for matematikkens egen skyld men i ligeså høj grad for samfundets skyld.

> "-an interchange that must continue and be raised to a continually higher level if mathematics and the sciences are to achieve their full potential." (Browder 1976)

> "We take it that relevance must refer, at least implicitly, to a relation with some body of values or purposes. Thus a subject may be relevant in the first instance by way of its applications to another subject - which in its turn may then be tested for its further relevance, ultimately to human welfare or to an overriding conception of the good. In short, the relevance of mathematics involves both the various applications of mathematics and the position of mathematics in the spectrum of human values."
> (Browder & MacLane 1978)

En vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik er således det bedste for både menneskeheden og for matematikkens egen skyld.

Både **Browder** og **Davie** vurderer således den matematiske aktivitet i forhold til, hvordan den bedst gavner samfundet (Browder: "Human values", Davie: "Sosiale verdi").

Hos **Courant** finder man imidlertid et hensyn til, om matematikken fortsat vil bestå som selvstændigt fag, eller om den vil ende med at løbe ud i sandet som en lille sidebæk:

> "Mathematics must not be allowed to split and to diverge towards a "pure" and an "applied" variety. It must remain, and be strenghtened as, a unified vital strand in the broad stream of science and must be prevented from becoming a little side brook that might disappear in the sand."
> (Courant 1962)

"...;die Mathematik ist durch einen Verlust an Einheitlichkeit und Zusammenhalt gefährdet". (Courant 1964)

Matematikkens fortsatte beståen og videre udvikling opnås ifølge Courant bedst, hvis der sker en stadig vekselvirkning mellem matematik og andre videnskaber, hvilket er det samme som Browder anbefaler.

En vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik er ifølge Courant, det, der skal til for at få den bedste matematik.

Halmos' påstand er, at man ikke kan lave god, anvendt matematik, uden at gøre det på samme måde, som enhver ren matematiker ville gøre det, altså ved at skabe abstrakte systemer, som indeholder definitioner, teoremer og beviser. Han skriver desuden, at anvendelse af matematik er nødvendig for "matematikkens indre liv". (Halmos 1981)

En vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik kan altså være gavnlig for matematikken. Men den rene matematik alene er også udmærket for matematikken.

Hardy vurderer også ren matematik i forhold til, hvad der er bedst for matematikken. Hans formål med bogen "A Mathematicians Apology" er netop at forsvare ren matematik og sige, at det er i orden at studere matematik for matematikkens egen skyld. (Hardy1940)

Ren matematik er bedst for matematikken.

Stone mener, som før omtalt, at ren matematik er bedst set i forhold til matematikken, men også i forbindelse med dens anvendelse udenfor matematikken. Kun ved at være frigjort fra virkelighedens snærende bånd kan matematikken blive et effektivt og fleksibelt redskab:

> "For it is only to the extent that mathematics is freed from the bonds which have attached it in the past to particular aspects of reality that it can become the extremely flexible and powerful instrument we need to break paths into areas now beyond our ken." (Stone 1961)

Ren matematik er bedst både set i forhold til matematik, men sandelig også i forbindelse med anvendelse.

1.3. Linierne trækkes op.

Efter at have set de forskellige forfatteres synspunkter viser det sig, at en vekselvirkning ifølge de fleste af vores udvalgte forfattere er mest frugtbar. Dette gælder faktisk både for dem, der ser tingene fra matematikkens side, men også for dem, der ser det fra samfundets side.

Davie mener, en vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik er mest nyttig for samfundet, mens **Courant og von Neumann** bekymrer sig om matematikken. **Browder** er mere fleksibel og ser både på samfundet og matematikken, hvor han mener, vekselvirkningen har den bedste indflydelse på begge dele.

Halmos er tildels enig i, at en vekselvirkning mellem ren matematik og dens anvendelser kan være gavnlig for matematikken. Han mener dog ikke, at det er strengt nødvendigt at tage hensyn til mulige anvendelser udenfor matematikken. Hans holdning er, at matematik skal laves for dens egen skyld, man behøver altså ikke at tænke på dens sociale værdi.

Mere ekstreme er **Stone** og **Hardy**, der ser ren matematik som mest nyttig både for matematikken og for dens anvendelse. Ren matematik kan således også være nyttig for såvel fysikken som for samfundet.

Hardy ser matematik som en kreativ kunst. Det er måske derfor ikke så overraskende, at ren matematik giver mere smuk kunst. At ren matematik også skulle være bedst i forbindelse med anvendelse kan forekomme mere overraskende.

I sidste ende er Davie nok enig med Hardy på visse punkter. Davie efterlyser streng bevisførelse i anvendt matematik, og dette er netop, hvad den rene matematik indeholder. Hardys argument for, at ren matematik er bedst i forbindelse med anvendelse, er netop, at "matematisk teknik" læres bedst gennem ren matematik.

Det, forfatterne er mest uenige om, er til syvende og sidst ikke hvilken matematik, der er mest nyttig, men hvorvidt det er iorden, at matematikere sidder og studerer ren matematik for deres egen skyld (det der til tider kaldes matematikkens skyld). Problemet munder derfor ud i diskussionen om, hvorvidt den rene matematik har mulighed for at finde anvendelse i fremtiden, (hvis man da ikke, som fx Hardy og Halmos mener, det er iorden at lave ren matematik uden, at det nogen sinde behøver at blive brugt).

Browder er fx af den holdning at al ren matematik vil finde anvendelse udenfor matematikken, og at der gennem tiden vil gå kortere og kortere tid til denne anvendelse finder sted.

Davie forkaster til gengæld ideen om, at al ren matematik vil finde anvendelse. Han mener, at mindre og mindre dele af ren matematik vil finde anvendelse i fremtiden. Dette skyldes, at ethvert emne bliver mere og mere fjernet fra rødderne i naturvidenskaben, tilsidst bliver det så indviklet, at kun eksperter forstår det.

Den eneste måde, hvorpå man efter vores mening kan afklare denne diskussion, er ved at se på udviklingen af konkrete matematik eksempler. På forhånd er det fx ikke til at vide, om ren matematik kan finde en anvendelse udenfor matematikken og om anvendt matematik kan føre til varig matematik.

Science Citation Index (SCI).

Når man læser ren/anvendt diskussionen, som den gengives ovenfor, kan man få det indtryk, at anvendt matematik spiller en mindre rolle blandt de aktive matematikere.

Men på det privatejede, amerikanske "Institute for Scientific Information" udgives et "Science Citation Index" (SCI), der er en oversigt over de hyppigst citerede naturvidenskablige tidsskrifter.

Af SCI'ets matematik-del fremgår det, at der er stort set lige mange tidsskrifter indenfor anvendt matematik[4] og ren matematik. De to typer tidsskrifter citeres omtrent lige hyppigt, hvis man sammenligner dem udfra deres "Impact factor"[5]. Det tyder således på, at der er lige så stor aktivitet indenfor anvendt matematik,

---

[4] Blandt de anvendte tidsskrifter regner vi "applied mathematics" og "statistics & probability".

[5] Et tidsskrifts Impact Factor er defineret som:

$$\frac{\text{det } \textit{samlede antal referencer til et tidsskrifts artikler}}{\textit{antal citerbare artikler i tidsskriftet}}$$

som indenfor ren.

(Det har ikke været muligt at finde ud af, hvordan SCI'et kategoriserer rene og anvendte tidsskrifter. Det vides derfor ikke, om der skelnes strengt mellem **anvendt** matematik og **anvendelse** af matematik.)

1.4. Kategorisering af matematik som ren eller anvendt.

Flere af forfattere giver definitioner på ren og anvendt matematik, hvor der indirekte lægges vægt på, hvad den enkelte matematikers **formål** med matematikken har været.

Når forfatterne argumenterer for deres synspunkter mht. nytteværdien af ren eller anvendt matematik - eller vekselvirkning mellem disse - tager de ofte udgangspunkt i kendte udviklinger af matematik.

Dette gør bla. Felix E. Browder i sin argumentation for, at en vekselvirkning mellem ren og anvendt matematik er bedst. At der er tale om vekselvirkning indebærer for Browder, at matematikken har en tilknytning til områder udenfor matematikken:

> "If we consider the various areas of contemporary research in mathematics on a theoretical level, some of the most active and fruitful in terms of their development toward their own self-generated goal are also those having the most obvious and potentially significant links with the future development of the sciences. I shall try to give a brief survey of a number of conspicuous examples of this kind"
> (Browder 1976)

Browder giver talrige eksempler på matematiske teorier, der undervejs i udviklingen har fundet anvendelser udenfor matematikken, bla. følgende om et ergodisk system:

> "An important example of an ergodic (or metrically transitive) system is given by the model of Bernouilli trials, which in the simplest form is the statistical result of tossing a fair coin. Starting around 1960 Kolmogoroff and some of his students, especially Jakov Sinai, generalized the physical concept of entropy in a subtle way to serve as

a mathematical tool for the study of the transformation of probability systems. The development of ergodic theory in this new and sophisticated form created the tools for the much deeper analysis of the statistical behaviour of mechanical systems. In works initiated by Sinai and carried to completion by the American mathematician Donald Ornstein, surprising conclusions have been obtained to show that a few relatively crude statistical hypotheses imply that any such system is completely equivalent from the probabilistic point of view to one of the standard systems of Bernouilli." (Ibid)

I eksemplet indgår flere personers bidrag, og det er karakteristisk for vore udvalgte forfattere, at de kæder kategorisering af matematikken sammen med de personer, der udviklede matematikken. Således også **Courant** der er en varm fortaler for vekselvirkningen mellem ren og anvendt matematik. Denne holdning argumenterer Courant bla. for med henvisning til følgende matematiske udvikling:

Ähnlich machte Michael Faraday auf dem Gebiet des Elektromagnetismus eine Reihe experimenteller Entdeckungen, die er durch seine eigene geniale Interpretation miteinander verband. Aus letzterer wurden bald einige mathematische, qualitative Gesetze des Elektromagnetismus abstrahiert. Dann erriet James Clark Maxwell in genialer Weise, dass sich ein sehr allgemeines quantitatives Gesetz das in einem System von Differentialgleichingen die magnetischen und elektrischen Kräfte und ihre Änderungsgeschwindigkeiten kombiniert. Diese Gleichungen, abstrahiert und losgelöst von spezifischen, greifbaren Fällen, mögen zunächst zu esoterisch für eine Anwendung erschienen sein. Es wurde jedoch bald deutlich, dass Maxwells Aufstieg zur Abstraktion den Weg für weitere Fortschritte in einer Reihe von Richtungen freigemacht hatte. Die Maxwellschen Gleichungen illustrierten die Wellennatur des elektromagnetischen Phänomens, regten Heinrich Hertz zu seinen Experimenten über die Fortpflanzung von Radiowellen an, bildeten die Grund lage für das Entstehen einer vollständigen, neuen Technologie und führten zu neuen Forschungsgebieten, wie z.B. dem heute sehr aktiven Gebiet der Magnetohydrodynamik." (Courant 1964)

Courant beskriver, hvordan Faraday lavede en række eksperimenter indenfor elektromagnetisme og fandt en sammenhæng i resultaterne. Dernæst blev der abstraheret fra disse fysiske eksperimenter til at lave en matematisk sætning. Maxwell nåede frem til, at der skjulte sig en meget generel sætning, som kombinerede de magnetiske og elektriske kræfter og deres ændringshastigheder i et system af differentialligninger. Fordi ligningerne var helt løsrevet fra virkeligheden, syntes de ikke at kunne bruges udenfor matematikken. Det blev dog snart klart, at Maxwells opstigen til abstraktion banede vejen for yderligere fremskridt. Ligningerne illustrerede elektromagnetiske fænomeners bølgenatur, og førte Heinrich Hertz til sine eksperimenter af radiobølgers forplantning, dannede grundlaget for forståelsen af en fuldstændig ny teknologi og førte til nye forskningsområder som fx magnetohydrodynamikken.

Eksemplet illustrerer, hvordan Courant mener, at matematik kan udvikles. Den matematiske teori (de Maxwellske ligninger), tog udgangspunkt i fysikken (elektromagnetisme), hvorfra der blev abstraheret til en matematisk disciplin, der igen fandt anvendelse udenfor matematikken.

Klassificeringen af matematikken som enten ren eller anvendt kæder flere af forfatterne således sammen med de matematikere, der oprindeligt satte gang i den pågældende matematiske udvikling.

Matematikken beskrives altså ved at undersøge den enkelte matematikers bevæggrunde til at beskæftige sig med matematik: Har matematikerne været inspireret af et problem uden for matematikken, eller har de søgt en generalisering inden for matematikken selv. Denne måde at beskrive matematikken på inspirerede os til at undersøge en konkret, matematisk teori, ved at undersøge de involverede matematikeres bidrag og motiver. Dette er grundlaget for projekt-rapportens anden del.

Del II

De komplekse tals udvikling.

Intentionen er at undersøge og beskrive, så objektivt som muligt, hvordan teorien for de komplekse tal er opstået og udviklet.

I beskrivelsen er hovedvægten lagt på følgende fire matematikere:

Kap. 2 Girolamo Cardano (1501-1576)
Kap. 3 Rafael Bombelli (1526-1572)
Kap. 4 Leonhard Euler (1707-1783)
Kap. 5 Caspar Wessel (1745-1818)

De centrale personer er valgt med følgende begrundelser:

Cardano er blevet udvalgt, fordi han som den første skrev et detaljeret værk om trediegradsligningens løsning. Hans grundige arbejde med trediegradsligningen fik betydning for udviklingen af de komplekse tal.

Bombelli blev udvalgt, fordi han accepterede og navngav den imaginære enhed, han gav nogle regneregler for imaginære tal, og han viste, hvordan man kunne reducere komplekst udseende udtryk til reelle. Bombelli var den første, der leverede disse bidrag.

Euler er blevet udvalgt, fordi han udledte de komplekse eksponential-funktioner. Eulers arbejde var væsentligt, fordi han udvidede operationsområdet for komplekse tal fra kun at omfatte de sædvanlige regneudtryk: +, -, · og :, til også at omfatte de fleste andre matematiske operationer.

Wessel udviklede som den første den komplekse talplan. Wessels bidrag var væsentligt, fordi han gav en geometrisk repræsentation af de komplekse tal.

I de fire kapitler redegøres der for, hvordan de fire matematikere hver især har bidraget til udviklingen af de komplekse tal.

Motivationen for de fire matematikeres arbejde bliver ligeledes undersøgt. I denne forbindelse er det især interessant at undersøge, om matematikernes bidrag har haft relation til et problem inden- eller udenfor matematikken.

For at gøre beretningen så sandfærdig som muligt er den hovedsagligt skrevet udfra de af de fire matematikeres egne værker, hvori den relevante matematik indgår.

Undervejs i arbejdet med de fire matematikere har vi ikke kunnet undgå at lægge mærke til den store udvikling, der er sket i notation og tænkemåde i de seneste århundreders matematikforskning. I Renaissancen havde man en langt mere geometrisk tilgangsvinkel til matematik, end man har idag. Denne udvikling er vældig interessant, så for at illustrere udviklingen er de fire matematikeres bidrag forsøgt gengivet i så original form som muligt.

Ovennævnte matematikere står efter vores mening for de væsentligste bidrag til de komplekse tals udvikling. De er dog ikke ene om denne udvikling, og derfor er der før, mellem og efter kapitlerne om de fire matematikere korte redegørelser for, hvad der skete mht. komplekse tal i tiden mellem de udvalgte matematikere.

Tiden før Cardano.

I oldtidens Grækenland optog det såkaldte deliske problem "terningens fordobling" mange filosoffer: bestemmmelse af sidelængden "s" i en terning, hvis volumen er dobbelt så stort som terningen med sidelængden "a" - og vel at mærke med passer og lineal som de eneste hjælpemidler. En efterrationalisering af problemet gør det klart, at dét, de gamle grækere var interesserede i at løse, svarer til (trediegrads-) ligningen $s^3 = 2(a)^3$.

De tidligste spor af komplekse tal i forbindelse med løsning af ligninger finder man hos Diophant (ca. 250 f.K.). Han accepterede dog kun positive, rationelle løsninger, og hvis en andengradsligning havde to positive løsninger, skrev han kun den ene. Hvis ligningen havde to negative eller komplekse rødder, forkastede han den som uløselig.

Cirka 100 år efter Diophant beskæftigede Heron sig med geometri. Det siges, at Heron i sin bog "Stereometria" opskrev den imaginære størrelse som $\sqrt{81-144}$. Han regnede imidlertid videre med $\sqrt{144-81}$. Om denne fejlagtige ombytning skyldes Heron eller skriveren er uvist. (Smith 1958)

Hinduen Bhāskara (født 1114) bragte igen spørgsmålet om kvadratroden af negative tal på banen. Han mente, at kvadratroden af negative tal ikke eksisterede, da et negativt tal ikke er kvadratisk. Han opstillede dog ingen definitioner, sætninger eller teorier. (Kline 1972)

Omkring 1100 beviste araberen Umar al Khayyam (1048 - 1131), at en trediegradslignings positive løsning (hvis den har en sådan), kan findes som skæringen mellem en cirkel og en parabel. (Lützen 1985)

I 1224 blev Leonardo Fibonacci af Pisa (ca. 1170 - 1250), af Kejser Friedrich II's filosof stillet opgaven at løse trediegradsligningen: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (Brun 1981). I sin bog "Liber Abachi" skrev Fibonacci, at "...rødderne i ligningen $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ikke kan udtrykkes med euklidiske irrationaliteter af formen $a \pm \sqrt{b}$". (Ligningen kunne altså ikke løses vha. passer og lineal, som jo var den tids krav.) (Brun 1981)

Den italienske munk Luca Pacioli (ca. 1445 - 1514) udgav i 1494 sit værk "Summa de Aritmetica..." I den samlede han det meste af den matematik, der var kendt indenfor algebra, aritmetik og trigonometri. Han endte sin bog med at skrive, at ligninger som $x^3 + ax = N$ og $x^3 + N = ax$, var ligeså umulige at løse som cirklens kvadratur (Struik 1969)

Det var først i ca. 1515, at der kom en egentlig løsningsformel til trediegradsligningen. Italieneren Scipione dal Ferro (1465 - 1526) fandt løsningen til trediegradsligningen af formen: $x^3 + ax = N$. Herefter udspillede situationen sig nogenlunde som fortalt i "Anekdoten", hvor løsningsformlen til sidst havnede hos Girolamo Cardano (1501 - 1576), som udvidede løsningsformlen til at omhandle flere forskellige typer trediegradsligninger.
Cardano var desuden den første matematiker, der begyndte at beskæftige sig med kvadratroden af negative tal i forbindelse med ligningsløsning.

Det første historiske kapitel handler således om Cardano og hans løsning af den generelle trediegradsligning samt hans forsøg på at regne med komplekse tal.

Kapitel 2

Girolamo Cardano

(1501-1576)

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

2. Girolamo Cardano (1501-1576).

Girolamo Cardano var både læge, matematiker, fysiker og filosof, og han beskæftigede sig endvidere med astrologi og stjernetydning. Det var faderen, der opfordrede Cardano til at studere matematik og astrologi, og i 1520 begyndte Cardano sine universitetsstudier. Som 25-årig blev han doktor i medicin, og i 1534 blev han lærer i matematik. Han fortsatte dog med at praktisere som læge.

Cardano er forfatter til en del værker indenfor bla. medicin og matematik. I 1545 fik han udgivet sin bog om ligningsløsning: **"Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis"** [1], som er blevet kaldt et af Renaissancens største mesterværker indenfor naturvidenskaben. (Ore 1968)

Cardano levede i Renaissancen - en tid hvor lysten til at udvikle noget nyt var stor. De generelle strømninger i tiden om at overgå den matematik, de gamle grækere havde lavet, kan formentlig have påvirket Cardano i hans arbejde.

Den italienske videnskabsmand Luca Pacioli havde i 1494 udgivet sit arbejde "Summa de Arithmetica..", hvori han skrev, at det var lige så umuligt at løse trediegradsligningen, som det var at løse cirklens kvadratur. Pacioli observerede, at idet alle forsøg på at løse ligninger af højere grad end 2 indtil nu havde været mislykkede, ansås det som en udfordring blandt hans kolleger at løse tredie- og fjerdegradsligninger. (Struik 1969)

Der var generelt meget stor interesse for ligninger og deres løsning i Renaissancen blandt andet pga. datidens mange astronomiske beregninger. Dette har formentlig også påvirket Cardano.

---

[1] I det efterfølgende "Artis Magnae".

2.1 "Artis Magnae".

I 1545 udgav Cardano sin bog om algebra "Artis Magnae." I denne bog gennemgik Cardano som den første nogle metoder (regler) til at løse både tredie- og fjerdegradsligninger.

Det er i denne bog, at Cardanos formel for løsningen af tredie-gradsligningen står.

Cardanos formel[2] til løsning af en ligning af typen $x^3+ax+N=0$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} - \frac{N}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} - \frac{N}{2}}$$

Formlen har kun mening for $(a/3)^3 + (N/2)^2 \geq 0$. Dette er en nutidig måde at skrive ligningen og Cardanos formel op på. På Cardanos tid brugte man ikke symboler i formler på den måde, man gør i dag, og man skrev heller ikke alle leddene op på den ene side af lighedstegnet. I stedet skrev man ligningen og formlen op med ord, hvilket vises i afsnit 2.2.4.

Cardano blev nødt til at behandle 13 forskellige former af trediegradsligningen i sin bog, dels fordi negative tal ikke var alment accepterede på Cardanos tid, dels fordi datidens matematikere troede, at en ligning som $x^3 + ax = N$ simpelthen manglede det kvadratiske led og derfor var meget forskellig fra en ligning som $x^3 + bx^2 + ax = N$. De havde ikke indset, at koefficienten foran andengradsleddet var nul.

Bla. derfor kan man se 13 forskellige udgaver af hans formel i "Artis Magnae", og ikke kun den ene som er vist ovenover.

Cap XI	-	Numerus æqualis cubo & rebus ($N = x^3 + ax$)
Cap XII	-	Numerus & res æqualia cubis ($N + ax = x^3$)
Cap XIII	-	Numerus & cubus æqualia rebus ($N + x^3 = ax$)
Cap XIV	-	Numerus & quadratum æqualia cubo ($N + bx^2 = x^3$)
Cap XV	-	Numerus æqualis quadrato & cubo ($N = bx^2 + x^3$)

2 Visse forfattere henviser til Tartaglia/Cardanos formel.

Cap XVI - Numerus & cubus æqualia quadrato
($N + x^3 = bx^2$)

Cap XVII - Numerus æqualis rebus quadrato & cubo
($N = ax + bx^2 + x^3$)

Cap XVIII - Numerus & quadratum æqualia rebus & cubus
($N + bx^2 = ax + x^3$)

Cap XIX - Numerus & res æqualia quadrato & cubo
($N + ax = bx^2 + x^3$)

Cap XX - Numerus & res & quadratum æqualia cubo
($N + ax + bx^2 = x^3$)

Cap XXI - Numerus & cubus æqualia rebus & quadratum
($N + x^3 = ax + bx^2$)

Cap XXII - Numerus & res & cubus æqualia quadrato
($N + ax + x^3 = bx^2$)

Cap XXIII - Numerus & quadratum & cubus æqualia rebus
($N + bx^2 + x^3 = ax$)

(Cardanus,1663)

Udtrykkene i parenteserne er ligningerne skrevet med moderne notation, hvor N, a og b alle er positive.

Cardano fandt altså ikke alene den løsning til trediegradsligningen, som han fik fortalt af Tartaglia ($x^3 + ax = N$), men til alle de former af trediegradsligningen, der havde positive reelle løsninger. Det betød, at han ikke kunne skrive alle leddene op på én side af lighedstegnet, som man gør i dag. Hvis han gjorde dét, kunne han enten risikere negative koefficienter (og dette accepterede Cardano ikke), eller alle koefficienterne kunne blive positive, og løsningerne ville da blive negative. [3]

Cardano behandler trediegradsligninger uden andensgradsled i cap. XI -XIII. I cap. XI og XII henviser Cardano til dal Ferro og Tartaglia, idet han i disse kapitler gennemgår løsningformler magen til dem, han fik fortalt af Tartaglia. Ligningen i cap. XIII kan han efter en mindre omskrivning løse vha. samme formel, som den han bruger i XII.

Ligningerne i cap. XIV - XXIII løser Cardano ved først at bortreducere 2.gradsleddet således, at der fremkommer ligninger

---

[3] En trediegradsligning af formen $0 = x^3 + bx^2 + ax + N$, hvor b, a og N er positive, kan hvis man opløser den til produktet af tre førstegradspolynomier, skrives op på formen $0 = (x+u)(x+v)(x+w)$, hvor -u, -v og -w er løsninger til trediegradsligningen.

magen til dem, han behandlede i cap. XI - XIII. Dernæst følger han den samme fremgangsmåde, som han benyttede i cap. XI - XIII.

I "Artis Magnae" løste Cardano trediegradsligningen geometrisk - dvs. som et spørgsmål om at bestemme sidelængden i en terning. Årsagen til, at Cardano greb problemet geometrisk an, var, at man på hans tid havde megen respekt for de klassiske grækeres matematik. Euklids værk, "Elementerne", repræsenterede højdepunktet af logisk tænkning, og fordi Euklid havde løst andengradsligningen ved at betragte flader, var det naturligt for Cardano at løse trediegradsligningen ved at betragte terninger. (Ore 1968)

De kapitler i "Artis Magnae", der omhandler løsningen af trediegradsligningen, er stort set opbygget ens. Der er som regel en indledning, herefter to afsnit der kaldes "Demonstratio" og "Regula", og til sidst gennemgås eventuelle eksempler i "Problem." Det er dog langt fra alle afsnit, der har et "Problem".

"**Demonstratio**" indeholder i de fleste tilfælde en figur/flere figurer, og det er forholdet mellem denne figurs/disse figurers geometriske størrelser (sidelængder, arealer, rumfang), han tager sit udgangspunkt i, når han løser trediegradsligningen. Først beskriver han, hvad det er for et geometrisk problem, han vil løse. Herefter opstiller han nogle relationer mellem de geometriske størrelser fra figuren, som til sidst i "Demonstratio" bevises.

I "**Regula**" benytter han de geometriske relationer til at opstille en regel, og ud fra denne regel løser han så det pågældende geometriske problem.

I "**Problem**" gennemgår Cardano eventuelle eksempler på anvendelse af hans regler.

2.2. Cardanos matematiske bidrag

Cardanos bidrag er væsentligt, fordi han med "Artis Magnae" var den første, som offentliggjorde løsningerne til trediegradsligninger med både konstantled, 1.-, 2.- og 3.-gradsled. Han løste altså ikke kun de to ligninger, han fik fortalt løsningerne til af Tartaglia.

Cardano opstillede med stor grundighed forudsætninger for, hvornår man kunne anvende hans løsningsformler uden at få negative størrelser under kvadratrodstegnene i formlen. Hvis man ikke opfyldte hans forudsætninger, risikerede man at få det såkaldte "Casus Irreducibilis". "Casus Irreducibilis" er, som Bombelli senere viste, reelle rødder udtrykt ved imaginære tal.

Cardanos vigtigste bidrag til de komplekse tals udvikling var, at han **undgik** de komplekse tal så konsekvent i forbindelse med trediegradsligningen, at andre matematikere derved blev ansporet til at undersøge dem.

Derudover angav Cardano en kompleks løsning til en andengradsligning, og han var dermed den første i lang tid, der ikke bare afviste de komplekse tal.

2.2.1. Cardanos løsning af trediegradsligningen.

Udfra Cap. XI i "Artis Magnae" vil det i det følgende blive vist, hvordan Cardano løste ligninger af typen: $x^3 + ax = N$.

Dernæst vises, hvordan han løste ligninger af typen: $x^3 + bx^2 + ax = N$ ved først at fjerne det kvadratiske led og derefter bruge Tartaglias formel på den reducerede ligning.

Til slut gennemgås Cardanos berøring med teorien for de komplekse tal.

Da Cardano som før nævnt relaterede trediegradsligningerne til terninger, vises det først, hvordan Cardano stillede en regel op for, hvordan en terning kunne opspaltes i 8 mindre stykker til brug for sine senere beregninger.

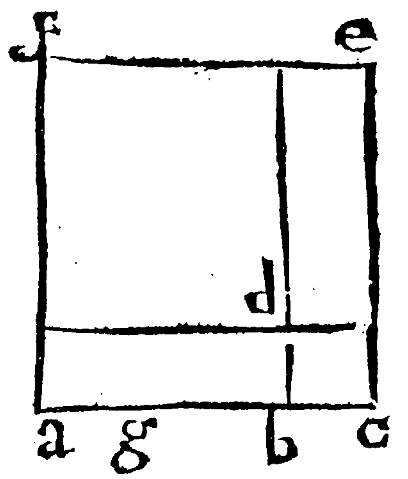
Cardano satte det som en forudsætning, at hans læser havde forstået opspaltningen, hvis læseren ville forstå løsningen af trediegradsligningen.

Gennemgangen er skrevet så tæt som muligt på den måde, Cardano gjorde det, dog med visse modifikationer for at øge læsbarheden.

2.2.2. Cardanos opspaltning af en terning

(cap. VI."De modis inueniendi Capitula noua").

Rumfanget af terningen AE [4] kan skrives som AC·AE, hvor AE er bunden af terningen, (hvilket vil sige, at det er en betegnelse for arealet af en side i terningen), og AC er højden.



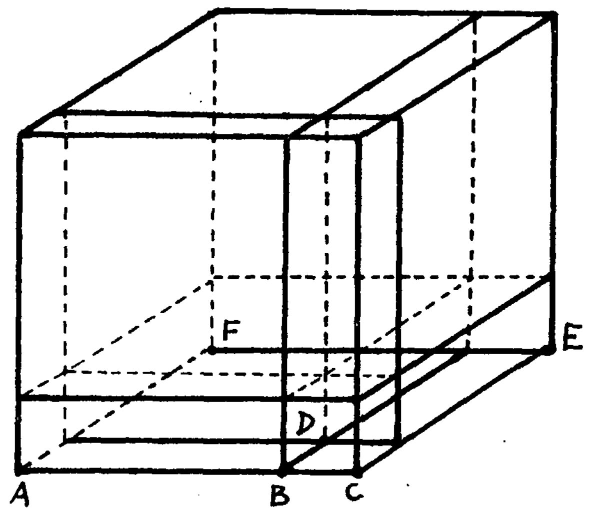


fig. 2.1. Til venstre ses Cardanos tegning fra "Artis Magnae" af terningen AE, og til højre ses en rumlig version af Cardanos figur. (Cardano 1663, s. 235. Den rumlige figur har vi selv tegnet).

Bunden i terningen kan opdeles i 4 mindre flader (som er dém, man umiddelbart kan se på Cardanos tegning) DA, DC, DE og DF. Ganges disse bundarealer med højden AC, har man et nyt udtryk for terningens rumfang, der skrives som:

(1) $AC \cdot DA + AC \cdot DC + AC \cdot DE + AC \cdot DF = AC \cdot AE$

Herefter opdeles linien AC (højden i terningen) i to mindre stykker, AB og BC. Terningen kan på denne måde nu opdeles i 8 stykker i stedet for i 4. (Se fig 2.1. og 2.2.):

(2) $(AB + BC)DA + (AB + BC)DC + (AB + BC)DE + (AB + BC)DF = AC \cdot AE$, hvor AE er arealet af en af siderne.

---

[4] Da Cardano løste alle sine problemer geometrisk, skrev han fx ikke $(AE)^3$ om terningen med sidelængden AE, men i stedet **terningen AE**, ligesom $(AE)^2$ kaldtes **siden/ bunden AE**, og AE kaldtes **linien/højden AE**.

(3) $(AB \cdot DA + BC \cdot DA) + (AB \cdot DC + BC \cdot DC) + (AB \cdot DE + BC \cdot DE) + (AB \cdot DF + BC \cdot DF) = AC \cdot AE$

Ved en del omskrivninger af ovenstående ligning (fra Cardanos side en del forklaringer) viser han, at den store ternings rumfang kan skrives op som:

(4) $(BC)^3 + 3BC(AB)^2 + 3AB(BC)^2 + (AB)^3 = AC \cdot AE$

En geometrisk fortolkning af udtrykket, som viser, at hans udledning er rigtig, kan ses på fig 2.2

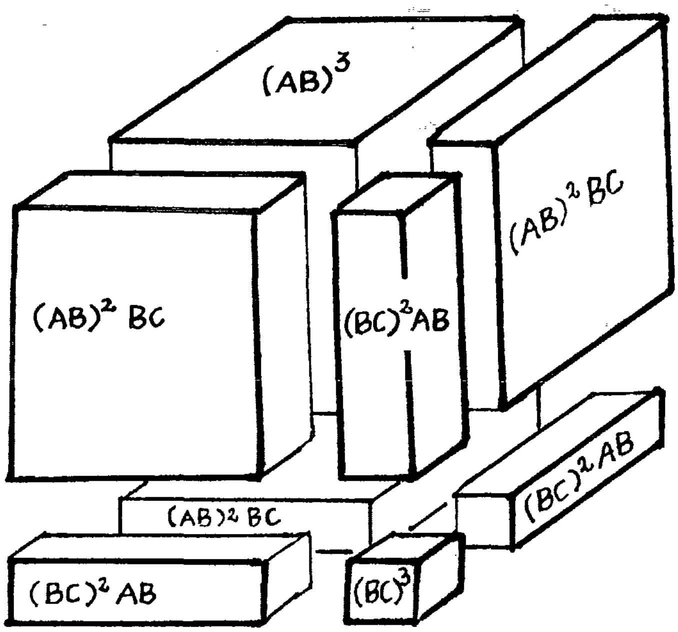


Fig. 2.2. Tegning af den rumlige figur, når den er skilt ad. (Ikke Cardanos figur).

2.2.3. "Demonstratio"

(Cap XI, "De Cubo & rebus aequalibus Numero").

I det eksempel, der nu gennemgås, er Cardano interesseret i at løse ligningen:

$$(GH)^3 + 6GH = 20$$

"Sit igitur exempli causa cubus gh, & sexcuplum lateris gh æquale 20..." (Cardano 1663, cap. XI)

(lad for eksempel terningen GH og seks gange siden GH være lig med 20). [Svarer til $x^3 + 6x = 20$, hvor $x = GH$].

De led, der forekommer i hans ligninger, relaterer han som før nævnt altid til geometriske størrelser.

> "...positio lineam, quadratum supersiciem, cubus corpus solidum referat..." (Ibid)

> (koefficienten foran førstegradsleddet [positio] refererer til en linie, foran kvadratleddet [quadratum] til en flade, foran trediegradsleddet [cubus] til en kube)

For at kunne illustrere sine ord har Cardano i forbindelse med sin løsning af ligningen tegnet nedenstående figurer:

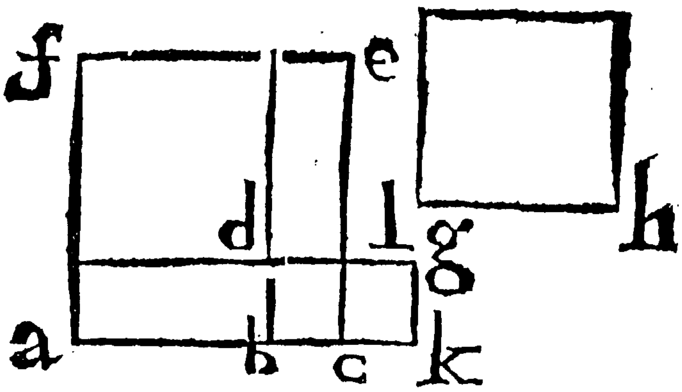


fig. 2.3 Figurerne illustrerer tre terninger - terningerne AE, CL og GH. (Kilde: "Opera Omnia, Cardano, s. 249).

Efter at have præsenteret den ligning, han vil løse, (som jo var ligningen $GH^3 + 6GH = 20$), skriver Cardano nogle relationer op :

> "...ponam duos cubos ae & cl, quorum differentia sit 20. ita quod productum ac lateris, in ck latus, sit 2. tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam cb, æqualem ck, dico, quod si ita fuerit, lineam ab residuum, esse æqualem gh, & ideo rei æstimationem, nam de gh iam supponebatur.." (Ibid)

> (Lad terningerne AE og CL have en forskel [i rumfang] på 20. Lad produktet af AC, som er siden i den ene, og CK, som er siden i den anden, være lig med 2, nemlig en trediedel

af koefficienten foran x. Ved at gøre BC lig med CK så skal det tilbageblevne stykke AB være lig med GH og derfor lig med værdien x, idet GH allerede er givet ved x.)

Med vor tids notation ser Cardanos "relationer" ud som følgende, idet sidelængderne i terningerne er AC og BC :

(5) hvis $AC^3 - BC^3 = 20$		hvor 20 er ligningens konstantled.
	$\Leftrightarrow AE - CL = 20$	
(6) hvis $AC \cdot BC = 2 = (1/3) \cdot 6$		hvor $AC \cdot BC$ er lig med en trediedel af koefficienten foran x, og BC har samme længde som CK.
(7) så er $AC - BC = GH = x$		hvor AC - BC altså er lig den ukendte x-værdi.

Herefter beviser Cardano, at hans opstillede relationer er lovlige. (Han skriver dog ikke, at det er dét han vil, det må siges at være vores efterrationalisering).

Cardano sammenligner nu terningen fra fig. 2.3. med den opspaltede terning på fig. 2.1. og 2.2.: DC repræsenterer således terningen BC, DF repræsenterer terningen AB, DA repræsenterer 3 $(BC \cdot (AB)^2)$ og DE repræsenterer $3(AB \cdot (BC)^2)$.

Idet det benyttes, at forskellen mellem den store terning AE og den lille terning CK (hvor $AE = (AC)^3$ og $CK = (BC)^3$) skal være 20, dvs. $(AC)^3 - (BC)^3 = 20$, kan man ved at bruge den tidligere opdeling af den store terning i 8 dele skrive, at:

(8) $(AC)^3 - (BC)^3 = (AB)^3 + 3BC(AB)^2 + 3AB(BC)^2 = 20$

Hvilket svarer til (4).

Værdien 20 er således det resterende af terningen, når den lille terning er fjernet.

Ved at samle de sidste to led, kan ligning (8) skrives om til

(9) $(AB)^3 + 3AB(AB \cdot BC + (BC)^2) = 20$

Tidligere (i (6)) skrev vi, at $AC \cdot CK = AC \cdot BC = 2$, og dette kan skrives om til (Se fig. 2.3.):

$$(10) \quad (AB + BC)\, BC = AB \cdot BC + (BC)^2 = 2.$$

Indsættelse af (10) i (9) giver:

$$(11) \quad (AB)^3 + 3AB \cdot 2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$(AB)^3 + 6AB = 20$$

Hvor $AB = GH$ (se fig. 2.3.)

Hermed er Cardano tilbage til den ligning, han startede med, idet $AB = GH$. Hans relationer (5) - (7) må derfor være korrekte.

Ovenstående viser idéen i Cardanos argumentation for, at hans terning AE (fig. 2.3.) kan opspaltes og opfattes på samme måde som terningen på fig. 2.1..

2.2.4. " Regula "

Efter at Cardano har vist og forklaret opspaltningen af terningen AE (fig. 2.3.), skriver han en regel svarende til Tartaglias formel op:

> "Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationes, & totius accipe radicem, fecilicet quadratam, quam feruabis unique dimidium numeri quod iam in se duxeras, adiices, ab altera dimidium idem minues, habebisque Binomium cum sua Apotomæ, inde detracta # cubica Apotomæ ex # cubica sui Binomij, residuum quod ex hoc relinquitur, ex rei æstimatio"
> ("Artis Magnae", Cap. XI, ed. 1966).

(Sæt en trediedel af koefficienten til førstegradsleddet i 3., hertil lægges halvdelen af konstanten, som er sat i 2. Af denne sum tages kvadratroden. Fra denne kvadratrod skal man hhv. lægge halvdelen af konstanten til ("binomiale") og trække halvdelen af konstanten fra ("apotome"). Herefter tages kubikroden af den apotome og den binomiale hver for sig. Når dette er gjort, trækker man kubikroden af den apotome fra kubikroden af den binomiale, og denne differens er da lig med x.)

Herefter udregner Cardano værdien for x ved at indsætte koefficienterne fra den ligning, han vil løse, i reglen. Vi husker, at koefficienten foran førstegradsleddet var 6, og konstanten var 20:

(12)
$$\sqrt{\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)^3 + \left(20\cdot\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{108}$$

(13)
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 20\cdot\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 20\cdot\frac{1}{2}}$$

(14)
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = 2$$

I "Artis Magnae" kap XI - XXIII angiver Cardano kun de positive rødder i trediegradsligningerne som løsninger. Han undgår hele tiden de negative og komplekse løsninger ved at lave forudsætninger om størrelsesforholdene mellem koefficienterne.

Den regel som Cardano brugte til at løse $x^3 + ax = N$, ville i dag blive skrevet som følger:

(15) [5]
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} + \frac{N}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} - \frac{N}{2}}$$

Det ses, at da a og N er positive, vil x altid blive reel og positiv.

Formlen opgiver kun én rod. Man må derfor, hvis man vil finde de resterende rødder i polynomiet, lave polynomiers division og løse det resterende 2.gradspolynomium.

Hvis man sammenligner med det ligningudtryk, der i dag kaldes Cardanos formel (Se afsnit 2.1.), og sætter $x^3 + ax = N \leftrightarrow x^3 + ax - N = 0$, ind i formlen ses det, at (15) kommer til at svare til den nutidige version af Cardanos formel.

Vi har ikke i "Artis Magnae" kunnet se nogen klar sammenhæng mellem "Cardanos opspaltning af en terning" og "Demonstratio" på

[5] I denne ligning er kubikroden med "+" mellem leddene den binome, og den med "-" mellem leddene den apotome.

den ene side og "Regula" på den anden side. Se Bilag A for en nutidig argumentation for sammenhængen mellem ovenstående.

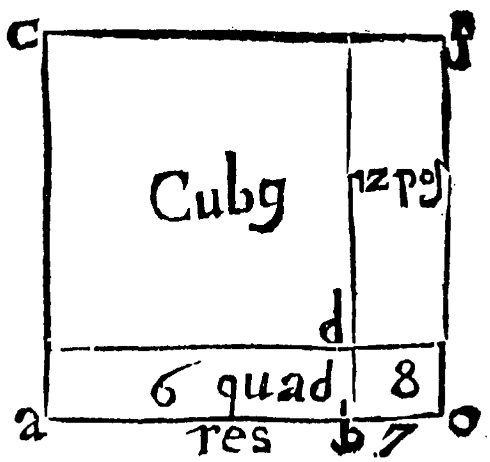
2.2.5. Bortskaffelse af det kvadratiske led.

I det følgende tages der udgangspunkt i Cardanos gennemgang af de fuldstændige trediegradsligninger, altså ligninger med konstantled, første-, anden- og trediegradsled. Disse typer ligninger gennemgår Cardano i kapitlerne XVII - XXIII. Det vil i det følgende blive vist, hvordan han løser en ligning med alle led. Hvor konstanten, står på venstre side af lighedstegnet og de øvrige led på højre side: $N = x^3 + bx^2 + ax$. (Cap XVII, "Numerus æqualia rebus quadrato & Cubo").

Han løser ligninger af denne type ved først at argumentere for, at ligningen kan omskrives til en tilsvarende ligning **uden** andengradsled. Denne omskrevne ligning kan han derefter løse vha. Cardanos formel.

Cardano var den første, der fandt ud af, hvordan man kunne udføre denne omskrivning og var dermed den første, der var i stand til at løse den fuldstænige trediegradsligning.

Til problemet (ligningen) har han som sædvanlig tegnet en figur:



figur 2.4 Figuren som Cardano bruger i Cap. XVII.

Den ligning, han er interesseret i at løse, er:

(16) $(AB)^3 + 6(AB)^2 + 20AB = 100$

Han vil have (16) til at svare til terningens rumfang på fig. 2.4., som kan skrives som:

(17) $(AC)^3 = (AB)^3 + 3BC(AB)^2 + 3AB(BC)^2 + (BC)^3$ (Som fig. 2.2.).

Idet BC = 2, som det ses på fig. 2.4., svarer (17) til:

(18) $(AC)^3 = (AB)^3 + 6(AB)^2 + 12AB + 8$

Denne ligning, som er et udtryk for rumfanget for terningen på fig. 2.4., sammenligner han med den ligning, han er interesseret i at løse ((16)):

For at (16) og (18) svarer til hinanden, skal man til (16) lægge ((8 - 8AB) på begge sider af lighedstegnet:

(19) $(AC)^3 = ((AB)^3 + 6(AB)^2 + 20AB) + (8 - 8AB) = 100 + (8 - 8AB)$

Idet $AC = AB + BC \Leftrightarrow AB = AC - 2$,

kan 8AB skrives som $8AB = 8AC - 16$

Fra (19) haves, at $(AC)^3 = 108 - 8AB$, hvilket er ensbetydende med, at $(AC)^3 = 108 - (8AC - 16)$

Idet Cardano ikke kan have negative tal i sine ligninger, skrives ligningen således:

(20) $$(AC)^3 + 8AC = 124$$

Som det tidligere er vist, var det muligt for ham at løse en ligning svarende til (20) vha. Cardanos formel. Ved løsningen fremkommer en værdi for AC, og idet AC = AB + BC, hvor BC = 2, er det nemt at finde værdien for AB, som var den oprindelige ubekendte i (16).

I kapitlet gennemgår Cardano endnu 2 eksempler, som tager udgangspunkt i (16), men hvor koefficienten foran AB ændres, først til 12AB og så til 2AB. (Se bilag B for en generel og nutidig metode til bortskaffelse af det kvadratiske led.)

Til sidst skriver han en regel op, som beskriver, hvordan man skal komme af med andengradsleddet, alt efter hvilke koefficienter og hvilken konstant, der er i ligningen.

Hans regel er meget lang og indviklet. Pointen i den er, at den reducerede ligning (fx som (20)) har forskellige løsningsformler, alt efter om koefficienten foran andengradsleddet (i den ureducerede ligning), i anden potens, divideret med 3, er større end, mindre end eller lig med koefficienten foran førstegradsleddet ($b^2/3 > a$, $b^2/3 < a$ eller $b^2/3 = a$). Ved at lave disse forudsætninger undgår han at få negative og komplekse tal i mellemregninger såvel som under kvadratrodstegnet i løsningsformlen.

Han opstiller forudsætninger svarende til disse for næsten alle de versioner af trediegrads-ligningen, han behandler i "Artis Magnae", således at han konsekvent undgår imaginære og negative tal i sine mellemregninger og løsninger. Dette skulle senere anspore Rafael Bombelli til at undersøge, hvad der ville ske, hvis man **ikke** opfyldte Cardanos forudsætninger, (hvilket bliver behandlet i kap. 3.2.1.).

Det, at man nu kunne give en eksakt løsning til alle de trediegradsligninger, der havde mindst én positiv og reel rod, løste ingen praktiske problemer. Man havde allerede før Cardanos formel været istand til at approximere rødderne i en trediegradsligning vilkårligt nøjagtigt. Men det bevirkede, at Cardanos elev Lodovico Ferrari få år efter fandt løsningsformlen til 4. gradsligningen, og i 1823 viste Niels Henrik Abel, at man ikke kan løse ligninger af 5. grad og derover algebraisk.

2.2.6. Cardanos arbejde med de komplekse tal.

I "Artis Magnae" kapitel XI - XXIII løste Cardano altså 13 forskellige udgaver af trediegradsligningen. I disse 13 kapitler sørger Cardano vha. sine forudsætninger for at størrelsen under kvadratroden ikke bliver negativ, og han undgår derved at skulle regne med komplekse tal. Først I "Aliza" - bogen, som er et tillæg til "Artis Magnae" i 1570-udgaven, omtaler Cardano negative og komplekse tal i forbindelse med løsningen af trediegradsligninger. Vi har dog ikke brugt "Aliza"-bogen, fordi Bombelli allerede havde lavet en bedre fremstilling på dette tidspunkt.

I 1545-udgaven af "Artis Magnae" beskæftiger Cardano sig istedet, med kvadratroden af negative tal i forbindelse med løsningen af andengradsligningen

Cardanos brug af de komplekse tal i forbindelse med andengradsligningen.

Første gang Cardano overhovedet omtaler imaginære tal er i hans første matematik bog, "Practica Arithmetica" (1539), hvor han kalder imaginære tal for "impossibilis" (umulige).

Om ligningen (skrevet med nutidig notation) $x^2 + c = bx$, som har løsningen:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

skriver Cardano:"...cum numerus non possit detrahi a quadrato dimidii radicum, tunc casus est impossibilis" (s. 72, cap. 49, afsn. 4, Opera Omnia, ed.1966).
Dette betyder (ikke direkte oversat), at hvis c ikke kan fratrækkes den halve størrelse b opløftet til anden potens, $(b/2)^2$, da er tilfældet "umuligt" ("impossibilis"). Med andre ord, hvis $c > (b/2)^2$ er der ingen løsning til ligningen. Denne opfattelse reviderede Cardano imidlertid, og det vil i det følgende blive vist, hvordan han i "Artis Magnae" - i forbindelse med en andengradsligning - angiver det vi i dag ville kalde en kompleks løsning:

I Cap. XXXVII, "De Regula falsum ponendi", får Cardano en løsning, hvor kvadratroden af et negativt tal indgår:

Cardano vil dele 10 i to dele, hvis produkt giver 40. Dette kan i moderne notation udtrykkes således:

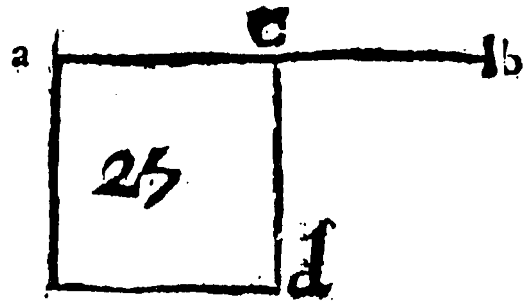
$$x(10-x) = 40 \Leftrightarrow -x^2 + 10x = 40$$

Dette er umuligt, skriver Cardano, men fortsætter alligevel med at dele 10 i to nu lige store dele på 5.
Han opløfter dernæst 5 til 2.potens og får 25, hvorfra han trækker 40. Dette giver -15, som han tager kvadratroden af og hhv. adderer og subtraherer fra 5, $(5 \pm \sqrt{-15})$. Han har nu to udtryk af den slags, vi i dag kalder komplekse tal. Cardano multiplicerer disse to udtryk og får 40,

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15}) = 25-\sqrt{(-15)^2} = 25-(-15) = 40$$

og det var jo netop hvad han ønskede.

For at give den sande forståelse af dette (eller for at give det en reel/virkelig betydning), giver Cardano et geometrisk eksempel, "Demonstratio":



figur 2.5 Linien AB skal deles i to lige store dele, som ganget med hinanden skal give 40. ("Opera Omnia, Cardano, s. 287).

Han angiver linien AB til at være 10, og i opgaven skriver han, at 10 skal deles i 2 dele, som ganget med hinanden skal give 40. $((10 - x)x=40)$.

4 gange 10 er 40, så Cardano ønsker altså at firedoble stykket AB (idet AB = 10).

Herefter lader han fladen AD = AC^2, hvor AC er præcist halvdelen af AB.

Fra AD trækker han 4AB; AD - 4AB. Så siger han, at AC ± $\sqrt{(AD - 4AB)}$ viser delene, og at det netop var dem vi søgte.

Til sidst skriver han, at AD ikke har samme natur som AB, idet AD er en flade og AB er en linie, og at dette gør det hele meget indviklet, idet man ikke kan benytte de regler, som man ellers benytter til regning med negative tal. (Dette hentyder til en regel, som Cardano tidligere har opstillet for regning med negative tal).

2.3. Kategorisering af Cardanos matematiske bidrag som ren eller anvendt matematik.

Cardano var universitetsuddannet og som de fleste andre af datidens videnskabsmænd uddannet indenfor et bredt område af naturvidenskaben. Han arbejdede, som nævnt i kapitlets indledning, ligeledes indenfor meget forskellige områder af naturvidenskaben, og derfor er det svært at klassificere hans matematik som enten ren eller anvendt matematik.

Om Cardanos forsøg på at give eksempler på anvendelse af sin matematik i "**Probleme**", siger Oystein Ore:

> "The problems are often clothed in practical garb to make them more attractive to the readers. For Equations of higher degree this is no easy task, so in most cases Cardano falls back upon straight numerical examples. But a number of the examples are of the types reminiscent of mercantile Italian arithmetics of late medieval times."
>
> (Ore 1968 s.IX)

F.eks. kan nævnes "**Problem 1**" fra cap. XXXVII i "Artis Magnae". Problemet tilhører afsnittet om negative og komplekse tal (i den engelske oversættelse):

> "The dowry of Francis' wife is 100 "aurei" more than Francis' own property, and the square of the dowry is 400 more than the square of his property. Find the dowry and the property.
>
> (Cardano 1968, s.218).

Derefter bliver eksemplet rent numerisk, men svaret er, at Francis har -48 "aurei" til at starte med, han er altså forgældet, og konens medgift er derfor 52 "aurei".

Cardanos eneste eksempel på anvendelse af trediegradsligningsformlen, som ikke har et rent numerisk udgangspunkt, er et eksempel svarende til det såkaldt deliske problem med at fordoble en ternings rumfang. Fra cap. XVII i den engelske oversættelse:

> "Example of the fourth form: An oracle ordered a prince to build a sacred building whose space should be 400 cubits, the length being six cubits more than the width, and the width three cubits more than the

height. These Quantities are to be found."
(Cardano 1968, s.126).

Disse to eksempler, og de andre af de eksempler, vi har læst i "Artis Magnae", virker temmelig "påklistrede", idet problemerne henviser til situationer, som ingen "almindelige mennesker" kommer ud for. Der er derfor meget, der tyder på, at Cardano ikke selv kunne se nogen umiddelbar anvendelse af sin matematik.

Årsagen til, at han alligevel har medtaget dem, kan, som nævnt af Ore i ovenstående, være, at han ville øge underholdningsværdien af sin bog.

Et andet argument for, at Cardano ikke har haft et direkte problem, han ville løse med sin formel, er, at han tog udgangpunkt i de løsnings-formler, som han fik fortalt af Tartaglia og arbejdede videre på dem.

Slutteligt et citat af Kirsti Andersen et al.:

> "Det kan bemærkes, at løsningerne ikke fremkom som resultat af praktiske problemer, ej heller var de af synderlig værdi for ingeniører eller andre "anvendte matematikere", da man jo allerede siden oldtiden kunne løse trediegradsligningen med vilkårlig approximation. Løsningerne er nærmest resultat af en grundforskning". (Andersen et al. 1979, s.109)

Vi konkluderer derfor, at Cardanos arbejde med trediegradsligningen er at klassificere som ren matematik.

Overgangen fra "Artis Magnae" til "L'Algebra".

Hvis en matematiker benægtede eksistensen af negative tal, ville det medføre, at han/hun betragtede $x + 2 = 0$ som et uløseligt problem. På lignende måde kunne man sige, at ligningen $x^2 + 1 = 0$ var uløselig, hvis man ikke accepterede kvadratroden af negative tal. Man kunne således postulere, at der ikke var behov for at beskæftige sig med kvadratroden af negative tal, men med løsningsformlen til trediegradsligningen blev det anderledes.

Hvis man til en trediegradsligning benytter Cardanos formel, men ignorerer hans forudsætninger, vil reelle løsninger blive givet på kompleks form. Disse tilfælde er senere blevet kaldt "casus irreducibilis". (Se bilag C for en undersøgelse af trediegradsligningens rødder.)

I kapitlet om Rafael Bombelli (1526 - 1572) vises det, hvordan han får reduceret et casus irreducibilis til et reelt tal.

Kapitel 3

Rafael Bombelli

(1526-1572)

3. Rafael Bombelli (1526-1572).

Rafael Bombelli blev født nær Bologna i Italien [1]. Bombelli var den ældste dreng i en søskendeflok på 6. Hans fader var uldsælger, og moderen var formodentlig skrædder.

Familien havde ikke særlig mange penge og kunne ikke finansiere en universitetsuddannelse til Bombelli. Imidlertid kan Bombellis interesse for matematik godt være blevet inspireret af den stemning, der var omkring universiteterne på den tid. Studenter fra hele Europa strømmede til de italienske universiteter for at høre forelæsninger. I Bologna, i begyndelsen af 1500-tallet, blev der bla. afholdt forelæsninger af matematikerne Luca Pacioli og Scipione dal Ferro.

Cardano, Tartaglia og Ferrari levede og arbejdede i nabobyer til Bologna. I 1545 udkom som bekendt Cardanos "Artis Magnae", og i 1546 blev uenigheden mellem Cardano og Tartaglia offentlig kendt. I dette år udsendte Tartaglia nemlig sit "Quesiti et Inventioni Diverse" (diverse opgaver og opdagelser), hvori han bla. skrev sin version af trediegradsligningens oprindelse. Kopier af "Cartelli di Matematica sfida" (udfordring til matematisk duel), udvekslet mellem Tartaglia og Ferrari, cirkulerede ligeledes rundt i de større byer i Italien. De intellektuelle i området omkring Bologna har ikke kunnet undgå at bemærke røret om trediegradsligningens løsning.

Man ved ikke andet om Bombellis uddannelse, end at hans læremester var ingeniør-arkitekten Pier Francesco Clementi af Corinaldo. Størstedelen af sit liv arbejdede Bombelli som ingeniørarkitekt under patronen Monsignor Alessandro Rufini.

Et af de største ingeniørprojekter, som Bombelli arbejdede med, var dræningen af marskområderne ved Val di Chiana (Emilia-egnen). Bombellis arbejde i denne forbindelse knyttede sig hovedsagligt til kortlægningen af det drænede område. Bombelli blev af en historiker i 1800, beskrevet som "... famous among hydraulic engineers for having succesfully drained the marshes of the Val di Chiana." (Ved Jayawardene 1970,s.279).

---

[1] Italien var ikke ét land på dette tidspunkt, men bestod af en masse mindre bystater.

Det var på et tidspunkt, da dræningsarbejdet var sat i bero, at Bombelli under et ophold hos Rufini i Rom skrev sin første og eneste bog " **l'Algebra, parte maggiore dell'Arithmetica**" [2]. Dele af bogen blev udgivet i 1572, lige inden Bombellis død (Ibid).

3.1. " l'Algebra."

Bombelli skrev "l'Algebra" mellem 1557-1560, altså godt 10 år efter Cardanos "Artis Magnae". Bogen var en gave til hans "arbejdsgiver" Rufini, som Bombelli benytter det meste af forordet i sin bog på at prise, idet han var meget imponeret af Rufinis evner som landmåler.

Formålet med bogen skriver Bombelli om i efterskriftet:

> "...formålet med at skrive dette værk er at forenkle emnet [algebra], og beskrive hvad de andre [tidligere matematikere] ikke beskrev, og fordi dette emne behøver at forblive kendt, således at det kan blive brugbart for alle..."
> (Bombelli 1572,efterskrift; vores oversættelse).

Senere skriver Bombelli ligeledes :

> "...Jeg vil ikke skrive i raffineret stil, fordi hovedmålet med denne bog er, at læseren lærer algebra, og jeg håber, at Gud kan lide denne bog, og at bogen vil blive brugbar for de mennesker, der lever".
> (Ibid,efterskrift; vores oversættelse).

Iøvrigt argumenterer Bombelli stærkt for alle de områder uden for matematikken, der kan bruge algebraen :

> "...det er den vigtigste af de matematiske discipliner, alle andre videnskaber har brug for den - hverken aritmetikere eller geometrikere kan løse og bevise deres demonstrationer uden den; heller ikke astrologen kan opmåle himmelen eller udregne graderne, og cosmografen finde skæringspunkter mellem cirklerne uden den. ...musikere har brug for arit-

[2] I det følgende henvises der til hans bog som "L'Algebra".

metikken til at komponere musik, og arkitekterne har brug for den til at udforme maskiner til krige..."
(Ibid,efterskrift; vores oversættelse).

I mange af de daværende taltabeller var der fejl, ifølge Bombelli fordi de, der skrev tabellerne, ikke havde forstand på matematik. Fejlene bevirkede, at de, der benyttede dem, fik fejl i deres udregninger. Bombelli mente, at man ved at benytte metoderne i hans bog ville kunne udregne eksakte værdier og derved undgå fejl.

"l'Algebra" er blevet karakteriseret som bogen med den mest lærerige og den mest systematiske behandling af algebra i Italien på den tid. (ved Smith 1959,s.80)

"l'Algebra" er opdelt i 5 bøger. De tre første bøger er en analytisk behandling af algebra. De to sidste bøger er en geometrisk behandling af algebra og eksisterer kun som manuskript i et bibliotek i Bologna - Bombelli fik dem aldrig færdiggjort. Nedenstående er en kort oversigt over den **oprindelige** udgave af værket:

Bog I behandler grundlæggende aritmetiske definitioner og anvendelser af forskellige fundamentale operationer i aritmetik.

Bog II behandler grundlæggende algebraiske definitioner og metoder til at udføre algebraiske operationer, bla. løsning af første-, anden-, tredie- og fjerdegradspolynomier. For hver ligningstype opstillede Bombelli en regel og illustrerede derefter reglen med et taleksempel.

Bog III indeholder et utal af eksempler på problemer af en type, der kunne have forekommet på markedspladsen eller tavernaen
(Jayawardene 1970,s.280).

Bog IV behandler anvendelsen af geometriske metoder i algebraen, og **bog V** behandler anvendelsen af algebraiske metoder i geometrien.

Senere ændrede Bombelli indholdet, specielt i bog III. Bombelli og en lektor i matematik fra universitetet i Rom satte sig på et tidspunkt for at ville oversætte 7 bøger af den græske matematiker Diophant[3]. Bombelli blev meget imponeret af Diophant, og han erstattede alle sine egne eksempler med eksempler fra Diophants bøger. Han ville "berige verden" ("arricchire il mondo") med Diophants eksempler, og gøre Diophant kendt (forordet til bog III). I bog III (i l'Algebra 1572) findes derfor kun taleksempler uden relation til praktiske problemer.

3.2. Bombellis matematiske bidrag.

Bombelli reducerede den komplekst udseende løsning, som man kan få ved brug af Cardanos formel, til et reelt udtryk. Han viste således, at selv i det såkaldte "casus irreducibilis" repræsenterede Cardanos formel i en vis forstand den reelle rod.

Ligeledes opstillede Bombelli regler for regning med udtryk, hvori der indgår kvadratroden af et negativt tal.

Bombelli skrev som Cardano ligningerne op ved brug af tekst, men han indførte også en ny måde at opskrive ligninger på - en ny notation - og dette er et andet bemærkelsesværdigt matematisk bidrag til algebraens fremskridt (Jayawardene 1970,s.281).

3.2.1 Bombellis forståelse af de komplekse tal.

Bombelli konstaterer i "l'Algebra" at nogle kubikrødder indeholder kvadratrødder af en anderledes type, end dem han er vant til :

> "Ho trouato un'altra sorte di R.c.[Radix cubo][4] legate molto differenti dall'altre, laqual nasce dal Capitolo di cubo eguale à tanti, e numero, quando il cubato del terzo é maggiore del quadrato della meta del numero...laqual sorte di R.q.[radix quadrato][5]

---

[3] Matematiker fra oldtidens Grækenland, der meget formalistisk beskrev algebraiske operationer.

[4] R.c. (Radix cubo) er i Bombellis notation ensbetydende med kubikroden.

[5] R.q.(Radix quadrato) er i Bombellis notation ensbetydende med kvadratroden.

hà nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre, e diverso nome;" (Bombelli 1572,s.169)

(Jeg har fundet en anden slags kubikrod af et sammensat udtryk, meget anderledes fra de andre, de forekommer ved ligningsudtryk som $x^3 = ax + N$, når $(a/3)^3$ er større end $(N/2)^2$....denne slags kvadratrod har regneregler og navn forskellig fra de andre kvadratrødder;)

Dét sammensatte udtryk, som Bombelli henviser til, er "meget anderledes" fordi det indeholder kvadratroden af et negativt tal. Om den nye kvadratrod, den kvadratrod "..der har regneregler og navn forskellig fra de andre kvadratrødder", skriver Bombelli videre, at den hverken kan opfattes som noget positivt (piú) eller som noget negativt (meno), og at han derfor vil kalde den nye størrelse for henholdsvis plus kvadratroden af noget negativt ("piú di meno"), og minus kvadratroden af noget negativt ("meno di meno"). Bombelli erkender altså eksistensen af de nye størrelser.

Kvadratroden af -121 (piú di meno R.q121) var Bombelli i stand til at omskrive til piú di meno 11. Heraf fremgår det, at Bombelli har været i stand til at opfatte kvadratroden af -121 som $\sqrt{-1}$ gange $\sqrt{121}$. Han har uddraget kvadratroden af 121 og skrevet det nye udtryk op som $(\sqrt{-1})\cdot(11)$, og med hans notation altså "p.di.m.11" (jævnfør Ibid,s.293).

Bombellis udtryk "di meno" svarer derfor øjensynligt til dét, vi idag kender som den imaginære størrelse "i".

Om den anderledes type af kubikrødder, nemlig dem han får i løsningen til trediegradsligningen, når han benytter Cardanos regel i det "irreducible tilfælde", skriver Bombelli videre :

"...la quale parerá á molti piú tosto sofistica, che reale, e tale opinione hó tenuto anch'io, fin'che hó trouato la sua dimonstratione in linee..."
(Ibid,s.169)

(...for mange er de ligeså sofistiske som de reelle tal tidligere var, og det var de også for mig, lige indtil jeg fandt et geometrisk bevis...)

Det "geometriske bevis", Bombelli henviser til, er et bevis for, at en ligning af typen $x^3 = ax + N$ altid har én reel rod, også selvom løsningen ser kompleks ud.

Det geometriske bevis gennemgås i det følgende.

Bombellis geometriske bevis.

Bombelli undersøger ligningen $x^3 = 6x + 4$.

Cardanos krav til en ligning af denne type ($x^3 = ax + N$) var, at $(a/3)^3$ skulle være **mindre** end $(N/2)^2$ (Cardano 1545,Cap.XII). Kun hvis denne forudsætning var opfyldt, angav Cardano en løsningsmetode. Værdien af x skulle således findes som :

$$x = \sqrt[3]{\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

I Bombellis ligning er $(6/3)^3$ **større** end $(4/2)^2$. Cardanos forudsætning er således ikke opfyldt. Hvis man alligevel benytter Cardanos løsningsformel på ligningen, får man et udtryk som :

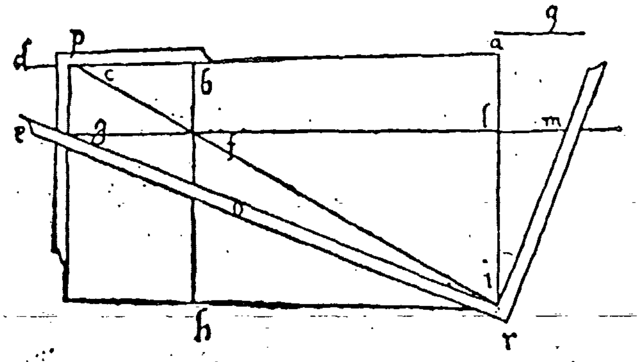
$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

-hvilket kan reduceres til :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

I det følgende geometriske bevis illustrerer Bombelli, at ligningen **må** kunne løses, og at løsningen **må** være reel, selvom Cardanos forudsætning ikke er opfyldt. Til beviset skal foruden passer og lineal også benyttes en "vinkelforskyder".

Dimostratione di Cubo eguale à Tanti, e numero in superficie piana.



Sia 1 3 eguale à 6 1 p.4. e sia la.q.la unità.

Fig.3.1. Bombellis illustration (l'Algebra,s.298)

" Tirisi la.m.e, e faccisi.m.l, che sia paralla.q.cioè sia 1.& l.f.6. cioè quanto è il numero delli Tanti, e sopra detta.l.f.si faccia un parallellogramo, che sia 4. di superficie, cioè quanto il nu. e farà il paralellogramo a.b.f.,.."

(Bombelli 1572,s.298)

(På en ret linie me tegnes linien ml, som er ligesom q og har længden 1, og liniestykket lf, som har længden 6, nemlig koefficienten foran den ukendte, og over lf tegnes et rektangel med et fladeareal på 4, nemlig værdien af konstanten [i ligningen], og rektanglet gøres til abf)

Bombelli fastsætter altså liniestykkets (lf) længde udfra koefficienten foran x og rektanglets (balf) areal udfra konstanten i den ligning, han tager udgangspunkt i.

Ved at følge Bombellis instruktioner fremkommer en del af hans tegning :

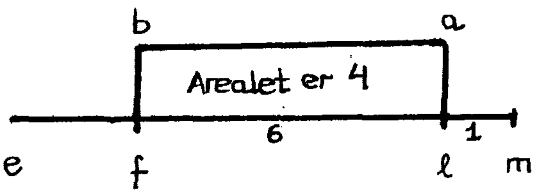


Fig.3.2. Egen illustration

Det følgende i "l'Algebra" er lidt indviklet at forstå. Matematikeren Helmuth Gericke har i sin bog "Geschichte des Zahlbegriffs[6]" udlagt Bombellis bevis på en lidt simplere måde - dog uden at Bombellis oprindelige idé går tabt. I det følgende benyttes hovedsagligt Gerickes gennemgang.

[6] Se iøvrigt litteraturliste : Gericke 1970

Nu forskydes punktet c i ab's forlængelse efter følgende fremgangsmåde : c skal forbindes med f; forlængelsen skal skære al's forlængelse i punktet r. r skal forbindes med punktet m, og på mr rejses i r en ret vinkel. Den rette vinkel skærer lf's forlængelse i e. Punktet c skal nu vælges således, at ce står vinkelret på ca [7]. Herved er lr = x

Den geometriske konstruktion ser nu således ud :

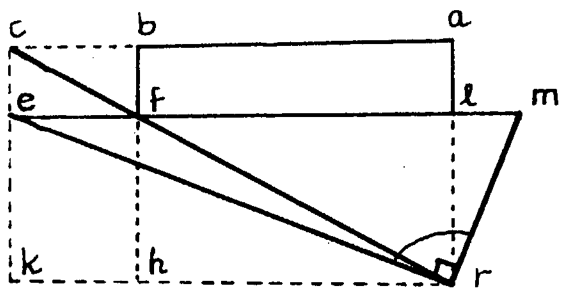


Fig.3.3. Egen illustration.

Beviset er som følgende : Højden lr er mellemproportional med de liniestykker, hvori den deler **hypotonusen (me)**, nemlig ml og le. Altså er liniestykket el = x^2 (idet $(lr)^2 = lm \cdot le = 1 \cdot le$) og rektanglet elrk = $lr \cdot el = x^3$.

Ligeledes gælder at efhk = balf = 4
Dette kan indses ved endnu et kig på fig.3.3. Trekanten acr må have samme areal som trekanten ckr. Ligeledes må det gælde, at cef = cbf, og fhr = flr.
Derfor må rektanglerne efhk og balf nødvendigvis også have det samme areal. Idet balf har arealet 4, (det er givet fra starten), må det tilsvarende rektangel efhk ligeledes have arealet 4.

Rektanglet flrh må have arealet $6 \cdot lr$, idet fl = 6.

Udfra Bombellis figur (Fig.3.1.) fremgår det, at arealet af elrk er det samme som arealet af flrh plus arealet af efhk. (elrk = flrh + efhk), hvilket svarer til, at $(lr)^3 = 6\ lr + 4$.

Løsningen af Bombellis ligning svarer altså til længden af

---

[7] En mere præcis forklaring af, hvordan punktet c skal fastlægges, synes at mangle i Gerickes gennemgang. Det må imidlertid være nødvenigt med en vinkelforskyder til fastsættelsen af c.

liniestykket lr. Længden af et liniestykke **må** være noget reelt. Derfor kan Bombelli fastslå, at der **må** være en reel løsning til $x^3 = 6x + 4$, selvom den ved brug af Cardanos formel ser ud, som om den er kompleks. Senere i denne "Dimonsratione" udregner Bombelli værdierne af figurens linjestykker.

Idet Bombelli viser, at der eksisterer en reel løsning til ligningen på trods af dens tilsyneladende kompleksitet, gør han opmærksom på, at det er nødvendigt at beskæftige sig med at regne med de anderledes kubikrødder (Gericke 1970,s.61).

I afsnit 3.2.2. gennemgås, hvordan Bombelli er i stand til analytisk at omskrive den "irreducible" løsning til noget reelt.

Efter præsentationen af den anderledes kubikrod opstiller Bombelli nogle regler for, hvordan man kan regne med de nye størrelser. Reglerne kan ses nedenfor (til højre for Bombellis regler er operationerne skrevet med nutidig notation) :

" Più via più di meno, fà più di meno.	$(+1)\cdot(+i)=(+i)$
Meno via più di meno, fà meno di meno.	$(-1)\cdot(+i)=(-i)$
Più via meno di meno, fà più di meno.	$(+1)\cdot(-i)=(-i)$
Meno via meno di meno, fà più di meno.	$(-1)\cdot(-i)=(+i)$
Più di meno via più di meno fà meno	$(+i)\cdot(+i)=(-1)$
Più di meno via meno di meno, fà più.	$(+i)\cdot(-i)=(+1)$
Meno di meno via più di meno fà più.	$(-i)\cdot(+i)=(+1)$
Meno di meno via meno di meno, fà meno"	$(-i)\cdot(-i)=(-1)$

(Bombelli 1572,s.169)

Bombelli skriver derefter, at den specielle sammensatte kubikrod, altså kubikroden af et tal og en negativ kvadratrod, ikke kan forekomme i samme løsning, hvis ikke både Binomio (feks. $2 + \sqrt{-2}$) og Residuo (feks. $2 - \sqrt{-2}$) er tilstede - det svarer til, at et komplekst tal altid optræder sammen med dets konjugerede (Gericke 1970,s.61).

> "...tal sorte di R. legate non possono intravenire se non accompagnato il Binomio col suo Residuo (come farebbe R.c.(2.p.di m.R.q.2), il suo residuo farà R.c.(2.m.di m.R.q.2.))..." (Bombelli 1572,s.170)

De komplekse tal er altså ikke hos Bombelli så umulige, som de var det hos Cardano. Bombelli accepterede de nye tal som matematiske størrelser, man kunne regne med.

3.2.2. Kubikroden af et komplekst tal.

I "l'Algebra" gennemgår Bombelli en metode til at omskrive tredieroden af det, vi idag kender som et komplekst tal, til en størrelse uden kubikrod.

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}} \quad \textit{omskrives til} \quad (p + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q})$$

Herved er det senere muligt for ham, at omskrive de løsninger, man får i det irreducible tilfælde til et reelt tal, idet den imaginære del $\sqrt{q}$ på denne måde reduceres bort.

Løsning ved brug af Cardanos formel:

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}}$$

Løsning efter Bombellis omskrivning:

$$(1) \qquad x = (p + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q}) + (p - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q})$$

Som giver et reelt resultat : $x = 2p$.

Nedenfor følger en gennemgang af Bombellis metode:

> "Volendo trouare il lato Cubico di simili specie di Radici, per prattica si terra questo modo. Giongasi il quadrato del numero col quadrato delle R. e delle somma si pigli il lato Cubico, poi si cerchi à tentone di trouare un numero & una R.q.che li loro quadrati gionti insieme faccino tanto, quanto fù il lato cubico detto di sopra, eche del cubato del numero cauatone il triplo delle moltiplicatione del numero del lato, che si cerca (come farebbe) fe si volesse il lato di R.c..." (Bombelli 1572,s.180)
>
> (Søges en side i en terning[8], som svarer til den specielle rod[9], gøres det i praksis ved at holde sig

---

8 Bombelli skriver som Cardano "siden i en terning", når han mener kubikroden af en given størrelse.

9 Den specielle rod Bombelli her henviser til er :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}}$$

til denne metode. Tag tallet i anden potens [a^2] og roden i anden potens[$(\sqrt{b})^2$], og dette skal vælges til at være en side i en terning.
Dernæst ledes famlende efter et tal [p] og en kvadratrod [($\sqrt{q}$)], som begge i anden potens og lagt sammen netop svarer til en side i terningen tidligere beskrevet, og fra tallet i tredie [p^3] trækkes 3 gange tallet gange roden i anden potens [$3 \cdot p \cdot (\sqrt{q})^2$], og dét, der bliver tilbage, er tallet i den side, vi søger [$a = p^3 - 3pq$])

Citatet er direkte oversat, og vanskeligt at gennemskue. Nedenfor følger derfor en gennemgang af hans metode lidt mere detaljeret:

Hvis man er interesseret i at omskrive kubikroden af et komplekst tal, er det ifølge Bombelli nødvendigt at udregne et tal c som nedenfor:

(2) $$c = \sqrt[3]{a^2 + b}$$

Dernæst skal man "famlende" lede efter et tal (p) og en rod ($\sqrt{q}$), således at der gælder, at følgende to ligninger er opfyldt:

(3) $$c = p^2 + q \leftrightarrow q = c - p^2$$

(4) $$a = p^3 - 3pq$$

I sin gennemgang af løsningsmetoden er der ingen form for argumentation. Det er imidlertid klart, at Bombelli har været interesseret i at løse et problem svarende til løsningen af ligningen:

$$\left(\sqrt[3]{a + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}}\right) = \left(p + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q}\right)$$

-hvor a og b er kendte størrelser.

Ved at multiplicere med udtryk svarende til udtrykkene på hver side af lighedstegnet (med modsat fortegn), kunne Bombelli undgå de negative kvadratrødder:

$$\sqrt[3]{(a + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b})}\cdot\sqrt[3]{(a - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b})} = (p + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{q})\cdot(p - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{q})$$

-som kan reduceres til

$$c = \sqrt[3]{a^2 + b} = p^2 + q$$

-hvilket er hans udtryk for c.

Udtrykket for a i (4), kan man komme frem til, ved at udregne ligningen på forrige side:

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b}} = p + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{q} \quad \leftrightarrow$$

$$a + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = (p + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{q})^3 \quad \leftrightarrow$$

$$a + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = p^3 - 3pq + \sqrt{-1}\cdot(3p^2\sqrt{q} - (\sqrt{q})^3)$$

Heraf kan det ses, at realdelen a svarer til udtrykket: $p^3 - 3pq$ og imaginærdelen $\sqrt{b}$, svarer til udtrykket: $3p^2\sqrt{q} - (\sqrt{q})^3$.

Ved at indsætte $q = c - p^2$ i (4) kunne Bombelli bestemme værdien for p, udfra følgende tredjegradsligning (hvor a og c er kendte størrelser):

(5) $$4p^3 - 3cp - a = 0$$

Bombelli benyttede ikke i praksis ligning (5) til at bestemme værdien af p. Istedet gættede han sig frem, hvilket fremgår af nedenstående citat, hvor Bombelli er interesseret i at omskrive $(2 + \sqrt{-121})$, som er løsning til ligningen $x^3 = 15x + 4$:

> "...che giõto il quadrato della R.q.ch'è 121. cõ 4.quadrato del 2 fa 125. che pigliatone il lato cubi co, fara 5. Hor bifogna trouare un nu. che il suo quadr, fia minore di 5, & il suo cubato fia maggior di 2, che fe si ponedi necessità fara R.q.4..."
> (Bombelli1572,s.180).

($\sqrt{121}$ i anden potens, som er 121, plus 4, som er 2 i anden potens, giver 125, og det vælges til at være en side i en terning, altså 5 [10]. Vi skal herefter finde et tal [p], som i anden potens er mindre end 5, og som i tredie potens er større end 2. [idet $p^2 = (5 - q)$ og $p^3 = (2 + 3 \cdot 5 \cdot p)$]. Det må nødvendigvis være $\sqrt{4}$...[hvilket jo er 2])

Som det kan ses, angiver Bombelli ingen grund til, at han vælger værdien af p til at være 2. Det eneste, læseren har at holde sig til, er at $p^2 < 5$ og $p^3 > 2$. Bombelli benytter formodentlig, at han kender løsningen til ligningen i forvejen. Han ved, at p skal være halvdelen af x (se (1)). En anden metode, han kunne have benyttet sig af, var at gætte på en rational rod.

Efter at have fundet værdien for p kan Bombelli finde værdien af q ved at indsætte p og c i (3): $q = (5 - 4) = 1$

Bombellis omskrivning bevirker, at en løsning til eksempelvis $x^3 = 15x + 4$ kan skrives som:

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Bombelli giver således ikke nogen generel metode til at reducere den irreducible løsning til noget reelt, idet han "gætter" sig til værdien af p. Han viser dog læseren, at det **er og skal være muligt** at reducere de komplekst udseende løsningerne til noget reelt.

3.3. Kategorisering af Bombellis matematiske bidrag som ren eller anvendt matematik.

Bombelli arbejdede det meste af sit liv som ingeniør-arkitekt og har derfor ikke kunne undgå at berøre emnet matematik. Det store postyr omkring Cardanos "Artis Magnae" kan have bevirket, at Bombelli fik lyst til at læse "Artis Magnae", og derved blev interesseret i lige netop algebra. Der kan ikke herske nogen tvivl om, at Bombelli **har** læst Cardanos bog, idet han adskillige gange i "l'Algebra" henviser til Cardano og til Cardanos matematik.

---

10 $$c = \sqrt[3]{a^2 + b} = \sqrt[3]{4 + 121} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Bombellis formål med bogen var, som tidligere skrevet, at skrive en lærebog. Hans holdning til, **hvordan** han kunne lære læseren om algebra, ændrede sig tydeligvis i løbet af hans korte forfatterskab. I begyndelsen havde han den indstilling, at teorien skulle underbygges af en masse praktiske eksempler, således at det var nemmere for læseren at forstå teorien. Efter studierne af Diophant strøg Bombelli alle praktiske eksempler og skrev istedet rene talopgaver.

I efterskriftet til l'Algebra (Bombelli 1572) skriver Bombelli, at hvis læseren ikke efter læsningen af hans bog forstår algebra, så kan læseren lige så godt opgive at lære det, alt andet vil være spild af tid. Hans holdning til at "undervise" i matematik ændrede sig således fra opfattelsen af, at alle kan lære algebra, bare det bliver forklaret ordentligt, til opfattelsen af, at kun de, der kan abstrahere fra praktiske eksempler, kan lære algebra.

Bombellis matematiske bidrag klassificeres som **ren** matematik, idet han ikke blev motiveret til at udvikle lige netop den matematik, vi har gennemgået, af et problem uden for matematikken.

Det er imidlertid interessant, at Bombelli i forordet til "l'Algebra" nævner utallige områder udenfor matematikken, der kan drage nytte at hans bog, og derudover mener, at "..alle andre videnskaber har brug for den [matematikken] ". Han har øjensynligt haft en idé om, at algebra havde en anvendelse uden for matematikken, og at han på en eller anden måde udviklede et redskab til andre videnskaber.

Tiden mellem Bombelli og Euler.

Efter Renaissancen udviklede matematikken sig mere i ikke-geometrisk retning. (Boyer 1968)

Den franske matematiker François Viète (1540-1603) fandt en geometrisk metode til bestemmelse af den positive, reelle rod i det irreducible tilfælde. Ved hjælp af passer, lineal og en vinkeltredeling var han i stand til at løse en vilkårlig trediegradsligning. (Lützen 1985)

I 1629 i "Invention nouvelle en l'Algebra" undersøgte Albert Girard (1562-1633) forholdet mellem rødder og koefficienter i et polynomium. Han tillod både negative og imaginære størrelser som rødder. Undersøgelsen var med til at bane vejen for opdagelsen af, at antallet af et polynomiums rødder svarer til polynomiets grad. (Boyer 1968)

Senere gav René Descartes (1596-1650) et bevis for Girards arbejde med rødder og koefficienter - dét der senere skulle blive kendt som "algebraens fundamentalsætning". Han viste, at det var nødvendigt at acceptere både negative og komplekse rødder i et polynomium for at få antallet af rødder til at svare til polynomiets grad. (Mahoney 1970)

I en størrelse som $(a + b\cdot\sqrt{-1})$ kaldte Descartes i 1637 a for "realdel" og b for "imaginærdel". (Smith 1958)

De imaginære tal var nu mere eller mindre accepterede, men endnu havde ingen forsøgt at lave en geometrisk fortolkning af dem. Man havde fra grækernes matematik altid fået geometriske fortolkninger af de forskellige teorier. (Smith 1958)

John Wallis (1616-1703) var den første, der gjorde et nogenlunde vellykket forsøg på at lave en geometrisk repræsentation af de imaginære tal. Wallis viste i 1685 i "Algebra" hvordan man geometrisk opfattede komplekse rødder i en andengradsligning med reelle koefficienter. En størrelse som $(a + b\cdot\sqrt{-1})$ blev opfattet som (a,b). (Kline 1972)

Det lykkedes for Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) at vise den almene gyldighed af Cardanos formel, selv i det irreducible tilfælde - idet han opstillede én formel, som han viste, var brugbar i alle tilfælde af trediegradsligninger. Han beviste også, at i det irreducible tilfælde var det umuligt at klare sig uden de imaginære størrelser. (Hofmann 1970)

Det næste vigtige skridt i udviklingen af de komplekse tal, blev gjort af Roger Cotes (1682-1716) og Abraham de Moivre (1667-1754), som fandt en sammenhæng mellem trigonometriske og eksponentielle funktioner.

I 1714 opstillede Cotes i "Philosophical Transaction" og senere i "Harmonia Mensurarum" :

$$\log(\cos\phi + \sqrt{-1}\cdot\sin\phi) = \sqrt{-1}\cdot\phi$$

De Moivre opstillede i 1730 i "Miscellanea Analitica" formlen:

$$(\cos\phi + \sqrt{-1}\cdot\sin\phi)^n = \cos n\phi + \sqrt{-1}\cdot\sin n\phi,$$

for ethvert heltal større end nul.

I det følgende kapitel vises, hvorledes Leonhard Euler (1707-1783) redegjorde for komplekse eksponentialfunktioner og dermed fandt en sammenhæng mellem trigonometriske og eksponentielle funktioner, der gjaldt i alle tilfælde.

Kapitel 4

Leonhard Euler.

(1707-1783).

4. Leonhard Euler (1707 - 1783).

Leonhard Euler blev født i Basel i 1707. Han fik sin første undervisning i matematik af sin far Paul Euler, som udover at være præst også var matematisk begavet. (Cajori 1980,s.232)

Faderen ønskede, at Euler skulle læse teologi, og derfor blev Euler indskrevet på teologistudiet i Basel. På universitetet skulle alle nye studerende deltage i de obligatoriske matematikforelæsninger afholdt af Johann Bernoulli (1667-1748).
J. Bernoulli opdagede hurtigt Eulers store talent for matematik, og han overtalte derfor Paul Euler til at lade sin søn læse matematik. (Thiele 1982,s.17-23).

I 1727 rejste Euler til St. Petersborg på opfordring af J. Bernoulli og dennes søn, Daniel Bernoulli. Der blev han tilknyttet den matematiske afdeling på akademiet, og i 1731 blev han ansat som professor i fysik.

Akademiet stod for forskning og undervisning men var også forpligtet til at løse andre og mere ingeniørprægede opgaver. Euler deltog i løsningen af alle disse mangeartede opgaver.
Fra 1933 og i de efterfølgende år arbejdede han med stor succes på at kortlægge det russiske territorium for akademiet. Senere beskæftigede han sig med problemer i forbindelse med skibsbygning og navigation.

I 1741 flyttede Euler, efter en invitation, sig selv og den voksende familie han havde stiftet i St. Petersborg, til Berlin.
I Berlin kom Euler i praksis til at lede akademiet for matematik, men han fik dog aldrig den officielle ledertitel. Arbejdet på akademiet, bevirkede at han kom til at bruge en del tid på administrative opgaver såsom at lede observatorierne, den botaniske have og ansætte personale. Euler blev derudover sat til at organisere statslotterier, besvare spørgsmål om forsikring samt mere ingeniørprægede jobs som f.eks. at anlægge kanaler.

Mens Euler boede i Berlin fortsatte han med at arbejde for akademiet i St. Petersborg, fortrinsvis med matematiske spørgsmål.

I 1766 rejste Euler og hans familie tilbage til St. Petersborg, hvor han blev til sin død i 1783.

Euler var utroligt produktiv indenfor stort set ethvert område af matematikken.

> "One finds his name in all branches of mathematics: there are formulas of Euler, polynomials of Euler, Euler constants, Eulerian integrals, and Euler lines."
>
> (Kline 1972,s.403)

Det arbejde, han publicerede, var af så høj kvalitet og kom ud så jævnligt, at han i lange perioder regnede de priser, han fik for det, som en fast husstandsindkomst. (Ibid)

Det meste af Eulers arbejde blev dog kun publiceret i artikelform, mens han levede. Det var først efter hans død, at man begyndte at bearbejde og udgive de enorme mængder af artikler, breve og notater, han havde skrevet.

Euler fik mange af de ideer, han huskes for idag, i sin ungdom, men mange af dem blev først gennemarbejdet og præsenteret for offentligheden årtier senere. Derfor kan det være meget vanskeligt at placere hans arbejde i kronologisk orden.

På Eulers tid havde man accepteret nødvendigheden af de komplekse tal. Om de komplekse rødder, man ofte finder i polynomier af n'te grad, skrev Euler i Vol VI af Eulers "Opera Omnia" i afsnittet "Recherches sur les racines imaginaires des equations", 1747.

> "3. Or il arrive fort souvent que toutes ces racines ne sont pas des quantités réelles, et que quelques-unes, ou peut-être toutes, sont de quantités imaginaires. On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni égale à zéro; ce sera donc quelque chose d'impossible, comme par example $\sqrt{-1}$, ou en général $a+b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'est ni positive, ni négative, ni zéro."
>
> (Opera Omnia, vol. VI,s.)

> "Men det hænder meget ofte, at alle rødderne ikke har reelle værdier, og at nogle, eller måske alle, har imaginære værdier. Man kalder dem imaginære værdier, dem som hverken er større end nul, mindre end nul eller det samme som nul. De er altså noget umuligt, som f.eks. $\sqrt{-1}$, eller generelt $a + b\sqrt{-1}$, da en sådan

værdi hverken er positiv, negativ, eller nul."

Euler begyndte først at bruge navnet "i" i 1794, hvor han præsenterede det for St. Petersborg akademiet.
I det følgende har vi alligevel valgt at skrive "i", hvor Euler skrev "$\sqrt{-1}$".

Blandt alt det matematik Euler har lavet, har vi valgt at koncentrere os om hans udledning af de komplekse eksponential funktioner, idag kendt som Eulers Formler.

4.1 Baggrunden for Eulers formler.

Eulers motivation for at udlede det, der kendes som Eulers formler, var formentlig følgende:

Det var tidligere blevet foreslået af adskillige matematikere, at der skulle være en sammenhæng mellem de trigonometriske og de hyperbolske funktioner, via de komplekse tal idet arealet under en cirkel kunne skrives $\sqrt{-1}$ gange arealet under en hyperbel.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{-1}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

(Kline 1972,s.404)

Fra 1700 til 1716 brevvekslede matematikerne G.W. Leibniz (1646-1716) og J. Bernoulli om deres opdagelser indenfor matematikken. I tolv breve skrevet mellem marts 1712 og juli 1713 opstod der imidlertid en kontrovers mellem dem om, hvordan man kunne tage logaritmen til negative og imaginære tal. Det var formentlig denne kontrovers, der var den egentlige årsag til, at Euler begyndte at beskæftige sig med sammenhængen mellem trigonometriske og hyperbolske funktioner.
(Eulers Opera omnia, Übersicht über die Bände 17,18,19 der erste Serie, s XVIII)

Kontroversen mellem Leibniz og Bernoulli.

Leibniz startede denne kontrovers, idet han i et brev til Bernoulli bemærkede, at logaritmen til et negativt tal var imaginært eller umuligt.

J. Bernoulli erklærede, at han ikke var enig i dette. Han mente, at logaritmen til et negativt tal (-x) ikke kun var noget reelt, men også lig logaritmen til det samme positive tal (+x).

Altså at log(+x) = log(-x).

Bernoulli argumenterede for dette ved at differentiere på følgende måde:

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

og

$$d(\log -x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$$

Til det argument svarede Leibniz, at den sædvanlige regel for differentiation af logaritmer kun gælder for positive x, og dermed stoppede dén diskussion.
(Eulers "Opera Omnia"serie 1 vol. 19 s.418-419).

I 1727-1731 diskuterede Euler og Bernoulli emnet, og Bernoulli havde ikke ændret mening i de forgangne år. Euler var uenig med Bernoulli, men havde dog ikke et alternativt bud på, hvordan logaritmen til negative tal skulle opfattes før nogle år senere.

I 1749 fik Euler udgivet en artikel, hvori han pointerede at på trods af, at den sædvanlige regel for differentiation af logaritmer var generel, og derfor også passede på negative tal x, beviste Bernoulli ikke det han ville bevise med sit argument. Euler påpegede, at bare fordi differentialkvotienterne af hhv. log(x) og log(-x) var ens, var det absolut ikke ensbetydende med at log(x) = log(-x).[1]

Eulers diskussion med Bernoulli satte ham formentlig igang med bla. at overveje, hvordan logaritmen til komplekse tal defineres, og han kom flere gange meget tæt på det, vi idag kender som "Eulers formler". Det var dog først i 1748, hvor han fandt ud af at

[1] I dag er man enig om følgende definition af logaritmen til et negativt tal: $\log(-x) = \log(x) + i\pi + 2ki\pi$, hvor k er et helt tal.

$$\lim (1+(y/n))^n = e^y \text{ for } n \to \infty$$ [2]

at han benyttede denne grænseværdi til at udlede og offentliggøre en endelig udgave af "Eulers formler".[3](Opera Omnia, Übersicht über die Bände 17,18,19 der erste Serie, s. XVIII)

4.2. Udledningen af Eulers formler.

Det vil i det følgende blive vist, hvordan Euler kæder trigonometriske og eksponentielle funktioner sammen via de komplekse tal. Hans egentlige formål med afsnittet er at udlede en formel til brug for approximation af π.

Gennemgangen er lavet så tæt på Eulers som muligt.

I "Opera Omnia" vol VIII, cap. VIII "De Quantitatibus Transcendentibus ex Circulo Ortis" fra 1748, udleder Euler de formler, der idag bliver kaldt Eulers formler.

"126.[4] Post logarithmos et quantitates exponentiales considerari debent arcus circulares eorumque sinus et cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis logarithmis et exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit"

"126. Efter logaritmer og eksponentielle størrelser skal vi undersøge cirkelbuer og deres sinus og cosinus, ikke kun fordi de udgør en anden type transcendente størrelser, men også fordi de kan beregnes udfra disse logaritmer og eksponentialfunktioner, når imaginære størrelser er involverede"[5]

---

[2] På Eulers tid skrev man endnu ikke grænseværdier op som vi gør idag, istedet skrev man $(1 + (y/n))^n = e^y$, og pointerede at n var et stort tal.

[3] Euler var formentlig ikke klar over at englænderen Roger Cotes havde lavet noget nær "Euler-formlerne" i 1714.

[4] Eulers nummerering.

[5] Vi har ændret lidt på ordstillingen i slutningen af citatet.

Euler starter med at opgive omkredsen af en cirkel med diameteren 1, et tal der ikke kan udtrykkes vha. rationelle tal, men er fundet ved approximation:

3.14159.......(o.s.v., 127 decimaler opgiver han ialt)

Dette tal vælger han at kalde π [6]

Han vil derefter betragte en cirkel, hvis radius er 1, således at π er længden af halvdelen af cirkelbuen.
Hvis buen (Arcus) z er en vilkårlig bue på cirklen, kan man opskrive buens sinus eller cosinus

sin.A.z eller kun sin.z
og
cos.A.z eller kun cos.z

Derefter opgiver Euler sinus og cosinus for en række buer målt i π, han opgiver "idiotformlen" [7], definerer tangens og cotangens, samt en lang række af additionsformler.

Så starter han på selve udledningen:

Idet

$$(\sin.z)^2 + (\cos.z)^2 = 1$$

fås ved faktorisering

$$(\cos.z + i\sin.z)(\cos.z - i\sin.z) = 1$$

hvorefter han, inspireret af dette udtryk, argumenterer for A. De Moivres regel [8]. Reglen bliver præsenteret i 133.:

---

[6] Det var dog ikke Euler selv, men formentlig englænderen William Jones (1675-1749), der, i sin "New introduction to the mathematics" fra 1706, gav omkredsen af en cirkel med diameteren 1 navnet π.

[7] $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, også kaldet grundrelationen.

[8] Her benytter Euler A. de Moivres regel, det er dog Eulers forlægger A. Krazer der gør opmærksom på dette.

133.

....

$(\cos.z \pm i\sin.z)^2 = \cos.2z \pm i\sin.2z$
$(\cos.z \pm i\sin.z)^3 = \cos.3z \pm i\sin.3z$

kan generaliseres til

(1) $(\cos.z \pm i\sin.z)^n = \cos.nz \pm i\sin.nz$

hvilket kan omskrives til[9]

$$(\cos.nz + i\sin.nz) \pm (\cos.nz - i\sin.nz)$$
$$= (\cos.z + i\sin.z)^n \pm (\cos.z - i\sin.z)^n$$

hvilket er ensbetydende med: (ved +)

$$(2)\ \cos.nz = \frac{(\cos.z + i\sin.z)^n + (\cos.z - i\sin.z)^n}{2}$$

tilsvarende kan sin.nz skrives som: (ved -)

$$(3)\ \sin.nz = \frac{(\cos.z + i\sin.z)^n - (\cos.z - i\sin.z)^n}{2i}$$

Resten af 133. bruger Euler på at vise hvordan man v.h.a. Binominalserier kan approximere hhv. sin.nz og cos.nz.

134. "Sit Arcus Z infinite parvus; erit sin.z = z et cos.z = 1;"

lad buen z være uendelig lille; det gælder så at sin.z = z og cos.z = 1 [10]

Derefter bruger Euler en del plads på at lave approximationer for h.h.v. cos.nz, sin.nz, tan.nz og cot.nz med mange decimalers nøjagtighed vha. binominalserier, hvorefter han i 138. fortsætter med sin udledning med henvisning til 133.

---

[9] Vores mellemregninger.

[10] Når z måles i radian.

138. lad buen z fra 133.[(2) og (3)] være uendelig lille og lad n være et uendeligt stort tal k, [11], således at kz får den endelige værdi v.

Vi har altså at nz = v og z = v/k, som medfører at sin.z = v/k og cos.z = 1; ved substitution i hhv. (2) og (3) fås:

$$\cos.v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{k}\right)^k + \left(1 - \frac{iv}{k}\right)^k}{2}$$

og

$$\sin.v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{k}\right)^k - \left(1 - \frac{iv}{k}\right)^k}{2i}$$

Euler har tidligere vist, at det gælder at

$(1 + y/k)^k = e^y$ [12]

hvor e er grundtallet for den naturlige logaritme, og k er et stort tal. Hvis man indsætter hhv. iv = y og -iv = y fås

Eulers formler:

$$\cos.v = \frac{(e^{iv} + e^{-iv})}{2}$$

og

$$\sin.v = \frac{(e^{iv} - e^{-iv})}{2i}$$

Udfra disse formler kan det ses, hvordan imaginære eksponentialer kan reduceres via sinus og cosinus af reelle buer. Formlerne kan omskrives til:

$e^{iv} = \cos.v + i\sin.v$ og
$e^{-iv} = \cos.v - i\sin.v$

[11] I den originale udledning kaldes k for i, bogstavet er ændret for at forhindre misforståelser.

[12] Eller rettere, at udtrykket konvergerer mod e^z når k bliver stor.

Euler slutter afsnittet med at vise, hvordan man ved hjælp af "Eulers formler", tangens og det, vi idag kender som Taylorrækken for $(\log(1+x) - \log(1-x))$, kan approximere π vilkårligt nøjagtigt.

Bl.a. Leibniz havde dog allerede mange år forinden, i 1682, lavet en tilsvarende rækkeudvikling til approximation af π.(Opera Omnia,vol.VIII,s.150).
Af den grund og fordi Eulers approximation af π ikke har nogen direkte relevans for udviklingen af de komplekse tal, vil der ikke blive gjort rede for metoden til approximation af π her.

Opsummering.

Eulers formål med at udlede formlerne var altså at finde et udtryk til approximation af π.

Han startede med at opskrive "idiotformlen" og dennes faktorisering. Inspireret af faktoriseringen argumenterede[13] han for de Moivres regel. Vha. de Moivres regel fik han udtryk for cos.nz og sin.nz.

Han lod derefter vinklen z være meget lille, sådan at $\sin.z \approx z$ og $\cos.z \approx 1$.

Derefter satte han $z = v/k$, hvor v er et fast tal og k uendelig stor, hvilket stadig giver et meget lille z.

Dette benyttede han i de udtryk, han fik fra de Moivres formel, og fandt grænseværdierne af (2) og (3) for $n \to \infty$.

Disse grænseværdier er dem, vi idag kender som Eulers formler.

Grænseværdierne (Eulers formler) brugte han senere til at approximere π.

[13] Argumentationen blev ikke vist i gennemgangen.

4.3. Kategorisering af Eulers Formler som ren eller anvendt matematik.

Udfra Eulers lange række af ingeniørprægede opgaver kan man slutte at han må have arbejdet en del med anvendelse af matematik.

Det antydes endvidere flere steder at han også var særdeles interesseret i anvendt matematik. Om venskabet med Daniel Bernoulli er f.eks. skrevet

> "Daniel Bernoulli, with whom Euler was connected not only by personal friendship but also by common interests in the field of applied mathematics."
> (A.P. Youschkevitch, s.469)

Morris Kline skriver i forbindelse med Eulers anvendelser af matematik:

> "The applications were said to be an exuse for his mathematical investigations; but there can be no doubt that he liked both" (Kline 1972, s.402)

Formålet med det kapitel, hvor udledningen af de komplekse eksponentialfunktioner optræder, er imidlertid at vise, hvordan π kan approximeres. Man kunne dog allerede approximere π vilkårligt nøjagtigt før Eulers tid. Det tyder derfor på, at Euler ikke skulle løse et konkret problem, hvor han havde brug for en god approximation til π.

I "Sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires" skriver Euler endvidere selv følgende om diskussionen mellem Leibniz og Bernoulli:

> " 1. Dans le commerce littéraire de MM. Leibnitz et Jean Bernoulli, on trouve une grande controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, controverse qui a été traitée, de part et d'autre, avec beaucoup de force, sans pourtant que ces deux grands hommes fussent tombés d'accord sur cette matière, quoiqu'un remarque d'ailleurs entr'eux une très parfaite harmonie sur tous les autres points de l'Analyse. Cette dissension paraît d'autant plus

remarquable qu'elle roule sur un article de cette partie des Mathématiques qu'on nomme pures, et qu'on ne croit ordinairement susceptible d'aucune contestation, tout y etant fondé sur les plus rigoureuses démonstrations. Car on sait que les autres questions sur lesquelles les Mathématiciens ne sont pas d'accord appartiennent à la partie appliquée des Mathématiques, où les diverses manieres d'envisager les objets et de les ramener à des idées mathématiques peuvent donner lieu à des controverses réelles; et on se vante même souvent qu'elles sont tout à fait bannies de l'Analyse ou des Mathématiques pures."

(Opera Omnia,vol 19,s.417,1749)

"1. I den skriftlige forbindelse mellem M.M. Leibnitz og Jean Bernoulli, finder man en stor kontrovers om logaritmerne til negative og imaginære tal, en kontrovers som er blevet behandlet, af både den ene og den anden, med meget stor dygtighed, uden dog at disse to store mænd er blevet enige om dette emne, på trods af at man ellers bemærker en meget fin enighed mellem dem om de andre dele af analysen. Denne uenighed er så meget des mere bemærkelsesværdig som (det at) den er fremkommet i en artikel i den del af matematikken som man kalder ren, og som man almindeligvis ikke finder egnet til betvivlelse, alt er grundlagt på de strengeste bevisførelser. Thi man ved at de andre spørgsmål om hvilke matematikerne ikke er enige tilhører den anvendte del af matematikken, i hvilken de forskellige måder at betragte objekterne på og at reducere til matematiske ideer **kan** give plads til de reelle [egentlige] kontroverser; og man roser sig ofte af, at de [reelle kontroverser] er helt og aldeles udelukket fra analysen eller den rene del af matematikken."

Så Euler betegner altså selv baggrunden for "Eulers Formler" som ren matematik.

Tiden mellem Euler og Wessel

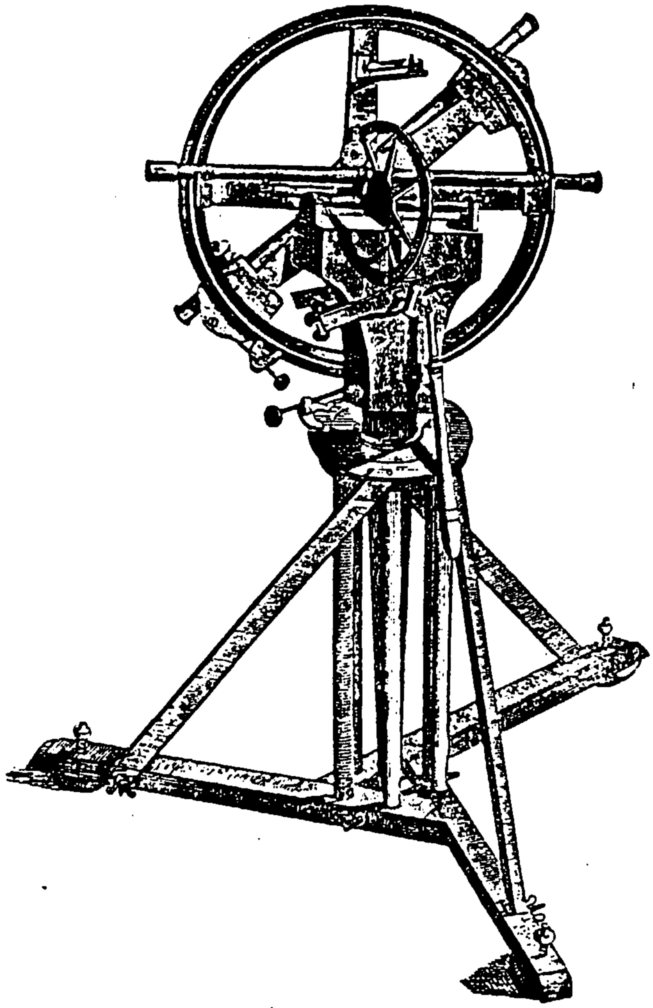
Der skete ikke noget væsentligt for udviklingen af teorien for de komplekse tal mellem Euler og Wessel.

Normalt får Gauss æren for den komplekse talplan, men egentlig var Wessel den første med dette bidrag. I det følgende vil det blive vist, hvordan han indførte den komplekse talplan.

Kapitel 5.

Caspar Wessel.

(1745-1818).



Det geografiske instrument.

5. Caspar Wessel (1745-1818).

Caspar Wessel er blevet kendt indenfor matematikken på grund af én eneste publikation, afhandlingen: **"Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning"** (1799). Wessel tilskrives æren for i denne afhandling at have givet den første geometriske repræsentation af de komplekse tal.

Wessel er født i Jonsrud, Norge 1745, og han var i familie med flere berømtheder: søhelten Tordenskjold, alias Peder Wessel, var hans grandonkel, digteren Johan Herman Wessel[1] var den ene af hans brødre, mens en anden bror (Ole Christopher Wessel) var justitsråd[2] og geodæt.

Det meste af sit liv tilbragte Wessel i Danmark, hvor han i 1763 blev student ved Københavns Universitet. I 1769 blev han geodætisk landmåler og i 1778 tog han juridisk embedseksamen med højeste karakterer.

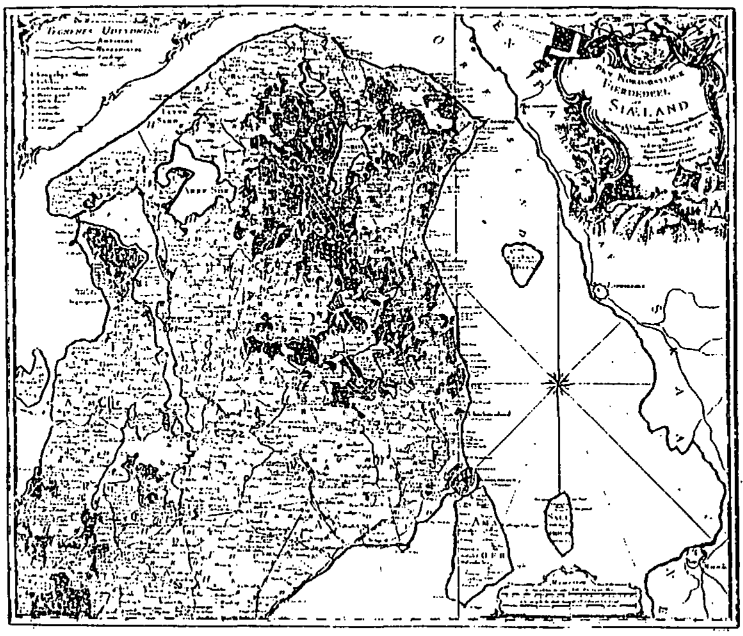
Wessel arbejdede hele sit liv med landmåling. Allerede før han blev rigtig landmåler, havde han været ansat af Videnskabernes Selskab som landmålerassistent hos sin broder Ole Christopher Wessel, der også var geodæt. (Wessel 1815).

I tiden fra 1768 til 1779 opmålte og optegnede Wessel store dele af Sjælland og Fyn (Wessel 1815). På næste side ses Wessels kort fra 1768 over den nordøstlige fjerdedel af Sjælland:

---

1 Om Caspar Wessel skrev han følgende digt:
"Han tegner Landkort og læser Loven,
han er saa flittig som jeg er doven."

2 Titel for medlemmer af Højesteret (fra 1661, titlen sidst tildelt i 1912).



Wessels kort over den nordøstlige fjerdedel af Sjælland. (Bramsen 1952)

Videnskabernes Selskab var de første, der tegnede egentlige kort over Danmark, før havde man kun haft skitser (O. Andersen pers.med. 1991). Kortlægningsarbejdet strakte sig fra 1757-1843, og omfatter ialt 24 kort. Den geografiske landmåler Thomas Bugge var lederen af dette arbejde, der dog krævede mange hjælpere. Wessel nævnes her som den ubetinget dygtigste (E. Andersen 1968). I 1781 var det da også Wessel, som den oldenborgske regering udbad sig til at foretage opmålinger af hertugdømmet Oldenburg. (Molbech 1843).

Wessel var også "Trigonometrisk Operatør"[3], og i 1796 fuldendte han de trigonometriske operationer i Jylland, Slesvig og Holsten. Samme år skrev han den afhandling, han senere skulle blive husket for. Senere var Wessel atter beskæftiget med geodætiske opmålinger, og den 13. juli 1798 fik han Kongelig Bestalling med titlen **Landmålings Inspektør**. I 1805 søgte han pga. sygdom sin afsked. (Wessel 1815)

I "Dansk Biografisk Leksikon" betegnes Wessel som matematiker (Heegaard 1984) mens det i "Scientific Biography" fremhæves, at

3 En "Trigonometrisk Operatør" er en, der udfører vinkelmålinger m.m. (O. Andersen pers.med. 1991)

Wessel ikke var professionel matematiker (Jones 1970). I Wessels egen "levnetbeskrivelse" er der imidlertid heller ingen omtale af matematik (Wessel 1815), og i afhandlingen står der "Af Caspar Wessel, Landmaaler". Af de karakterer, han opnåede i de matematiske fag, ved det, der svarer til studentereksamen idag, ser det dog ud til, at han har været dygtig til matematik:

> "...Geometri: bene. Arithmetik: bene. Sphærica: ben-bene" (Brun 1962,s.95)

Ved "Examen Philosophicum[4]" fik han bedste karakter, optime, i de naturvidenskabelige fag: logica, methaphys., physica, geometr., arithmet. og sphærica (Brun 1962).

Noget af en matematiker må der altså have været gemt i Wessel, og desuden var landmålere på Wessels tid oftest også matematikere (O. Andersen, pers.med. 1991).

5.1. Wessels afhandling.

De følgende punkter beskriver hovedindholdet af Wessels afhandling:

-Indførelse af den komplekse talplan.

-Regning med to-og tre-dimensionale vektorer.

-Beregning af ukendte sider og vinkler i plane og sfæriske polygoner[5] ved brug af komplekse tal.

(Oversigt over afhandlingen kan ses i bilag D.)

Wessel præsenterer regneoperationer for vektorer, hvor han indfører den komplekse talplan og angiver, hvordan man multiplicerer vektorer (I). Dette bruges i beregninger på plane polygoner i to dimensioner, hvor ubekendte retninger og sider i en polygon søges bestemt (II).

[4] "Examen Philosophicum" var en eksamen man tog i forbindelse med, at man startede på universitetet.

[5] En sfærisk polygon er en lukket kurve på en kugleflade sammensat af sammenhængende storcirkelbuer, som ikke "krydser sig selv".

Wessel går dernæst over til at regne med vektorer i tre dimensioner og indfører i denne forbindelse et rumligt koordinatsystem bestående af to imaginære og én reel akse (III). En vektor i rummet udtrykkes således: $x+\eta y+\varepsilon z$, hvor η og ε er enhederne på de imaginære akser. Wessel opstiller regler for, hvordan man i rummet ganger med tre-dimensionale vektorer ved kun at ændre på to koordinater ad gangen. På denne måde bliver problemet det samme som at multiplicere to-dimensionale vektorer i planen, og de tidligere opstillede regler herfor kan benyttes i rummet.

Ovenstående anvendes derefter på opløsningen af sfæriske polygoner[6], hvis relationer udledes (IV). Wessel behandler herefter specielt sfæriske trekanter (V).

Da Wessels beregninger med tre-dimensionale vektorer ikke er helt i overensstemmelse med den gældende teori[7], vil vi ikke komme nærmere ind på dette i den matematiske gennemgang af de komplekse tals udvikling. Det skal dog ikke forstås sådan, at Wessel her direkte laver fejl, faktisk får han sine beregninger til at lykkes. Wessel er også selv klar over, at han ikke følger de gældende algebraiske operationer, hvilket fremgår af overskriften til III: "Derefter bestemmes Directionen af Linier i forskiellige Planer ved en ny Operationsmethode, der ikke er algebraisk".

5.1.1. Det matematiske formål med afhandlingen.

Wessel skriver en lang indledning til selve afhandlingen, hvor han nøje redegør for, hvad der er dens indhold og formål. Alligevel hersker der nogen uenighed om, hvorvidt Wessel har ønsket at finde en geometrisk fremstilling af de komplekse tal, eller om han indførte komplekse tal for at lette regningen med geometriske størrelser. (Det vil sige, om udgangspunktet var algebraisk eller geometrisk). Denne uenighed behandles kort sidst i afsnittet.

Wessel beskriver afhandlingens indhold og formål således:

"Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Direc-

---

[6] At opløse sfæriske polygoner vil sige at finde udtryk for ubekendte sider i en polygon.

[7] Fx er den distributive lov ikke opfyldt, idet den ene af de imaginære enheder (her ηy) holdes udenfor multiplikation:
$(x+\eta y+\varepsilon z) \cdot (\cos v+\varepsilon \sin v) = \eta y + (x + \varepsilon z)\cdot(\cos v + \varepsilon \sin v)$.

tionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier[8] burde udtrykkes, naar af een eneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction". (Wessel 1799,s.469)

Her skriver Wessel således, at det er et spørgsmål om at repræsentere vektorer analytisk.

For at kunne opfylde dette formål, lægger Wessel to sætninger til grund:

> "Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer[9] kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles." (Wessel 1799,s.469)

At "forestilles ved deres Tegn" skal forstås som at udtrykke en vektor ved brug af algebraiske symboler (a + ib). Det vil sige som et tegn, der på én gang udtrykker liniens/vektorens modulus og argument i modsætning til at udtrykke vektoren geometrisk, hvor en linie er givet ved henholdvis modulus og argument.

> "Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Hensigt til de øvrige Problemet være uopløseligt."
> (Wessel 1799,s.469)

Wessel påpeger her, at sådan som reglerne er, så er det kun muligt at lave algebraiske operationer, der ændrer fra positiv til negativ (og omvendt), dvs. operationer på en tallinie.

Wessels forslag går dernæst ud på at udstrække de algebraiske operationers betydning til at give mening i uendeligt mange tilfælde. Ved at udvide til planen vil man nemlig kunne frembringe uendeligt mange forandringer i liniernes retninger, og disse retningsændringer vil Wessel gerne have udtrykt ved algebraiske sym-

---

[8] Dette svarer til det, som man idag ville kalde vektorer.

[9] Algebraiske operationer: addition, subtraktion, multiplikation, division, roduddragning og potensopløftning.

boler.

Viggo Brun beskriver Wessels idé som følger:

> "Wessel stiller seg nå følgende opgave: Kan jeg generalisere denne regningen med piler til å gjelde piler i planet med begynnelsespunkt i origo? Man står da temmelig fritt, men må passe på at reglene blir slik at de er gyldige også når pilene ligger langs en rett linje (skalaen) som her er valgt til x-akse." (Brun 1962,s.107)

Begrundelsen for at udvide det kendte talrum (tallinien) til et nyt (talplanen) er tilsyneladende, at det vil gøre det nemmere at forstå geometrien:

> "....Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler. Og da det synes upaatvivleligt, at geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes, og underkastes de algebraiske Operationsregler, end naar den ved Figurer, og kun i enkelte Tilfælde, skal forestilles: saa synes det ogsaa ei alene tilladeligt, men endog gavnligt, at betiene sig af Operationer, der udstrækkes til flere Linier, end de ligestilte (de af samme Retning) og de modsatte." (Wessel 1799,s.470-71)

Wessel foretrækker **analytisk fremstilling af vektorer fremfor geometrisk**, hans mål er at kunne udtrykke vinkler analytisk, så man også i denne forbindelse kan bruge de algebraiske operationers regler.

Uenighed om fremgangsmåden.

Om det var Wessels formål at finde en geometrisk betydning af de komplekse tal, eller om han indførte de komplekse tal for at gøre det lettere at forstå geometrien, er der delte meninger om.

I flere historiske matematikbøger omtales Wessel i forbindelse med den første geometriske fremstilling af de komplekse tal. I afhandlingen er der naturligvis en beskrivelse af en kompleks talplan, men af ovennævnte citat fra side 470-71 synes det at fremgå, at Wessel ønskede at betegne geometrien analytisk, idet "geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes". Denne opfattelse af Wessels arbejde ses fx i "Scientific Biography":

> "Thus Wessel's development proceeded rather directly from a geometric problem, through geometric-intuitive reasoning, to an algebraic formula." (Jones 1970,s.280)

S.A. Christensen ser helt anderledes på Wessels formål:

> "...han vilde have tillagt de imaginære (den Gang kaldet umulige) Størrelser en virkelig Betydning i Lighed med de reelle Størrelser, og dette naaede han gennem den geometriske Fremstilling af Størrelserne, som vi skulle se nedenfor." (S.A. Christensen 1897,s.15)

På Wessels tid blev imaginære tal ifølge S.A. Christensen kaldt for "umulige", og hos Bugge ses betegnelsen "umuelige eller indbildte Størrelser" brugt (Bugge 1795,§4). Et af de steder, hvor Wessel omtaler umulige operationer, er i indledningen, udfra hvilket S.A. Christensen muligvis har draget sin konklusion:

> "Anledningen dertil var, at jeg søgte en Methode, hvorved de umuelige Operationer kunde undgaaes, og da denne var funden, anvendte jeg samme, for at overbevises om nogle bekiendte Formlers Almindelighed." (Wessel 1799,s.471)

Om Wessel her henviser til de komplekse tal, eller til operationer i planen, er svært at se. Hvis det er de komplekse tal, kan Christensen have ret i, at Wessel ønsker at forstå de komplekse tal, men det synes bemærkelsesværdigt, at Wessel starter med at se på vektorer i planen og først senere indfører de komplekse tal. Dette tyder på, at udgangspunktet har været geometrisk.

Hvordan de komplekse tal indføres ses der nærmere på i det følgende.

5.2. Wessels matematiske bidrag.

For at kunne opfylde det egentlige formål med sin afhandling - opløsning af plane og sfæriske polygoner - søgte Wessel to ting:

- analytisk repræsentation af vektorer
- metode til at regne med vektorer.

Dette opnåede Wessel ved at repræsentere en vektor som et komplekst tal a + ib (uden dog at kalde det for et komplekst tal) og ved at definere regler for regning med de nye udtryk for vektorerne, altså regler for regning med komplekse tal.

Med den introducerede analytiske repræsentation opnåede Wessel at få et udtryk for en vektor, hvor både retning og længde af vektoren indgår. De opstillede regler er stort set de samme, som idag benyttes ved regning med komplekse tal.

Wessel havde brug for at kunne regne algebraisk med vektorer i planen. På Wessels tid eksisterede der imidlertid kun regler for regning med vektorer på en tallinie, og Wessel var derfor nødsaget til at udvide området for de algebraiske operationer til planen og rummet.

I den forbindelse introduceredes den komplekse talplan, hvor Wessel fik kombineret analytisk og geometrisk fremstilling af vektorer.

5.2.1. Indførelse af den komplekse talplan.

Wessel præciserer afhandlingen som følger:

> "...Paa Grund heraf søger jeg
>
> I.) Først at bestemme Reglerne for saadanne Operationer; [algebraiske operationer på analytisk fremstillede vektorer, red.]
>
> II.) Dernæst vises ved et Par Exempler deres Anvendelse, naar Linierne ere i samme Plan;
>
> III.) Derefter bestemmes Directionen af Linier i forskiellige Planer ved en ny Operationsmethode, der ikke er algebraisk;
>
> IV.) Ved Hielp af denne udfindes derpaa saavel plane som sphæriske Polygoners Opløsning i Almindelighed;
>
> V.) Tilsidst udledes paa samme Maade de i den sphæriske Trigonometrie bekiendte Formler."

(Wessel 1799,s.471)

(Inde i selve afhandlingen har punkterne 1-5 andre overskrifter, se bilag D.)

Heraf ses det, at selve udredningen af regneoperationer og fortolkning af linier og komplekse tal kun udgør det første punkt i afhandlingen. Resten angår **anvendelse** af de opstillede regler i forbindelse med plane og sfæriske polygoners opløsning, det vil sige bestemmelser af ubekendte vinkler og sider.

Da det kun er punkt I, der har interesse i forbindelse med teorien om de komplekse tal, vil vi nøjes med at gennemgå dét i det følgende.

Punkt I består af 16 paragraffer, men det er kun de første 10 der bliver gennemgået her. Man finder blandt disse Wessels indføring af den komplekse talplan, idet han beskriver et retvinklet koordinatsystem med en reel og en imaginær akse. Wessel skriver dog ikke, at han indfører en kompleks talplan. Det er desuden også her, Wessel opstiller reglen for multiplikation af vektorer.

I.
"Paa hvad Maade af givne rette Linier, ved de algebraiske Operationer formeres andre, og fornemmelig hvad Retning og Tegn disse skal have".

Wessel indleder med at beskrive, hvordan to rette linier (vektorer) adderes, hvilket han gør på samme måde, som vi idag beskriver vektoraddition. Når mere end to rette linier skal adderes følges ligeledes reglerne for vektorregning. Wessel har herved fået udvidet den normalt kendte tallinie til hele planen, hvilket han har følgende kommentar til:

> "Ere de adderte Linier directe[10], stemmer Definitionen fuldkommen overeens med den sædvanlige. Ere de ikke directe, strider det dog ikke mod Analogien, at kalde en ret Linie to andre sammenføiedes Sum, for saavidt den har samme Virkning, som disse." (Wessel 1799,s.473)

Wessel viser også subtraktion og skalarmultiplikation, og ingen

[10] Directe svarer til parallel eller vinkelret.

af de ovennævnte regnearter giver problemer, når man udvider til planen. At udvide til planen strider således ikke imod de definitioner for regning på en tallinie, som var kendt i forvejen. Hvilket også var Wessels hensigt.

Hvordan man skulle multiplicere to vektorer, var der imidlertid ingen regler for. Wessel ønskede at finde denne regel, hvorfor han indså, at det var nødvendigt at indføre et "nyt" koordinatsystem - det der idag kendes som den komplekse talplan.

I forbindelse med multiplikation af vektorer henviser Wessel til, at vektorerne skal forholdes til x-aksen (den positive eller absolutte linie) der går fra 0 til 1. Herefter opsætter han tre regler, der senere viser sig at fremstå som et vigtigt bidrag indenfor de komplekse tal:

PUNKT 1:

> "Først maae Factorerne være af den Direction, at de begge kan optages i samme Plan som den positive Unitet[11]".
>
> (Wessel 1799,s.474)

Linierne skal altså ligge i planen.

PUNKT 2:

> "Dernæst maa i Hensigt til Længden Productet forholde sig til den ene Factor som den anden til Uniteten".
>
> (Wessel1799,s.474)

Længden af den søgte linie er produktet af de to kendte liniers længde, eller som man ville skrive idag; produktet af faktorernes moduli giver modulus af produktet.

[11] Den positive unitet svarer til den positive del af x-aksen.

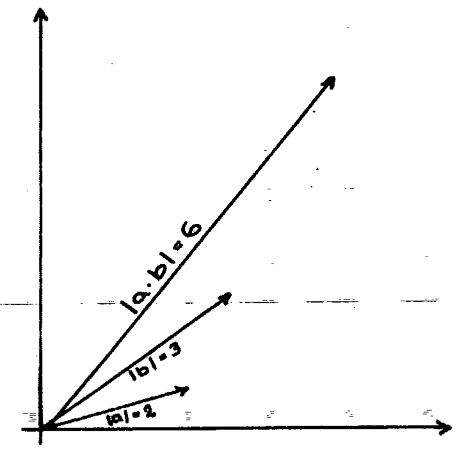


Fig 5.1. Produktets længde forholder sig til b, som a forholder sig til uniteten. a's forhold til uniteten (som har længden 1) er 2·uniteten. Produktet skal have forholdet 2 til længden af b, dvs 2·3=6. (fig. ikke lavet af Wessel).

PUNKT 3:

> "Endelig, dersom man giver den positive Unitet, Factorerne og Productet et fælles første Punct, skal Productet i Hensigt til dets Retning ligge i omtalte Unitets og Factorers Plan, og afvige fra den ene Factor ligesaa mange Grader; og til samme Side, som den anden Faktor afviger fra Uniteten, saa at Productets Directionsvinkel, eller Afvigning fra den positive Unitet, bliver saa stor som Summen af Factorernes Directionsvinkler". (Wessel 1799,s.474)

Hvis de to linier starter i nulpunktet, vil produktliniens retningsvinkel være lig summen af de to liniers retningsvinkler, eller summen af faktorernes argumenter giver argumentet for produktet.

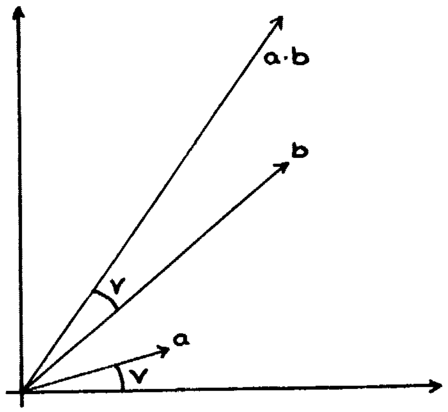


Fig. 5.2. a afviger vinklen v fra uniteten. Produktet skal afvige vinklen v fra b. (fig. ikke lavet af Wessel.)

Wessel bruger her et koordinatsystem, hvor +1 betegner enheden på x-aksen. Herefter indfører han, at den linie, som står vinkelret herpå med samme begyndelsespunkt, skal have enheden $+\varepsilon$[12]. Enhedscirklen skærer således x-aksen i $x=\pm 1$, og y-aksen i $y=\pm\varepsilon$.

Da han kender retningsvinklerne for 1, ε, -1 og $-\varepsilon$ kan han, da han ifølge PUNKT 3 ved, at produktets retningsvinkel er summen af faktorernes retningsvinkler, finde produktet af de forskellige akser. Dette anvendes fx. på den såkaldte $+\varepsilon$-akse. Wessel opnår derved: $\varepsilon \cdot \varepsilon = -1$, idet $90° + 90° = 180°$

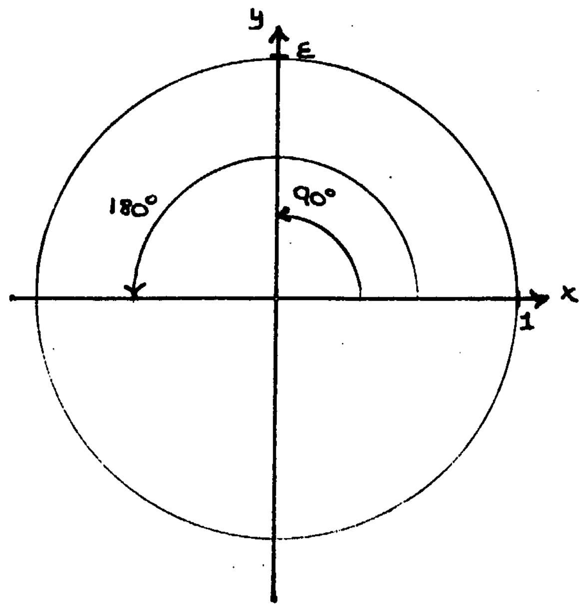


Fig. 5.3. Ved hjælp af PUNKT 3 finder Wessel at $\varepsilon^2=-1$. (fig. ikke lavet af Wessel).

Det nye koordinatsystem beskrives således af Wessel:

§ 5.

"Lad +1 betegne den positive retlinede Unitet, og $+\varepsilon$ en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af $+1=0$, af $-1=180°$, af $+\varepsilon=90°$, af $-\varepsilon=-90°$ eller $270°$; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Fac-

[12] Størrelsen ε svarer til i.

torernes, bliver $(+1)\cdot(+1)=+1$, $(+1)\cdot(-1)=-1$, $(-1)\cdot(-1)=+1$, $(+1)\cdot(+\varepsilon)=+\varepsilon$, $(+1)\cdot(-\varepsilon)=-\varepsilon$, $(-1)\cdot(+\varepsilon)=-\varepsilon$, $(-1)\cdot(-\varepsilon)=+\varepsilon$, $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)=-1$, $(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=+1$, $(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=\sqrt{-1}$.
Hvoraf sees at ε bliver $= \sqrt{-1}$, og Productets Afvigning[13] bestemmes saaledes, at ikke een eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes." (Wessel 1799,s.475)

Då linierne ligger i planen, og Wessel gerne vil kunne udtrykke linien (vektoren) med et enkelt tal, er han nødt til at have en enhed af en anden karakter på y-aksen. At det netop blev "ε" er tilfældigt, det kunne have heddet hvad som helst. Egenskaben ved "ε" ($\varepsilon^2=-1$) er dog vigtig, idet PUNKT 3 gerne skulle være opfyldt, så 90°+90°=180°.

5.2.2. Multiplikation af vektorer.

Det foregående var introduktionen af den imaginære enhed, og Wessel beviser herefter formlen for multiplikation af to komplekse tal (eller vektorer). Denne skrives idag på følgende måde, hvor z_1 og z_2 er komplekse tal:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(v+u)+i\cdot\sin(v+u)), \qquad (1)$$

og hvor v er argument for z_1 og u er argument for z_2.

Wessel beviser formlen ved først at se på to vektorer med længden 1 og derefter på vektorer med vilkårlig længde, hvor han når frem til formel (1).

To vektorer med længden 1.

Som udgangspunkt ser Wessel på definitionen af de kendte funktioner sinus og cosinus i det "nye" koordinatsystem:

"Cosinus til en Cirkelbue, der begynder fra det sidste Punct af dens Radius +1, er det Stykke af samme, eller modsatte Radius, der begynder fra Centrum og endes perpendicular udfor Buens sidste Punct. Sinus til samme Bue drages perpendicular paa Cosinus fra sammes sidste Punct til sidste af Buen.

[13] Afvigelse fra x-aksen.

...
Lad sættes $\sqrt{-1}=\varepsilon$; lad v betegne en Vinkel, hvilken som helst; og lad sin.v bemærke en ret Linie af samme Længde som Vinkelen v's Sinus, men positiv, naar Vinkelens Maal endes i første halve Omkreds, og negativ, naar det endes i den sidste halve: saa følger, af §.4 og 5, at εsin.v udtrykker Vinkelen v's Sinus baade i Hensigt til Direction og Længde."

(Wessel1799,s.475)

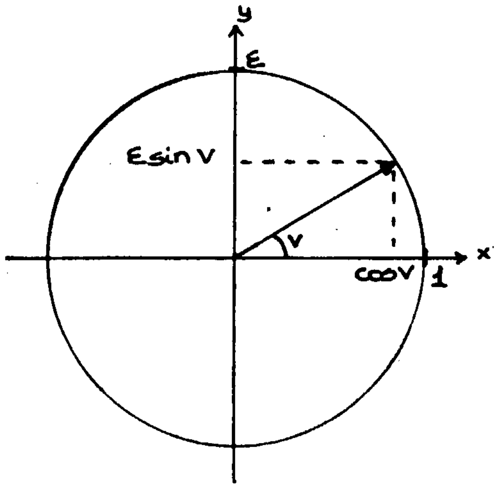


Fig. 5.4. Den geometriske opfattelse af sinus og cosinus. (fig. ikke lavet af Wessel).

Ifølge definitionen af cosinus og sinus samt vha. kræfternes parallellogram finder Wessel, at den linie, som afviger fra x-aksen med vinklen v, og har længden 1, kan udtrykkes som cosv+εsinv.

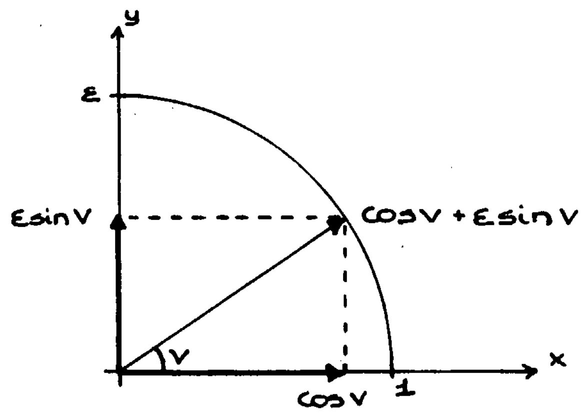


Fig. 5.5. Et punkt på enhedscirklen udtrykt ved sinus og cosinus. (fig ikke lavet af Wessel).

Da produktets retningsvinkel er summen af faktorernes retningsvinkler (PUNKT 3), vil produktet af to rette linier (vektorer) med længden 1 og retningsvinklerne henholdsvis u og v, kunne skrives som:

(2) $\cos(u+v)+\varepsilon\sin(u+v)$

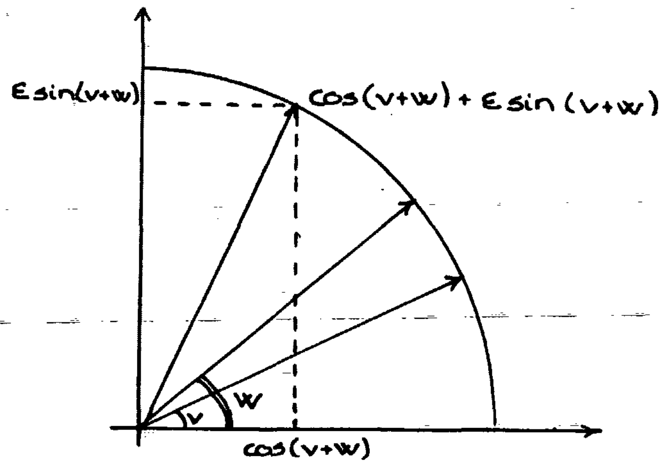


Fig. 5.6. Multiplikation af to vektorer med længde 1, udtrykt ved sinus og cosinus. (fig. ikke lavet af Wessel).

Produktet af to vektorer - der hver især er udtrykt ved cosinus og sinus - skriver Wessel også på en anden måde, nemlig som en sum af de partielle produkter, der fremkommer, når man ganger to vektorer sammen:

1.vektor: $(\cos v + \varepsilon \sin v)$

2.vektor: $(\cos u + \varepsilon \sin u)$

Produktet: $(\cos v + \varepsilon \sin v)\cdot(\cos u + \varepsilon \sin u) =$

$$\cos v\cdot\cos u + \cos v\cdot\varepsilon\sin u + \varepsilon\sin v\cdot\cos u + \varepsilon^2\sin v\cdot\sin u$$

(3) $$= \cos v\cdot\cos u - 1(\sin v\cdot\sin u) + \varepsilon(\cos v\cdot\sin u + \cos u\cdot\sin v).$$

$$= \cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)$$

(3) er omskrevet vha. de trigonometriske additionsformler[14]. Da de trigonometriske additionsformler gælder for alle værdier, er dette Wessels argument for, at (2) samt PUNKT 2 gælder for alle vinkler på enhedscirklen:

[14] De trigonometriske additionsformler:
$\cos(v + u) = \cos v\cdot\cos u - \sin v\cdot\sin u$
$\sin(v + u) = \cos v\cdot\sin u + \cos u\cdot\sin v.$

"Disse to Formler kan med Nøiagtighed og uden stor Vidtløftighed bevises for alle Tilfælde, enten hver af Vinklerne v og u, eller een alene er positiv, negativ, større eller mindre end en ret. De sætninger, som af samme to Formler udledes, har følgelig ogsaa deres Almindelighed."
(Wessel 1799,s.476)

Wessel har hermed fået et udtryk for, hvordan han kan udtrykke multiplikationen af to vektorer analytisk. Disse regler gælder imidlertid kun for vektorer med længden 1. Wessel ser herefter på to vektorer med hver sin vilkårlige længde.

To vektorer med hver sin vilkårlige længde.

Hvis man i enhedscirklen ganger cosv + εsinv med r fås:

(4) $\quad r\cos v + r\,\varepsilon \sin v = r(\cos v + \varepsilon \sin v)$

Hermed har Wessel fået et udtryk for en vektor med vilkårlig længde, der ligger i 1. kvadrant.

"Dette er altsaa et almindeligt Udtryk for enhver ret linie, der ligger med Linierne cos.0° og εsin 90° i samme Plan, afviger fra cos. 0° Graderne v, og har Længden r.
(Wessel 1796,s.476)

Wessel indfører nu en lidt anden skrivemåde. Han lader a, b, c og d ligge på akserne i det komplekse plan, og ud fra disse linier laver han to nye vektorer i planen nemlig a+εb og c+εd:

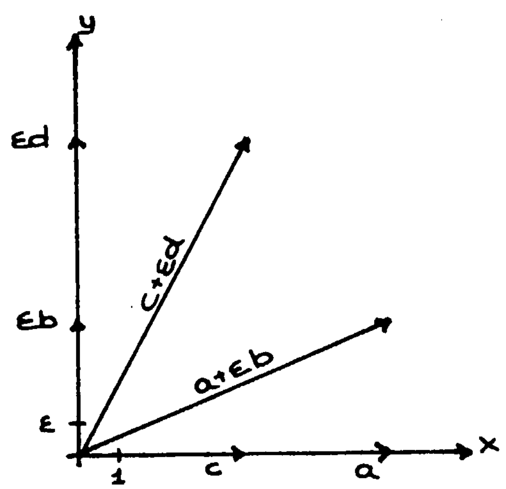


Fig. 5.7. To vektorer i det komplekse talplan. (fig. ikke lavet af Wessel).

Wessels påstand er nu, at selvom man ikke kender de to vektorers vinkel i forhold til x-aksen, vil deres produkt udtrykt mht. længde og retning være:

$$(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = ac + \varepsilon^2 bd + \varepsilon(ad+bc)$$
$$= ac - bd + \varepsilon(ad+bc)$$

Selvom dette bevis er meget vigtigt for de komplekse tal, citeres det ikke direkte, da det indeholder mange henvisninger til afhandlingens foregående paragraffer.

BEVIS: Linien $a+\varepsilon b$ har længden A og afviger vinklen v fra x-aksen, linien $c+\varepsilon d$ har længden C og afviger vinklen u fra x-aksen. I (4) blev det vist, hvordan en ret linie med længden r kan udtrykkes vha. cosinus og sinus, det samme kan gøres med to linier:

$$a+\varepsilon b = A\cdot \cos v + A\cdot \varepsilon \sin v$$

og

$$c+\varepsilon d = C\cdot \cos u + C\cdot \varepsilon \sin u$$

Herudfra ses det, at $a=A\cos v$, $b=A\sin v$, $c=C\cos u$ og $d=C\sin u$.

Ifølge PUNKT 2 og PUNKT 3 vides, at produktets længde er produktet af de enkelte faktorers længde, mens produktets retningsvinkel er summen af faktorernes retningsvinkler. Produktet kan derfor udtrykkes som:

$$(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = AC(\cos(v+u)+\varepsilon \sin(v+u))$$
$$= AC(\cos v\cdot \cos u-\sin v\cdot \sin u)+\varepsilon(\cos v\cdot \sin u+\cos u\cdot \sin v)$$

Hvis $AC\cdot \cos v\cdot \cos u$ erstattes med ac, og $AC\cdot \sin v\cdot \sin u$ erstattes med bd osv., fås:

$$(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = AC(\cos v\cdot \cos u-\sin v\cdot \sin u)+\varepsilon(\cos v\cdot \sin u+\cos u\cdot \sin v)$$
$$= ac - bd + \varepsilon(ad + cb)$$

Hvilket netop var det, der skulle bevises. Det vil sige, at det fremkomne udtryk faktisk indeholder skjulte udtryk for længderne og vinklerne. Man kan også af beviset se, at Wessels PUNKT 2 og 3 er fornuftige at stille som krav, da man ved brug af disse punkter får et udtryk, der gælder.

Det er altså i dette bevis, at Wessel indfører den kendte formel for, hvordan man multiplicerer to komplekse tal:

$$\boxed{(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = AC(\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u))}$$

A og C betegner længden af de to vektorer, eller er med andre ord den numeriske værdi (el. modulus) af de komplekse tal.

Wessel har nu indført den komplekse plan. Derudover har han defineret de sædvanlige regneregler, der gælder i denne plan, og vist at de ikke er i modstrid med de gældende operationer på tallinien.

Der var ikke mange på Wessels tid, der forstod betydningen af den komplekse talplan og de beregninger, der foregik. I næste afsnit beskrives, hvorfor afhandlingen ikke kom til at få nogen indflydelse på udviklingen.

5.3. Afhandlingens modtagelse i det matematiske samfund.

Afhandlingen blev læst op for Det Kongelige Videnskabernes Selskab den 10. marts 1797 og trykt 1799 i "Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter". Der var ikke mange matematikere, der læste dette tidsskrift, og afhandlingen vakte ikke større opsigt på Wessels tid.

Det matematiske niveau i Danmark på den tid var af en sådan standard, at ingen forstod rækkevidden af Wessels bedrift (Heegaard, 1984). Af Viggo Brun kaldes det matematiske miljø i København på den tid for "fattigt" (Brun 1962,s.106), og et eksempel på den datidige forståelse af de komplekse tal ses hos føromtalte Thomas Bugge, som var professor i matematik ved Københavns Universitet. Fra et afsnit om irrationale størrelser:

> "...Naar man af et negativt Quadrat $-a^2$ forlanger at uddrage Quadratroden eller at finde $\sqrt{-a^2}$, saa kan denne Rod hverken

være +a eller -a, fordi $+a \cdot +a = +a^2$ og $-a \cdot -a = -a^2$[15]; ei heller kan $\sqrt{-a^2}$ være = 0, fordi 0 Quadratet giver 0 og ikke $-a^2$ (§ 14 og 16 Arith.); den henregnes derfor til de umuelige eller indbildte Størrelser." (Bugge 1795, § 14)

Andre matematikere så tingene på følgende måde: $\sqrt{(-a)^2}=+a$, og ifølge S.A. Christensen "var der stor Konfusion i Opfattelsen af det imaginære og Regning dermed". Det var åbenbart ikke en naturlig sag at beskæftige sig med imaginære størrelser (Christensen 1895).

Denne blandede forståelse af de komplekse tal var sikkert medvirkende årsag til, at man ikke forstod Wessels afhandling, der blev anset for at være et bidrag til "den høiere Mathematik" (Molbech 1843).

Wessels afhandling blev kun trykt på dansk, hvilket bevirkede, at det store udland gik glip af dens indhold. Havde den været trykt på andre sprog, havde den formentlig fået en bedre modtagelse og dermed haft større chance for at præge selve udviklingen af de komplekse tal.

Wessels afhandling gik snart i den matematiske glemmebog, hvor den fik lov at blive i næsten 100 år. Først, da S. A. Christensen i 1895 skrev doktordisputats om matematikken i Danmark og Norge i det 18. årh., opstod der interesse for afhandlingen, der i 1897 blev oversat til fransk.

Wessels opdagelse kom derfor ikke til at præge de komplekse tals udvikling på den tid, men matematikeren Sophus Lie skrev senere:

> "Hvis Caspar Wessels Arbeide var kommet til sin Ret, saa vilde han forlængst have vundet et fuldt saa stort Navn i Mathematikens Rige som hans Broder Johan Herman Wessel inden den nordiske Litteratur og som hans (grand)Onkel Petter Wessel (Tordenskjold) vandt som Kriger."
>
> (Lie 1895,s.106)

[15] At Bugge mener, at $-a \cdot -a = -a^2$ er ikke en trykfejl!

5.4. Kategorisering af Wessels matematiske bidrag som ren eller anvendt matematik.

I forbindelse med udviklingen af teorien for de komplekse tal har Wessels afhandling hovedsagligt interesse, fordi den komplekse talplan bliver introduceret. Som tidligere nævnt udgjorde dette kun en lille del, hvorfor hele Wessels matematiske arbejde lægges til grund, når hans arbejde skal kategoriseres som ren eller anvendt matematik.

Det er nærliggende at forestille sig, at Wessels matematik blev udviklet med henblik på at kunne bruges indenfor landmålingen. Wessel beskæftigede sig ikke professionelt med matematik og har ikke udgivet andre matematiske værker, hvorfor inspirationen højst sandsynligt er kommet fra hans mangeårige beskæftigelse med landmåling. Dette skriver Wessel dog ikke selv noget om, og vi har derfor undersøgt, om der skulle være en sammenhæng mellem Wessels matematiske bidrag og de problemer, man i det 18.århundrede kunne støde på indenfor landmåling. (Se bilag E for nærmere redegørelse herfor).

I landmåling er en af de grundlæggende ingredienser konstruktion af og beregninger på trekanter. Der er tale om både plane og sfæriske trekanter, og en stor del af Wessels afhandling er netop koncentreret om at finde formler for ubekendte sider og vinkler i trekanter.

Et særligt problem opstår, når skrå vinkler skal reduceres til horisontale, idet dette indebærer beregninger på en sfærisk trekant. Wessel opstiller i § 49 cosinusrelationen for en sfærisk trekant, hvilken man i praksis kan benytte til reducering af skrå vinkler. Dette kan efter vores mening ikke være tilfældigt.

På baggrund af ovenstående mener vi at kunne kategorisere Wessels matematik som **anvendt** matematik.

Dette synes der heller ikke at være nogen tvivl om, hvilket illustreres med følgende citater:

> "Dette er Hovedhensigten med hans Afhandling og skyldes naturligvis Arbejdet ved Kortlægningen af Danmark, hvortil dette kunde gøre god Nytte." (Christensen 1895,s.246)

Ovenstående blev skrevet efter en beskrivelse af Wessels arbejde med de komplekse tal, og til Wessels arbejde med de tre-dimensionale vektorer, har S.A. Christensen følgende kommentar:

> "Det hele er et interessant Arbejde og byder en Anvendelse af Regningsoperationerne paa Geometrien paa en Gang ny og af praktisk Betydning for Landmaaling."
> (Christensen 1895,s.246)

> "The connection of this goal with Wessel's work as a surveyor and cartographer is obvious." (Jones 1970,s.280)

Slutteligt skal nævnes, at Wessel også kan have været inspireret af sine samtidige. Alle prisopgaver i Videnskabernes Selskab indtil 1802 bestod nemlig af anvendt matematik, hvilket skyldtes medlemmernes kundskaber og interesser. (Christensen 1895)

Tiden efter Wessel

Efter Wessel var der andre, der uvidende om hans arbejde også fandt på at udtrykke de komplekse tal geometrisk i den komplekse talplan.

Den schweiziske matematiker Jean-Robert Argand (1768-1822) opfattede $v \cdot i$ som en drejning af vektoren v på 90° mod uret og $v \cdot (-i)$ som en drejning på 90° med uret. Han så også, at $(a + i \cdot b)$ kunne opfattes som punktet (a,b), samt at et punkt kunne udtrykkes vha. dets numeriske værdi (r) og retningsvektorernes vinkel med x-aksen (α): $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Argand viste endvidere i 1806, som Wessel, hvordan man geometrisk kunne multiplicere og addere komplekse tal. (Kline 1972)

Den tyske matematiker Carl Friedrich Gauss (1777-1855) viste, at den redegørelse for algebraens fundamentalsætning, som bl.a. Euler var med til at lave, var mangelfuld. For at lave en bedre redegørelse end den tidligere udtænkte Gauss (1813) en geometrisk fortolkning af de imaginære størrelser. Et udtryk som $a + i \cdot b$ opfattede Gauss som et punkt (a,b) i planen, det der idag kaldes den komplekse talplan. x-aksen er den reelle talakse, mens y-aksen er en akse med imaginære enheder i, 2i, 3i,... Vha. dette nye aspekt gav Gauss et bevis for, at et n'te gradspolynomium - hvor $n \in N$ - har mindst én kompleks rod. (Boyer 1968)

De fleste af 1700- og 1800-tallets matematikere kaldte størrelser som både (i·b) og (a + i·b) for imaginære størrelser. I 1832 så Gauss nødvendigheden af at have forskellige navne for en ren imaginær størrelse som (i·b) og en sammensat størrelse som (a + i·b). Han giver derfor (a + i·b) betegnelsen "et komplekst tal". (Smith 1958)

Inden Wessel, Gauss og Argands arbejder var der ingen, der havde tænkt på de komplekse tals real- og imaginærdel som rektangulære koordinater for et punkt i planen. Andre matematikere begyndte at lade sig skræmme mindre af de komplekse tal. Man kunne nu se, at ethvert punkt i planen korresponderer med et komplekst tal og omvendt. De gamle idéer om ikke-eksisterende imaginære tal blev således udryddet.

De komplekse tal, som i Renaissancen blev karakteriseret som "umulige", og "sofistiske", er idag en integreret del af store områder både indenfor og udenfor matematikken. Den imaginære enheds betydning er ikke længere så verdensfjern, som betegnelsen "imaginær" angiver.

Diskussion.

Den matematiske udvikling, som beskrives i projektet, begynder på et trin, hvor ingen forstår negative og komplekse tal, og hvor al matematik forholdes til geometri. Matematikken gennemgår derefter en udvikling, hvorigennem den matematiske forståelse af de komplekse tal langsomt opbygges og matematiske symboler udvikles. Denne redegørelse for udviklingen ender på et trin, hvor man har en god forståelse af de komplekse tal, og hvor teorien for dem svarer til den idag anerkendte.

I projektrapporten var den oprindelige tanke at fortælle den "sande" historie om de komplekse tals opståen og udvikling. Dette indebærer bla. at berette om de personer, som var først med de væsentligste led i udviklingen. Valget af Cardano, Bombelli, Euler og Wessel har ikke helt kunnet opfylde denne intention, da andre i nogle tilfælde er kommet først med de banebrydende idéer.

Istedet for Cardano burde Scipione dal Ferro eller Tartaglia således være valgt, idet disse havde fundet frem til løsningen af trediegradsligningen på et tidligere tidspunkt end Cardano. (Se "Anekdoten").

Englænderen John Cotes havde nogle år før Euler opstillet et udtryk, der efter en mindre omskrivning svarer til "Eulers formler" for komplekse eksponentialfunktioner. Det ville derfor have været mere i overensstemmelse med sandheden at beskrive Cotes' matematiske bidrag som det første i den forbindelse.

I indledningen til del II ses begrundelserne for, at de fire matematikere alligevel er valgt.

Det kan imidlertid diskuteres, om det set i en større udviklingsmæssig sammenhæng er af betydning, hvem der var den første til at fremsætte en ny matematisk teori. For udviklingen af en konkret matematisk teori er det underordnet, hvem der som den første fandt frem til noget nyt, hvis de opnåede resultater ikke blev videreformidlet.

Hverken dal Ferro, Tartaglia eller Cotes kom til at præge udviklingen i så høj grad, og der ofres kun få sider på dem i den matematiske litteratur i forbindelse med redegørelser for de komplekse tals historie. Dette kan bla forklares med, at de enten slet ikke publicerede deres resultater - dette gælder for dal

Ferro - eller kun havde en mindre litterær produktion, hvor de beskæftigede sig med de komplekse tal.

Grunden til, at Euler og ikke Cotes krediteres for de såkaldte "Eulers formler", kan være, at Euler i modsætning til Cotes havde en overvældende produktion af matematisk litteratur og derfor var mere anerkendt end Cotes.

En beskeden matematisk produktion er kendetegnende for Bombelli og Wessel, der som bekendt kun fik udgivet et enkelt matematisk værk hver. Ingen af disse nyder da heller den store omtale i den historiske matematik litteratur, men bidragenes påvirkning af deres samtidige var tilsyneladende ikke den samme. Hvor Wessels enkeltstående afhandling stort set ikke blev læst af hans samtid, og de, der gjorde, ikke forstod indholdet, fik Bombellis "l'Algebra" tilsyneladende en vis indflydelse på det omgivende samfund. (Jaywardene 1970).

Selvom man kun har en beskeden litterær produktion kan anerkendelse altså alligevel godt opnås.

I beskrivelsen af en matematisk udvikling kan det forekomme meningsløst at medtage personer, der som Wessel slet ikke kom til at præge udviklingen. Alligevel kan det efter vores mening være væsentligt at beskæftige sig med enkeltpersoners bidrag, uanset om de fik en indflydelse på deres samtid eller ej.

Ved at fokusere på den enkeltes motivation og bevæggrunde til at forske i matematik fås et indblik i, hvad der ansporer matematikere til at fravige eller udbygge gældende teori og søge nye veje. Dette forklarer igen, hvorfor videreudvikling kan ske. De fire matematikere er alle i en eller anden forstand blevet drevet af **nysgerrighed** til at nå frem til deres resultater, men de sammenhænge, det skete i, var forskellige. De matematiske bidrag er for Cardano, Bombelli og Eulers vedkommende blevet kategoriseret som ren matematik og Wessels som anvendt. Uden at kunne generalisere viser denne matematiske udvikling således, at både en "ren" og en "anvendt" tilgang til et matematiske problem kan danne grobund for matematisk nytænkning.

På baggrund af det konkrete eksempel kan der endvidere konkluderes følgende:

Anvendt matematik er ikke dårlig matematik. Wessels teori for og regning med komplekse tal var af blivende værdi, og få år efter præsenterede den anerkendte matematiker Gauss en tilsvarende geometrisk fremstilling af komplekse tal.

Ren matematik kan godt finde en anvendelse udenfor matematikken. Eulers formler benyttes idag indenfor mange ikke-matematiske områder som for eksempel i fysik og ingeniørfag.

Anvendt matematik vil ikke nødvendigvis finde anvendelse udenfor matematikken. Wessels hensigt var højst sandsynligt at benytte de i afhandlingen opnåede resultater indenfor landmåling. Dette skete imidlertid aldrig, hvorfor det ses, at en oprindelig hensigt om konkret ikke-matematisk anvendelse af matematikken ikke er garanti for en sådan anvendelse.

Disse konklusioner kan kun drages i dette afgrænsede tilfælde, og kan ikke generaliseres til at sige noget om forholdet mellem ren og anvendt matematik idag. Fælles for Cardano, Bombelli, Euler og Wessel, og i det hele taget mange af datidens matematikere, er, at de alle havde tilknytning til et andet fagområde udenfor matematikken. Et problem i dette andet fagområde kan have inspireret dem til at undersøge problemet matematisk. I dag, hvor specialisering indenfor enkelte fagområder er mere udbredt, er der tendens til at matematikere ikke har nogen faglig forbindelse til andre områder. Ved at fjerne anvendelserne fra matematikken, er der chance for, at matematikken bliver en "forfinet" videnskab, der ikke kan bruges indenfor andre videnskaber.
Det er altså pga. specialiseringen i fagområder i dag og de mere uafgrænsede fagområder dengang, svært at generalisere konklusioner fra dengang til idag.

Vi opstillede vores definition på ren og anvendt matematik ud fra idéen om, at matematik kunne opdeles skarpt som ren eller anvendt matematik. Dette viste sig at give problemer, da nogle af de udvalgte matematikeres matematik var vanskelig at klassificere som enten ren eller anvendt.

Først skal fremhæves ingeniør-arkitekten Bombelli, hvis matematik vi har klassificeret som ren. Han indså gradvist nødvendigheden af abstrakt tænkning, men alligevel havde han anvendelsesmuligheder for øje. Herefter kan nævnes landmåleren Wessel, hvis matematik er klassificeret som anvendt. Han er til trods for sin i høj grad jordnære hverdag "fløjet ud" i den meget abstrakte matematik uden reference til praktiske problemer.

En tvungen opdeling af matematikken i ren og anvendt, kan således i nogle tilfælde virke påklistret. Man kunne fristes til at sige, at al matematik - både ren og anvendt - i en eller anden forstand er ren matematik. Den anvendte matematiker er på et eller andet tidspunkt nødt til at abstrahere fra anvendelserne og anskue matematikken udfra et rent matematisk synspunkt.

Matematikere drives af nysgerrighed, men man kan ikke generelt sige, om den bedste inspiration fås ved en ren eller anvendt tilgangsvinkel. Om ren eller anvendt matematik er mest nyttig kan heller ikke afgøres, og hvad der i det hele taget skal forstås ved nytteværdi kan i høj grad diskuteres. Skal nytteværdien vurderes i forhold til samfundets gavn af en matematisk teori eller skal det vurderes i forhold til matematikken videreudvikling.

Man kunne foranlediges til at tro, at ren matematik er mest nyttig for matematikken, og at anvendt matematik er mest nyttig for samfundet. Denne konklusion er en smule forhastet. De komplekse tal, som ifølge vores klassificering, er startet som ren matematik, benyttes idag i mange tekniske beregninger.

Bilag A

Man kan udfra Cardanos relationer, og med udgangspunkt i ligningen $x^3 + ax = N$, udlede den generelle løsningsformel for trediegradsligningen :

Relationerne (kap. 2.2.3. (5) - (7)) bliver generelt

Ai) $u^3 - v^3 = N$
Aii) $uv = a/3$
Aiii) $u - v = x$

(Aii) kan omskrives som følger:

(A1) $$v = a/3u \Rightarrow v^3 = (a/3u)^3 = a^3/27u^3$$

Dette udtryk for v^3 indsættes i Ai):

(A2) $$u^3 - a^3/27u^3 = N$$

(A3) $$(u^3)^2 - Nu^3 - a^3/27 = 0,$$

Dette er en andengradsligning i u^3, som let kan løses:
(A4)
$$u^3 = \frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

Da u^3 er rumfanget af en terning - og da et sådant ikke kan være negativt - vælges "+" i A4.

Værdien af u bliver altså:
(A5)
$$u = \sqrt[3]{\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

På tilsvarende måde findes et udtryk for v:
(A6)
$$v = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Nu trækkes v fra u (som i Aiii), og man får et udtryk for x, til den ligning Cardano løste i cap. XI i "Artis Magnae":

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{N}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{N}{2}}$$

Det ses, at da a og N er positive, vil x altid blive reel og positiv. Denne formel svarer til (15) i kapitlet om Cardano.

Bilag B

Med nutidig notation kan det let vises, hvordan man idag vil komme af med det kvadratiske led (Kap. 2.2.5., (16) - (20)).
Vi ønsker at omdanne ligningen:

(B1) $$z^3 + bz^2 + az = N,$$

til et udtryk, der består af et 3. gradsled, et 1. gradsled og en konstant. Det kan man gøre ved at lave følgende substitution:

(B2) $$z = x - b/3.$$

Denne størrelse indsættes på z's plads i den oprindelige ligning:

(B3) $$(x - b/3)^3 + b(x - b/3)^2 + a(x - b/3) = N$$

Herefter udregnes de forskellige led i paranteserne

(B4) $$x^3 - (3b/3)x^2 + (3b^2/9)x - b^3/27 + bx^2 + b^3/9$$
$$- (2b^2/3)x + ax - (ab)/3 = N$$

Leddene samles, x'erne på venstre side, og konstanten på højre:

(B5) $$x^3 + (a - b^2/3)x = (-2b^3 + 9ab + 27N)/27$$

Det skal understreges, at denne måde er den moderne måde, at bortskaffe det kvadratiske led på. Men hvis man indsætter størrelser, der er ækvivalente med størrelserne på Cardanos terninger, vil man få samme resultat, uanset om man bruger den moderne eller Cardanos metode. Ligningen vi her er kommet frem til, kaldes den reducerede ligning af 3. grad.

Bilag C

Undersøgelse af trediegradsligningen og dens rødder.

Udgangspunktet tages i

$$pw^3 + qw^2 + rw + s = 0,$$

med reelle koefficienter.

Ved at lave substitutionen: $w = x - (q/3p)$, reduceres ligningen til en ligning uden 2.gradsleddet (som vist i bilag B):

$$x^3 + ax + N = 0$$

Ved at undersøge størrelsen under kvadratrodstegnet i Cardanos formel kan man sige, hvilke rødder man får. Altså om løsningerne er reelle tal eller reelle tal givet på kompleks form (casus irreducibilis)[1].

$$d = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

Undersøgelsen deles op, alt efter om $d=0$, $d>0$ eller $d<0$.

Hvis $d = 0$:

Hvis $a = 0$, $N = 0$:

Ligningen ser da således ud:
$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (tripel rod).

Hvis $N \neq 0$, haves $a < 0$.

Ligningen får da to løsninger,
hvor den ene er dobbeltrod:
$x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}N)}$ eller $x = \sqrt[3]{(-4N)}$.

[1] Interesserede i den mere eksakte fremgangsmåde m.h.t. udregningen af formlerne, henvises til kap. 6 (s. 54 - 64) i Jens Carstensens "Komplekse tal" (1987, Forlaget Systime), der omhandler trediegradsligningen.

Hvis d > 0:

I dette tilfælde fås én reel og to komplekst konjungerede rødder. Den reelle rod fås vha. Cardanos formel:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}N + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}N - \sqrt{d}}$$

Hvis d < 0 (casus irreducibilis):

Her fås 3 reelle rødder, der hver for sig fremkommer som summen af to kubikrødder af komplekse tal.

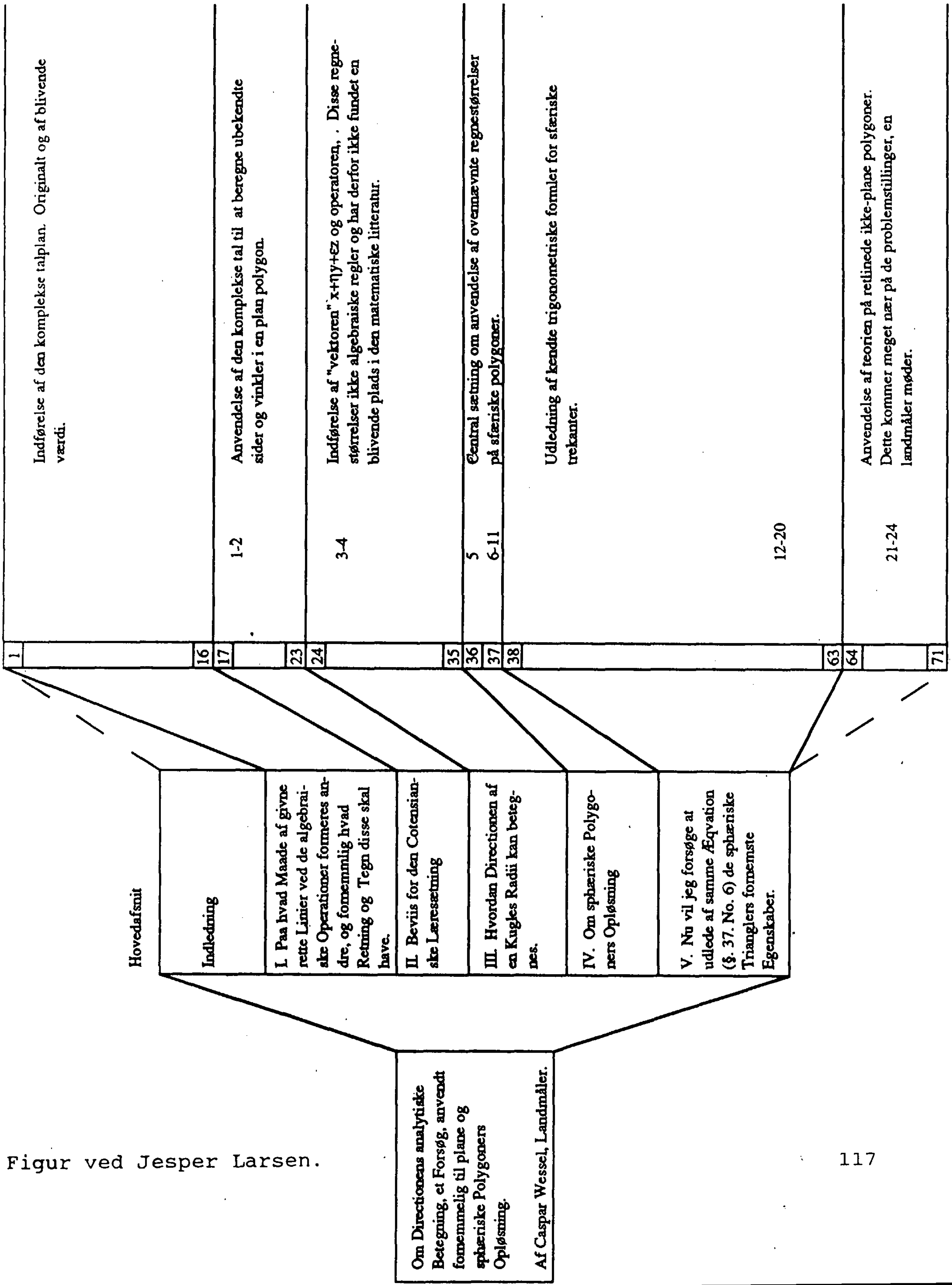
Cardanos formel giver følgende rod

$$x = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{-d}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{-d}}$$

Denne rod kan omskrives til et reelt tal. (Se kapitlet om Bombelli).

Bilag D

Oversigt over Wessels afhandling.



Figur ved Jesper Larsen.

Bilag E

Alle oplysninger om Wessel og hans baggrund peger i retning af, at hans matematik skal kategoriseres som anvendt. Spørgsmålet er, om og hvor matematikken kunne bruges i landmåling. I det følgende beskrives nogle problemer indenfor landmåling i forbindelse med triangulation for at vise, hvor vi mener, Wessels matematik muligvis kunne bruges.

Triangulation.

Trigonometriske beregninger bygger på et net af store trekanter, hvis spidser rækker fra bakketop til bakketop (eller andre højdepunkter) tværs over landet. Kun én nøjagtigt målt længde (en såkaldt basislinie) er nødvendig for at starte beregningen.

Hvis hvert punkt hører til mere end én trekant, er det muligt at lave en kontrol af målinger og beregninger. Flere basislinier konstrueres rundt omkring i trekantnettet, så de beregnede længder kan kontrolleres. Figur E.1. viser et triangulationsnet (plan figur) af Sjælland, hvor de tykke streger er basislinier og linien 2-3 hovedbasislinien, som opmålingerne starter ved.

Starter man ved basislinien 2-3 og går begge veje i "ringen", ender man tilsidst i 59. Punktet 59 og dets vinkler skulle nu gerne blive de samme, uanset hvilken vej man er gået.

Det viser sig imidlertid, at dette aldrig passer, der er altid afvigelser. Denne afvigelser skyldes usikkerheder på instrumenter og andre fejl, der nødvendigvis opstår undervejs. Om fejlene forklarer Thomas Bugge:

> "Jeg har beregnet og bestemt de tilladelige og uundgaaelige Feil i Liniers, Vinklers og Figurers Opmaaling og Beregning; hvilket formedelst vore Sandsers ufuldkommenhed og de brugte Instrumenters Natur og Beskaffenhed altid vil blive tilbage. Denne Feilenes rigtige Theorie er af Vigtighed naar praktiske Arbejders Værd skal bedømmes, paa det at man af Opmaalingerne ei skal bedømmes, paa det at man af Opmaalingerne ei skal fordre mere, end de kan præstere, eller mindre end de bør præstere; om denne vigtige Sag finder man næsten intet hos andre Forfattere".
>
> (Bugge 1812-14, 3. - 4. del,s.VII)

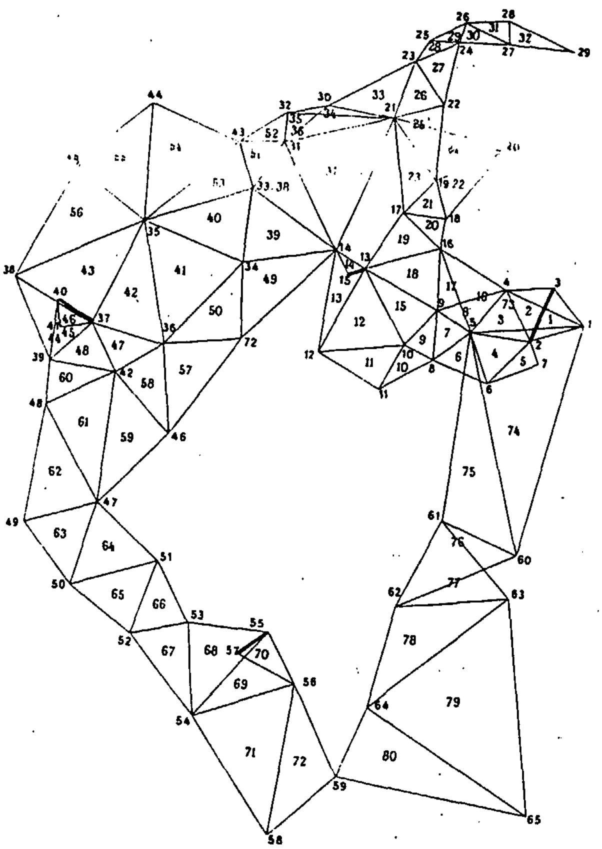


Fig. E.1. Thomas Bugges grundlæggende trigonometriske net.
(Ved E. Andersen 1968,s.47)

Det vides ikke, hvilken fremgangsmåde man tidligere benyttede sig af ved fordeling af fejlene. Man ved kun, at korrektionen skete i de opmålte og beregnede vinkler i det trigonometriske net, samt at følgende betingelsesligninger såvidt muligt skulle være opfyldt (E. Andersen 1968):

1) Vinkelsummen i hver trekant skal være 180 grader!

2) Fremføring af hovedbasislinie til den næste basislinie ved hjælp af vinkelsummer skal stemme overens med **opmåling** af basislinien.

Om Wessel har søgt en metode til at fordele fejl, der opstår ved triangulation, fremgår ikke umiddelbart af hans afhandling. Dette kan dog ikke udelukkes, idet Wessel både gjorde betragtninger over forholdet mellem vinklerne i sfæriske trekanter - som tilsyneladende også gælder for plane trekanter - og gør rede for ændring af sider i plane polygoner.

Reduktion af vinkler (fra skrå til horisontal).

I forbindelse med opmålingen af trekantnettet, opstår et andet problem udover unøjagtigheder. Opmåleren er som regel aldrig i niveau med de to målepunkter, der skal måles i forhold til, og man er derfor nødt til at reducere skrå vinkler til horisontale, fordi de skrå vinkler er større. Dette problem kunne tilsyneladende godt løses på Wessels tid.

Til at måle vinklerne i den enkelte trekant benyttede man det såkaldte "geografiske instrument" (se forside til kapitel 5). Figur E.2. illustrerer den skrå trekant i forhold til det horisontale plan.

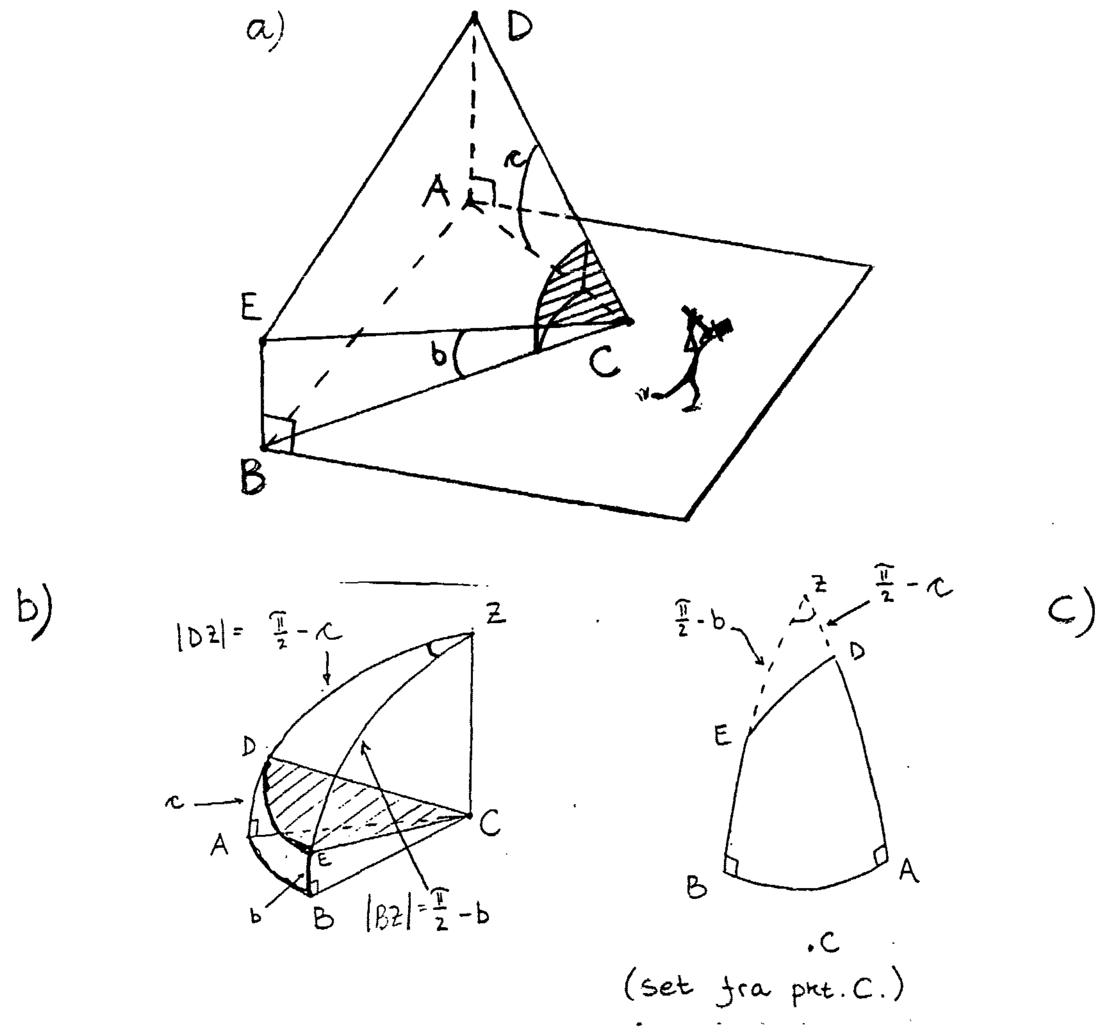


Fig. E.2. a) Det skrå og det horisontale plan, der bruges i forbindelse med triangulation. Opmåleren med det geografiske instrument, er placeret i C. Herfra kan vinklerne DCE, BCE og ACD måles. b) En enhedskugle indlagt i de to planer. c) Kuglens inderside set fra punktet C. I den sfæriske trekant EZD kan siden DE måles, og siderne EZ og DZ beregnes.

På figur E.2.a) er trekanten ABC horisontal, og opmåleren er placeret i punktet C med instrumentet rettet mod punkterne D og E. Vinkel DCE kan herved opmåles. Ligeledes kan de lodrette vinkler ACD og BCE måles. Som det ses på figuren, er D og E ikke i samme niveau over horisontalplanen. Trekanten CDE skal derfor korrigeres (reduceres), så den bliver vandret. (Den skrå vinkel (DCE) og den vandrette vinkel (ACB) er ikke lige store).

På figur E.2.b) er en kugle med centrum i C og radius 1 indlagt indenfor de to trekanter CDE og ABC. På kuglens overflade vil der opstå en **sfærisk** trekant afgrænset af overfladens skæring med den skrå plan. I den sfæriske trekant svarer vinkel DZE til vinkel ACB, som man ønsker at finde.

I den sfæriske trekant kendes vinklen/siden DE, som man startede med at opmåle. Liniestykkerne DZ og EZ er givet ved:

$$DZ = \pi/2 - DA \quad \text{og} \quad EZ = \pi/2 - BE.$$

Vha. cosinusrelationerne for en sfærisk trekant kan man nu beregne vinklen DZE:

$$\cos(DZE) = \frac{\cos(DE) - \cos(DZ)\cdot\cos(EZ)}{\sin(DZ)\cdot\sin(EZ)}$$

Den søgte, vandrette vinkel ACB er da:

$$DZE = Arccos\left(\frac{\cos(DE) - \cos(DZ)\cdot\cos(EZ)}{\sin(DZ)\cdot\sin(EZ)}\right)$$

Alle tre vinkler i trekanten blev opmålt vha. det geografiske instrument og reduceret. Vinkelsummen af de tre beregnede horisontale vinkler skulle dernæst gerne give de før omtalte 180° tilsammen.

En side var kendt, og det var derfor ikke vanskeligt at finde frem til længden af de sidste sider i den horisontale trekant vha. en sinusrelation.[1] (O. Andersen pers.med.1991)

---

[1] AC/sin(B) = BC/sin(A) = AB/sin(C)

Wessels arbejde.

Wessel har ligeledes arbejdet med sfæriske polygoner. I afsnittet om opløsning af sfæriske polygoner (IV) drejer det sig om at finde ukendte sider i en sfærisk polygon, når nogle af vinklerne eller siderne er kendte:

> "Dersom et Polygons Vinkler og Sider ere bekiendte, saa nær[2] som een Vinkel og to Sider, eller saa nær som to Vinkler og een Side, eller tre Sider[3], eller tre Vinkler: da bestemmes det ubekiendte ved følgende Æquation,[4]
>
> s,,I',,II',,III',,IV',,V',,VI',,...,,N' = s,
>
> i hvilken s er ubestemt,..."

s er en radius i kuglen, hvorpå polygonen ligger (Wessel nævner tre radier og tre planer i kuglen, hvor to af akserne er imaginære).

Wessel har også set på sfæriske trekanter og opstillet formler for, hvordan man finder henholdsvis sider og vinkler i disse, alt efter hvilke man kender. Her iblandt findes også førnævnte cosinusrelation for en sfærisk trekant (IV § 49).

Wessel har ikke i afhandlingen beskrevet, hvad han ønsker at bruge sin matematik til. Det har derfor ikke været muligt at vise nøjagtigt, hvad der har kunnet bruges indenfor landmåling, og hvad der har været udviklet som grundlæggende teori. Alligevel fremgår det af ovenstående, at hans beregninger har tilknytning til landmåling. Dette er også blevet bekræftet af Ole Andersen, lektor i landmåling ved KVL i København (1991).

---

[2] "saa nær" svarer til "på nær"

[3] Dette gælder kun for polynomier med mere end tre sider.

[4] "Tegnet ,, har kun halv den Betydning som det sædvanlige Multiplikationstegn; thi den Linie i Multiplicandums Udtryk, der ligger udenfor Planet af Cirkelbuen i Multiplicators Mærke, bliver ved Operationen uforandret." (Wessel 1799).
Dette betyder, at man ganger med tre-dimensionale vektorer ved at holde den ene enhed fast og multiplicere de to andre, idet man aldrig kan multiplicere to forskellige imaginære enheder.

Litteraturliste

1) Andersen, E.
"Thomas Bugge - Et mindeskrift i anledningen af 150 årsdagen for hans død 15.januar 1815"
Geodætisk instituts forlag, København 1968.

2) Andersen, K. et al
"Nogle Kapitler af matematikkens Historie"
Århus universitet, Matematisk Institut, sep. 1979. bd. 1

3) Bombelli, R.
"l'Algebra Parte, parte magiore dell'Arithmetica"
Bologna, 1572.

4) Bramsen, B.
"Gamle Danmarkskort"
Politikens Forlag, København 1952.

5) Browder, F.E.
"Does Pure Mathematics have a Relation to the Sciences"
American Scientist 64 (1976): 542-549.

i Campbell, D.M. & Higgins, J.C.
"Mathematics. People, Problems, Results"
Wardsworth inc., Belmount, California 1984.
vol III s. 104-115.

6) Browder, F.E. & Mac Lane, S.
"The Relevance of Mathematics"

i Steen, L.A. "Mathematics Today"
Springer-Verlag, New York 1978 s. 323-350.

7) Brun, V.
"Regnekunsten i det gamle Norge"
Universitetsforlaget, 1962.

8) Brun, V.
"Alt er tall"
Universitetsforlaget, 1981.

9) Bugge, T.
"Beskrivelse over den Opmaalings-Maade som er brugt ved de Danske Karter"
Kiøbenhavn 1795

10) Bugge, T.
"De første Grunde til den rene eller abstrakte Matematik"
Hofboghandler Simon Poulsens Forlag, Kiøbenhavn 1814.
Geodætisk instituts Forlag, København 1968.
Ved Andersen 1968

11) Cajori, F.
"A History of Mathematics"
Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1980.

12) Cardano, G.
"The Great Art or The Rules of Algebra"
The Massachusetts Institute of Technology, 1968.

13) Cardanus, H.
"Artis Magnae"

i "Opera Omnia"
1663, vol. 4
Stuttgart-bad Cannstatt, Friderich Fromann Verlag, 1966

14) Christensen, S.A.
"Matematikkens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII. Aarhundrede. En matematiskhistorisk Undersøgelse."
Hempelsk Boghandels Forlag, Odense 1895.

15) Christensen, S.A
"Caspar Wessel og de komplekse Tals Teori."
Fyens Stiftsbogtrykkeri, Odense 1897.

16) Courant, R.

i Greenberg, H.J. (Chairman)
"Applied Mathematics:
What is Needed in Research and Education" (A Symposium)
Siam Rewiew vol 4 No 4 1962, s.297-320.

17) Courant, R.
"Mathematics in the Modern World"
Scientific American, Sonderheft 1964, s 19-27.
Freeman and Company, San Francisco.

i Otte, M.
"Mathematiker über die Mathematik"
Springer-Verlag, 1974.(s. 181-201)
(som; "Die Mathematik in der modernen Welt")

18) Davie, A.M.
"Er det for mange ren-matematikere"
Normat, 1980 s. 8-15.

19) Euleri, L.
"Opera Omnia"
Verlag von B.G. Teubner, Leipzig
Serie prima; vol VI 1921, vol VIII 1922, vol X 1913, vol XIX 1927.
Serie secunda, vol XII 1954.
(Bemærk s. 78-147 vol VI 1921, er på fransk)

20) Gericke, H.
"Geschichte des Zahlbegriffes"
Hochschultaschenbücher-Verlag 1970.

21) Gliozi, M.
"Cardano, Girolamo"

i Gillspie, C. C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Sribner's Son's, New York 1970.
vol III s. 64-67

22) Halmos, P.R.
"Applied Mathematics is Bad Mathematics"

i Steen, L.A. "Mathematics Tomorrow"
Springer-Verlag, New York 1981 s. 9-20.

23) Halmos, P.R.
"Mathematics as a Creative Art"
American Scientist 56 (1968), s. 375-389.

i Campbell, D.M. & Higgins, J.C.
"Mathematics. People, Problems, Results"
Wardsworth inc., Belmount, California 1984.
vol II s. 19-29.

24) Hardy, G.H.
"A Mathematician's Apology"
6. edit. 1973, Cambridge university press, 1940.

25) Heegaard, P.
"Dansk Biografisk Leksikon"
Treshow-Wold, 1984.

26) Hersh, R. & Davis, P.J.
"The Mathematical Experience"
Birkhauser, Boston 1981

27) Hofmann, J.E.
"Leibniz, Gottfried Wilhelm"

i Gillspie, C.C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Scribner's Son's, New York 1970.
s. 149-166

28) Jakobsen, A. og Pedersen, S.A.
"Ritual og rationalitet i videnskabernes udvikling"
IMFUFA's skriftserie 186/90, Roskilde 1990.

29) Jayawardene, S.A.
"Bombelli, Rafael"

i Gillspie, C.C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Scribner's Son's, New York 1970.
vol II s. 279-281

30) Jones, P.S.
"Wessel, Caspar"

i Gillspie, C.C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Scribner's Son's, New York 1970.
vol XIV s. 279-281

31) Kline, M.
"Mathematical thought from ancient to modern times"
Oxford University Press, New York 1972.

32) Lie, S.
"fortale"

i Brun, V.
"Regnekunsten i det gamle Norge"
Universitetsforlaget, 1962 s. 106

33) Mahoney, M.S.
"Descartes, René du Perron"

i Gillspie, C.C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Scribner's Son's, New York 1970.
s. 51-61.

34) Molbech, E.
"Det Kongelige Danske Videnskabernes Historie 1742-1842"
Jens Hofstrup Schultz, Kongelig & Universitets-Bogtrykker
København 1843.

35) von Neumann
"The Mathematician"

i Heywood, R.B.
"The Work of the Mind"
The University of Chicago Press, Chicago, 1947 (s. 180-196)

36) Ore, O.
Forord

i Cardano, G.
"The Great Art or The Rules of Algebra"
The Massachusetts Institute of Technology, 1968.
s. ii-xiii.

37) Smith, D.E.
"A Source book in Mathematics"
vol. I-II, 2. edit., Dover publications Inc., New York
1959.

38) Snapper, E.
"The Three Crises in Mathematics: Logicism Intuitionism, and Formalism"
Mathematics Magazine 52 (sept. 1979): 207-216.

i Campbell, D.M. & Higgins, J.C.
"Mathematics. People, Problems, Results"
Wardsworth inc., Belmount, California 1984.
vol II s. 183-193.

39) Stone, M.
"The Revolution in Mathematics"
The American Mathematical Monthly, 1961 68, 6 s. 533-1048

40) Struik, D.J.
"A Source book in Mathematics 1200-1800"
Marvaru university press, Cambridge Massachusetts 1969.

41) Thiele, R.
"Leonhard Euler"
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1982.

42) Youschkevitch, A.P.
"Euler, Leonhard"

i Gillspie, C.C.
"Dictionary of Scientific Biography"
Charles Scribner's Son's, New York 1970.
vol IV s. 467-484

43) Wessel, C.
"Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning"
Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 2. serie 5 (1799).

44) Wessel, C.
"Levnetsbeskrivelse"
Kongl. Ordenner Arkiv. 1815

i Brun, V.
"Regnekunsten i det gamle Norge"
Universitetsforlaget, 1962. (S. 97-98)

45) Wessel, C.
"Om Directionens Analytiske Betegning"
Nye Samling af Det Kgl. Danske Videnskabers Selskabs Skrivter. Oslo,1859.

i Brun, V.
"Regnekunsten i det gamle Norge"
Universitetsforlaget, 1962, s. 97-99

Personlig meddeler:

Andersen, Ole
Lektor i landmåling ved den
Kongelige Veterinær- og Landbohøjskole i København

Andet materiale:

"Informationsmateriale om ECMI"
Matematisk Institut,
Danmarks Tekniske Højskole, 9. april 1991

Sletten
"DTH's matematikere barsler med international uddannelse"
Sletten nr. 5/1991 ,s. 5-6

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGS - SYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 1o
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčör

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSES-TEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:
Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-
regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte
modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL
TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og
Peder Voetmann Christiansen

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF
FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen,
Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"

by: Jeppe Dyre

183/89 "MATEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction

**by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og
MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)**

184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmefylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"

af: Tage Emil Christensen

185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"

Et matematisk projekt

af: Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"

redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen

187/90 "RSA - et kryptografisk system"

**af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen
og Ole Møller Nielsen**

Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk

188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"

by: Jeppe Dyre

189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER

af: Finn Langberg

190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"

by: Jeppe Dyre

191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C*-ALGEBRAS"

by: Iain Raeburn and Dana P. Williams

192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"

by: Viggo Andreasen

193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"

by: Stig Andur Pedersen

194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af : Frank Olsen

194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport

Projektrapport af: Frank Olsen

195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.

Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:

Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"

- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.

af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL

af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale

af: Frank Olsen

199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling

af: Jens Højgaard Jensen

200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"

Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.

af: Mogens Niss

201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraktion"

af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Petr Viščor, Ole Bakander

202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.

af: Peder Voetmann Christiansen

203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990

afløser tekst 170/88

204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"

et Breddemodul Fysik Projekt

af: Thomas Jessen

Vejleder: Petr Viščor

205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"

by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)

206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"

Eksperimentelt Fysikspeciale

af: Jeanne Linda Mortensen

og Annette Post Nielsen

Vejleder: Petr Viščor

207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"

by: Jeppe C. Dyre

209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.

af: Helge Kragh

210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition.

by: Lars Kadison