TEKST NR 203 1990

OPGAVESAMLING I MATEMATIK

1974 - 1990

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETS
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSI
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

OPGAVESAMLING I MATEMATIK

IMFUFA tekst nr. 203/90 284 sider ISSN 0106-6242

Abstract:

Teksten afløser nr. 170/88 og indeholder opgaver, som er stillet til skriftlig eksamen på matematikoverbygningen på RUC i tiden 1974 - 1990.

Indholdsfortegnelse:

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Reelle funktioner af en og flere variable.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor korrekt besvarelse af fem opgaver anses for fuldstændig besvarelse af sættet.

mandag, den 10. januar 1977 kl. $09^{\underline{30}}$ - $13^{\underline{30}}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° Kan konstanterne a,b og c samt funktionen $f:\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ fastlægges således, at differentialformen

$$\omega = bx(yz)^a dx + bx^2 f(y,z)dy + (xz)^2 y^c dz$$

er exakt?
Angiv i bekræftende fald potentialet til ω.

2° Funktionerne $f,g:\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$ forudsættes to gange differentiable, og funktionen $z:\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$ er defineret ved

$$z:(x,y)\sim xf(y) + \frac{1}{y^2}g(x) \;;\; y>o$$

Bestem en partiel differentialligning uafhængig af f og g, der har z som løsning.
Fastlæg funktionerne f og g således, at z tillige er løsning til differentialligningen

$$z''_{xy} - \frac{2z}{xy} = o \;;\quad x>o$$

3° Inertimomentet for et legeme D i forhold til z-aksen defineres ved

$$I = \iint_D m(x,y)(x^2+y^2)dxdy$$

hvor m er massefordelingen over D. Beregn da inertimomentet for legemet D beskrevet ved:
D er en kvadratisk plade med kantlængde 1 placeret vinkelret på z-aksen, der tillige rører i pladens ene hjørne. $m(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

4° En funktion $f:M\sim\mathbb{R}$, hvor $M = \{(x,y)\,|\,xy>-1\}$, er defineret ved

$$f:(x,y)\sim \begin{cases} \frac{1}{y}\ln(1+xy) & y\neq o \\ x & y=o \end{cases}$$

Udregn for $y\neq o$ de partielle afledede af første orden til f, og vis, at f er differentiabel i hele M.
For $n\in N$ er $D_n = \{(x,y)\,|\,1<y<n \wedge o<xy<1\}$.
Udregn da integralet

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

Idet $D = \{(x,y)\,|\,x>o \wedge y>1 \wedge xy<1\}$, skal det undersøges, om integralet

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad \text{er konvergent.}$$

5° Vis, at differentialligningen

$$(*) \quad (x-y)+(x+y)y' = o$$

ikke vil have en integrerende faktor, som kun afhænger af den ene variabel. Opstil den betingelse som $\mu:\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$ må opfylde, hvis den skal være integrerende faktor til (*).
Vis, at funktionen $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ tilfredsstiller denne betingelse.
Løs ved brug heraf (*), således at punktet (1,o) tilhører løsningskurven.

6° En funktion $f:[-\pi,\pi]\sim\mathbb{R}$ er en ulige funktion.
Angiv fourierrækken for f og redegør for udseendet af denne række samt for centrale dele af teorien for fourierrækker. Redegørelsen ønskes belyst med eksempler.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor korrekt besvarelse af fem opgaver anses for fuldstændig besvarelse af sættet.

mandag, den 27. juni 1977 kl. $09^{\underline{00}}$ - $13^{\underline{00}}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° Vis, at integralet

$$\iint_D \frac{1}{1+(x+y)^4}\,dxdy$$

hvor D er første kvadrant, er konvergent, og udregn integralets værdi.

2° Inden for økonomi arbejdes med forskellige makroproduktionsfunktioner af formen $z=f(x,y)$, hvor $f:R_+^2 \to R_+$. Disse beskriver den samlede produktion z som funktion af landets samlede kapitalapparat x og arbejdsstyrken y.
To af disse typer er

$$z = ax^p y^{1-p} \qquad \text{(Cobb-Douglas typen)}$$

$$z = (ax^{-p}+y^{-p})^{-1/p} \qquad \text{(CES-typen)}$$

hvor a og p er positive konstanter. Vis, at begge typer er løsning til samme partielle differentialligning af første orden. (Det anbefales at betragte lnz).

3° Massetætheden for et område D i xy-planen betegnes $\rho(x,y)$. Tyngdepunktet (a,b) for D beregnes, da af

$$a = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy$$

$$b = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy,$$

hvor massen af D bestemmes af $m(D)=\iint_D \rho(x,y)\,dxdy$.

Beregn da tyngdepunktet af det homogene område D, der begrænses af akserne og en kurve med parameterfremstillingen

$$(x,y) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

4° Funktionen $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}(e^{xy}-1) & x \neq o \wedge y \neq o \\ 1 & x = o \vee y = o \end{cases}$$

Vis, at f er differentiabel i hele R^2

5° Vis, at differentialligningen

$$(*) \quad (x-y\sqrt{x^2+y^2})y' = y+x\sqrt{x^2+y^2}$$

ikke vil være exakt.
Vis derpå, at funktionen $\varphi: R^2 \to R$

$$\varphi: (x,y) \to \frac{1}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (o,o)$$

vil være integrerende faktor til (*).
Løs differentialligningen, og opskriv (f.ex. ved polære koordinater) den løsningskurve, som går gennem (1,o).

6° Bestem fourierrækken til funktionen $\sin\frac{x}{2}$ i intervallet $[-\pi,\pi]$, og benyt denne række til at beregne

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(4n+1)(4n+3)}$$

Roskilde Universitetscenter

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

<u>Reelle funktioner af en eller flere variable</u>

Der stilles ialt 6 opgaver.

Eksamen afholdes d. 5.1. kl. 9.3o-13.3o.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet kan beholdes.

OPGAVE 1.

Vis, at funktionen $f:R^3 \to R$, defineret ved

$$f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$$

er differentiabel i $(0,0,0)$.

Angiv også et punkt, hvori f ikke er differentiabel.

OPGAVE 2.

Vis, at funktionen $f:R^3 \to R$, defineret ved

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}ax^2+by^2+bz^2+byz+(a+b)x$$

ikke kan have strengt lokalt extremum i $(0,0,0)$ ligegyldigt hvordan a og b er valgt.

OPGAVE 3.

Vis, at funktionen $f:R_+^2 \to R$, defineret ved

$$f(x,y) = \frac{8}{3}x - \int_o^2 x^{t^2} y^{1-t}\,dt, \qquad x>o,\ y>o$$

har et stationært punkt i $(1,1)$.

OPGAVE 4.

Om en C^1-afbildning $\underline{f} = (f_1,f_2):R^2 \to R^2$ antages det, at

$$u^2+v^2 = x^2+y^2$$
$$ux+vy = o,$$

hvis $(u,v) = \underline{f}(x,y)$.

Bestem Jacobimatricen, $\underline{f}'(1,0)$, i begge følgende tilfælde:

a) $\underline{f}(1,0) = (0,1)$

b) $\underline{f}(1,0) = (0,-1)$

OPGAVE 5.

For et givet sæt af konstanter a, b, c og r defineres kurven K som løsningsmængden til ligningssystemet, bestående af de to ligninger:

$$9(x-a)^2+y^2+9z^2 = 2r^2$$
$$x^2+5(y-b)^2+4z^2 = \frac{25}{9}r^2$$

med de tre ubekendte x, y og z.

Vi interesserer os nu for de sæt (a,b,c,r), for hvilke følgende betingelse er opfyldt:

(*) Kurven K har punktet P = (1,0,1) fælles med den kugleoverflade F, som har centrum i (a,b,c) og har radius r.

1. Vis, at (*) er opfyldt, hvis (a,b,c,r) = (2,-2,-1,3). Vis, at der i dette tilfælde endvidere gælder, at kurvetangenten i P ligger i tangentplanen i P for F.

2. Vis, at der til hvert r svarer præcis et sæt (a,b,c) således, at (*) gælder, hvis (a,b,c,r) ligger i en omegn af (2,-2,-1,3). Præcisér selv dette udsagn yderligere.

3. Fortolk resultatet i 2 som et udsagn om beliggenheden af de centre for F, for hvilke (*) er opfyldt.

OPGAVE 6

Vis at følgende fire integraler har samme værdi og bestem denne.

$$\iint_D 2\pi r \sin^2\theta \, dr\, d\theta$$

$$\iint_E 2\pi \frac{y^2}{x^2+y^2} \, dx\, dy$$

$$\iiint_F r\sin^2\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$\iiint_G \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \, dx\, dy\, dz$$

$D = \{(r,\theta) \mid 0 < r \leq \sin\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$
$E = \{(x,y) \mid x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\} \setminus \{(0,0)\}$
$F = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 < r \leq \sin\theta,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$
$G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Det må uden bevis benyttes, at

$\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ er integrabel i E,

og at

$\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ er integrabel i G.

Skriftlig eksamen i reelle funktioner.

TORSDAG DEN 8. JUNI 1978

KL. 9.00 - 13.00

Alle hjælpemidler er tilladt.

Der er ialt 5 opgaver.

Der tillægges hver 25 points, altså ialt 125 points.

Sættet anses for tilfredsstillende besvaret,

hvis der opnås 100 points.

Opgave 1.

Funktionen $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\frac{1}{xy} & \text{for } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

Afgør hvilke af de følgende udsagn a) - e) der er sande.

a: f er differentiabel i (0,0)

b: f er kontinuert i (0,0)

c: f har partielle afledede i (0,0)

d: f har partielle afledede i en omegn af (0,0)

e: f har kontinuerte part. afl. i en omegn af (0,0)

Opgave 2.

a: Vis at $(a,b,q) = (0,2\pi,1)$ er løsning til ligningssystemet

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \sin(2\pi q^t)dt = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \cos(2\pi q^t)dt = 1$$

b: Vis at løsningerne i en omegn af $(0,2\pi,1)$ kan fremstilles ved en parameterfremstilling af formen

$$(a,b,q) = (a,\varphi(a)\ ,\ \psi(a))$$

hvor φ og ψ er C^1-funktioner defineret i en omegn af 0.

c: Bestem $\varphi'(0)$ og $\psi'(0)$

Opgave 3.

Funktionen $f\colon R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}a^2b^2x^2 + 2c^2xy + (b+c)y^2 + (4a^2-b^2-3c^3)x.$$

Det antages at f har $(0,0)$ som stationært punkt.

Betragt herefter følgende muligheder:

A: f har strengt minimum i (0,0)

B: f har minimum i (0,0), men ikke strengt minimum

C: f har strengt maximum i (0,0)

D: f har maximum i (0,0), men ikke strengt maximum

E: f opfylder hverken A,B,C eller D

1) For hver af de to muligheder A og E ønskes angivet et sæt (a,b,c) for hvilket den pågældende mulighed realiseres.

2) Vis at B indtræffer for (a,b,c) = (1,1,1)

3) Med M betegnes mængden af sæt (a,b,c) for hvilke B indtræffer.
Vis at der findes en omegn ω af (1,1,1) og en kurve K gennem (1,1,1) således at den del af M, som ligger i ω, også ligger på K, dvs. $M\cap\omega \subseteq K$. Der skal ikke tages stilling til om hele kurven kan bruges til at realisere B.

Opgave 4.

For hvert par $(p,q) \in R^2$ er der givet to ellipsoideoverflader $E_{p,q}$ og $F_{p,q}$. Disse har ligningerne

$$(E_{p,q}:) \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + z^2 = 3$$

$$(F_{p,q}:) \qquad \frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} + z^2 = \frac{21}{4}$$

(Bemærk rækkefølgen af p^2 og q^2 i nævnerne)

De to ellipsoiders skæring, $E_{p,q} \cap F_{p,q}$ betegnes $C_{p,q}$.

1) Bestem et sæt (p,q) således at $(1,2,1)$ ligger på skæringskurven $C_{p,q}$.

2) Bestem for dette valg af (p,q) en parameterfremstilling for kurvetangenten i $(1,2,1)$

3) Vis at der findes en kurve K med følgende egenskab:

   NÅR (p,q) LIGGER PÅ K VIL PUNKTET $P_r = (r^2,2r,r)$ LIGGE PÅ $C_{p,q}$.

4) Bestem tangenten til K i et punkt efter eget valg

Opgave 5.

I et x,z-koordinatsystem er der anbragt to ellipser E_1 og E_2, som i polære koordinater har ligningerne:

$$E_1: \qquad r = \frac{p_1}{1 + e\cos\theta}$$

$$E_2: \qquad r = \frac{p_2}{1 + e\cos\theta},$$

jfr. fig. 1, 2 og 3.

Med D betegnes den skraverede mængde på fig. 4.
Den udgøres af det område, som ligger mellem de to ellipser og mellem linjerne OA og OB, der danner vinklerne henholdsvis

α og β med x-axen, idet der skal gælde $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Med H betegnes den mængde, som fremgår ved en rotation af D om z-axen.

Bestem $\displaystyle\int_H \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

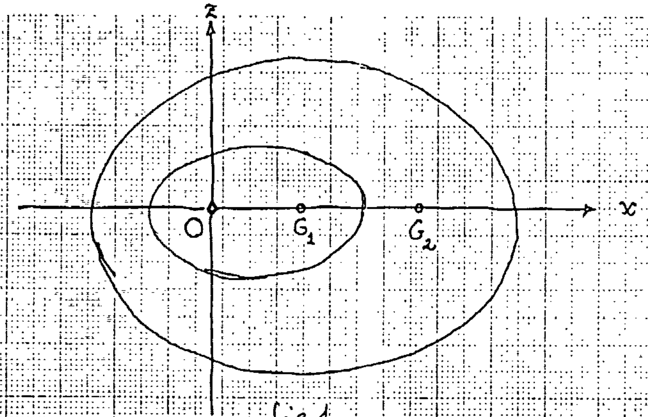


fig 1

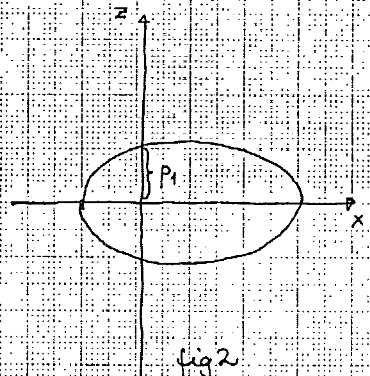


fig 2

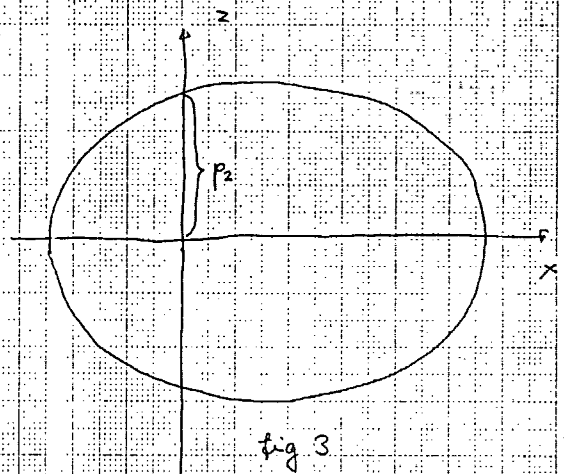


fig 3

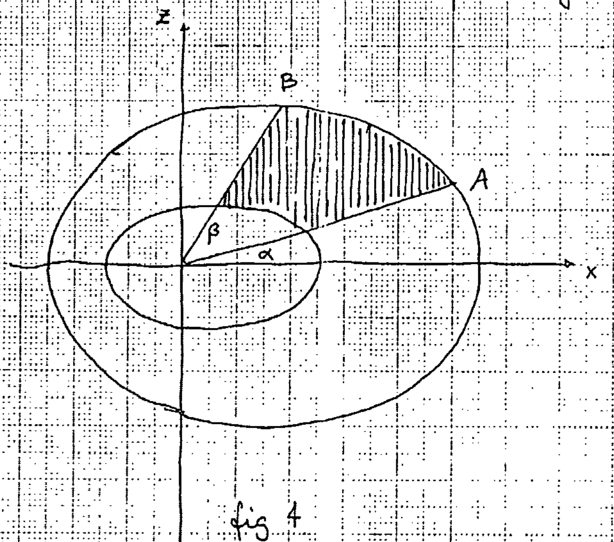


fig 4

Skriftlig prøve i MATEMATIK,

emnekredsen "reelle funktioner

af en eller flere variable",

onsdag den 6. juni 1979, kl. 10 - 14,

Opgavesættet består af fem opgaver. Opgavesættet regnes for fuldstændigt besvaret, dersom fire af de fem opgaver er korrekt besvaret.

Ved prøven er alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE NR. 1.

Lad $f(x,y) = \int_0^\infty (1 - e^{-t/x}) e^{-t/y} \frac{1}{t}\, dt$, $x > 0,\ y > 0$.

a) Gør rede for, at f har partielle afledede med hensyn til x og y og at

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{-y}{x(x+y)} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{x+y} .$$

Indfør nye variable $u = \frac{x+y}{x}$ og $v = x$.

b) Bestem den mængde som (u,v) gennemløber, når (x,y) gennemløber $]0,\infty[^2$.
Udtryk x og y ved u og v.

c) Vis at de partielle afledede af funktionen $(u,v) \mapsto f(x,y)$ er henholdsvis $\frac{1}{u}$ og 0.

d) Slut af c) at f må være af formen

$$f(x,y) = \ln u + \text{konstant} = \ln \frac{x+y}{x} + \text{konstant}.$$

Vis endelig (f.eks. ved at benytte uligheden $1-e^{-a} \leqq a$ som gælder for alle a) at $f(x,y) \to 0$ for $x \to \infty$, y fast, og vis derved at $f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x}$.

OPGAVE NR. 2.

Betragt funktionen $f(x,y) = xy - \sin \frac{2-y}{2x}$, defineret for $x \neq 0$.
Indfør videre en mængde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| \leqq 1 ,\quad x > 2^{-\frac{1}{2}} \right\} .$$

a) Gør rede for, at når $x \neq 0$ så er $f(x,\frac{1}{x}) \geqq 0$ og $f(x,-\frac{1}{x}) \leqq 0$. Benyt dette til at vise, at til ethvert $x > 2^{-\frac{1}{2}}$ findes mindst et y således at $(x,y) \in M$ og $f(x,y)=0$.

b) Vis at funktionen $y \mapsto f(x,y)$, $|y| \leqq \frac{1}{x}$, er strengt voksende, for ethvert $x > 2^{-\frac{1}{2}}$.

c) Gør rede for, at betingelserne

$$f(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in M$$

entydigt fastlægger y som en differentiabel funktion af x, og udtryk den afledede af denne funktion ved almindeligt kendte funktioner af x og y (det bliver ikke noget "pænt").

OPGAVE NR. 3.

Bestem den største og den mindste værdi af x^2+y^2, når x og y er reelle tal som opfylder

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4 .$$

OPGAVE NR. 4.

Lad $A(u)$ betegne arealet af figuren $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \leq u\}$, $u > 0$, hvor $g(x,y) = |x| + 4|y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Beregn $A(u)$, og vis at $A'(u) = u$.

b) Udregn hvert af integralerne

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(g(x,y))\,dxdy \quad \text{og}$$

$$\int_0^{\infty} f(u)\,A'(u)\,du \qquad \left(= \int_0^{\infty} f(u)\,u\,du \right)$$

for nedenstående to valg af funktionen $f: [0,+\infty[\;\to\; [0,+\infty[$

1°. $f(u) = e^{-u}$.

2°. $f(u) = \begin{cases} u^2 & \text{for } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{for } u > 1 \end{cases}$.

OPGAVE NR. 5.

I det følgende betegner c en positiv konstant. Lad $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$.

Sæt

$$u = 1 - e^{-c(x-y)}$$
$$v = 1 - e^{-c(x+y)}.$$

a) Gør rede for at der således defineres en bijektiv afbildning $(x,y) \mapsto (u,v)$, $(x,y) \in D$.
Hvad er billedmængden ?
Bestem den totale afledede af afbildningen.
Vis at funktionaldeterminanten er $2c^2\,e^{-2cx}$.

b) Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_D \left(1 - e^{-c(x+y)}\right)^4 \left(1 - e^{-c(x-y)}\right)^2 e^{-2cx}\,dxdy.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en og flere variable

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 6. juni 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

1. Bestem konstanterne $a,b \in R$ således, at

$$\omega = (-2ax^3+axy+y^b)dx+(axy+x^b)dy$$

er exakt.
Beregn derpå potentialet f i punktet (x,y), når f(1,1)=o.

2. Bestem talværdien af integralet

$$\int_o^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \qquad o<a<b.$$

ved at udregne integralet

$$\iint_D x^y dxdy$$

hvor $D = \{(x,y)\in R^2 \mid o<x<1 \wedge a<y<b\}$

3. Fastlæg funktionen $f:R_+ \to R$ således, at funktionen u givet ved

$$u(x,t) = f(t)e^{-x^2/4t}$$

opfylder varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4. Vis, at afbildningen $f:R^2 \to R$ defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (o,o) \\ o & (x,y) = (o,o) \end{cases}$$

ikke er kontinuert i (o,o).

(opgave 4 fortsættes)

Vis, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ eksisterer for alle $(x,y)\in R^2$, samt

at f for alle $(x,y)\in R^2$ opfylder Laplace's ligning

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = o$$

5. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x\cos y \, dx + (1+x^2)\sin y \, dy = o$$

6. Bestem rumfanget af den punktmængde i R^3 som bestemmes ved

$$(x,y)\in D \;,\quad o \leqq z \leqq \frac{1}{x^2(x^2-y^2)}$$

og $D = \{(x,y)\in R^2 \mid x>o \wedge x^2-y^2 \geqq 1\}$.

OPGAVER TIL SKRIFTLIG
PRØVE I MATEMATIK
(Reelle funktioner af en eller flere variable)

3. JANUAR 1980, KL. 10-14,

Opgavesættet består af fem opgaver.
Besvarelsen regnes for fuldstændig,
dersom fire af de fem opgaver er
korrekt besvarede.

Opgave 1.

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y).$$

1°. Vis at funktionaldeterminanten for f er e^{2x}. Er f bijektiv?

2°. Lad T betegne trekanten i (x,y)-planen med hjørnerne $(-2,-1)$, $(2,-1)$ og $(2,1)$. Bestem arealet af billedet $f(T)$ af T ved afbildningen f.

Opgave 2.

Udregn integralet

$$\int_0^{+\infty} \int_{1+y^{3/2}}^{+\infty} y^2 \,(x - y^{3/2})^{-7/4} \exp(-y^3)\, dx\, dy .$$

Opgave 3.

Betragt den kontinuerte funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} & \text{for } x \text{ og } y \text{ begge forskellige fra } 0, \\ 1 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1°. Vis at f har partielle afledede f'_x og f'_y i ethvert punkt. Angiv f'_x og f'_y, og gør rede for, at de er kontinuerte.

2°. Gør rede for, at i en omegn af $(x,y) = (1,2)$ fastlægger relationen

$$f(x,y) = \frac{e^2-1}{2}$$

entydigt y som funktion af x, og angiv $\dfrac{dy}{dx}$.

Opgave 4.

Bestem lokale og globale ekstremumspunkter på enhedscirkelskiven $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ for funktionen

$$f(x,y) = \exp\left(-\left(x^2 - \frac{xy}{4} + y^2\right)^3\right) .$$

Opgave 5.

Lad P betegne mængden

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z = 1\} .$$

Bestem maksimums- og minimumspunkter i P for funktionen

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx .$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 4. juni 1980 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f: R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y)=2(1-xy)^2+x^2+y^2$$

Undersøg, om f har lokale ekstrema.

Bestem derpå største- og mindste værdi for f på mængden

$$D = \{(x,y) \mid |x| \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge |xy| \leq 2\}$$

2. Bestem den mængde $D \subseteq R^2$, hvor dobbeltintegralet

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy \qquad \alpha>1$$

vil antage sin største værdi. Udregn integralet over denne mængde D og fastlæg α således, at $I = 4\pi$

3. Vis, at funktionen $\varphi: R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R$ defineret ved

$$\varphi(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

vil have en grænseværdi a for $(x,y) \to (0,0)$.
Suppleres funktionen med $\varphi(0,0)=a$, vis da, at φ er kontinuert på hele R^2.
Afgør tillige, om φ er differentiabel på hele R^2.
[Det forudsættes bekendt, at

$$\ln(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\ldots \quad \text{for } |z|<1].$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

Gør endelig rede for, at relationen

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln 3$$

i en omegn af $(x,y)=(1,1)$ entydigt fastlægger y som funktion af x, og bestem $y'(x)$ (udtrykt ved x og y).

4. Beregn rumfanget af legemet

$$\left\{(x,y,z) \mid 1<xy<3 \wedge 1<x<2 \wedge 0<z< \frac{x^3y}{(x^2+xy-1)^2}\right\}$$

5. Idet funktionen $g: R^3 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y,z) = -xy\sin(\tfrac{\pi}{2}z)+z\sin(\tfrac{\pi}{2}(x+y))+x^2+\tfrac{1}{4}y^2+1$$

skal det vises, at der ved $g(x,y,z)=0$ i en omegn af $(1,2,1)$ er defineret en funktion $z:(x,y) \to z(x,y)$.
Undersøg, om z har lokalt ekstremum i punktet $(1,2)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 8. januar 1981 kl. o9$^{\underline{\underline{oo}}}$ - 13$^{\underline{\underline{oo}}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1° En funktion $f:R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = 4 \frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^5}$$

Redegør for, at f vil have såvel en største - som en mindste værdi, og beregn disse værdier. (I bilaget er skitseret den del af funktionens graf, som afbildes af $[-1,1] \times [-1,1]$)

2° En mængde M i R^3 er beskrevet ved, at

$$-x \leq y \leq x$$

$$0 \leq z \leq (\alpha-1) \frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}, \quad \alpha>1$$

Med $V(\alpha)$ betegnes volumenet af M.

a) Redegør for, at $V(\alpha)$ eksisterer for $\alpha>2$.

b) Vis, at man for $\alpha>2$ får, at

$$V(\alpha) = \frac{1}{2(\alpha-2)}$$

3° En funktion $\varphi:R^2 \to R$ er defineret ved

$$\varphi(x,y) = (1+x^2)\sinh y - x^2 \operatorname{tgh} y - \sinh x$$

a) Redegør for, at

$\varphi(x,x)>0$ og $\varphi(x,-x)<0$, når $x \in R_+$

samt, at

$\varphi(x,x)<0$ og $\varphi(x,-x)>0$, når $x \in R_-$

b) Vis, at afbildningen $y \mapsto \varphi(x,y)$ for hvert x vil være strengt voksende.

(opgaven fortsættes...)

c) Redegør på baggrund af a) og b) for, at der ved relationen

$$\varphi(x,y) = o$$

for ethvert x entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y(x)$

d) Udregn til slut $y(o)$, $y'(o)$ og $y''(o)$.
(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner)

4^{o} Et parameterskift $(u,v) = \Psi(x,y)$ er givet ved

$$u = e^{x}\cosh y \qquad (x,y)\in R^2$$
$$v = e^{x}\sinh y$$

a) Gør rede for, at Ψ er injektiv og bestem billedmængden ved Ψ.

b) Udregn derpå funktionaldeterminanten for Ψ samt dobbeltintegralet

$$\iint_{R^2} (1+e^{x}\cosh y)^{-3}\, e^{2x}dxdy$$

(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner).

5^{o} En funktion $f:R^2 \rightarrow R$ er defineret ved

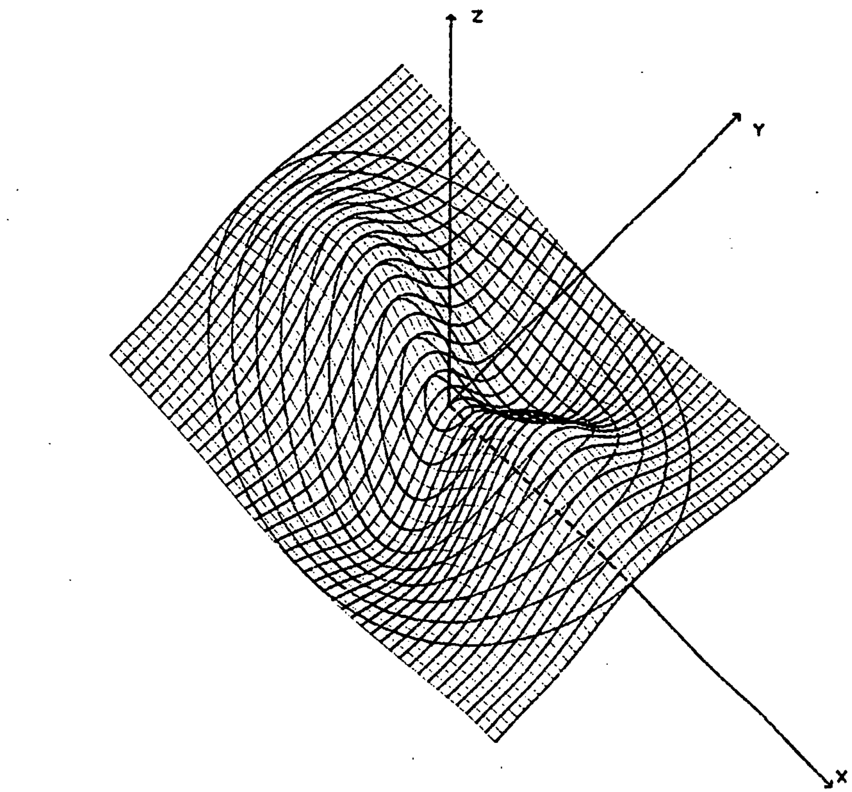
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sinh(xy) & x \neq o \\ y & x = o \end{cases}$$

a) Vis, at f er kontinuert på hele R^2.

b) Redegør for, at

$$f'_x(o,y) = o \quad \text{og} \quad f''_{xx}(o,y) = \tfrac{1}{3}y^3$$

og for, at f er differentiabel på hele R^2.
(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner).



$$f(x,y) = 4\,\frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^5}$$

Om de hyperbolske funktioner kan oplyses følgende:

$$\sinh z = \tfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots..$$

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots..$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 3. juni 1981 kl. $o9^{\underline{oo}}$ - $13^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1° En funktion $\varphi : R^2 \sim R$ er defineret ved

$$\varphi(x,y) = (x+b)(x+ay)^3 + 3a^2(y-1)^2 - 27cxy$$

hvor $(a,b,c) \in R^3$.

a) Fastlæg talsættet (a,b,c), således at punktet $(0,1)$ er stationært punkt for φ.

b) Bestem samtlige talsæt (a,b,c) således, at punktet $(0,1)$ tillige er strengt lokalt minimum for φ.

2° Bestem rumfanget af den mængde i R^3_+, som er fastlagt ved

$$(x,y) \in D \wedge o \leqq z \leqq x^4 - y^4$$

hvor

$$D = \{(x,y) \in R^2_+ \mid 1 < x^2 - y^2 < 4 \wedge \sqrt{17} < x^2 + y^2 < 5\}$$

3° En afbildning $f : R^3 \sim R$ er givet ved

$$f(x,y,z) = z^3 - x^3 + 3xy^2 - 3yz^2 - 6.$$

a) Fastlæg samtlige punkter (a,b,c), hvor der ved relationen

$$f(x,y,z) = o$$

i en omegn af (a,b,c) entydigt er fastlagt en funktion

$$z = \psi(x,y).$$

b) Bestem derpå de punkter (a,b,c), som tillige opfylder

$$z'_x(a,b) = 1 \quad \text{og} \quad z'_y(a,b) = 1$$

c) Udregn med de fundne værdier af a,b og c

$$z''_{yy}(a,b).$$

4° Idet $K =]0,1[\times]0,1[$ skal følgende integraler beregnes

$$I_1 = \iint_K x(1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$$

$$I_2 = \iint_K (1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$$

5° En funktion $g: R^2 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Vis, at g er kontinuert og differentiabel overalt i R^2.

b) Vis videre, at

$$g'_x(0,y) = 2y \quad \text{og} \quad g'_y(x,0) = \tfrac{1}{2}x$$

samt

$$g''_{yx}(0,0) \neq g''_{xy}(0,0).$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
Funktioner af en eller flere reelle variable.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 5. marts 1982

kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = (4-x^2-y^2)e^{-x-y}$$

a) Bestem de stationære punkter for f.

b) Afgør derpå om f vil have lokale ekstrema.

2. En afbildning $g:R^2 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y) = 3y-2x-1+\sin(x+y)$$

a) Vis, at

$$g(x,y) \leqq o \quad \text{når} \quad y = \tfrac{2}{3}x$$

og, at

$$g(x,y) \geqq o \quad \text{når} \quad y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}.$$

b) Vis derpå, at der ved relationen

$$g(x,y) = o$$

entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y = \psi(x)$.

c) Udregn $\psi'(x)$ (udtrykt ved x og y) samt bestem værdimængden for ψ'.

d) Vis endeligt, at ψ vil være en bijektiv afbildning af R på R.

3. En mængde $K \subseteq R^2$ er defineret ved

$$K = \{(x,y) \mid x>o \wedge -x<y<x\}$$

og en funktion $k:K \to R$ er defineret ved, at

(opgaven fortsættes)

$$k(x,y) = \int_o^{\infty} (e^{-(x-y)t} - e^{-(x+y)t})\frac{\sin t}{t}dt$$

a) Vis, at

$$k(x,o) = o \quad \text{samt at}$$

$$k'_x(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+1} - \frac{1}{(x-y)^2+1}$$

$$k'_y(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+1} + \frac{1}{(x-y)^2+1}$$

Der indføres nu de nye variable

$$u = x+y \quad \text{og} \quad v = x-y$$

som overfører K i R^2_+

b) Vis, at funktionen, hvorved

$$(u,v) \to k(x,y)$$

har de partielle afledede

$$\frac{1}{u^2+1} \quad \text{og} \quad \frac{-1}{v^2+1}$$

c) Benyt dette til at vise, at

$$\begin{aligned} k(x,y) &= \text{Arctg}u - \text{Arctg}v + c \\ &= \text{Arctg}\frac{u-v}{1+uv} + c \\ &= \text{Arctg}\frac{2y}{1+x^2-y^2} + c \end{aligned}$$

samt, at $c = o$.

I opgaverne 4 og 5 benyttes punktmængden

$$H = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y \geqq o\}$$

samt funktionen $\varphi:H \to R$ defineret ved

$$\varphi(x,y) = \frac{xy(x+y)}{(x+y)^5 + \frac{81}{16}}$$

4. Et område $D_n \subset H$ afgrænses af linierne

$x+y = n \quad , \; x = o \quad , \; y = o$

samt $\quad x+y = 2n$

Udregn da integralet

$$I_n = \iint_{D_n} \varphi(x,y)\,dxdy$$

og vis, at

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{6}\ln 2$$

5. Undersøg om funktionen φ vil have største- og mindsteværdi på H, og bestem i givet fald værdierne.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
<u>Funktioner af en eller flere reelle variable</u>.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

<u>mandag, den 10. januar 1983 kl. 10^{00} - 14^{00}</u>.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = x+y+(y-x^2)^3.$$

a) Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne $y=x^2$ og $y=-x$

b) Vis, at funktionen $y \to f(x,y)$ (dvs for fast x) er monotont voksende.

c) Vis på denne baggrund, at der ved relationen

$$f(x,y) = 0$$

entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y=\psi(x)$.

d) Udregn $\psi(1)$, $\psi'(1)$ og $\psi''(1)$.

2. En funktion $g:R^2 \to R$, som er to gange kontinuert, differentiabel, kaldes <u>harmonisk</u>, såfremt

$$g''_{xx} + g''_{yy} = 0$$

Bestem de funktioner $\psi:R \to R$ som sikrer, at

$$g(x,y) = \psi(y/x), \quad x>0$$

er en harmonisk funktion.

3. En funktion $\varphi:R^2 \to R$ er givet ved

$$\varphi(x,y) = (17-x^2-y^2)(xy-4)$$

a) Bestem samtlige stationære punkter for φ

b) Fastlæg derpå de lokale ekstrema for φ.

4. Idet mængden

$$C_{17} = \{(x,y) \in R_+^2 \mid x^2+y^2 \leq 17\}$$

skal man fastlægge den mængde $C \subset C_{17}$, hvor integralet (φ er defineret i opgave 3)

$$\iint_C \varphi(x,y)\,dxdy$$

vil antage sin største værdi. Udregn derpå denne værdi.

5. Bestem det talsæt (a,b), hvor integralet

$$\int_0^1 (at^3+bt - 3(1-\tfrac{3}{4}t^2)^{-\frac{1}{2}})^2 dt$$

antager sin mindste værdi.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
Funktioner af en eller flere reelle variable.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 10. januar 1983 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = x+y+(y-x^2)^3.$$

a) Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne $y=x^2$ og $y=-x$

b) Vis, at funktionen $y \to f(x,y)$ (dvs for fast x) er monotont voksende.

c) Vis på denne baggrund, at der ved relationen
$$f(x,y) = o$$
entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y=\psi(x)$.

d) Udregn $\psi(1)$, $\psi'(1)$ og $\psi''(1)$.

2. En funktion $g: R^2 \to R$, som er to gange kontinuert, differentiabel, kaldes harmonisk, såfremt

$$g''_{xx} + g''_{yy} = o$$

Bestem de funktioner $\psi: R \to R$ som sikrer, at

$$g(x,y) = \psi(y/x), \quad x>o$$

er en harmonisk funktion.

3. En funktion $\varphi: R^2 \to R$ er givet ved

$$\varphi(x,y) = (17-x^2-y^2)(xy-4)$$

a) Bestem samtlige stationære punkter for φ

b) Fastlæg derpå de lokale ekstrema for φ.

4. Idet mængden

$$C_{17} = \{(x,y) \in R^2_+ \mid x^2+y^2 \leq 17\}$$

skal man fastlægge den mængde $C \subset C_{17}$, hvor integralet (φ er defineret i opgave 3)

$$\iint_C \varphi(x,y)\,dxdy$$

vil antage sin største værdi.
Udregn derpå denne værdi.

5. En differentialform ω er defineret ved

$$\omega = h(x,y)dx + \frac{x^3}{(x^2+a^2y^2)^2}dy$$

hvor $a \in R$ og hvor h er en vilkårlig kontinuert differentiabel funktion for $(x,y) \neq (o,o)$.

Fastlæg en funktion h, således at differentialformen ω bliver exakt, og udregn derpå integralet

$$\int_c \omega$$

hvor c er en vilkårlig lukket kurve omkring (o,o).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Funktioner af en eller flere reelle variable</u>

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

<u>tirsdag, den 7. juni 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.</u>

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f : R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3 + {}^1/2} .$$

Vis, at f vil have såvel en største - som en mindsteværdi på R^2 og beregn disse værdier.

2. Beregn rumfanget af mængden

$$\{(x,y,z) \mid x>0 \wedge x^2-y^2 > 1 \wedge 0 < z < \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}\}$$

3. To funktioner $G,g : R_+^2 \to R$ er defineret ved

$$G(x,y) = \int_0^\infty \frac{dt}{x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t}$$

og

$$g(x,y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t)^2}$$

Vis, at $G(1,1) = \frac{\pi}{4}$ og $g(1,1) = \frac{1}{2}$ samt, at relationen

$$xG'_y(x,y) - yG'_x(x,y) = 2xyg(x,y)$$

er opfyldt i hele R_+^2 .

Udregn på denne baggrund integralet (dvs $g(x,y)$)

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t)^2} .$$

4. En funktion $\Phi : R^3 \to R$ er defineret ved

$$\Phi(x,y,z) = z^3 + 6x^2z - 8y^3 + 24xy + 6z .$$

a) Vis, at der for alle $x \in R$ gælder, at $\Phi(x,y,2y) \geqq 0$ og $\Phi(x,y,-2y) < 0$ for $y>0$ og at

$\Phi(x,y,2y) \leqq 0$ og $\Phi(x,y,-2y) > 0$ for $y<0$.

b) Benyt dette samt funktionen $\Phi'_z(x,y,z)$ til at vise, at der ved

$$\Phi(x,y,z) = 0$$

overalt i R^2 er defineret en funktion $z = z(x,y)$.

c) Undersøg, om z vil have lokale ekstrema.

5. En differentialform ω er defineret ved

$$\omega = 2 \cdot \frac{-2xydx + (x^2-y^2-1)dy}{(x^2+y^2-1)^2 + 4y^2}$$

a) Fastlæg den mængde $P \subset R^2$, hvor ω ikke er defineret.

b) Vis dernæst, at ω er exakt på $R^2 \setminus P$.

c) Vis endelig, at funktion $h : C \to R$, hvor $C \subset R^2$, givet ved

$$h(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

for passende valg af C, vil være en potentialfunktion til ω .

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelse skal anses for fuldstændig.

fredag den 6. januar 1984, kl. 10.00 - 14.00.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $g:R^2 \to R$ er for alle $a,b \in R$ defineret ved, at

$$g(x,y) = (y^3-ax)^2-b(y-x)^3.$$

a) Fastlæg de talsæt (a,b), hvor $(x,y)=(2,1)$ bliver et stationært punkt for g.

b) Undersøg for hvert af de fundne talsæt (a,b), om punktet $(x,y) = (2,1)$ er (svagt eller stærkt) lokalt ekstremum for g.

2. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved, at

$$f(x,y) = (y^3+x)^3+2(y-x).$$

a) Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne

$$x = y \quad \text{og} \quad x = -y^3.$$

b) Benyt dette samt funktionen f'_y til at godtgøre, at der ved relationen

$$f(x,y) = 0$$

overalt i R er defineret en differentiabel funktion $y = \varphi(x)$.

c) Vis, at punktet $(x,y) = (-3,1)$ tilhører grafen for φ, og udregn tillige $\varphi'(-3)$ og $\varphi''(-3)$.

3. Funktionen $f:R^2 \to R$ er som defineret i opgave 2. Fastlæg da rumfanget af det område, der afgrænses af

$$x>0 \quad , \quad x^{1/3} < y < (2-x)^{1/3}$$
$$0<z<f(x,y).$$

4. Idet $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$, $a \in R$

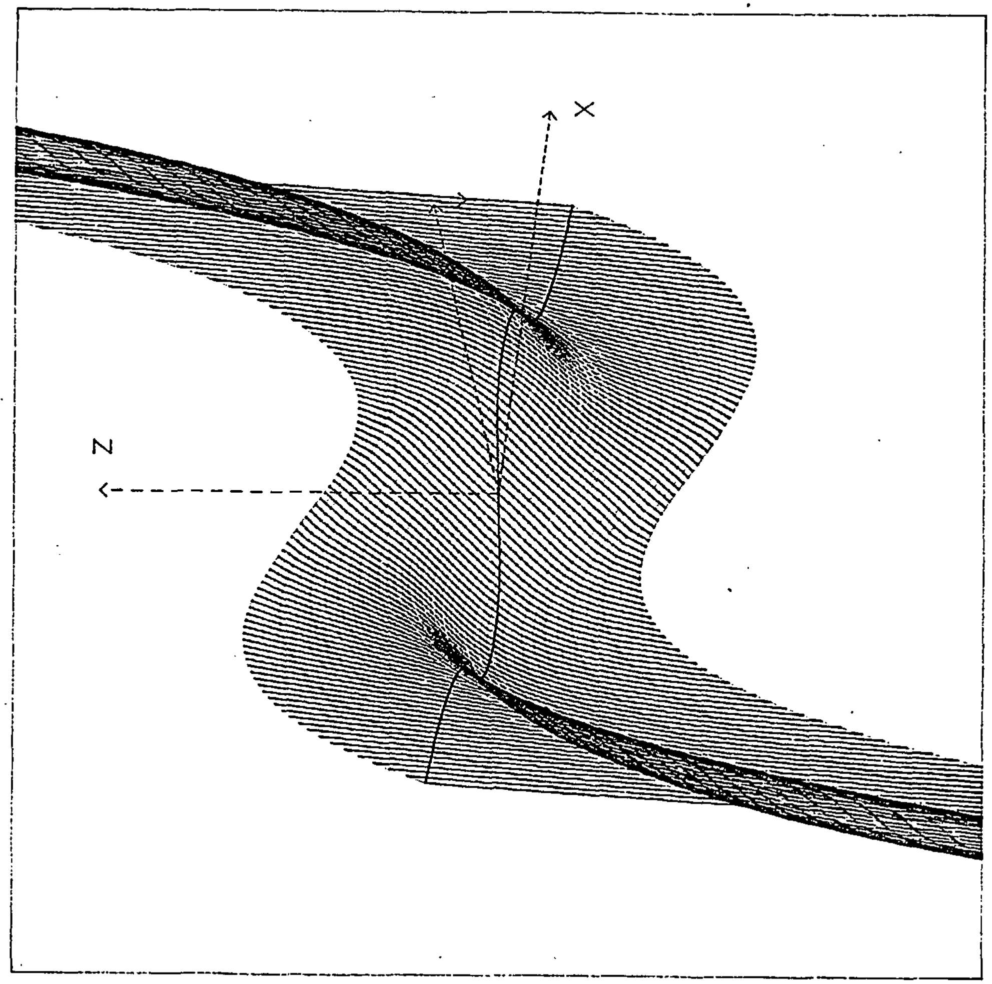
betegner C komplementærmængden til D i R^2.
Fra ethvert punkt $(x,y) \in C$ trækkes de to tangenter til randen af D. Disse to tangenter danner vinklen 2φ med hinanden ,[hvor φ jo afhænger af punktet (x,y)].
Vis da, rumfanget af mængden

$$\{x,y,z) \mid (x,y) \in C \wedge o<z<\operatorname{tg}\varphi - \varphi\}$$

eksisterer, og angiv rumfangets værdi.

Bilag til opgave 2

Dette viser den del af funktionen f's graf, der har definitionsmængde $[-3,3] \times [-1,1]$.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

fredag den 17. februar 1984, kl. 10.00 - 14.00.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Funktionen $\varphi: R^3 \to R$ er defineret ved

   $\varphi(x,y,z)=3xy^2z^3+\frac{4x}{z}-3yz^2+2x^3y^3+2.$

   Vis, at der ved relationen $\varphi(x,y,z)=0$ i en omegn af punktet $(-1,-1,1)$ er defineret en differentiabel funktion $z=\psi(x,y)$.

   Udregn dernæst $\psi'_x(-1,-1)$ og $\psi''_{xy}(-1,-1)$

2. Funktionen $f: R^2 \to R$ er for alle $a,b \in R$ fastlagt ved

   $f(x,y)=\operatorname{arctg}(ax+2y)-\frac{1}{2}x^2+bxy-\frac{5}{4}y^2.$

   Fastlæg de talsæt (a,b), hvor punktet $(x,y)=(1,1)$ bliver et stationært punkt.
   Undersøg dernæst for hvert af de fundne talsæt (a,b), om punktet $(x,y)=(1,1)$ vil være lokalt ekstremum for f.

3. Et område G i R^2 er givet ved

   $G = \{(x,y) \mid x^2+xy+y^2 \leq 4\}$,

   og en funktion $g: R^2 \to R$ er fastlagt ved

   $g(x,y) = x^3-y^3-3x+3y.$

   Beregn største - og mindsteværdi af g på området G.

4. Et område D i R_+^2 er fastlagt ved, at

   $D = \{(x,y) \mid xy<2 \wedge x^2-y^2>1\}.$

   Bestem rumfanget af den figur, som er beskrevet ved

   $(x,y) \in D$ og $0<z<xy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Et område $C \subset R^3$ er fastlagt ved, at

$$C = \{(x,y,z) \mid z > \sqrt{2x^2+y^2}\}$$

og en funktion $f: C \to R$ ved, at

$$f(x,y,z) = \ln(z^2-y^2-2x^2) - \frac{1}{2}z^3 - 2x^2y \ .$$

Vis, at der ved relationen

$$f(x,y,z) = -2$$

i en omegn af punktet $(1,-1,2)$ er defineret en kontinuert og to gange differentiabel funktion $z:(x,y) \to z(x,y)$. Vis, at punktet $(1,-1)$ er et lokalt maksimum for z .

2. Idet $D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>1\}$, vis da, at integralet

$$\iint_D \frac{2e^{-x}}{y^3e^x+y}\,dxdy$$

er konvergent med værdien $2\ln 2-1$.

3. Bestem største- og mindsteværdi af funktionen, hvorved

$$(x,y) \to x^4+y^4-(x-y)^2,$$

på mængden

$$\{(x,y) \mid 3x^2+4xy+3y^2 \leq 10\}.$$

4. Idet

$$T = \{(x,y) \mid 0<y<x<1\}$$

skal rumfanget beregnes af mængden

$$\{(x,y,z) \mid (x,y)\in T \wedge 0<z< \frac{x^3y^3(x-y)}{(1+x^2y+2xy^2)^2}\}$$

[Det anbefales at benytte transformationen $u=x^2y$, $v=xy^2$ og at vise, at T herved afbildes i $T'=\{(u,v) \mid 0<v<u<1\}$] .

5. Vis, at talsættet $(t,x,y) = (-1,1,-1)$ er en løsning til ligningssystemet

$$tx - (t^2+1)y - x^3 = 0$$

$$(t^2-1)x + ty - y^3 = 2$$

Vis derpå, at løsningerne til ligningssystemet for alle $t \le -\sqrt{3}/2$ kan skrives på formen

$$(t,\varphi(t),\ \psi(t))$$

hvor $\varphi,\psi:]-\infty,-\sqrt{3}/2]\to R$ er differentiable funktioner.
Bestem til slut en ligning for tangenten til løsningskurven i punktet $(-1,1,-1)$.

SKRIFTLIG EKSAMEN I FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE 4.6.84
ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

OPGAVE 1

Et område $C\subset R^3$ er fastlagt ved, at

$$C=\{(x,y,z):\ z>\sqrt{2x^2+y^2}\}$$

og en funktion $f: C\to R$ ved, at

$$f(x,y,z) = \ln(z^2-y^2-2x^2) - \tfrac{1}{2}z^3 - 2x^2y$$

Vis, at der ved ligningen

$$f(x,y,z) = -2$$

i en omegn af $(1,-1,2)$ er defineret en to gange differentiabel funktion $z:(x,y)\to z(x,y)$. Vis, at punktet $(1,-1)$ er et stationært punkt for denne funktion, og undersøg om den har lokalt extremum i $(1,-1)$.

OPGAVE 2

Lad f være den funktion på R^3, som er defineret ved

$$f(x,y,z) = x\sqrt{|y^4-z^4|}$$

Bestem de mængder, hvori f henholdsvis

a: er kontinuert
b: er differentiabel
c: har kontinuerte partielle afledede

OPGAVE 3

Bevis, at ligningen

$$8x^3 - \sin(\pi x) = 0$$

har løsningsmængden $\{-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\}$
Bevis dernæst, at ligningen

$$8x^3 - \sin(\pi x) = a$$

for ethvert $a\in R$ har højst tre løsninger.
Vis, at der findes en konstant $b>0$ således at ligningen

$$(*)\qquad 8x^3 - \sin(\pi x) - 8y^3 - \sin(\pi y) = 0$$

for ethvert y, som opfylder betingelsen $|y|<b$, har netop tre løsninger (med x som den ubekendte).

Angiv det approximerende andengradspolynomium, med 0 som udgangspunkt, for en funktion ψ, om hvilken det gælder, at $(\psi(y),y)$ er løsning til $(*)$ for ethvert $y\in]-b,b[$.

OPGAVE 4

For ethvert parametersæt $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ er der givet et dynamisk system på $\mathbb{R}^2$ med frembringerfunktionen $f_{a,b}$, som er givet ved, at for $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ er

$$f_{a,b}(x,y) = (a-x^2+y,\ bx).$$

I skal først undersøge tilfældet $(a,b)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$. Lad f være betegnelse for $f_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$.

Find fixpunkterne for f, og bevis, at de (begge) udgør ustabile ligevægtstilstande.

Find så fixpunkterne for $f\circ f$, altså de tilstande, som er periodiske med perioden 2. Det kan betale sig at bemærke, at fixpunkterne for f også er fixpunkter for $f\circ f$.

Det er ikke en forudsætning for, at sættet anses for fuldstændigt besvaret, at følgende del af opgave 4 regnes korrekt.

Undersøg om de fundne fixpunkter for $f\circ f$ er stabile ligevægtstilstande for det af $f\circ f$ frembragte dynamiske system.

Vis, at der findes en omegn $\mathcal{U}$ af $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, således, at for alle $(a,b)\in\mathcal{U}$ har $f_{a,b}\circ f_{a,b}$ det samme antal fixpunkter.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Reelle funktioner af en eller flere variable</u>.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

<u>den 15 august kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$</u>.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet mængden D er første kvadrant, skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{1+(x+y)^8}dxdy$$

er konvergent. Udregn tillige integralets værdi.

2. Fastlæg såvel største - som mindsteværdi for funktionen $g:R^2 \curvearrowright R$ givet ved

$$g(x,y) = (3-xy)^2+x^2+y^2$$

på cirkelskiven

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 10\}$$

3. For alle værdier af $a \in R$ er fastlagt ligningen

$$ax^2z^2-4ay^2z-\frac{1}{z}-a^2xy = 1.$$

Vis, at der ved denne ligning i en omegn af punktet $(0,0,-1)$ er defineret en kontinuert, differentiabel funktion $z:(x,y) \curvearrowright z(x,y)$.
Fastlæg dernæst de værdier af a, for hvilke z vil have strengt lokalt maksimum i $(0,0)$.

4. Beregn rumfanget af den del af området $z > x^2+y^2$, som ligger inden for ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2 = 1$.

5. En funktion $f:R^2 \curvearrowright R$ er defineret ved

$$f(x,y) = y^3+\operatorname{arctg}(x+y) - \frac{\pi}{4}x.$$

Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne

$$y = -x \text{ og } y = (\frac{\pi}{4}x)^{1/3}.$$

Vis udfra dette og funktionen f'_y, at der ved relationen $f(x,y) = o$ entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y = \varphi(x)$.
Vis, at punktet $(1,0)$ tilhører grafen for φ, og udregn tillige $\varphi'(1)$ og $\varphi''(1)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 3. januar 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Fastlæg den kontinuert, differentiable funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt de reelle konstanter a,b og c, således at differentialformen

$$\omega = (xz)^2 y^a dx + bf(x,y)z^2 dy + b(xy)^c z dz$$

bliver exakt.

Udregn derpå potentialet til ω gennem $(1,1,1)$.

2. Beregn rumfanget af den del af området $z>x^2+y^2$, som ligger inden for ellipsoiden

$$x^2+y^2+2z^2 = 1 .$$

3. Godtgør, at der ved relationen

$$(\beta y - x - \tfrac{3}{2}\beta^2)e^{2-\beta x^2-y^2} = \tfrac{1}{2}$$

i en omegn af punktet $(x,y,\beta) = (-1,1,1)$ er defineret en kontinuert, differentiabel funktion $\beta : (x,y) \to \beta(x,y)$.

Vis, at funktionen β har lokalt maksimum i $(-1,1)$.

4. Idet mængden D er givet ved

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid xy < 2 \wedge x^2-y^2 > 1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{xy(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^2}\,dxdy$$

er konvergent. Udregn tillige integralets værdi.

5. Bestem den ellipsoide af formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a,b,c > o$$

som indeholder punktet (1,-3,2), og som har størst muligt rumfang. Udregn dette rumfang.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Reelle funktioner af en eller flere variable.</u>

Der stilles fire opgaver, som <u>alle</u> skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

<u>fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.</u>

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{\cosh x}{y^3+y\sinh^2 x}\,dx\,dy$$

er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$.

2. En funktion $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \int_0^1 \left(xt^3 + yt - \frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{4}t^2}}\right)^2 dt$$

Udregn $f(0,0)$.

Fastlæg dernæst det talsæt (x,y), hvor f antager sin mindsteværdi, og udregn til slut denne mindsteværdi for f.

3. Der er givet fladerne

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 = 3$$

$$xy + 2(x-y)z - \frac{1}{4}z^2 = 3$$

Godtgør, at skæringskurven mellem fladerne i en omegn af punktet $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ kan skrives som en parameterfremstilling af formen

$$(x, \varphi(x), \psi(x))$$

hvor φ og ψ er differentiable funktioner i en omegn af $\frac{3}{2}$. Udregn dernæst φ', ψ', φ'' og ψ'' i $x = \frac{3}{2}$.

4. Idet $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$, $a \in R$

betegner C komplementærmængden til D i R^2.
Fra ethvert punkt $(x,y) \in C$ trækkes de to tangenter til randen af D. Disse to tangenter danner vinklen 2φ med hinanden, [hvor φ jo afhænger af punktet (x,y)].
Vis da, rumfanget af mængden

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in C \wedge 0<z<\operatorname{tg}\varphi - \varphi\}$$

eksisterer, og angiv rumfangets værdi.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

fredag, den 7. juni 1985 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{\cosh x}{y^3+y\sinh^2 x}\,dxdy$$

er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$.

2. Fastlæg største- og mindsteværdi, som z kan antage på en skæringskurve mellem fladerne

$$x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}z^2 = \tfrac{5}{2}$$

$$xy + 2(x-y)z - \tfrac{1}{4}z^2 = \tfrac{11}{4}\,.$$

3. Løs differentialligningen

$$Z''_{xx} + Z''_{yy} - 2Z''_{xy} + 2(Z'_x - Z'_y) + Z = 0$$

fx ved overgang til koordinaterne $u = x+y$, $v = x-y$.

Fastlæg dernæst den løsning til differentialligningen, som opfylder randbetingelserne

$$Z(x,0) = x\ ;\quad Z'_y(x,0) = 1\,.$$

4. En funktion $F:R_+^2 \to R$ er defineret ved, at

$$F(x,y) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \operatorname{arctg}\left(\frac{t(x-y)}{xy+t^2}\right) dt.$$

a) Vis, at $F(1,1)=0$, samt at F'_x og F'_y eksisterer i hele R_+^2.

b) Vis hermed, at

$$F(x,y) = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

samt at $c = 0$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

tirsdag, den 7. januar 1986 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2(1-y)^3 + 4xy^2.$$

Bestem største- og mindste-værdi af f på mængden

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 10 \wedge 0 \leq y \leq 4\}.$$

Bestem dernæst værdimængden for f over R_+^2.

2. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge x^2-y^2 > 1\}.$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{dxdy}{x^4}$$

er konvergent med værdien $\frac{4}{3}$.

3. Fastlæg det fuldstændige løsningssæt til de sammenhørende differentialligninger

$$z'_x + 2z = w$$

$$w'_y + w = e^{-2x}.$$

Bestem derpå det løsningssæt, som opfylder randbetingelserne

$$z(x,-x) = -e^{-2x} \; ; \; w(x,-x) = 2e^{-2x}.$$

4. Vis, at $(x,y,z) = (0,1,1)$ er en løsning til ligningssystemet

$$\int_x^y \operatorname{arctg}(z^t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_x^y \ln(1+z^{2t})\,dt = \ln 2.$$

Vis dernæst, at løsningerne i en omegn af $(0,1,1)$ kan fremstilles som en parameterfremstilling af formen

$$(x,y,z) = (x,\alpha(x),\beta(x))$$

hvor α og β er differentiable funktioner i en omegn af 0.

Bestem til slut $\alpha'(0)$ og $\beta'(0)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

onsdag, den 21. januar 1987 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Vis, at der ved relationen

$$x^3 - z^3 - y^2 z - x^2 y = x + y$$

i en omegn af punktet $(1,1,-1)$ er defineret en kontinuert, differentiabel funktion $z:(x,y) \rightarrow z(x,y)$.
Vis tillige, at punktet $(1,1)$ vil være lokalt minimum for z.

2. I 1.kvadrant er givet området

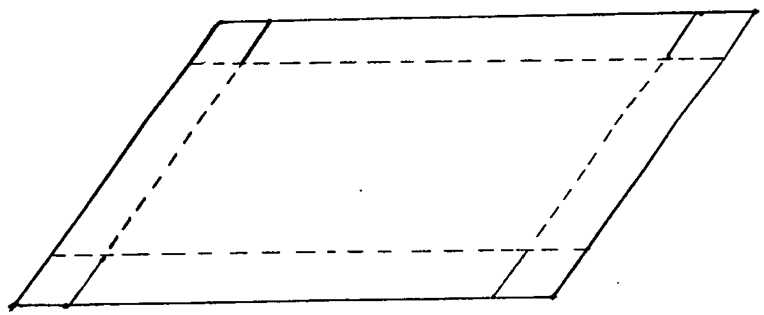
$$D = \{(x,y) \in R_+^2 \mid x^2-y^2 \geqq 6 \wedge x^2+y^2 \leqq 12\} .$$

Bestem rumfanget af den mængde som er fastlagt ved

$$(x,y) \in D \quad \wedge \quad 0 \leqq z \leqq \frac{8xy}{x^4-y^4}$$

[Vink: Det kan anbefales at benytte koordinatskiftet $u = x^2+y^2$, $v = x^2-y^2$]

3. Et firma skal fremstille transportkasser uden låg. Fremstillingen sker ved at udskære papplader (som vist på figuren), som dernæst foldes (langs de stiplede linier). Der er skåret langs de fuldt optrukne linier.



(opgaven fortsætter)

Siderne foldes op, og den løse flap limes på siden udvendig. Kassen skal rumme to liter. Bestem kassens dimensioner, således at materialeforbruget bliver minimeret.

4. Vis, at integralet

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

med $D = \{(x,y) \mid x>o \wedge x^2-y^2>1\}$

vil være konvergent, og udregn integralets værdi.

5. Løs differentialligningen

$$z''_{xx} + z''_{yy} + 2z''_{xy} + z = o$$

ved at benytte koordinatskiftet $u = x+y$, $v = x-y$.

Fastlæg derpå den løsning, som opfylder randværdiproblemet

$$z(x,o) = \cos x \;, \quad z'_y(x,o) = \sin x$$

[Vink: Differentialligningen $\varphi''(t) + \lambda^2\varphi(t) = o$ har den fuldstændige løsning $\varphi(t) = k_1\cos\lambda t + k_2\sin\lambda t$, $k_1,k_2 \in R$]

Skriftlig eksamen i emnekredsen

REELLE FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE

tirsdag den 16.6.87
kl.1o.oo-14.oo

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver

OPGAVE 1

Vi betragter funktionen f: $R^2 \to R$ defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, hvis } x > o \text{ og } y > o \\ \dfrac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, hvis } x < o \text{ og } y < o \\ o & \text{, ellers} \end{cases}$$

(1) Begrund at f er en C^∞-funktion i hver af de fire åbne kvadranter i (x,y)-planen og kontinuert i hele R^2.

(2) Vis at f ikke $\overbrace{\text{har}}^{\text{begge}}$ partielle afledede i andre punkter på x-aksen eller y-aksen end (o,o). Vis at f i (o,o) har retningsafledede i enhver retning, og bestem disse afledede. Men vis også, at f ikke er differentiabel i (o,o).

(3) Lad $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq o,\ y \geq o,\ x^2+y^2 \leq r^2\}$.
Bestem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

OPGAVE 2

Baggrund: Lad der være foretaget n (n > 1) par af sammenhørende målinger $(a_1,b_1),\ldots(a_n,b_n)$ af fysiske størrelser, hvor b-erne tænkes at afhænge af a-erne. Af en eller anden grund antager man at de n målepunkter teoretisk burde ligge tæt ved en parabel med ligningen $y = \alpha x^2+\beta$, hvor α og β er ukendte parametre. For at finde den parabel - dvs. det talsæt (α,β) i R^2 - der giver "bedst tilnærmelse" til målepunkterne, betragtes funktionen f af (α,β) defineret som kvadratet på den euklidiske afstand i R^n mellem sættet af teoretiske y-værdier, altså $(\alpha a_1^2+\beta,\ldots \alpha a_n^2+\beta)$, og sættet af målte y-værdier, $(b_1,\ldots b_n)$.
Dvs.

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{i=n}^{n} (\alpha a_i^2 + \beta - b_i)^2.$$

Man benytter sommetider den såkaldte mindste kvadraters metode

til at fastlægge (α,β). Den består i - hvis det er muligt - at vælge det/de parametersæt $(\alpha,\beta) \in R^2$ der giver f den mindste værdi.

(1) Under forudsætning af at

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \neq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^2$$

(en forudsætning der ikke altid er opfyldt, f.eks. ikke for $a_1 = \ldots = a_n$), skal det vises, at der højst findes ét parametersæt $(\alpha,\beta) \in R^2$, for hvilket f antager en mindste værdi, nemlig

$$\alpha = \frac{n\sum_1^n b_i a_i^2 - (\sum_1^n b_i)(\sum_1^n a_i^2)}{n\sum_1^n a_i^4 - (\sum_1^n a_i^2)^2}$$

og

$$\beta = \frac{(\sum_1^n b_i)(\sum_1^n a_i^4) - (\sum_1^n b_i a_i^2)(\sum_1^n a_i^2)}{n\sum_1^n a_i^4 - (\sum_1^n a_i^2)^2}.$$

(2) Antag at målesættene opfylder uligheden

$$n\sum_1^n a_i^4 > \Big(\sum_1^n a_i^2\Big)^2.$$

Vis at under denne antagelse har f egentligt lokalt minimum for det undet (1) nævnte parametersæt.

(Sættet fortsættes)

OPGAVE 3

Lad funktionerne $g: \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ og $h: \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x,y_1,y_2) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{t}(\sin[(x+y_1+y_2)t] - \sin t)dt$$

og

$$h(x,y_1,y_2) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{t}(\cos[(x+y_1+y_2)t] - \cos t)dt + y_1 - \frac{1}{3}.$$

(1) Begrund, at g og h er C^1-funktioner på $\mathbb{R}^3_+$, og bestem $\nabla g(x,y_1,y_2)$ og $\nabla h(x,y_1,y_2)$, $(x,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^3_+$.

(2) Gør rede for at sættet $(x,y_1,y_2) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ er en løsning til ligningssystemet

$$*)\begin{cases} g(x,y_1,y_2) = 0 \\ h(x,y_1,y_2) = 0 \end{cases} \quad i\ \mathbb{R}^3_+,$$

og vis at der findes en omegn af formen AxB, hvor $A = \{x \mid |x - \frac{1}{3}| \leq a\}$ og $B = \{\underline{y} \mid \|(y_1,y_2) - (\frac{1}{3},\frac{1}{3})\| \leq b\}$ for passende a og b, af $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, så at *) i denne omegn fastlægger y_1 og y_2 som C^1-funktioner af x, $x \in A$.

(3) Vis at funktionen $f: \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, defineret ved

$$f(x,y_1,y_2) = x\, y_1\, y_2,$$

har størsteværdi i $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ under bibetingelserne

$$g(x,y_1,y_2) = 0$$
$$h(x,y_1,y_2) = 0$$
$$x + y_1 + y_2 - 1 = 0.$$

OPGAVE 4

Betragt området F i (x,y)-planen fastlagt ved

$$F = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x \leq y \leq x+1,\ \tfrac{1}{2} \leq xy \leq 1\}.$$

(1) Vis at transformationen $\underline{f}: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$f_1(x,y) = xy$$
$$f_2(x,y) = y-x$$

er injektiv på F.

(2) Udregn arealet af F.

(Der kan måske under udregningerne blive brug for et af følgende resultater:

$$\int\sqrt{u^2+a^2}\,du = \tfrac{1}{2}(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln(u + \sqrt{u^2+a^2}))$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}),$$

hvor a er en konstant).

Opgavesæt slut

Skriftlig eksamen i
emnekredsen

REELLE FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE

onsdag den 6.1.1988

Alle hjælpemidler er tilladt. Der er fire opgaver fordelt på tre ark. Prøven afholdes kl. 10.00-14.00.

OPGAVE 1

(1) Vis, at for enhver løsning (x_o,y_o,z_o) til ligningssystemet

$$\begin{cases} (x+y+z)\, e^{xyz} - \frac{1}{36} - 1 = 0 \\ (x^2+y^2+z^2) - \frac{7}{18} = 0 \end{cases},$$

beliggende i området

$$D = \{(x,y,z) \mid x > 0,\ 0 < y < z\},$$

kan løsningen til systemet i en omegn af (x_o,y_o,z_o) fremstilles som en regulær C^∞-kurve i rummet, parametriseret af x i et interval A omkring x_o:

$$y = \phi(x), \quad z = \psi(x),\ x \in A,$$

$\phi,\ \psi \in C^\infty(A)$.

(2) Bestem det approksimerende polynomium af højst 1. grad for ϕ og ψ, når $(x_o,y_o,z_o) = (\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

(3) Vis, at f,

$$f(x,y,z) = (x+y+z)\, e^{xyz} - \frac{1}{36} - 1,$$

$(x,y,z) \in D$, hverken har største- eller mindsteværdi i D under bibetingelsen $x+y+z = 1$.

OPGAVE 2

Begrund eksistensen af, og beregn, rumintegralet

$$\int_A xyz \sin(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

hvor $A = \{(x,y,z) \mid 0 \le x,y,z \le 1\}$.

OPGAVE 3

En funktion $g\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ af n variable $\underline{x} = (x_1,\dots x_n)$, kaldes homogen, hvis der gælder

$$g(t\underline{x}) = t\, g(\underline{x}),\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n_+, \text{ for ethvert } t > 0.$$

(1) Vis, at funktionen f, defineret ved

$$f(x_1,\dots x_n) = k\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ (x_1,\dots x_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$

hvor $k > 0$ og alle α_i $(i = 1,\dots n)$ er > 0, er en C^∞-funktion, og at den er homogen netop hvis $\alpha_1+\dots+\alpha_n = 1$. (En sådan funktion kaldes en Cobb-Douglas-funktion af n variable og spiller en stor rolle i økonomisk teori.)

(2) Begrund, at størrelsen

$$e(f;x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}},$$

hvor $\Delta f = f(x_1,\dots x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots x_n) - f(x_1,\dots x_n)$, eksisterer for alle i, og bestem dens værdi.
($e(f;x_i)$ kaldes elasticiteten af f med hensyn til x_i.)

Lad $g: R_+^n \to R$ være en differentiabel funktion.

(3) For fast $\underline{x} \in R_+^n$ betragtes funktionen

$t \to g(t\underline{x}),\ t > 0.$

Den kaldes $\varphi_{\underline{x}}$. Begrund, at $\varphi_{\underline{x}}$ er differentiabel, og bestem $\varphi'_{\underline{x}}$.

(4) (a) Lad g være en homogen, differentiabel funktion. Vis - f.eks. ved at betragte $\varphi_{\underline{x}}$ - at g opfylder

$g(\underline{x}) = \underline{x}\cdot\nabla g(\underline{x})$

(hvor som sædvanlig $\nabla g(\underline{x}) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x}),\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}(\underline{x}))$).

(b) Lad omvendt g være en differentiabel funktion der opfylder

$g(\underline{x}) = \underline{x}\cdot\nabla g(\underline{x})$.

Vis, at så er funktionen $t \to \varphi_{\underline{x}}(t)/t,\ t > 0$, konstant på R_+, og benyt dette til at vise, at g er homogen.

(Bemærkning: (a) og (b) udgør til sammen Euler's sætning: En differentiabel funktion på R_+^n er homogen hvis og kun hvis funktionen (g) opfylder $g(\underline{x}) = \underline{x}\cdot\nabla g(\underline{x})$.)

OPGAVE 4

Vi betragter følgende skare af parabelbuer med det ene endepunkt i (o,1) og det andet på linjen med ligningen t = 1 (idet vi forestiller os givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem):

$p(t) = t^2 + bt + 1,\ t \in [o,1]$

for $b \in R$.

→

Vis, at der findes netop én parameterværdi af b, for hvilken den dertil svarende parabelbue har minimal buelængde, og angiv denne værdi af b.

OPGAVESÆT SLUT

Skriftlig eksamen i emnekredsene

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse (ny ordn.)

Reelle funktioner (gl. ordn.)

fredag, den 19. januar 1990

kl. 10.oo - 14.oo

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

OPGAVE 1

I mængden $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y > 0\}$ er der givet en differentialform

$$\omega = \frac{y^2}{(x+y)^2}\,dx + \frac{x^2}{(x+y)^2}\,dy .$$

1. Vis, at ω er eksakt.

2. Find samtlige stamfunktioner til ω.

OPGAVE 2

Lad $f: R^2 \to R$ betegne funktionen givet ved

$$f(x,y) = x^3 + 9x^2 + 6y^2 + 12xy , \quad (x,y) \in R^2 .$$

1. Find de stationære punkter for f, og afgør for hvert af dem, om f har lokalt ekstremum dér.

2. Gør rede for, at restriktionen af f til mængden $\{(x,y) \in R^2 \mid |x| \leq 4 , \ |y| \leq 4\}$ har en mindsteværdi og en størsteværdi. Find disse samt de punkter, hvori de antages.

(opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3

Betragt den uendelige funktionsrække

$$\sum_{n=o}^{\infty} x\, e^{-nx} \quad , \qquad x \in R \; .$$

1. Vis, at rækken er konvergent for ethvert $x \in [o,\infty[$ og divergent for ethvert $x \in]-\infty,o[$.

2. Vis, idet $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, at rækkens sumfunktion $f\colon [o,\infty[\to R$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{-x}} & \text{for } x \in]o,\infty[\\ o & \text{for } x = o \end{cases}$$

3. Vis, at rækken ikke er uniformt konvergent på $[o,\infty[$. (Vink: Hvad er $\lim_{x \to o_+} f(x)$?)

4. Vis, at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[a,\infty[$, hvor $a > o$.

   (Vink: Find $\sup \{x\, e^{-nx} \mid x \in [a,\infty[\}$ for $n > \frac{1}{a}$).

OPGAVE 4

A. Betragt den lineære differentialligning

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = t \; , \qquad t \in R \; .$$

a) Find de reelle løsninger til den tilsvarende homogene ligning.

b) Gæt en løsning til den inhomogene ligning (*) og angiv samtlige reelle løsninger til den.

B. Betragt differentialligningen

$$(**) \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t^2} \; , \qquad (t,y) \in R_+ \times R \; .$$

(a) Gør rede for, at funktionen $y(t)$ givet ved $y(t) = o$ for alle $t \in]o,\infty[$ er den eneste maksimale løsning til (**) som antager værdien o .

(b) Find samtlige maksimale løsninger til (**). Angiv de maksimale løsninger gennem $(1,1)$ og $(1,-1)$.

Skriftlig eksamen i emnekredsene

E3 Ikke-Lineære strukturer fra analyse (ny ordn.)

Reelle funktioner (gl.ordn.)

fredag, den 8. juni 1990
kl. 10.oo - 14.oo

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1.

Betragt for ethvert $a \in R$ differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + ax = e^{-t}, \quad t \in R.$$

1. Bestem a, således at cost er en løsning til den homogene ligning svarende til (*).

2. Bestem for denne værdi af a samtlige reelle løsninger til den homogene ligning.

3. Bestem for den fundne værdi af a samtlige reelle løsninger til (*).

Opgave 2.

I mængden $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2y > -1\}$ betragtes

for ethvert par $(m,n) \in N_0^2$ differentialformen

$$\omega = \frac{2x^m y}{1 + x^2y}\, dx + \frac{x^n}{1 + x^2y}\, dy \; .$$

1. Skitsér A og vis, at der findes netop ét par

   $(m,n) \in N_0^2$, for hvilket formen ω er eksakt.

2. Bestem for de fundne værdier af m og n samtlige stamfunktioner til ω og angiv den, der har værdien 0 i punktet (o,o).

Opgave 3.

En funktion $f: R_+^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2y + \frac{4}{x} + \frac{4}{y} \quad \text{for } (x,y) \in R_+^2 \; .$$

1. Bestem samtlige stationære punkter for f.

2. Vis, at f ikke har nogen største værdi.

3. Vis, at f har en mindste værdi, og find den.

Opgave 4.

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-2n} \,, \qquad x \in R \,.$$

1. Bestem konvergensradi~~n~~us ρ for rækken.

2. Vis, at rækken er uniformt konvergent i intervallet $[-\rho,\rho]$.

3. Bestem rækkens sumfunktion $f(x)$ for $x \in \,]-\rho,\rho[$.

4. Bestem rækkens sum for $x = -\rho$ og for $x = \rho$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
LINEÆR ALGEBRA,

Tirsdag den 2o. januar 1976 kl. 9.oo-13.oo
Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

Den lineære afbildning G_a: $R^3 \sim R^3$ er givet ved matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & a & -3 \\ a+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in R.$$

(1) Bestem de $a \in R$, for hvilke G_a er bijektiv.

(2) Undersøg for hvilke a, Ba kan diagonaliseres, seres, og angiv en basis for R^3 bestående af egenvektorer til G_{-2}.

(3) Undersøg, om der findes en ortonormeret basis for R^3 bestående af egenvektorer for G_{-2}.

(4) Betragt for ethvert $a \in R$ ligningssystemerne

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + ax_3 = o \\ 3x_1 + ax_2 - 3x_3 = o \\ (a+2)x_1 - x_2 - x_3 = o \end{array}\right\}$$

og

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + ax_2 - 3x_3 = o \\ (a+2)x_1 - x_2 - x_3 = o \end{array}\right\}$$

og angiv for begge systemerne dimensionen af løsningsmangfoldigheden, hvor den er ikke-tom.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 2

Lad V være vektorrummet af alle polynomier p af højst første grad over R.

(1) Godtgør, at afbildningen $\varphi: V \times V \sim R$, defineret ved

$$\varphi(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad p,q \in V$$

er et skalarprodukt og angiv en i forhold hertil ortonormeret basis for V.

(2) Vis, at afbildningen F_c: $V \sim V$, defineret ved (for $c \in R$)

$$(F_c(p))(x) = (-2c+1)xp'(x) + c^2p(x), \qquad x \in R$$

er en lineær afbildning. Bestem mængden af egenværdier og egenvektorer til F_c for ethvert $c \in R$, og angiv for ethvert $c \in R$ dimensionen af billedrummet for F_c.

(3) Vis, at der ikke findes noget $c \in R$, for hvilket F_c er isometrisk. Findes der noget $c \in R$, for hvilket restriktionen $F_c|W$: $W \sim W$ af underrummet W af V bestående af alle polynomier uden konstantled ind i W er isometrisk?

(4) Bestem de polynomier $p \in V$, for hvilke $p \perp F_1(p)$.

OPGAVE 3

Giv en oversigt over de forskellige metoder til beregning af determinanter. Konstruer en 4x4-matrix, der egner sig til at belyse disse metoder, og illustrer disse ved hjælp af denne matrix.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
LINEÆR ALGEBRA

tirsdag den 8. juni 1976 kl.
Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

Idet P_2 er det lineære rum af alle polynomier af grad mindre end eller lig 2, defineret på intervallet $[-1,1]$, defineres ved

$$Q_2 = \{ p \in P_2 \mid p(1) = 0 \}$$

et underrum af P_2. Vis, at $\{t^2-t,\ t-1\}$ udgør en basis for Q_2

I Q_2 defineres et skalarprodukt ved

$$(q|r) = \int_{-1}^{1} q(t)r(t)\,dt$$

Bestem det ortogonale komplement i Q_2 til underrummet frembragt af p, hvor $p(t) = t - 1$, $t \in [-1,1]$.

OPGAVE 2

Løs for enhver værdi af $a \in R$ ligningssystemet

$$\begin{aligned} y + z + w &= 2 \\ x - y - 2z + w &= 0 \\ -x - y + 4z - w &= 2 \\ x - z + aw &= a \end{aligned}$$

OPGAVE 3

Lad for ethvert $(s,t) \in R^2$ $A(s,t)$ betegne matricen

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & s+2t & -1 \\ -2 & 0 & s \end{pmatrix}$$

(1) Vis, at $U = \{ (s,t) \mid A(s,t) \text{ ikke regulær} \}$ er et underrum af R^2 og angiv en basis for dette underrum.

(2) For hvilke $(s,t) \in R^2$ er 1 en egenværdi til $A(s,t)$?

(opgave 3 fortsat)

(3) Bestem for ethvert par (s,t), for hvilke 1 er egenværdi til $A(s,t)$ (jvf. (2)) egenvektorerne til 1.

(4) Bestem de $t \in R$, for hvilke $A(1-2t,t)$ har lutter reelle egenværdier

(5) Bestem dimensionen af egenrummene svarende til matricen $A(-3,2)$.

OPGAVE 4

Lad den lineære afbildning $F(a,b)$, $(a,b) \in R^2_+$, af det euklidiske rum E^4 ind i sig selv være givet ved matricen

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -a & -a & a \\ -a & b & -a & a \\ -a & -a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

(1) Bestem de (a,b), hvor $F(a,b)$ ikke er bijektiv.

(2) Angiv spektret for $M(a,b)$.

(3) Udregn projektionen af vektoren $\vec{x} = (2,-1,2,-1)$ på egenrummene for $M(a,b)$.

(4) Udregn tillige projektionen af $F(a,b)(\vec{x})$ på egenrummene.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

LINEÆR ALGEBRA, der stilles ialt fire opgaver.

mandag, den 10. januar 1977 kl. $09^{\underline{30}}$ - $13^{\underline{30}}$.
Alle hjælpemidler tilladt.

1° Lad en lineær afbildning F af det euklidiske rum E^3 ind i sig selv være givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at F er bijektiv.

b) Angiv spektret for A samt en basis for egenrummene ved A.

c) Udregn $(\vec{u} \mid F^{-1} \vec{u})$, når $\vec{u} = (-3,6,-9)$ i den oprindelige basis i E^3.

2° Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 0 \\ 2x - 5y - z + 4w &= -1 \\ -x + 2y \quad\quad - 2w &= 1 \\ y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

3° En lineær afbildning $F_a: R^3 \to R^3$ er for alle $a \in R$ givet ved matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(opgaven fortsættes
næste side)

a) Bestem de $a \in R$, hvor F_a ikke er bijektiv.

b) Bestem de $a \in R$, hvor B_a har mindst to reelle egenværdier.

c) Bestem derpå de $a \in R$, for hvilke B_a kan diagonaliseres med lutter reelle egenværdier.

d) Find a således, at

$$F_a^{-1}(-2,1,-3) = (2,-1,3)$$

og angiv spektret for B_a.

4° En lineær afbildning L inden for det lineære rum C^∞ af alle reelle vilkårligt ofte differentiable funktioner er for alle $a,b \in R$ givet ved

$$L = D^2 + aD + bD^0$$

d.v.s. $\forall t \in R: (Lf)(t) = f''(t) + af'(t) + bf(t)$, $f \in C^\infty$

a) Egenrummet svarende til L og egenværdien -2 vides at have funktionerne $f_1: t \to e^{3t}$ og $f_2: t \to e^{4t}$ som basis, fastlæg på denne baggrund a og b.

(De fundne værdier af a og b forudsættes benyttet i det følgende).

b) Angiv en basis for egenrummet svarende til L og egenværdien $-\frac{9}{4}$

c) En lineær afbildning $G: C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$G = D - 2D^0$$

d.v.s. $\forall t \in R: (Gf)(t) = f'(t) - 2f(t)$, $f \in C^\infty$

Angiv en basis for egenrummet svarende til $G \circ L$ og egenværdien -4.

SKRIFTLIG EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA

mandag, den 27. juni 1977.
Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

Lad for ethvert $a \in \mathbb{R}$ B_a betegne matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 2 & o \\ 1-a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Angiv for ethvert $a \in \mathbb{R}$ en basis for nulrummet N_a, ved B_a, samt dimensionen af billedrummet.

(2) Undersøg, om der findes noget $a \in \mathbb{R}$, for hvilket $(o,1,o) \in N_a^{\perp}$

(3) Bevis, at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ er enhver egentlig vektor i N_a egenvektor for matricen $B_a'B_a$ (B_a' er den transponerede til B_a).

(4) Undersøg, om $B_a'B_a$ er regulær for noget a.

(5) Bestem egenværdierne til $B_1'B_1$.

OPGAVE 2

(1) Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ dimensionen af løsningsrummet for ligningssystemet

$$(*)\begin{cases} (2a^2 - 2a + 1)x_1 + (3a-1)x_2 + (1-a)x_3 = o \\ (3a-1)\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 = o \\ (1-a)\,x_1 - x_2 + x_3 = o \end{cases}$$

og bestem samtlige systemets løsninger.

(2) Løs derefter systemet

$$(\Delta)\begin{cases} (2a^2 - 2a + 1)x_1 + (3a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 2a^2 + 1 \\ (3a-1)\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 = 3a + 3 \\ (1-a)\,x_1 - x_2 + x_3 = 1 - a \end{cases}$$

(opgaver fortsat...

OPGAVE 3

Lad V være vektorrummet af alle polynomier af højst 1.grad, altså

$$V = \{P \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}: \; P(x) = ax + b\}.$$

(1) Vis, at der ved
$\langle P_1 | P_2 \rangle = a_1a_2 + 2b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1$
(hvor P_1 og P_2 er bestemt ved (a_1,b_1) og (a_2,b_2) hhv.)
defineres et skalarprodukt i V. Opskriv for et polynomium P bestemt ved (a,b) normen af P, $|||\,P\,|||$ i forhold til dette produkt.

Lad L betegne afbildningen fra V ind i $\mathbb{R}^2$ bestemt ved
$L(P) = (P(o), P(1))$.

(2) Vis, at L er lineær og opskriv i en passende basis for V matricen for L.

(3) Vis, at L er en isometri, opfattet som afbildning fra V forsynet med $\langle \; | \; \rangle$ ind i $\mathbb{R}^2$ forsynet med det "sædvanlige" skalarprodukt.

(4) Vis, at samtlige grafer for elementerne i $\{P_o\}^{\perp}$ har ét punkt fælles og bestem dette, idet P_o er defineret ved
$P_o(x) = x$, for alle $x \in \mathbb{R}$.

OPGAVE 4

Giv en oversigt over, hvad der gælder vedrørende diagonalisering af matricer.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Lineær Algebra.

Der stilles ialt fire opgaver.

onsdag, den 4. januar 1978 kl. 09^{30} - 13^{30}.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° På mængden $C[0,1]$ af reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $[0,1]$ defineres et skalarprodukt ved

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Bestem to funktioner f og g i $C[0,1]$ af formen $a+be^t$ $a,b\in R$, således at f og g er ortonormale.

2° Angiv for ethvert talsæt $(a,b)\in R^2$ løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x \quad -2z- w &= 1 \\ y+ z+ w &= 0 \\ x+2y+ z+aw &= a+b \\ x- y \quad -2w &= 1 \end{aligned}$$

3° Idet C^{∞} betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på R, defineres afbildningen $L:C^{\infty}\to C^{\infty}$ ved

$$\forall f\in C^{\infty}: Lf(t) = (t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^{\circ})f(t),\ t\in R$$

Vis, at L er lineær.

Det antages nu, at $t\in R_+$, vis da at funktionen $\varphi: t\to t^{\alpha}$, $\alpha\in R$ er egenfunktion for L, og angiv den til φ hørende egenværdi.

Betegner K_{λ} egenrummet svarende til egenværdien λ, ønskes en basis for hvert af egenrummene K_{-2}, K_{-4} og K_{o}.

4° For hvert talsæt $(a,b)\in R^2$ defineres en lineær afbildning $F_{a,b}$ af R^3 ind i sig selv ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} o & a & b \\ b & a-b & b \\ b & a & o \end{pmatrix}$$

Bestem de (a,b) for hvilke $F_{a,b}$ er bijektiv.

Angiv for hvert talsæt (a,b) dimensionen af de til $\underline{A}$ svarende egenrum.

I de tilfælde hvor $\underline{A}$ kan diagonaliseres, ønskes en basis for R^3 bestående af egenvektorer til $\underline{A}$.
Fastlæg (a,b) således, at de til $\underline{A}$ svarende egenrum er ortogonale, samt at $\det\underline{A} = ab$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 8. juni 1978 kl. $o9^{\underline{oo}}$ - $13^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Angiv for hver værdi af $a \in R$ løsningsmængden til lignings-systemet

$$\begin{aligned} x \quad +z+aw &= 1 \\ x+y+z \quad &= 1 \\ y+z- w &= 1 \\ x+y \quad - w &= 1 \end{aligned}$$

Begrund, hvorfor løsningsmængden for visse valg af a er tom.

2. Idet C^∞ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på R, defineres afbildningen $L: C^\infty \to C^\infty$ ved $\forall f \in C^\infty : Lf = (D^3+aD+bD^0)f$, $(a,b)\in R^2$.

Vis, at L er lineær.
Bestem (a,b), når funktionen $\varphi : t \to te^{-t}$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien 3.
Angiv en basis for K_3 (egenrummet svarende til egenværdien 3).

3. Ved

$$W(\varphi,\psi,\omega) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \omega \\ \varphi' & \psi' & \omega' \\ \varphi'' & \psi'' & \omega'' \end{vmatrix} \; ; \; W(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix}$$

defineres Wronskideterminanter, hvor $\varphi,\psi,\omega \in C^2$ (henholdsvis $\varphi,\psi \in C^1$). Det forudsættes bekendt, at φ,ψ,ω (henholdsvis φ,ψ) er lineært uafhængige hvis og kun hvis $W(\varphi,\psi,\omega) \neq o$ (henholdsvis $W(\varphi,\psi) \neq o$), hvor o betyder o-funktionen.

Antages nu $\varphi,\psi \in C^2$ lineært uafhængige. Vis da, at $W(\varphi^2,\varphi\psi) \neq o$, $W(\varphi\psi,\psi^2) \neq o$ og $W(\varphi^2,\psi^2) \neq o$.

Vis tillige, at φ^2, $\varphi\psi$ og ψ^2 er lineært uafhængige.

4. En lineær afbildning $F_t : R^3 \to R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix}$$

a) Bestem de $t \in R$, hvor F_t er bijektiv.

b) Bestem de til $\underline{A}(t)$ svarende egenværdier, og

c) i de tilfælde, hvor $\underline{A}(t)$ kan diagonaliseres ønskes en basis for R^3 af egenvektorer for $\underline{A}(t)$.

d) Fastlæg t således, at

$$F_t^{-1}(-1,2,-3) = (1,-2,3).$$

5. Idet P_2 er det lineære rum af alle polynomier af højst anden grad, defineres på intervallet [0,1] et skalar-produkt ved

$$(p|q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$$

Et underrum Q er frembragt af polynomiet $q(t) = 2t-1$.

Beskriv samtlige polynomier i $Q^\perp$.
Angiv en ortonormeret basis for P_2, således at hvert basiselement er i enten Q eller $Q^\perp$.
Fastlæg polynomiet $p(t) = t^2+t+1$ i den fundne basis.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 4. januar 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet $C^o(I)$ er det lineære rum af alle reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $I = [e^{-1},e]$, defineres et indre produkt i dette rum ved

$$(f|g) = \int_{e^{-1}}^{e} f(t)g(t)dt.$$

Vis, at funktionerne $\varphi: t \rightsquigarrow 1$ og $\psi: t \rightsquigarrow t^{-1}\ln t$ er ortogonale på $C^o(I)$. Bestem derpå tre funktioner af formen

$$\omega: t \rightsquigarrow a + bt^{-1} + ct^{-1}\ln t$$

$a,b,c \in R$, som er parvis ortogonale på $C^o(J)$.

2. Beskriv for hvert talsæt $(a,b) \in R^2$ løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ x - y + 4z - 5w &= b-a \\ 2x - 2y + 5z + aw &= 1 \end{aligned}$$

3. Idet C_+^∞ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på R_+, defineres afbildningen $L: C_+^\infty \rightsquigarrow C^\infty$ ved

$$\forall f \in C_+^\infty : Lf = (t^3D^3 + at^2D^2 + (a+b)tD + bD^o)f$$

$(a,b) \in R^2$.

Vis, at L er lineær.

Bestem derpå (a,b), når funktionen $\varphi: t \rightsquigarrow t\ln t$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien -1.
Angiv endelig en basis for K_{-1} (egenrummet svarende til egenværdien -1).

4. Idet P_2 er det lineære rum af alle polynomier p med grad $p \leq 2$, defineres en lineær afbildning $F: P_2 \to P_2$ ved

$$\forall p \in P_2 : F(p(t)) = t^2 p''(t) - (2t+1)p'(t) + p(t) + 8t$$

$t \in R$.

Bestem egenværdier og egenpolynomier for F.

Redegør for, at F^{-1} eksisterer, og bestem $F^{-1}(t^2-2t)$.

5. En lineær afbildning $G: R^3 \to R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at G er bijektiv.

Vis, at A har to egenværdier, samt at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres. Betegner λ den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet 2, og $\vec{v}$ er den tilhørende egenvektor, bestem da en vektor $\vec{w}$ således at

$$G\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}.$$

Er $\vec{u}$ egenvektoren svarende til den anden egenværdi, og betegner $\underline{S}$ den matrix, hvis søjler netop er $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ udregn da

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1} \underline{A}\ \underline{S}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 8. juni 1979

kl. $10^{\underline{00}} - 14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet $C^o(I)$ er det lineære rum af alle reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $I = [e^{-1},e]$, defineres et indre produkt i dette rum ved

$$(f|g) = \int_{e^{-1}}^{e} f(t)g(t)dt.$$

Vis, at funktionerne $\varphi: t \mapsto 1$ og $\psi: t \mapsto t^{-1}\ln t$ er ortogonale på $C^o(I)$. Bestem derpå tre funktioner af formen

$$\omega: t \mapsto a + bt^{-1} + ct^{-1}\ln t$$

$a,b,c \in R$, som er parvis ortogonale på $C^o(I)$.

2. Beskriv for hvert talsæt $(a,b) \in R^2$ løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ x - y + 4z - 5w &= b-a \\ 2x - 2y + 5z + aw &= 1 \end{aligned}$$

3. Idet C_+^∞ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på R_+, defineres afbildningen $L: C_+^\infty \mapsto C_+^\infty$ ved

$$\forall f \in C_+^\infty : Lf = (t^3D^3 + at^2D^2 + (a+b)tD + bD^o)f$$

$(a,b) \in R^2$.

Vis, at L er lineær.

Bestem derpå (a,b), når funktionen $\varphi: t \mapsto t\ln t$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien -1.
Angiv endelig en basis for K_{-1} (egenrummet svarende til egenværdien -1).

4. Idet P_2 er det lineære rum af alle polynomier p med grad $p \leq 2$, defineres en lineær afbildning $F: P_2 \mapsto P_2$ ved

$$\forall p \in P_2 : F(p(t)) = p''(t) - (t-1)p'(t) + 3p(t)$$

$t \in R$.

Bestem egenværdier og egenpolynomier for F.

Redegør for, at F^{-1} eksisterer, og bestem $F^{-1}(t^2+1)$.

5. En lineær afbildning $G: R^3 \mapsto R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at G er bijektiv.

Vis, at $\underline{A}$ har to egenværdier, samt at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres. Betegner λ den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet 2, og $\vec{v}$ er en tilhørende egenvektor, bestem da en vektor $\vec{w}$ således at

$$G\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}.$$

Er $\vec{u}$ egenvektor svarende til den anden egenværdi, og betegner $\underline{S}$ den matrix, hvis søjler netop er $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ udregn da

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles ialt 4 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 3 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 7. januar 1980 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En lineær afbildning $F: R^4 \to R^4$ er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestem N(F) - nulrummet - og V(F) - billedrummet ved afbildningen F.
Angiv for hver værdi af $a \in R$ løsningsmængden til ligningen

$$F(x,y,z,w) = (2,5,2,a).$$

2. Idet C_+^∞ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktioner på R_+, er en lineær differentialoperator $L: C_+^\infty \to C_+^\infty$ defineret ved

$$L = t^3D^3 + at^2D^2 - 2atD + bD^0$$

$a, b \in R$.

Bestem tallene a og b således, at funktionen $\varphi: R_+ \to R$ givet ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -a.

Angiv - med de fundne værdier for a og b - en basis for K_{-a} (egenrummet for L svarende til egenværdien -a).
Redegør for, at

$$U = \{f \in K_{-a} \mid f(1) = 0\}$$

er et underrum og angiv en basis for U.

3. Idet $a,b,c,d \in R$ defineres følgende 2x2-matricer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $AB=BA$ og $I^2 = -E$

Betegner A^t den transponerede matrix af A, defineres en 4x4-matrix ved

$$M = \begin{pmatrix} A & B^t \\ -B & A^t \end{pmatrix}$$

Vis, at $\det M > 0$ for $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ og, at $\det M = 0$ for $a=b=c=d=0$. (VINK: Udregn f.ex. MM^t)

$\mathcal{M}$ betegner mængden af alle 4x4-matricer af samme form som M.
Vis, at $\mathcal{M}$ med sædvanlig matrix-addition og skalarmultiplikation er et underrum i rummet af alle 4x4-matricer.
Vis tillige, at matricerne

$$J_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

er en basis for $\mathcal{M}$, samt at

1) $J_p^{\,2} = -J_1$ for $p = 2,3,4$
2) $J_2J_3 = -J_3J_2$

Bestem M^{-1} for alle matricer $M \neq 0$, og vis, at $(\mathcal{M}\setminus\{0\},\cdot)$ er en ikke abelsk gruppe. ($\cdot$ betyder sædvanlig matrix-multiplikation).

4. Lad for ethvert talsæt $(s,t) \in R^2$, $A(s,t)$ betegne matricen

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} s & 2t & -s \\ s & 2t-s & 0 \\ -s & s & 2t \end{pmatrix}$$

a) Beskriv mængden

$$N = \{(s,t) \in R^2 \mid A(s,t) \text{ ikke regulær}\}$$

b) Vis, at $2t$ altid vil være egenværdi for $A(s,t)$, og bestem det tilhørende egenrum.

c) Vis, at $A(s,t)$ altid kan diagonaliseres.

d) Bestem spektret for $A(2t,t)$ samt de tilhørende egenvektorer, når $t \neq 0$.

e) Udregn projektionen af egenvektoren svarende til $2t$ på den plan, som er udspændt af de to øvrige egenvektorer, som er fundet under d).

Skriftlig eksamen i Lineær algebra.

Torsdag den 8 januar 1981 kl 9.00 – 13.00

Alle hjælpemidler er tilladt

OPGAVE 1

Vis om de tre ligningssystemer

(1) $$\begin{aligned} 4x-5y-2z+3w&=0\\ 3x-2y-5z+4w&=0 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} x+4y-11z+6w&=0\\ 10x-16y+2z+4w&=0 \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} 2x-5y+4z-w&=0\\ -6x+15y-12z+3w&=0 \end{aligned}$$

at løsningsmængden til (1) er den samme som løsningsmængden til (2), men en ægte delmængde af løsningsmængden til (3).

OPGAVE 2

Vis at løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x-5y-2z+3w&=b_1\\ 3x-2y-5z+4w&=b_2\\ 2x-5y+4z-w&=b_3 \end{aligned}$$

ikke er tom, netop hvis

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & b_1\\ 3 & -2 & b_2\\ 2 & -5 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Løs ligningssystemet i tilfældet $(b_1,b_2,b_3)=(3,4,-1)$.

side 2

OPGAVE 3

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find den løsning til differentialligningssystemet

$$\underline{x}' = A\underline{x},$$

som opfylder $\underline{x}(0) = (1,1,1,1)$.

Det oplyses, at der kan foretages et basisskifte, således at den lineære afbildning, der har A som matrix, i den nye basis har matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Oplysningen skal bevises).

OPGAVE 4

Find projektionen af punktet D på den plan, som går gennem A, B og C, når

$A = (-1,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,2,-1)$, $D = (0,1,1)$

OPGAVE 5

Foretag en diagonalisering af den kvadratiske form

$$k(x,y) = 4xy - ay^2$$

for $a = 3$ og $a = 0$.

SLUT

SKRIFTLIG EKSAMEN

I

LINEÆR ALGEBRA

Tilladte hjælpemidler: alle

Varighed: 4 timer.

3. juni 1981

kl. $09^{\underline{00}}$ -- $13^{\underline{00}}$

OPGAVE 1

Lad T være en lineær operator, som i en vis basis har matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vis, at nulrummet og billedrummet er identiske.

2. Bestem B^2

3. Vis, at ingen 5-dimensional operator kan have identisk nulrum og billedrum.

4. Angiv for en vilkårlig operator S en relation mellem nulrum og billedrum, som er tilstrækkelig til at sikre, at $S^2 = S \circ S$ er nulafbildningen.

OPGAVE 2

Find den løsning til differentialligningssystemet

$$\underline{f}'(t) = A\underline{f}(t),$$

for hvilken $\underline{f}(o) = (1,o,1)$, idet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(fortsættes)

OPGAVE 3

Angiv en betingelse i form af et sæt af ligninger og uligheder i a,b,c og d, som er tilstrækkelig til, at der blandt de fire vektorer

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er mindst 3 af dem, som er lineært uafhængige, mens hele sættet skal være lineært afhængigt.

OPGAVE 4

Lad mængden M_1 være givet ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} -3x + y &= -3 \\ z &= 1 \\ -x + w &= -1\,, \end{aligned}$$

og mængden M_2 være givet ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} -8x + 4y + 10z &= 0 \\ 2x + 4y - 5w &= 0\,. \end{aligned}$$

Vis, at $(1,0,1,0) \in M_1$ og find det punkt i M_2, som ligger nærmest ved $(1,0,1,0)$.

Find dernæst det punkt i M_1, som har den mindste afstand til M_2.

(For et punkt P forstås der ved afstanden til M_2, afstanden til det punkt i M_2, der er nærmest ved P, nemlig projektionen af P på M_2).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK I EMNEKREDSEN
L I N E Æ R   A L G E B R A

mandag, den 18. januar 1982 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$

Der stilles ialt fire opgaver.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Angiv en basis for løsningsrummet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ -x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 8y - 12z &= 0 \\ x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Bestem de $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= b_1 \\ -x - 2y + 3z &= b_2 \\ 4x + 8y - 12z &= b_3 \\ x - y + 5z &= b_4 \end{aligned}$$

har en løsning.

2. Bestem determinanten for den reelle n×n-matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & a_n \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ a_1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Vink: Først gættes løsningen (ved at beregne determinanten for de første par n) og så føres induktionsbevis.

3. Hvilke "elementære omformninger" (ombytning af to rækker, multiplikation af en række med en skalar $\lambda \neq 0$ eller addition af et vilkårligt multiplum af en række til en anden - og tilsvarende for søjlerne) fører fra matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

til matricen

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Lad nu L og M være lineære rum med (u_1, u_2, u_3) basis i L og (v_1, v_2, v_3) basis i M og lad $F : L \to M$ være givet ved matricen A i de to baser. Angiv nye baser i L og i M sådan at F er givet ved A' i de to nye baser.

4. En lineær afbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Diagonaliser F (ved at bestemme egenværdier og egenrum). Lad U være egenrummet svarende til den største egenværdi af F.

Vis at "kvotientrummet" $\mathbb{R}^2/U$ (dvs. $\{(x,y) + U \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ med passende addition og skalar-multiplikation) er isomorft med mængden

$$M = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ og } x+y = 2\}$$

forsynet med additionen

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 - 1,\ y_1 + y_2 - 1)$$

og med multiplikationen

$$\lambda(x,y) = (\lambda x + 1 - \lambda,\ \lambda y + 1 - \lambda) .$$

SKRIFTLIG EKSAMEN i LINEÆR ALGEBRA, marts 1982.

Udleveres den 5. marts 1982 kl. $10^{\underline{00}}$,

afleveres den 5. marts 1982 kl. $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler må benyttes.

OPGAVE 1

Lad $f:R^3 \to R^4$ og $g:R^4 \to R^2$ være de lineære afbildninger, som i forhold til standardbaserne har matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vis, at

(1) Billedrummet for f er nulrummet for g.

Bestem de talsæt $(a,b,c,d) \in R^4$ for hvilke (1) gælder, når

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 2

Angiv de værdier af a for hvilke matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & a(a+1) \\ a(a-1) & 1 \end{pmatrix}$$

kan diagonaliseres til en diagonalmatrix med reelle værdier.

(fortsættes)

OPGAVE 3

Der er givet fire punkter

$A = (-5,-10,-1)$, $B = (4,b,2)$, $C = (-2,-3,-1)$, $D = (2,4,2)$.

i rummet udstyret med et retvinklet koordinatsystem.

Bestem projektionen E af A på BCD.
Bestem højden fra A i ABCD.

Bestem volumen af ABCD ved to forskellige udregninger.

OPGAVE 4

Bestem løsningen til differentialligningen

$$X^1(t) = AX(t), \quad X(o) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

L I N E Æ R   A L G E B R A

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 18. juni 1982 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Find en lineær afbildning af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$ for hvilken (f_1, f_2) er en basis for billedrummet og (e_1) er en basis for nulrummet, hvor

$$f_1 = (0,1,3/2)\ ,\quad f_2 = (1,2,3)\quad \text{og}\quad e_1 = (2,3,4)\ .$$

2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + w + z &= a \\ 2x - 5y + 4w - z &= b \\ -x + 2y - 2w \phantom{{}+z} &= c \\ y - w + z &= d \end{aligned}$$

A) for $(a,b,c,d) = (0,-1,1,1)$

B) for $(a,b,c,d) = (0,-1,0,2)$.

3. Den lineære afbildning $G_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{B}}_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\ ,\quad a \in \mathbb{R}$$

A) Bestem de a for hvilke G_a er bijektiv.

B) Undersøg for hvilke a, $\underline{\underline{B}}_a$ kan diagonaliseres, og angiv en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer til $\underline{\underline{B}}_a$.

C) Bestem derpå a således, at vektoren $\vec{v} = (1,1,-1)$ bliver egenvektor til $\underline{\underline{B}}_a$, og udregn derpå $G_a^{-1}(2,1,-3)$.

4. I det lineære rum C^2 af alle reelle to gange kontinuert differentiable funktioner på $\mathbb{R}$ defineres en lineær afbildning L ved

$$(Lf)(t) = f''(t) - (t+1)\, f'(t) + 3\, f(t),\quad t \in \mathbb{R}$$

Lad P_2 være det lineære rum af alle polynomier p med grad $p \le 2$.

A) Vis at P_2 er "invariant" overfor L , hvormed menes at $L(f) \in P_2$ for alle $f \in P_2$.

B) Bestem egenværdier og egenpolynomier for M = restriktionen af L til P_2 .

C) Redegør for, at M^{-1} eksisterer, og bestem $M^{-1}(g)$ hvis $g(t) = t^2 + 1$ for $t \in \mathbb{R}$.

5. Bestem determinanten for den reelle $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & & & -a_2 & \\ & 0 & a_3 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 & \\ (-1)^{n-1}a_n & & & & \end{pmatrix}$$

Opgaver til

Lineær Algebra

7. marts 1983.

Alle hjælpemidler tilladt.

Der er ialt 4 opgaver, som alle skal regnes.

OPGAVE 1

Afbildningen f fra R^4 ind i R^4 er givet ved

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (o,o_1,\alpha x_3+\beta x_4,-\beta x_3+\alpha x_4).$$

Bestem billedrum og nulrum for f og bevis, at disse rum er ortogonale på hinanden.

OPGAVE 2

Lad M betegne vektorrummet af 2x2 matricer med reelle elementer.
For en matrix $A \in M$ lader vi $\mathrm{Com}(A)$ betegne mængden af matricer, der kommuterer med A, altså

$$\mathrm{Com}(A) = \{X \in M \mid XA = XA\}$$

a: Vis, at $\mathrm{Com}(A)$ er et underrum i M

b: Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestem en basis for $\mathrm{Com}(A)$

c: Lad $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Angiv et ligningssystem i x,y,z,w, som er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $X \in \mathrm{Com}(B)$, hvor

$$X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}.$$

d: For hvilke B er $\mathrm{Com}(B) = M$.

(fortsættes)

OPGAVE 3

Bevis, at det karakteristiske polynomium R for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er givet ved

$$R(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2-ab).$$

Angiv for hvilke reelle værdier af a og b det er muligt at diagonalisere A.

Angiv i tilfældet $a=0$, $b=1$ løsningen til differentialligningssystemet

$$x^1 = Ax, \quad x(o) = (1,1,1,1).$$

NOGLE BETEGNELSER

F betegner vektorrummet af kontinuerte funktioner på [-1,1].

$\cdot$ betegner det skalarprodukt på F, som er givet ved

$$f\cdot g = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-4t}dt$$

P_2 betegner det underrum, som er udspændt af f_o, f_1, f_2 givet ved

$$f_o(t) = e^{2t},\ f_1(t) = te^{2t},\ f_2(t) = t^2e^{2t};\ t\in[-1,1]$$

OPGAVE

Find en ortogonal (ikke nødvendigvis ortonormal) basis for P_2.

Lad $\hat{P}$ betegne det underrum, som udspændes af de to første funktioner af den fundne basis.
Bestem projektionen af h på $\hat{P}$, hvor

$$h(t) = e^{2t}(1-2t+t^2),\ t\in[-1,1].$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 6. juni 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet A er en nxn-matrix og p er et positivt helt tal, er

$$A^p = A \cdot A \cdot \ldots \ldots \cdot A \text{ (p gange)}.$$

Endvidere betyder E nxn-enhedsmatricen og 0 nxn-nulmatricen.
Vis da, at når $A^p = 0$, er

$$(E-A)^{-1} = E+A+A^2+\ldots\ldots+A^{p-1} .$$

Benyt dette til at udregne

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2. En lineær afbildning fra E^4 til E^4 er givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Godtgør, at der findes en basis for E^4 af egenvektorer til B.
Fastlæg derpå et sådant (gerne ortonormalt) sæt af egenvektorer til B.

3. Bestem (fx ved simplexmetoden) maksimum for

$$Q = x + y + z + w$$

under bibetingelserne

(opgaven fortsættes)

$$\begin{aligned} x + z + w &\leqq 10 \\ y + 2z + w &\leqq 7 \\ x + 2y + z &\leqq 11 \\ x + y + w &\leqq 11 \end{aligned}$$

samt

$$(x,y,z,w) \geqq (0,0,0,0).$$

4. Når $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ er en ortonormal basis for R^3 og $k \in R$, er en lineær afbildning $f_k : R^3 \to R^3$ defineret ved

$$\begin{aligned} f_k(\bar{u}) &= \bar{u} + 2\bar{v} + (k-2)\bar{w} \\ f_k(\bar{v}) &= 4\bar{u} - \bar{v} + \bar{w} \\ f_k(\bar{w}) &= (k-1)\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} . \end{aligned}$$

Fastlæg de k, hvor f_k ikke er injektiv, og bestem med disse valg af k nulrum (N_k) og billedrum (V_k) for f_k.

5. Et område $M \subset R^3$ er fastlagt ved, at

(1) $3x + y + 2z \leqq 80$

(2) $2x + 2y + z \leqq 75$

(3) $x + 3y + 4z \leqq 130$

(4) $(x,y,z) \geqq (0,0,0)$.

Bestem det hjørne i M, hvor $(x,y,z) > (0,0,0)$.
Bestem dernæst en parameterfremstilling for det <u>liniestykke</u> ℓ i M, som ligger på randen af såvel (1) som (2).

(opgaven fortsættes)

Fastlæg tallene a og b, således at niveaufladen

$$Q = ax + by + 3z$$

vil antage værdien 155 på hele ℓ.

Undersøg til slut, om tallet 155 vil være maksimum for Q på M.

LINEÆR ALGEBRA

Skriftlig eksamen, mandag den 6 juni kl $10^{00} - 14^{00}$

Opgavesættet består af fire opgaver og anses kun for fuldt besvaret hvis alle opgaver er løst korrekt.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet A er en n×n matrix og p et positivt tal, er pr. definition

$$A^p = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad (\text{p gange}).$$

I det følgende er E n×n-enhedsmatricen og O n×n-nulmatricen.

Vis da, at hvis $A^p = O$, da er E−A invertibel med

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

Benyt dette til at udregne

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. En lineær afbildning, f, fra $\mathbb{R}^4$ til $\mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruer en basis for $\mathbb{R}^4$, som består af egenvektorer for f. Konstruer, hvis det er muligt, en tilsvarende ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

3. I rummet er der givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Idet vi identificerer punkter med deres koordinatsæt, er der givet tre punkter A, A' og B ved

$$A=(1,1,1),\quad A'=(1,0,-1) \text{ og } B=(-1,0,-1).$$

Bevis at den punktmængde, som bestemmes af ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

er linjen gennem A og A', som vi betegner a.

Linjen b er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og det punkt, som svarer til parameterværdien t betegnes B_t.
Bestem t således at $B = B_t$.

Med A_t betegner vi skæringspunktet mellem a og den plan vinkelret på b, som går gennem B_t.

Angiv volumen af tetraederet AA_tBB_t og angiv den største og mindste værdi af dette volumen, når B_t skal ligge på linjestykket B_0B_1.

4. Idet $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ og $k \in \mathbb{R}$ oplyses det om den lineære afbildning $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, at

$$f_k(\bar{u}) = \bar{u} + 2\bar{v} + (k-2)\bar{w}$$
$$f_k(\bar{v}) = 4\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$$
$$f_k(\bar{w}) = (k-1)\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}.$$

Bestem de værdier af k, for hvilke f_k ikke er injektiv.
Angiv for hver af disse værdier af k en parameterfremstilling af nulrummet og et ligningssystem for billedrummet.

SLUT

EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA,

FREDAG DEN 6. JANUAR 1984 KL 10 – 14

Alle hjælpemidler er tilladt

1. For $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ lader vi $M(\alpha,\beta,\gamma)$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

For hvilke (α,β,γ) er $M(\alpha,\beta,\gamma)$ invertibel?
Bestem $M(1,2,3)^{-1}$.

2. Lad A, B og C være de tre punkter, som i forhold til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem har koordinatsættene

$$(4,0,0),\ (0,-2,0) \text{ og } (0,0,1)$$

For et givet punkt P på linjestykket AB, således at $P \neq B$, findes der da netop et punkt Q på linjen gennem B og C og et punkt R på linjen gennem A og C, således at PQ er vinkelret på AB og QR er vinkelret på BC.

Bestem volumen af tetraederet $OPQR$, når P er midtpunktet af AB.
Bestem det P, for hvilket tetraederet $OPQR$ har maximalt volumen. Punktet O er koordinatsystemets origo.

(3) Lad f og g være de to lineære afbildninger, som har matricerne A og B, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 5 \\ 2 & 6 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 13 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vis at f og g har samme nulrum $(\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g))$, men at billedrummene $\mathcal{B}(f)$ og $\mathcal{B}(g)$ er forskellige. Angiv et ligningssystem for $B(f)$ og for $B(g)$

(4) Løs differentialligningen

$$x'(t) = A\,x(t)\,; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som en hjælp oplyses det, at A er matrix for en vis drejning, selvom opgavens løsning ikke forudsætter denne oplysning. Oplysningen må gerne benyttes som et bevist faktum.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Lineær Algebra</u>

Der stilles fire opgaver, som <u>alle</u> skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

<u>mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$</u> .

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem determinanten for den reelle $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. For hvert talpar $(a,b) \in R^2$ er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 5w &= 2 \\ x - 2y - z + 5w &= -1 \\ y - 2z + aw &= 1 \\ -y + z + 6w &= b \end{aligned}$$

Angiv for hvert talpar (a,b) løsningsmængden til ligningssystemet.
Opskriv specielt løsningsmængden svarende til $(a,b) = (-6,1)$.

3. En lineær afbildning $F:R^3 \to R^3$ er fastlagt ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem spektret for $\underline{A}$ og vis, at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Betegner a den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet større end 1, og er $\vec{v}$ en tilhørende egenvektor, fastlæg da en vektor $\vec{w}$, således at

$$F(\vec{w}) - a\vec{w} = \vec{v}$$

Er $\vec{u}$ endnu en egenvektor for F, vis da, at $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ udgør en basis for R^3, og fastlæg den til F svarende matrix i denne basis.

4. Idet C^∞ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktoner på R, er en liniær differentialoperator $L:C^\infty \to C^\infty$ defineret ved

$$L = D^4 + aD^3 + bD^2 - aD + cD^0$$

hvor $a,b,c \in R$.

Fastlæg samtlige talsæt (a,b,c), således at funktion $\varphi:R \to R$, givet ved

$$\varphi(t) = te^t$$

tilhører $N(L)$ - nulrummet for L.

Bestem det af talsættene (a,b,c), hvor tillige funktionen $\psi:R \to R$ givet ved

$$\psi(t) = e^{2t}$$

er egenfunktion svarende til egenværdien 9.

Angiv med den fundne værdi af a,b og c en basis for $N(L)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. P_2 står for det lineære rum af alle polynomier af grad højst 2 defineret på $[-1,1]$. Endvidere er

$$Q_2 = \{p \in P_2 \mid p(-1) = 0\} .$$

Fastlæg en basis for Q_2.

I P_2 defineres et skalarprodukt ved

$$(p \mid q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Bestem en basis for $Q_2^{\perp}$ - det ortogonale komplement til Q_2 i P_2.

Udregn endelig den ortogonale projektion af

$$q(t) = (t-1)^2$$

på Q_2.

2. For hvert talpar $(a,b) \in R^2$ er givet lignings-systemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 5w &= 2 \\ x - 2y - z + 5w &= -1 \\ y - 2z + aw &= 1 \\ -y + z + 6w &= b \end{aligned}$$

Angiv for hvert talpar (a,b) løsningsmængden til ligningssystemet.
Opskriv specielt løsningsmængden svarende til $(a,b) = (-6,1)$.

3. En lineær afbildning $F:R^3 \to R^3$ er fastlagt ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestem spektret for $\underline{A}$ og vis, at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Betegner a den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet større end 1, og er $\vec{v}$ en tilhørende egenvektor, fastlæg da en vektor $\vec{w}$, således at

$$F(\vec{w}) - a\vec{w} = \vec{v}$$

Er $\vec{u}$ endnu en egenvektor for F, vis da, at $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ udgør en basis for R^3, og fastlæg den til F svarende matrix i denne basis.

4. Idet C^∞ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktoner på R, er en liniær differentialoperator $L:C^\infty \to C^\infty$ defineret ved

$$L = D^4+aD^3+bD^2-aD+cD^0$$

hvor $a,b,c \in R$.

Fastlæg samtlige talsæt (a,b,c), således at funktion $\varphi:R \to R$ givet ved

$$\varphi(t) = te^t$$

tilhører N(L) - nulrummet for L.

Bestem det af talsættene (a,b,c), hvor tillige funktionen $\psi:R \to R$ givet ved

$$\psi(t) = e^{2t}$$

er egenfunktion svarende til egenværdien 9.
Angiv med det fundne talsæt (a,b,c) en basis for N(L).

SKRIFTLIG EKSAMEN
I

LINEÆR ALGEBRA

Den 6. juni 1985, kl. 10.00-14.00

Alle hjælpemidler er tilladt.
En fuldstændig besvarelse kræver,
at alle opgaver er korrekt besvarede.

OPGAVE 1 Vi betragter de to reelle ligningssystemer

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= a+1 \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= a+b \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= a-b+3 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= -2(a+1) \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= 3a-2b \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= -2a-3b-1 \end{aligned}$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b \in \mathbb{R}$.

(1) Vis, at begge ligningssystemer har løsninger.

(2) Vis, at for søjlen $\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ har ligningssystemet

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= s \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= t \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= u \end{aligned}$$

løsninger netop hvis der findes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, for hvilke

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a+1 \\ a+b \\ a-b+3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2(a+1) \\ 3a-2b \\ -2a-3b-1 \end{pmatrix}$$

(3) Hvad er dimensionen af nulrummet for matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -(a+1) & a+1 & -(a+1) \\ a & a-b & b & 2a-b \\ 1-b & -(a+b+1) & a+2 & -(a+2b) \end{pmatrix} \ ?$$

(Begrund svaret.)

OPGAVE 2 Lad A være en reel 4x4-matrix. Det forudsættes at A som matrix for en afbildning af $\mathbb{R}^4$ ind i $\mathbb{R}^4$ (udstyret med standardbasen) har egenværdierne

a): -1 med (1,0,0,0) og (0,1,0,0) som hertil hørende egenvektorer

b): -2 med (0,-2,1,0) som tilhørende egenvektor

c): $-\frac{1}{2}$ med (0,0,-2,-3) som tilhørende egenvektor.

→

(1) Bestem A.

(2) Vis, at A kan diagonaliseres, og angiv en basisskifte-matrix der fører A over i en diagonalmatrix.

OPGAVE 3 Lad $P_n[0,1]$ være vektorrummet (over $\mathbb{R}$) af alle reelle polynomier af højst n'te grad på intervallet $[0,1]$. Vi definerer en afbildning $F: P_n[0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ ved for $p \in P_n[0,1]$ at sætte

$$F(p) = (p^{(n)}(0),\ p^{(n-1)}(0), \ldots, p'(0), p(0)),$$

hvor $p^{(k)}(0)$ angiver den k'te afledede af polynomiet p i punktet 0.

(1) Vis, at F er en isomorfi mellem $(P_n[0,1],+,\cdot,\mathbb{R})$ og $(\mathbb{R}^{n+1},+,\cdot,\mathbb{R})$

(2) Idet vi minder om, at de n+1 polynomier $1, x, x^2, \ldots x^n$ udgør en basis for $P_n[0,1]$, ønskes angivet den til F hørende matrix, når $P_n[0,1]$ er udstyret med denne basis og $\mathbb{R}^{n+1}$ med standardbasen.

Vi forestiller os dernæst $P_n[0,1]$ forsynet med "det sædvanlige skalarprodukt" i funktionsrum:

$$(p|q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$$

(3) Vis, at der gælder

$$(p|q) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a_i b_j}{i+j+1},$$

hvis $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$,

og at der for vilkårlige sæt $(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0)$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ gælder uligheden

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geq 0.$$

(4) Godtgør endelig, at F ikke er en isometri, idet også $\mathbb{R}^{n+1}$ forsynes med det deri sædvanlige skalarprodukt

→

$$(x|y) = \sum_{i=o}^{n} x_i y_i,$$

hvor $x = (x_o, x_1, \ldots x_n)$, $y = (y_o, y_1, \ldots y_n)$.

OPGAVE 4 (1) Vis, at matricen

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & o \\ 2a & a & a-1 \\ a+1 & o & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

har 1 som egenværdi.

(2) Bestem dernæst de $a \in \mathbb{R}$, for hvilke $A(a)$ har tre forskelle reelle egenværdier.

Skriftlig eksamen i LINEÆR ALGEBRA JAN 86

Der er 3 opgaver

Alle hjælpemidler er tilladte

OPGAVE 1

I rummet er givet punkterne A, B og C, som i forhold til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem har koordinatsættene

$$(-4, 0, -\sqrt{2}),\quad (2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2}),\quad (2, -2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

Bevis at trekant ABC er ligesidet.

Ved midtnormalplanen for to punkter P og Q (med $P \neq Q$) forstås den plan, som går gennem midtpunktet af linjestykket PQ og er vinkelret på dette.

Vis at midtnormalplanen for A og B skærer midtnormalplanen for A og C i z-aksen, og at ethvert punkt på z-aksen har samme afstand fra hvert af punkterne A, B og C.

Lad D betegne det punkt med positiv z-koordinat, for hvilket ABCD er et ligesidet tetraeder, og lad E betegne projektionen af A på siden BCD.

Bestem koordinaterne for D og E.

Lad $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{w}$ være de vektorer, som udgøres af koordinatsættene for A, B og C.

Vis at $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Lad F være en afbildning af rummet ind i sig selv, for hvilken

$$F(A) = A, \quad F(B) = C, \quad F(C) = D.$$

Lad f betegne den afbildning, som udtrykker F i koordinater i forhold til basen $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. Det antages, at f er lineær.

Bestem matricen for f. Bestem også en matrix for f i forhold til standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

Lad ℓ være linjen gennem A og E.

Vis at ℓ er mængden af fixpunkter[*] for F.

Vis at F er bijektiv, og at $F^{-1} = F \circ F$.

---

[*] P er fixpunkt for F $\Leftrightarrow$ $F(P) = P$ (definition)

OPGAVE 2

Lad $n, p \in \mathbb{N}$.
Lad A være en kompleks $n \times n$ matrix og sæt $B = A^p$.

1° Bevis at det for alle komplekse tal λ gælder, at λ^p er egenværdi for B, hvis λ er egenværdi for A.

Lad $\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^n$ være en basis for $\mathbb{C}^n$, og lad f være den lineære afbildning af $\mathbb{C}^n$ ind i $\mathbb{C}^n$, som er bestemt ved, at

$$f(\underline{u}^1) = \underline{u}^2,\ f(\underline{u}^2) = \underline{u}^3, \dots,\ f(\underline{u}^{n-1}) = \underline{u}^n,\ f(\underline{u}^n) = \underline{u}^1.$$

2° Angiv i forhold til basen $\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^n$ en matrix for hver af de lineære afbildninger $f, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$.

$(f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f$, etc$)$

3° Bevis (ved at benytte 1° og 2°), at det for alle komplekse tal λ gælder, at $\lambda^n = 1$, hvis λ er egenværdi for f.

4° Bevis at også det omvendte gælder, nemlig at enhver kompleks løsning λ til ligningen $\lambda^n = 1$ er en egenværdi for f, og konstruer en egenvektor, der er eksplicit udtrykt ved λ.

5° Angiv en basis bestående af egenvektorer for f i tilfældet $n = 4$.

OPGAVE 3

Lad A være matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad for ethvert $t \in \mathbb{R}$, B_t være matricen

$$\begin{pmatrix} 2-t & 4-t & 2-2t \\ 1 & 2 & 1 \\ t & t & 2t \end{pmatrix}$$

De lineære afbildninger f, $\tilde{f}$, g_t og $\tilde{g}_t$ er definerede ved, at de i forhold til standardbaserne har matricerne A, A^*, B_t og B_t^*, respektive.
(Stjernen betegner matrixtransponering)

For en lineær afbildning T betegner $\mathcal{N}(T)$ og $\mathcal{B}(T)$ henholdsvis nulrum og billedrum for T.

Bevis inklusionerne (for alle $t \in \mathbb{R}$)

(1) $\mathcal{B}(g_t) \subseteq \mathcal{B}(f)$
(2) $\mathcal{N}(\tilde{g}_t) \supseteq \mathcal{N}(\tilde{f})$

og bestem de værdier af t for hvilke inklusionerne er ægte.

Vis at begge inklusioner er ægte, hvis blot én af dem er ægte.

SKRIFTLIG EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA
11. JUNI 1986, 10.00-14.00

Alle hjælpemidler er tilladt.
Der er tre opgaver, fordelt på to sider.

OPGAVE 1

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem er der givet tre punkter

A_0 med koordinatsættet (0,1,0),
B_0 med koordinatsættet (1,1,1) og
C_0 med koordinatsættet (1,0,1),

linjen

l_0 gennem A_0 og B_0,

planen

π_0 med ligningen $x=0$

og planen

σ_0 gennem C_0 og med normalen i C_0 gående gennem begyndelsespunktet.

For ethvert $\varphi \in R$ lader vi A_φ betegne det punkt, som A afbildes i ved en drejning med måltallet φ om z-axen. Analogt defineres B_φ, C_φ, l_φ, π_φ og σ_φ.

1) Bestem en parameterfremstilling for l_φ.
2) Bestem ligninger for π_φ og σ_φ.
3) Vis at skæringspunktet $P_{\varphi,\psi}$ mellem l_φ og π_ψ (hvis de da skærer hinanden) har koordinatsættet

$(-\sin\varphi + t\cos\varphi,\ \cos\varphi + t\sin\varphi, t)$, hvor $t=\operatorname{tg}(\varphi-\psi)$

4) Bestem nogle værdier af φ og ψ således at $\psi=2\varphi$ og $P_{\varphi,\psi}$ ligger i σ_φ.

OPGAVE 2

For ethvert $r \in R$ betegner M_r matricen

$$\begin{pmatrix} 4-r^2 & r+1 & 0 \\ 0 & 1 & r+1 \\ 0 & 1-3r^2 & 3r^2+r+1 \end{pmatrix}$$

Vis at M_r har spektret

$$\{3r^2, 4-r^2, 2+r\}$$

og angiv de værdier af r, for hvilke M_r er regulær.

Kan rangen af M_r være 1 ?

OPGAVE 3

I denne opgave benyttes betegnelserne fra opgave 2, og resultaterne derfra må benyttes uafhængigt af, hvordan opgave 2 er besvaret.

Angiv for ethvert helt tal n antallet af elementer i spektret for M_n.

Argumenter for, at M_n kan diagonaliseres for ethvert helt tal n, forskelligt fra -2, -1 og 1.

Find en basis bestående af egenvektorer for M_0.

Vis at M_n kan diagonaliseres for n=-1, men ikke for n=1.

Angiv en vektor $\underline{u}$ således at sættet $(\underline{u}, N\underline{u}, N^2\underline{u})$ er en basis for R^3, idet $N=M_1-E$.

Kan M_{-2} diagonaliseres ?

S K R I F T L I G   E K S A M E N

I

L I N E Æ R   A L G E B R A

Den 21. januar 1987

Alle hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver, der ikke vægtes ens.

Opgave 1 Find for hvert talpar $(a,b)\in R^2$ Jordans normalform og en Jordan basis for følgende matrix

$$\begin{pmatrix} 2-b-a & b+a-1 \\ 2-b-2a & b+2a-1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2 Lad V betegne rummet af vektorer i rummet og lad, for en vektor $a\in V$, f_a betegne den lineære afbildning

$$f_a : V \to V$$
$$f_a(b) = a\times b \quad \text{(krydsproduktet)}$$

a) Lad der være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, i hvilket a har koordinaterne (a_1,a_2,a_3). Find matricen A_a for f_a i dette koordinatsystem.

b) Find den reelle Jordan normalform B_a for f_a og en reel Jordan basis.

Antag B er en diagonaliserbar 3×3-matrix, dvs der findes en regulær 3×3-matrix D med invers D^{-1} så

$$B = D\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} D^{-1}$$

selvom B er reel, må $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ og D gerne være komplekse.

Man kan vise (hvad I ikke skal), at matricen

$$D\begin{pmatrix} \exp\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\lambda_3 \end{pmatrix} D^{-1}$$

er uafhængig af valget af D, og at den er reel, hvis B er det.

(opgaven fortsætter næste side)

(opgave 2 fortsat)

Vi definerer nu

$$\exp(B) = D \begin{pmatrix} \exp\lambda_1 & o & o \\ o & \exp\lambda_2 & o \\ o & o & \exp\lambda_3 \end{pmatrix} D^{-1}$$

c) Find $\exp(B_a)$ og giv en geometrisk fortolkning af den tilsvarende afbildning $\exp(f_a): V \sim V$

<u>Opgave 3</u> I rummet er givet 3 planer α, β og γ som i forhold til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem (o,i,j,k) har ligningerne

$$\alpha: \quad (1-2\sqrt{2})x+(2+2\sqrt{2})y+(2-\sqrt{2})z = 3$$
$$\beta: \quad x+2y+2z = o$$
$$\gamma: \quad y-z = o$$

a) Vis, at de tre planer skærer hinanden i præcist et punkt A og bestem dets koordinater.

I forhold til det samme koordinatsystem har linierne ℓ og m parameter fremstillingerne

$$\ell: \quad (x,y,z) = t(1,2,2)$$
$$m: \quad (x,y,z) = t(0,1,-1)$$

b) Vis, at α skærer ℓ i præcist et punkt B og m i præcist et punkt C og bestem koordinaterne for disse to punkter.

c) Vis, at vektorerne $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ og $\overline{OC}$ udgør en ortonormal basis og bestem sidernes længde i trekant ABC.

Lad E betegne projektionen af O på α.

d) Find et punkt D på linien gennem O og E så ABCD er et ligesidet tetraeder og bestem koordinaterne for D.

(opgaven fortsætter næste side)

(opgave 3 fortsat)

Lad f være en afbildning af rummet ind i sig selv, som udtrykt i det givne koordinatsystem er lineær og som opfylder

$$f(A) = B, \quad f(B) = C \quad \text{og} \quad f(D) = D$$

e) Bestem $f(C)$ og find matricen for f dels i basen $(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ og dels i basen (i,j,k).

f) Vis, at f er regular og at $f^{-1} = f^2$.

(opgavesættet slut)

SKIFTLIG EKSAMEN
I
LINEÆR ALGEBRA

Juni 1987

Alle hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af 4 opgaver, der ikke vægtes ens.

OPGAVE 1.

i) Find den fuldstændige løsning til det inhomogene ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

ii) Find den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem.

OPGAVE 2.

Find en Jordan-basis for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

og for produktet

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 3.

Lad A være en reel $n \times n$-matrix og lad A^* betegne den transponerede matrix.

i) Vis at hvis $\mathbf{x}$ er en egenvektor for A med egenværdi λ så er $\mathbf{x}$ en egenvektor for A^2 med egenværdi λ^2.

Lad $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ betegne det sædvanlige skalar produkt i $\mathbf{R}^n$.

ii) Vis at $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^*\mathbf{y})$.

iii) Vis at A^*A har lutter ikke negative egenværdier.

iv) Vis at der findes en reel matrix B så $B^2 = A^*A$. (Vink: benyt at A^*A kan diagonaliseres).

v) Lad A være matricen fra opgave 2 og bestem B så $B^2 = A^*A$.

OPGAVE 4.

Lad V betegne rummet af skæv-adjungerede komplekse 2×2-matricer med spor nul. Dvs $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ hvis og kun hvis

$$\overline{A}^{*} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -A \quad \text{og} \quad a + d = 0.$$

i) Vis at V er et reelt vektorrum og at de såkaldte Pauli's spinmatricer

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

udgør en basis for V.

ii) Vis at afbildningen $V \times V \to \mathbb{R}$ givet ved $(A, B) \mapsto \frac{1}{2}\text{spor}(A\overline{B}^{*})$ er et skalarprodukt på V, og at Pauli's spinmatricer er en ortonormal basis mht. dette skalarprodukt.

Lad $SU(2)$ betegne rummet af unitære komplekse 2×2-matricer med determinant 1. (Så hvis $D \in SU(2)$, er $D^{-1} = \overline{D}^{*}$).

iii) Vis at hvis $D \in SU(2)$ og $A \in V$ så er $DAD^{-1} \in V$.

For $D \in SU(2)$ definerer vi nu afbildninger $f_D : V \to V$ ved $f_D(A) = DAD^{-1}$.

iv) Vis at f_D er lineær og at $f_D \circ f_{D_1} = f_{DD_1}$.

v) Vis at f_D er en isometrisk afbildning.

vi) Vis at

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

og bestem matricen for f_D mht. basen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

SKRIFTLIG EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA
Torsdag den 7. januar 1988 kl 10–14

OPGAVE 1

Angiv for ethvert $(a, b, c) \in R^3$ en parameterfremstilling for løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a + a^2 \\ 1 + b + b^2 \\ 1 + c + c^2 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 2

Lad T betegne den lineære afbildning af R^4 ind i R^4, som i forhold til standardbasen har matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og lad M betegne det tredimensionale underrum i R^4, som er ortogonalt på vektoren $(1, 0, -1, 0)$.

Bestem en ortogonal basis (b_1, b_2, b_3, b_4) for R^4, således at følgende tre betingelser er opfyldt.

(1) (b_1) er en basis for nulrummet for T
(2) (b_1, b_2, b_3) er en basis for billedrummet for T
(3) (b_1, b_2, b_4) er en basis for M

OPGAVE 3

Lad T betegne den lineære afbildning af R^4 ind i R^4, som i forhold til standardbasen har matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ \alpha & 2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Bestem det karakteristiske polynomium for T
(2) Angiv de værdier af α for hvilke T kan diagonliseres
(3) Find for alle andre værdier af α en basis for R^4, således at matricen for T i forhold til denne basis kun afviger fra en diagonalmatrix på en enkelt plads.

OPGAVE 4

(1) Vis at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og at} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Gæt en formel som gælder for $n \times n$ matricer og som generaliserer resultaterne i (1). Bevis formlen.

SKRIFTLIG EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA

Torsdag den 7. januar 1988 kl. 10-14

OPGAVE 1

Angiv for ethvert $(a,b,c) \in R^3$ en parameterfremstilling for løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a + a^2 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

OPGAVE 2

Lad F betegne den lineære afbildning af R^4 ind i R^4, som i forhold til standardbasen har matricen

$$A = \begin{pmatrix} [illegible] & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og lad M betegne det tredimensionale underrum i R^4, som er ortogonalt på vektoren $(1,0,-1,0)$.

Bestem en ortogonal basis (b_1, b_2, b_3, b_4) for R^4, således at følgende tre betingelser er opfyldt

(1) (b_1) er en basis for nulrummet for F

(2) (b_1, b_2, b_3) er en basis for billedrummet for F

(3) (b_1, b_2, b_4) er en basis for M

OPGAVE 3

Angiv en parameterfremstilling for mængden af sæt (a,b,c), for hvilke matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [illegible] & 0 \\ 3a - b + c & 0 & 4b + c \\ 0 & 4b - c & [illegible] \end{pmatrix}$$

er symmetrisk. Bestem derefter et sæt (a,b,c) således at A har egenværdien -1 og kan diagonaliseres i forhold til en ortogonal basis. Bestem for det fundne sæt en sådan basis.

OPGAVE 4

(1) Vis at

$$[illegible]$$

(2) Giv en formel som gælder for $n \times n$ matricer og som generaliserer resultaterne i (1). Bevis formlen.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

EKSAMEN I EMNEKREDSEN LINEÆR ALGBERA MANDAG DEN 9.JANUAR 1989.

Alle hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af fire opgaver.

I opgaverne benyttes betegnelsen R for de reelle tal, C for de komplekse tal.

OPGAVE 1

(i) Bestem for ethvert $a \in R$ løsningsmængden L_a til det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + (a+2)x_3 &= 0 \\ (a^2-a)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Bestem nu for ethvert $a \in R$ løsningsmængden M_a til det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + (a+2)x_2 + (a+2)x_3 &= a+3 \\ (a^2-a)x_3 &= a \end{aligned}$$

(iii) Idet $C(a)$ betegner koefficientmatricen for ovenstående ligningssystemer, ønskes en basis for $\ker C(a)$ og en basis for $\operatorname{span} C(a)$ bestemt.

(iv) Idet $D(a)$ betegner konstantsøjlen i ligningssystemet i spørgsmål (ii), ønskes en bestemmelse af mængden

$$K = \left\{ a \in R \mid D(a) \in \operatorname{span} C(a) \right\} .$$

OPGAVE 2

Lad $f : R^3 \to R^3$ være den lineære afbildning, der m.h.t. standardbasen i R^3 er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 6 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(i) Find dimensionen af $\ker A$ (= $\ker f$), og find en basis for $\ker A$.

(ii) Find dimensionen af billedrummet $f(R^3) = \operatorname{span} A$, og find en basis for $f(R^3)$.

(iii) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, således at $D = Q^{-1}AQ$.

(iv) Begrund, at der findes en ortonormal basis bestående af egenvektorer for A, og angiv en sådan.

OPGAVE 3

I R^3 er givet sættet $\alpha = ((1,1,0), (0,1,1), (0,1,2))$.

(i) Begrund, at α er en basis for R^3.

(ii) Beregn koordinatsættet i standardbasen (givet som $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ for den vektor X i R^3, der i α-basen har koordinatsættet $(2,8,3)$.

(iii) Lad f betegne den lineære afbildning af $R^3 \to R^3$, der m.h.t. standardbasen er givet ved matricen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Udregn den til f hørende matrix m.h.t. α-basen.

OPGAVE 4

Lad $f: C^3 \to C^3$ være den lineære afbildning, der m.h.t. standardbasen i C^3 er givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} .$$

(i) Bestem egenværdierne for f.

(ii) Afgør, om der findes en basis for C^3 bestående af egenvektorer for f.

(iii) Udregn en Jordan-normalform for B og find en tilhørende basis for C^3.

Opgavesættet er slut.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$A = (1,3,-1)$
$B = (1,5,-2)$
$C = (3,-5,1)$
$D = (2,2,0)$

Bestem en parameterfremstilling for den linje m, som går gennem D, er parallel med planen bestemt af A, B og C og er vinkelret på linjen gennem A og D.
Bestem det punkt E på m som har mindst afstand til B.
Bestem volumen af det af A, B, D og E bestemte tetraeder.

OPGAVE 2

Den lineære afbildning f af R^2 ind i sig selv er givet ved formlen $f(x) = Ax$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestem en ny basis (u_1, u_2) således at f i forhold til denne er bestemt ved en diagonalmatrix, og angiv den matrix F, for hvilken det gælder, at Fx er koordinatsættet for x mht den nye basis.
Vis at $f^n \quad (= f \circ f \circ \cdots \circ f)$ i forhold til den oprindelige basis er givet ved matricen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

Hertil kan med fordel benyttes den nye basis og dennes sammenhæng med den gamle, men et (korrekt) induktionsbevis vil også blive accepteret.

OPGAVE 3

Bestem de værdier af s for hvilke matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s & 4 \\ s & 1 & s \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}$$

har en egenværdi med den algebraiske multiplicitet 2 og angiv for hver af disse værdier den geometriske multiplicitet.
Angiv en værdi af s for hvilken det ikke er muligt at diagolnalisere A

OPGAVE 4

Lad U og V være henholdsvis nulrum og billedrum for den lineære afbildning

$$R^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} \in R^4$$

Angiv parameterfremstillinger for U, V og $U \cap V$.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$A = (5, -1, -1)$
$B = (3, 0, 0)$
$C = (3, 4, 2)$
$D = (3, 6, 0)$

Bestem parameterfremstillinger for den linje m_1, som går gennem A og B, og for den linje m_2, som går gennem C og D.

Bestem ligningen for den plan π, som er parallel med både m_1 og m_2 og desuden ligger lige langt fra dem begge. Angiv en parameterfremstilling for den linje m_3, som er vinkelret på de to linjer og skærer dem begge.

OPGAVE 2

Bestem mængden af relle tal a for hvilke matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

er regulær og find for disse værdier dens inverse matrix.

OPGAVE 3

Vis at det for alle værdier af a gælder at matricen

$$A = \begin{pmatrix} a^2-1 & 2(1-a) & 2(1+a) \\ 2(a+1) & a^2-1 & 2(1-a) \\ 2(1-a) & 2(1+a) & a^2-1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien a^2+3 og bestem det hertil hørende egenrum .

Lad f være den til A hørende lineære afbildning.

Vis at f i forhold til følgende basis:

$((1,1,1), (1,-1,0), (1,1,-2))$

har følgende matrix

$$B = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-3 & -6a \\ 0 & 2a & a^2-3 \end{pmatrix}$$

Vis at A har de to egenværdier $(a^2-3) \pm (2\sqrt{3}a)i$.

Kan A diagonaliseres for alle reelle værdier af a?

(Også i det tilfælde, hvor du har valgt kun at besvare ovenstående spørgsmål for udvalgte værdier af a, kan der gives nogle point for opgaven).

OPGAVE 4

Lad U og V være henholdsvis nulrum og billedrum for den lineære afbildning

$$R^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ -5x_2 - 5x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 5x_2 + 5x_4 \end{pmatrix} \in R^4$$

Angiv ortogonale baser både for U og V og vis at disse underrum er indbyrdes ortogonale.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet tre punkter

$A = (-1, 5, -4)$
$B = (-1, -4, 5)$
$C = (-4, 5, -1)$

samt vektoren

$v = (-3, 3, 0)$

Lad m_1 være linjen gennem A og B.
Lad m_2 være linjen gennem C med retningsvektoren v.
Lad m_3 være linjen givet ved ligningerne

$$x + 3y + z = -2$$
$$x + 5y + z = -4$$

Vis at de tre linjer ligger i samme plan og angiv en ligning for denne.
Vis at linjernes indbyrdes skæringspunkter danner hjørnerne i en ligesidet trekant og bestem dennes areal.

OPGAVE 2

Lad M være løsningsmængden til ligningsystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

og lad N_a være løsningsmængden til ligningsystemet

$$\begin{aligned} -2x_1 + 11x_2 - 10x_3 + 11x_4 &= 0 \\ (2-2a)x_1 + (3+4a)x_2 + (-4-3a)x_3 + (3+4a)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Vis at $M \supseteq N_a^{\perp}$ for alle a og bestem en værdi af a, for hvilken $M \neq N_a$.

OPGAVE 3

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis at A har det karakteristiske polynomium

$(\lambda^2 - 4)^2$

Lad f være den til A hørende lineære afbildning.
Bestem en ny basis således at f i forhold til denne er bestemt ved en diagonalmatirix.
Angiv koordinatskiftematricer for overgang fra nye til gamle og fra gamle til nye koordinater.
Vis at f er invertibel og angiv en matrix for f^{-1} i forhold til både gammel og ny basis.

OPGAVE 4

Lad den lineære afbildning f være givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Angiv et ligningssystem for billedrummet for f.
Angiv en lineær afbildning g, hvis nulrum er billedrummet for f.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$$\begin{aligned} A &=(2,1,-1) \\ B &=(3,-1,1) \\ C &=(3,1,-3) \\ D &=(4,2,2) \end{aligned}$$

E betegner projektionen af D på den plan π_1, som går gennem A,B og C, mens F er midtpunktet af DE.

Bestem en ligning for den plan π_2, som er parallel med π_1 og går gennem F.

Bestem volumen af den del af tetraederet bestemt af A,B,C og D, som ligger på samme side af π_2 som D.

OPGAVE 2

Vis at sættet af vektorer (b_1, b_2, b_3) udgør en basis for R^3, idet

$$\begin{aligned} b_1 &= (1,0,1) \\ b_2 &= (0,1,0) \\ b_3 &= (2,0,3) \end{aligned}$$

Den lineære afbildning f af R^3 ind i sig selv er bestemt ved at der gælder

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2 + b_3 \\ f(b_2) &= b_3 + b_1 \\ f(b_3) &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

Bestem matricen for f i forhold til standardbasen.

OPGAVE 3

Vis at matricen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 18 & 5 & -6 & -6 \\ -18 & 0 & 11 & 0 \\ 9 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

og benyt dette til at bevise, at den ikke kan diagonaliseres.

OPGAVE 4

Vis, at der i nulrummet for den lineære afbildning afbildning

$$R^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} \in R^2$$

ikke findes nogen løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 10x_3 &= 66 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 32 \end{aligned}$$

Foretag en ændring af en af højresiderne i ligningssystmet, så den fremsatte påstand ikke længere er sand.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Differentialligninger.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor man kan vælge mellem opgaverne 5A og 5B, og en fuldstændig besvarelse omfatter således opgaverne 1-4 samt en af opgaverne 5A og 5B.

onsdag, den 4. januar 1978 kl. 09^{30} - 13^{30}.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° Der er givet en differentiabel funktion $a: R \to R$ samt differentialligningssystemet

$$Dx = -ty + \frac{1}{t}a(t)z$$
$$Dy = x - (1+a(t))z$$
$$Dz = tx + a(t)y$$

Funktionen $\underline{\varphi}_1 : R_+ \to R^3$ givet ved

$$\underline{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

vides at være løsning til systemet. Angiv samtlige funktioner $\underline{\varphi}_1$, som opfylder denne betingelse.

2° Løs for $t \in R_+$ differentialligningen

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = 0.$$

Bestem derpå $a \in R$ således, at funktionen $\varphi: t \to at^2$ er løsning til differentialligningen

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t^2$$

Løs endelig differentialligningerne

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t$$
$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t^3$$

3° Løs differentialligningen

$$(\cos^2 tD^2 - \cos t \sin tD - D^0)f(t) = 3\frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

og vis, at den løsning, som går gennem (0,1,1) er af formen

$$g: t \to \sqrt{2}\,\frac{\sin(t+\frac{\pi}{4})}{\cos^2 t}$$

4^{o} Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = \tfrac{1}{2}tx - \tfrac{1}{2}y + t$$
$$Dy = (\tfrac{1}{2}t^2 - 1)x - \tfrac{1}{2}ty + t^2$$

$5A^{o}$ Givet differentialligningssystemet med $a,b \in R\setminus\{o\}$

$$Dx = \quad ay + bz$$
$$Dy = bx + (a-b)y + bz$$
$$Dz = bx + ay$$

Angiv for hvert valg af (a,b) den løsning til systemet, som til $t=o$ går gennem $(x,y,z) = (3,1,-1)$.

$5B^{o}$ Idet a,b er differentiable funktioner, skal man eftervise følgende sætning:
Hvis φ,ψ er løsninger til differentialligningen $(D^2+aD+bD^o)f = o$, da vil $\varphi^2, \varphi\psi, \psi^2$ være løsninger til differentialligningen

$$(D^3+3aD^2+(2a^2+a'+4b)D+(4ab+2b')D^o)f=o$$

Benyt denne sætning til at løse differentialligningen

$$(D^3+(6tgt-3cott)D^2+(18tg^2t-5+3cot^2t)D+24tg^3tD^o)f=o$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Differentialligninger</u>

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

<u>tirsdag, den 6. juni 1978 kl. $o9^{\underline{oo}}$ - $13^{\underline{oo}}$.</u>

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Løs hver af differentialligningerne

$$(D-2D^{o})^3 f(t) = e^{-2t}$$

$$(D-2D^{o})^3 f(t) = e^{2t}$$

$$(D-2D^{o})^3 f(t) = te^{2t}$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$D^2\binom{x}{y} = \underline{M}^2\binom{x}{y}$$

hvor $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. For $t>o$ er funktionen $\varphi: t \sim t^{-1}\ln t$ løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+(a+b)tD+bD^{o})f = o.$$

Benyt dette til at fastlægge $(a,b) \in R^2$.
Bestem derpå den løsning til differentialligningen, som går gennem $(t,y,y',y'') = (1,1,0,0)$.

4. Løs differentialligningen

$$D\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{y} \\ \frac{t}{x} + \frac{2ty}{t^2-4} \end{pmatrix}$$

og angiv den maksimale løsning, som går gennem $(t,x,y) = (0,1,2)$.

5. En integralligning har formen

$$u(t) = \sin 2t - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|t-x|u(x)dx.$$

Idet $u:R \sim R$ forudsættes to gange differentiabel, skal ligningen omskrives til en differentialligning med passende randbetingelser.
Løs differentialligningen.

6. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$Dx = x + y - z$$
$$Dy = -x + 2y + t$$
$$Dz = -x + y + z$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 4. januar 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem den løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f = o$$

som opfylder betingelserne

$$f(1) = o,\ f'(1) = o \text{ og } f''(1) = -9$$

Fastlæg derpå for t>o den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^2$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^{-2}$$

2. Idet man har a∈R og matricen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

skal man, idet $\underline{M}^t$ betegner den transponerede matrix til $\underline{M}$, bestemme a, således at differentialligningen

$$D\underline{\varphi} = (\underline{M} + a\underline{M}^t)\underline{\varphi}$$

har løsningsmængden

$$\left\{ \underline{\psi}\in C^\infty \;\middle|\; \underline{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$$

3. Vis, at funktionen $\varphi: t \mapsto e^{at^2}$ for passende valg af a∈R vil være løsning til differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^o)f(t) = o$$

og bestem endnu en løsning til ligningen.

OPGAVEN FORTSÆTTES

Løs derpå differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^o)f(t) = t^4-3.$$

4. Angiv for t>o den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(tD^3-2D^2+4tD-8D^o)f(t) = 4t$$

5. Løs differentialligningssystemet

$$y^2Dy = \frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{3}e^x$$

$$Dx = 1 + 2y^3e^{-x}$$

og angiv den maksimale løsning til systemet gennem $(t,x,y) = (o,3\ln 2,2)$

6. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = -2x+2y+ z$$
$$Dy = -6x+ y+6z$$
$$Dz = -3x+2y+2z$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 8. juni 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

1. Bestem den eller de reelle funktioner, som på et delinterval af R_+ tilfredsstiller ligningen

$$tf(t) = 1 + \int_1^t (f(u))^2 u^p du,$$

når $p \in R_+$ og $p \neq 1$.

2. Fastlæg for $t>o$ den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = o.$$

Bestem endvidere en partikulær løsning til hver af ligningerne

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = 1$$

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = t$$

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = \ln t$$

3. Inden for kræftforskning har man ud fra omfattende observationer godtgjort, at volumenet V af en kræftsvulst - som funktion af tiden t - i det væsentlige vokser i overensstemmelse med differentialligningen

$$V'(t) = \lambda e^{-\alpha t}V(t)$$

Her er $T_o = \frac{\ln 2}{\lambda}$ fordoblingstiden ved uhæmmet cellevækst og α en individ- og kræfttypeafhængig dæmpningsparameter.

Løs differentialligningen, når $V(o)=V_o$. Bestem derpå den til V svarende (tidsafhængige) fordoblingstid T_α samt det interval $I \subset R_+$, hvor $T_\alpha < +\infty$.

Vis endelig, at $\lim_{\alpha \to o} T_\alpha = T_o$.

4. For en to gange differentiabel funktion $\varphi: R \to R_+$ gælder, at funktionerne φ^2 og φ^{-1} vil være løsninger til differentialligningen

$$(D^2 - \frac{1}{t(1+t^2)}D - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}D^o)f(t) = o$$

Bestem på denne baggrund den fuldstændige løsning til ligningen. Løs derpå ligningen

$$(D^2 - \frac{1}{t(1+1^2)}D - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}D^o)f(t) = t^2$$

5. Bestem samtlige <u>reelle</u> løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 3y \\ Dy &= -3x + 4z \\ Dz &= -4y \end{aligned}$$

6. Der er givet en differentialligning

(1) $\quad (g_2D^2+g_1D+g_oD^o)f = h.$

hvor $h, g_o, g_1, g_2 \in C^o(I)$, $I \subseteq R$.

Endvidere forudsættes, at $g_1 \in C^1(I)$ og $g_2 \in C^2(I)$, samt at

$$\forall t \in I: D^2g_2(t) - Dg_1(t) + g_o(t) = o.$$

Vis da, at der findes funktioner a,b således, at (1) er ensbetydende med

(2) $\quad D(aD+bD^o)f=h$

på hele I. Angiv explicit a og b udtrykt ved g_o, g_1 og g_2.

Fastlæg på denne baggrund den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$((t^2+2)D^2+4tD+2D^o)f(t) = \sin t.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 7. januar 1980 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem det reelle tal a således, at funktionen $\varphi: R_+ \to R$ er defineret ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0)f = o$$

$t>o$, og fastlæg - med den fundne værdi af a - den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

Idet $L = t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0$ bestem da den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf = t^3$$
$$Lf = t$$
$$Lf = t^2.$$

2. Vis, at funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t}$$

opfylder Riccatiligningen

$$Dq + q^2 + \frac{2}{t}q - 1 = o$$

Benyt dette til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 + \frac{2}{t}D - D^0)f = 1 - \frac{1}{t}$$

for $t>o$.

3. Funktionen $f: R \to R$ forudsættes to gange differentiabel samt at være løsning til integralligningen

$$t^2 \int_1^t f(s)ds - t \int_1^t sf(s)ds = tf(t) - t^2$$

Omskriv integralligningen til en differentialligning med startbetingelser.

Bestem derpå den funktion, som tilfredsstiller integralligningen.

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x - y + 2z + t \\ Dy &= 2x - 2y + 2z + t \\ Dz &= x + 2y - z + t \end{aligned}$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 2x + y + w \\ Dy &= x + y + 2z + w \\ Dz &= 2y + z \\ Dw &= x - y + 2w \end{aligned}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 4. juni 1980 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem det reelle tal a således, at funktionen $\varphi: R_+ \to R$ er defineret ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0)f = 0$$

$t>0$, og fastlæg - med den fundne værdi af a - den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

Idet $L = t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0$ bestem da den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf = t^3$$
$$Lf = t$$
$$Lf = t^2.$$

2. Vis, at funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t}$$

opfylder Riccatiligningen

$$Dq + q^2 + \frac{2}{t}q - 1 = 0$$

Benyt dette til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 + \frac{2}{t}D - D^0)f = 1 - \frac{1}{t}$$

for $t>0$.

3. Funktionen $f: R \to R$ forudsættes to gange differentiabel samt at være løsning til integralligningen

$$t^2 \int_1^t f(s)ds - t\int_1^t sf(s)ds = tf(t) - t^2$$

Omskriv integralligningen til en differentialligning med startbetingelser.

Bestem derpå den funktion, som tilfredsstiller integralligningen.

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x - y + 2z + t \\ Dy &= 2x - 2y + 2z + t \\ Dz &= x + 2y - z + t \end{aligned}$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 2x + y + w \\ Dy &= x + y + 2z + w \\ Dz &= 2y + z \\ Dw &= x - y + 2w \end{aligned}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 18. januar 1982 kl. 10.oo - 14.oo.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Funktionerne $\varphi,\psi: R_+ \to R_+$ givet ved, at

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \quad \text{og} \quad \psi(t) = t$$

antages at være løsninger til differentaialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+btD+(a+b)D^o)f(t) = o$$

hvor $a,b\in R$ og $t>o$.
Fastlæg på denne baggrund a og b samt den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Bestem derpå (med de fundne værdier af a og b) en partikulær løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+btD+(a+b)D^o)f(t) = t$$

2. Løs ved en passende transformation hver af ligningerne

$$y' = 2\frac{y}{t} + 1 \quad \text{for } t>o$$

$$y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 - 2 \text{ for } t>o.$$

3. Funktionen $\varphi: R_+ \to R$ antages at være to gange differentiabel. Videre er funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = t^2\varphi(t).$$

Når funktionerne φ og ψ vides at være løsninger til differentialligningen $(t>o)$

$$(D^2-(2t+\frac{1}{t})D+t^2D^o)y(t) = o$$

skal man fastlægge φ samt den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Bestem derpå den løsning til differentialligningen

$$(D^2-(2t+\frac{1}{t})D+t^2D^o)y(t) = t^4$$

som indeholder linieelementet $(\sqrt{2},6,\sqrt{2})$.

4. Fastlæg den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x \quad +2z \\ y' &= 2x+y \\ z' &= \frac{1}{2}(y-x)+3z \end{aligned}$$

5. Der ønskes en beskrivelse af forløbet af løsningskurverne til differentialligningssystemet

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

hvor

$$f(x,y) = \frac{x}{5}(10-x) - \frac{xy}{x+2}$$

$$g(x,y) = y\left(1-\frac{2y}{x}\right)$$

efter nedenstående retningslinier.

a) Bestem de punkter (a,b), hvor løsningerne til systemet er i ligevægt, dvs. hvor $x' = 0$ og $y' = 0$.

b) Med henblik på at lave en lineær tilnærmelse til funktionsparret (f,g) skal man udregne funktionalmatricen

$$\begin{pmatrix} f_x'(x,y) & f_y'(x,y) \\ g_x'(x,y) & g_y'(x,y) \end{pmatrix}$$

c) Er (a,b) et ligevægtspunkt fastlægges

$$A = \begin{pmatrix} f_x'(a,b) & f_y'(a,b) \\ g_x'(a,b) & g_y'(a,b) \end{pmatrix}$$

og derpå løses ligningssystemet

OPGAVEN FORTSÆTTES

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(PS: Løsningerne bliver ikke "pæne", men beskriv det karakteristiske forløb).

d) Ligningssystemet (2) kaldes en linearisering af (1) omkring ligevægtspunktet (a,b). Hvad kan man ud fra løsningskurverne til (2) slutte om forløbet af løsningskurverne til (1) i nærheden af (a,b)?

Skriftlig eksamen i emnekredsen

DIFFERENTIALLIGNINGER

MANDAG DEN 18 JANUAR
1982

kl $10^{00} - 14^{00}$

SKRIFTLIG EKSAMEN I DIFFERENTIALLIGNINGER

OPGAVE 1

Bestem den fuldstændige løsning til

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{|y|}, \quad (x,y) \in R^2.$$

OPGAVE 2

Funktionerne cosh og sinh er defineret ved

$$\cosh(t) = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}); \quad \sinh(t) = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

A. Bevis at

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

B. Bevis "additionsformlerne"

$$\cosh(t+u) = \cosh(t)\cosh(u) + \sinh(u)\sinh(t)$$
$$\sinh(t+u) = \cosh(t)\sinh(u) + \sinh(t)\cosh(u)$$

C. Om to differentiable funktioner $f, g : R \to R$ oplyses at

1: $f(t+u) = f(t)f(u) + g(t)g(u)$
   $g(t+u) = f(t)g(u) + g(t)f(u)$

2: $f(0) = 1, \ f'(0) = 0; \ g(0) = 0, \ g'(0) = 1$

Vis at $f = \cosh$ og $g = \sinh$.

FORTSÆTTES

OPGAVE 3

Løs differentialligningssystemet

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Ialt 3 opgaver

Skriftlig eksamen

i emnekredsen

DIFFERENTIALLIGNINGER

Varighed 4 timer

Alle hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1.

En 2.ordens lineær, inhomogen differentialligning af formen

$$f''(t) + p(t)\, f'(t) + q(t)\, f(t) = r(t),$$

hvor p, q og r er reelle funktioner på $]0,\infty[$, vides at have følgende løsninger på $]0,\infty[$:

$$f_1(t) = -\cos^2 t - t^2$$

$$f_2(t) = -\cos^2 t$$

$$f_3(t) = -\cos^2 t - t$$

(1) Find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen.

(2) Bestem koefficientfunktionerne p, q og r på $]0,\infty[$

(3) Find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$f''(t) + p(t)\, f'(t) + q(t)\, f(t) = t$$

på intervallet $]0,\infty[$.

OPGAVE 2.

Lad A angive matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Angiv e^A.

OPGAVE 3.

Om funktionerne $g:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$, $h:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ vides, at

gh er løsning til differentialligningen

$$f'(x) = -2x\left(1 + \frac{1}{1-x^2}\right) f(x), \quad x \in]0,1[$$

med $(gh)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16} e^{-\frac{1}{4}}$

og at

$g + h$ er løsning til differentialligningen

$$f'(x) = -xf(x), \quad x \in]0,1[$$

med $(g+h)(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{8}}$

Bestem g og h.

OPGAVE 4.

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(t,x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad t \leq x \\ t & \text{for} \quad t > x \end{cases}$$

(1) Løs differentialligningen

$x'(t) = f(t, x(t))$ på $\mathbb{R}$

(2) Vis, at der gennem ethvert punkt $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ går netop én løsning til differentialligningen.

EKSAMEN I EMNEKREDSEN DIFFERENTIALLIGNINGER

ONSDAG DEN 16 JUNI 82 KL 10 - 14

Alle hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1

A: Om funktionerne f og g vides:

1) Det er differentiable funktioner på $\mathbb{R}$

2) $f(0) = 1, \; g(0) = 0$
$f'(0) = a, \; g'(0) = b$

3) $\forall t, s \in \mathbb{R}$:

$$f(t+s) = f(t)f(s) - g(t)g(s)$$
$$g(t+s) = f(t)g(s) + g(t)f(s)$$

Vis herudfra at

$$f(t) = e^{at}\cos bt$$
$$g(t) = e^{at}\sin bt$$

B: Løs differentialligningen

$$x'(t) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x(t) + t\, e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} t}$$

med begyndelsesbetingelsen

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

VEND

OPGAVE 2

A: Løs de to differentialligninger

(1) $\frac{du}{dt} = u^2;$ $(t,u) \in R^2$

(2) $\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{1+4t}v;$ $(t,v) \in R^2, t \neq -\frac{1}{4}$

B: Det oplyses at

<u>hvis</u> (x,y) er en løsning til systemet:

$$(y-x)\frac{dx}{dt} = x^2y^2 + \frac{4x(x+y)}{1+4t}$$

$$(x-y)\frac{dy}{dt} = x^2y^2 + \frac{4y(x+y)}{1+4t}$$

$$(t,x,y) \in \{(t,x,y) \mid x > y\}$$

<u>da</u> er $(u,v) = (xy, x+y)$ en løsning til systemet bestående af (1) og (2).

Benyt denne oplysning til at undersøge, hvilke løsninger (x,y) til (3), der opfylder betingelsen

$$(x(0), y(0)) = (4,-1)$$

C: Bevis oplysningen i B

OPGAVE 3

Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \text{maximum}(x,y) = \begin{cases} x & \text{når } x \geq y \\ y & \text{når } x \leq y \end{cases}$$

SÆTTET BESTÅR AF TRE OPGAVER OG FYLDER TO SIDER

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Differentialligninger.</u>

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

<u>fredag den 6. januar 1984, kl. 10.00 - 14.00.</u>

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Differentialligningen

$$y' = ay\cdot(1-\ln(by))$$

er for $a>0$ og $0<b\ll 1$ en model for en populations udvikling.

Godtgør ud fra modellen, at populationen vil have en bærekapacitet - dvs. en øvre grænse for, hvor mange individer, der forbliver i populationen.

Fastlæg til slut den løsning til differentialligningen, som indeholder $y(0)=1$.

2. For hver værdi af $\lambda\in\mathbb{R}$ er givet et differentialligningssystem

$$x' = \lambda x+y-x^3$$

$$y' = \lambda y-x-y^3$$

Det oplyses, at systemet for $\lambda<2\sqrt{2}$ kun har et ligevægtspunkt. For $\lambda=2\sqrt{2}$ opstår fire stabile ligevægtspunkter, og for $\lambda>2\sqrt{2}$ opløses hvert af disse i to ligevægtspunkter - et stabilt og et ustabilt (Dette ønskes ikke bevist).

Vis, at punktet $(0,0)$ for alle λ vil være et ligevægtspunkt, som for $\lambda<0$ er stabilt og for $\lambda>0$ er er ustabilt.

Vis dernæst, at systemet for $\lambda=0$ undergår en Hopf bifurkation - dvs. at der for $0<\lambda\,(<2\sqrt{2})$ er en stabil grænsecykel omkring det ustabile ligevægtspunkt.

Vis til slut, at såvel grænsecykel $(0<\lambda<2\sqrt{2})$ som de resterende ligevægtspunkter $(\lambda\geq 2\sqrt{2})$ vil ligge i cirkelringen

$$\lambda\leq x^2+y^2\leq 2\lambda.$$

3. Der findes for hvert reelt a fastlagt det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x \quad\quad +(a-1)z \\ y' &= \quad\quad -y \quad -z \\ z' &= -(a+1)x+y \quad -z \end{aligned}$$

Bestem for hvert a rødderne i det karakteristiske polynomium, som svarer til systemet.

Opstil derpå et sæt af lineært uafhængige reelle (vektor-) funktioner, som udspænder den fuldstændige løsning til systemet. (PS: Husk også at behandle tilfældet $a=0$).

4. En meget simpel model for en pladespiller er beskrevet ved differentialligningerne

$$x' = -\mu x+xy$$

$$y' = 1-\lambda y-x^2$$

$(\lambda,\mu>0)$, idet x står for effekten af dynamoen, og y står for vinkelhastigheden af den roterende skive.

Undersøg denne models stabilitetsforhold - udtrykt ved λ og μ. Der ønskes en seperat redegørelse for det tilfælde, hvor $\lambda\mu = 1$.

5. Fastlæg den fuldstændige løsning til hver af ligningerne

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}$$

$$y''' + y'' + y' + y = \cos t$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^3 + aD^2 + bD + cD^0$$

hvor a, b og c er reelle konstanter. Fastlæg disse konstanter, således at differentialligningen

$$Lf = o$$

har funktionerne $t \mapsto te^t$ og $t \mapsto e^{-2t}$ som løsninger. Udregn dernæst - med de fundne værdier for a, b og c - den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$Lf = t(e^t + e^{-t}).$$

2. For alle reelle værdier af $\lambda \neq o$ er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= \lambda y^3 - xy^2 \\ y' &= -\lambda x + x^2 y \end{aligned}$$

Godtgør, at systemet altid har tre ligevægtspunkter, og redegør for systemets stabilitetsforhold i nærheden af disse ligevægtspunkter.

3. Bestem samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -2y + z \\ z' &= -2z + w \\ w' &= x - 2w \end{aligned}$$

4. En differentialligningsmodel for et "rovdyr-bytte-dyr"-system er ved passende scalering transformeret til differentialligningssystemet

$$x' = \frac{x}{72}(57-9x) - \frac{x}{y(x+1)}$$

$$y' = y(1 - \frac{5y}{x}) .$$

Giv en analyse af systemets stabilitetsforhold ved bl.a. at vise, at systemet har to (relevante) ligevægtspunkter, hvoraf et er stabilt, og et er et sadelpunkt.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger.

Der stilles tre opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 7. januar 1985 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Løs for $t>o$ differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + ty + z \\ tDy &= 2x - y - 2z \\ Dz &= x - ty + z \end{aligned}$$

således at punktet (0,2,0) for $t=1$ tilhører løsningen.

2. Idet der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^4 - D^0$$

skal den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$Lf = o$$

opskrives.
Find dernæst en partikulær løsning til hver af ligningerne

$$Lf_1 = e^{2t}, \quad Lf_2 = e^t$$

$$Lf_3 = te^{-t}, \quad Lf_4 = e^t \cos t$$

$$Lf_5 = \sin t.$$

3. For alle $r>o$ er givet et differentialligningssystem

$$\begin{aligned} x' &= 9y - 9x \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - 4z \end{aligned}$$

a. Godtgør, at systemet er uændret under transformationen $(x,y,z) \rightsquigarrow (-x,-y,z)$

b. Fastlæg systemets ligevægtspunkter.

c. Godtgør ved en linearisering af systemet omkring hvert af ligevægtspunkter, at (o,o,o) for $r>1$ ikke er stabilt, men at de to øvrige ligevægtspunkter for $1<r<36$ vil være stabile.

d. Vis, at (o,o,o) for $r \leq 1$ vil være globalt stabilt. (Vink: Vis, at $V = rx^2+9y^2+9z^2$ vil være en Liaponov-funktion).

Skriftlig eksamen i emnekredsen

DIFFERENTIALLIGNINGER

mandag, den 9. juni 1986

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x^{(3)} - 2x' - 4x = f(t)$$

i tilfældene

a) $f(t) = e^{-t}$

b) $f(t) = \cos t$

c) $f(t) = e^{-t}\sin t$.

2. Der er givet differentialligningssystemet

$$x' = 1 - \alpha x - y^2$$
$$y' = xy - \alpha y$$

Find for hvert $\alpha > 0$ samtlige stationære løsninger og undersøg deres stabilitetsforhold.

3. Der er givet differentialligningssystemet

$$x' = y - x^3$$
$$y' = \beta y - 3x - y^3$$

Undersøg for alle $\beta \in \mathbb{R}$ stabilitets-forholdene for den stationære løsning $(x,y) = (0,0)$.

4. Der er givet differentialligningssystemet

$$x' = 2x - y - 2z + a$$
$$y' = 6x - 3y - 6z + b$$
$$z' = -4x + 2y - z + c$$

Find de værdier $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ for hvilke samtlige løsninger $(x(t),y(t),z(t))$ er begrænsede for t gående mod uendelig.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

5. Idet det oplyses, at den partielle differentialligning

$$xy\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = (x^2-y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \qquad x > o$$

har den fuldstændige løsning

$$\varphi(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g(x^2+y^2)$$

hvor f og g er vilkårlige C^2-funktioner, skal man bestemme den løsning, som tilfredsstiller randværdibetingelserne

$$\varphi(1,y) = y^2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,y) = 1.$$

Vink:
Vis først, at f opfylder differentialligningen

$$(1+t^2)f'(t) - tf(t) = t.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger.

Der stilles fem opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

Den skriftlige eksamen er tilordnet modul 2

mandag, den 9. juni 1986 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^3 - 2D - 4D^0$$

Fastlæg den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf_1(t) = e^{2t} \quad , \quad Lf_2(t) = \cos t$$

$$Lf_3(t) = e^{-t}\sin t$$

2. Om den partielle differentialligning

$$xy(z''_{xx} - z''_{yy}) = (x^2-y^2)z''_{xy}$$

kan det oplyses (dvs skal ikke vises!), at for $x > o$ er den fuldstændige løsning givet ved

$$z(x,y) = xf(^y/x) + g(x^2+y^2),$$

hvor f og g er vilkårlige, to gange differentiable funktioner.
Bestem nu den løsningsfunktion, som tilfredsstiller randværdibetingelserne

$$z(x,x^2) = x^2 \quad , \quad z'_y(x,x^2) = x^2+2$$

3. Bestem samtlige funktionspar $(x(t),y(t))$ som tilfredsstiller differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} tx' &= -x + \frac{2}{y} \\ ty' &= -y - \frac{2}{x} \end{aligned} \quad , \quad t > o$$

i 1. kvadrant.

Fastlæg den løsning, som går gennem punktet (1,1) for $t = 1$.

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\text{tgt}\cdot y''(t) + \frac{2}{\cos^2 t}y'(t) + \frac{2\sin t}{\cos^3 t}(t) = \sin t$$

i et passende interval.

Fastlæg dernæst den løsning, som indeholder linieelementet $(t,y,y') = (\frac{\pi}{4}, o, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

5. Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + z + a \\ y' &= x - z + b \\ z' &= x + 2y - z + c \end{aligned}$$

hvor a,b og c er reelle konstanter.

Fastlæg konstanterne a,b og c således, at punktet (2,0,1) er et ligevægtspunkt for systemet, og undersøg om systemets løsningskurver vil konvergere mod punktet.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger.

Der stilles fem opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

Den skriftlige eksamen er tilordnet modul 2

mandag, den 9. juni 1986 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^3 - 2D - 4D^0$$

Fastlæg den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf_1(t) = e^{2t} \quad , \quad Lf_2(t) = \cos t$$

$$Lf_3(t) = e^{-t}\sin t$$

2. For alle $\alpha > o$ er givet differentialligningssystemet

$$x' = 1 - \alpha x - y^2$$

$$y' = xy - \alpha y.$$

Undersøg systemets stabilitetsforhold, når α varierer.

3. Bestem samtlige funktionspar $(x(t),y(t))$ som tilfredsstiller differentialligningssystemet

$$tx' = -x + \frac{2}{y} \qquad , \qquad t > o$$

$$ty' = -y - \frac{2}{x}$$

i 1. kvadrant.

Fastlæg den løsning, som går gennem punktet (1,1) for $t = 1$.

4. Et differentialligningssystem er for alle β givet ved

$$x' = y - x^3$$

$$y' = \beta y - 3x - y^3$$

Det oplyses (dvs skal ikke vises!), at systemet for $\beta < 4$ kun har et ligevægtspunkt.

Redegør for systemets stabilitetsforhold, når β er tæt ved o.

Vis, at systemet for $\beta=4$ også har punkterne (1,1) og (-1,-1) som ligevægtspunkter, og undersøg systemets stabilitetsforhold, når $\beta=4$.

5. Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + z + a \\ y' &= x \quad\;\; - z + b \\ z' &= x + 2y - z + c \end{aligned}$$

hvor a,b og c er reelle konstanter. Fastlæg konstanterne a,b og c således, at punktet (2,0,1) er et ligevægtspunkt for systemet, og undersøg om systemets løsningskurver vil konvergere mod punktet.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger.

Der stilles fem opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

onsdag, den 21. januar 1987 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Et differentialligningssystem er givet ved

$$x' = x(1 - x^2 + y^2)$$
$$y' = y(1 - 3x^2 - y^2)$$

Fastlæg systemets ligevægtspunkter samt disses stabilitetsforhold.

Omskriv dernæst systemet til polære koordinater og skitsér på denne baggrund løsningskurvernes forløb, specielt omkring enhedscirklen.

2. Fastlæg den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2+D^0)f = t\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

3. Bestem samtlige funktionspar $(x(t),y(t))$ i 1.kvadrant, som tilfredsstiller differentialligningssystemet

$$x' = \frac{t}{y}$$

$$y' = -\frac{t}{x} + \frac{2ty}{t^2+8} \;.$$

Fastlæg derpå den løsning, som for $t = o$ går gennem punktet $(2,6)$.

4. Fastlæg den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z - t \\ y' &= 2y + z - t \\ z' &= -x + t \end{aligned}$$

(opgavesættet fortsætter)

5. Der er givet differentialligningen

$$x'' + x' - (x')^3 + x^5 = o$$

Omskriv ligningen til et system af to koblede differentialligninger ved at sætte $x' = y$ og vis, at (o,o) vil være det eneste ligevægtspunkt for systemet.

Fastlæg dernæst konstanterne a,b i funktionen

$$V(x,y) = x^a + by^2 \;,$$

således at V bliver en Liapunov-funktion for systemet. Bestem til slut et stabilitetsområde for (o,o), dvs find et tal $c > o$, således at $V' \leqq o$ når $V \leqq c$.

SKRIFTLIG EKSAMEN I DIFFERENTIALLIGNINGER

den 8. Januar 1988

Der stilles 4 opgaver som alle skal regnes, for at besvarelsen er fuldstændig.
Alle hjælpemidler er tilladt.
(Opgave 4 findes i to varianter beregnet for forskellige pensa.)

Opgave 1

Der er givet differentialligningen:

$$y'' + 2ty' + (1+t^2)y = t^3 + 3t.$$

Vis, at funktionen $\varphi : t \mapsto e^{at^2}$ for passende valg af a, vil være en løsning til den homogene ligning.

Fastlæg på denne baggrund den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 2

Der er givet differentialligningen:

$$ty' - 2y = t^3.$$

Find samtlige løsninger til den homogene ligning, dels på intervallet $]-\infty, 0[$ og dels på intervallet $]0, \infty[$. Find dernæst samtlige løsninger til differentialligningen på hele den reelle akse. Hvor mange gange kan disse løsninger differentieres?

Opgave 3

Bestem samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned} x' &= -x \qquad\quad + z \\ y' &= \qquad\; -y - z \\ z' &= -3x + y - z. \end{aligned}$$

Opgave 4a

Der er givet differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned} x' &= (\beta - x^2)x - y - y^3 \\ y' &= x - y^3 \end{aligned}$$

med $\beta \leq 1$.

Fastlæg systemets ligevægtspunkter, og redegør for systemets stabilitetsforhold, når β varierer. Vis i denne forbindelse, at funktionen $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$V(x,y) = x^2 + y^2 + ay^4$$

for passende valg af a bliver en stærk Liapunov funktion for systemet, når $\beta = 0$.

Opgave 4b

Find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$(y')^4 = (1-y^2)^2 \qquad \text{med} \qquad y' \geq 0.$$

1. Løs for $t > o$ differentialligningen

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3}{t^2+3y^2}$$

(Det kan anbefales at benytte transformationen $y = tz$)

2. Vis, at funktionen $\Phi : R \to R_+$ givet ved

$$\Phi(t) = e^{at^2}$$

for passende valg af a er en løsning til differentialligningen

$$ty'' - (2t^2+1)y' + t^3y = o.$$

Fastlæg på denne baggrund den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$ty'' - (2t^2+1)y' + t^3y = t^2e^{t^2/2}$$

3. Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -x+2y+2z \\ y' &= 2x+ y+2z \\ z' &= 2x-2y- z \end{aligned}$$

4. For alle $p > o$ er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 5(y-xy+x-x^2/10) \\ y' &= (z-y-xy)/5 \\ z' &= p(x-z) \end{aligned}$$

(Dette ligningssystem er en model for en kemisk reaktion, hvor x,y,z er koncentrationer af de indgående stoffer).

Fastlæg de <u>relevante</u> ligevægtspunkter for systemet.

Foretag en linearisering af systemet omkring hvert af ligevægtspunkterne, og godtgør, at det ene punkt vil være ustabilt, samt at det andet punkt vil være stabilt.

Skriftlig eksamen i matematik,
vinteren 1977/78.

Emnekreds: statistik og sandsynlighedsregning.

Opgave 1.

På en fabrik arbejder man i tre skift: morgenskift, eftermiddagsskift og aftenskift. En stikprøve fra produktionen i hver af de tre skift viser, at af 200 undersøgte enheder var antallet af defekte enheder henholdsvis 12, 10 og 23. Kan man konkludere noget om, hvorvidt arbejdstidens beliggenhed påvirker kvaliteten af de fremstillede produkter ?

Opgave 2.

Lad f være en funktion af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ af formen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ c(\theta)\, x^{2\theta-1} & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{for } 1 \leq x \end{cases},$$

hvor $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$.

A. Vis at man kan vælge $c(\theta)$, således at f er tæthed for en sandsynlighedsfordeling på $\mathbb{R}$. - I det følgende tænkes $c(\theta)$ valgt på denne måde.

(fortsættes)

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være stokastisk uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, der følger en fordeling givet ved tætheden f, og lad endvidere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observationer af $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

B. Opskriv likelihoodfunktionen.

C. Estimer θ.

D. Opstil kvotientteststørrelsen for hypotesen H_0: $\theta = 1$.

Opgave 3.

Ved en undersøgelse af forureningen i en fjord har man på tre vanddybder foretaget to vandprøver, hvori man bestemte koncentrationen af coli-bakterier (der kan anvendes som et mål for vandets forurening). Resultaterne fremgår af nedenstående tabel.

Koncentration af coli-bakterier i tre vanddybder.

dybde	0 m	4 m	8 m
konc.	2.15	2.15	2.00
	2.56	1.95	1.65

A. Opstil en model for disse data.

B. Undersøg hvordan vandforureningen afhænger af dybden.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 4.

På et bestemt locus hos billen Tetraopes tetraophthalmus findes tre allelle gener A, B og C. Der er derfor seks forskellige genotyper:

AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Alle disse seks genotyper kan skelnes ved elektroforese, så der er også seks fænotyper.

A. Vis at hvis der i en population er tilfældig parring og ingen selektion med hensyn til dette system, så må man forvente, at genotyperne fordeler sig i forholdet

$$p^2 : 2pq : 2pr : q^2 : 2qr : r^2 ,$$

hvor $p+q+r = 1$, og hvor p, q og r betegner genfrekvensen af henholdsvis A, B og C -genet.

En population, hvor forholdet mellem de seks genotyper er på denne form, siges at være i Hardy-Weinberg-ligevægt.

Fra en population af biller på Long Island blev der indsamlet 287 biller, og disse blev klassificeret efter genotype således:

AA	AB	AC	BB	BC	CC
9	85	16	99	66	12

B. Undersøg om denne population er i Hardy-Weinberg-ligevægt.

Opgaver til skriftlig eksamen i
Talsystemets opbygning, 3. juni 1981

Opgaverne tænkes løst inden for den opbygningsramme, som er afstukket af teksten til kurset i talsystemets opbygning, foråret 1981. Hvis en anden ramme vælges, præciseres denne.

Varighed: 4 timer
Alle hjælpemidler tilladt

Opgave 1 I mængden $D = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ defineres kompositioner $\oplus$ og $\odot$ ved

$$(a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$

og

$$(a_1,a_2) \odot (b_1,b_2) = (a_1b_1,\ a_1b_2+a_2b_1)$$

(1) Vis, at $(D,\oplus,\odot)$ er en kommutativ ring med ételement, hvori nulreglen ikke gælder.

(2) Bestem et dellegeme $(M,\oplus,\odot)$ af $(D,\oplus,\odot)$, som er isomorft med $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

(3) Godtgør, at hvis $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ identificeres med $(M,\oplus,\odot)$ ved hjælp af isomorfien, kan ethvert element i D skrives som

$$(a_1,a_2) = a_1 + \rho a_2,$$

hvor $\rho = (0,1)$ og $\rho^2 = (0,0)$

Opgave 2 Lad A være en delmængde af de naturlige tal, $\mathbb{N}$, og lad A have egenskaben

(a) $\forall m \in \mathbb{N}: S(m) \in A \Rightarrow m \in A$

(S betegner efterfølgerfunktionen i $\mathbb{N}$)

(1) Vis, f.eks. ved induktion, at hvis A opfylder (a), da også

(b) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: m \in A \wedge n \leq m \Rightarrow n \in A$

For $n \in \mathbb{N}$ forstås ved begyndelsesafsnittet hørende til n mængden

$$I_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} .$$

(2) Vis, at (a) og dermed (b) er opfyldt for ethvert begyndelsesafsnit A.

(3) Vis, at en vilkårlig delmængde A af $\mathbb{N}$ er et begyndelsesafsnit, hvis og kun hvis A opfylder følgende to betingelser:

(a) (som ovenfor)

og

(c) der findes et $n_o \in A$, så at $S(n_o) \notin A$.

Opgave 3 En følge $(a_n)_n$ af reelle tal kaldes som bekendt voksende, hvis

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1},$$

og aftagende, hvis

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}.$$

En reel talfølge kaldes monoton, hvis den er voksende eller aftagende.

(1) Vis, at enhver monoton og begrænset talfølge i $\mathbb{R}$ er konvergent i $\mathbb{R}$.

Vi betragter nu afsluttede intervaller i mængden af reelle tal, dvs. mængder af formen

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad , a,b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Ved en intervalindsnævring forstås en følge af afsluttede intervaller $([a_n,b_n])_n$, hvorom det gælder, at $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq ..$ dvs.

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

(2) Vis, at i enhver intervalindsnævring har alle intervallerne mindst ét fælles punkt.

En intervalindsnævring kaldes en ruse, hvis ethvert af indsnævringens intervaller er venstre- eller højrehalvdel af det foregående interval.

(3) Vis, at i en ruse har alle intervaller netop ét fælles punkt. (Benyt f.eks., at

(fortsættes)

$$\forall n \in \mathbb{N}: |b_{n+1} - a_{n+1}| = \tfrac{1}{2} |b_n - a_n|).$$

Opgave 4 Skitser kort hovedlinjerne i opbygningen af talsystemet, fra $\mathbb{N}$, over $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$.

SLUT

Skriftlig eksamen i emnekredsen

GEOMETRI (Differentialgeometri)

Varighed: 4 timer.

Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1.

Betragt for $\alpha > 0$ kurven med parameterfremstillingen

$$t \curvearrowright \underline{r}(t), = (t^{\alpha}, t^{\alpha+1}), \quad t \in \,]0,\infty[$$

(1) Skitsér kurven, og vis at den er en overalt vilkårligt ofte differentiabel kurve, der tillige er monoton.

(2) Begrund at kurven har en evolut hvis og kun hvis $\alpha \geqslant 1$, og find en parameterfremstilling for evolutten.

OPGAVE 2.

Lad $\underline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2\sin 2v)$,
$u \in [0,\infty[, \quad v \in [0,2\pi[$
være en parameterfremstilling for en flade.

(1) Godtgør at fladen er en differentiabel C^{∞}-flade overalt, bortset fra i punktet $(0,0,0)$.

(2) Vis, at parameterskiftet $(u,v) \curvearrowright (x,y)$, hvor

$x = u\cos v, \quad y = u\sin v,$

for $u \in \,]0,\infty[, \quad v \in [0,2\pi[$ er et tilladt parameterskift, og bestem en parameterfremstilling for fladen med x og y som parametre.

(3) Godtgør, at fladen, bortset fra i punktet $(0,0,0)$, er overalt hyperbolsk krummet.

(4) Find hovedkrumningerne og hovedretningerne i punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

OPGAVE 3.

For $a \in]0,1[$ er der givet en vilkårligt ofte differentiabel rumkurve ved parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, \sqrt{a}\cosh t, \sqrt{1-a}\cosh t),\quad t \in \mathbb{R}$$

(1) Angiv en naturlig parameterfremstilling for denne kurve, regnet ud fra $t = 0$.

(2) Vis, at for ethvert $t \in \mathbb{R}$ ligger positionsvektoren $\underline{r}(t)$ i kurvens oskulationsplan i t, og at oskulationsplanen er vinkelret på yz-planen.

(3) Bestem kurvens ledsagende koordinatsystem.

(4) Vis, at kurven ligger i en plan, og angiv en ligning for denne.

SKRIFTLIG EKSAMEN i

GEOMETRI (DIFFERENTIALGEOMETRI)

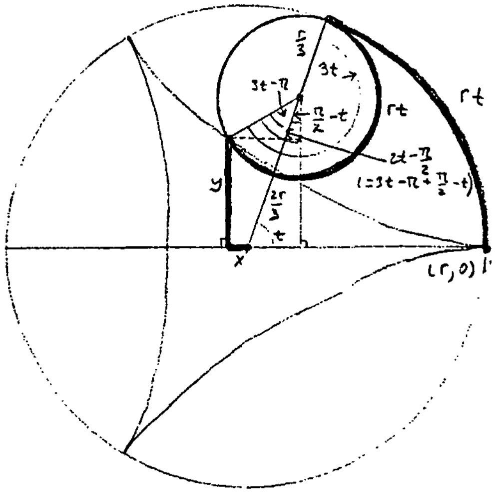
Varighed: 4 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt

August 1982

OPGAVE 1

Indvendig på en cirkel med radius r ruller en cirkel med radius r/3 i planens positive omløbsretning Vi betragter den kurve der beskrives af et bestemt punkt på den lille cirkel. Denne kurve kaldes en hypocykloide. Nu rulningen begynder har punktet koordinaterne (r,o).



(1) Begrund, f.eks. med støtte i vedstående figur, at hypocykloiden har parameterfremstillingen

$$x = \frac{2}{3}r\cos t + \frac{r}{3}\cos 2t$$

$$y = \frac{2}{3}r\sin t - \frac{r}{3}\sin 2t$$

($t \in [o, \frac{2}{3}\pi[$). Det oplyses, at denne parameterfremstilling kan udstrækkes til hele intervallet $t \in [o, 2\pi[$.

(2) Vis, at kurven, bortset fra i punkterne svarende til $t = o$, $t = \frac{2}{3}\pi$ og $t = \frac{4}{3}\pi$, er en vilkårligt ofte differentiabel kurve, og at den for $t = o$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ har en spids.

(3) Vis, at buen for $t \in]o, \frac{2}{3}\pi[$ er monoton og har en evolut for $t \in [o, \frac{\pi}{3}]$. Vis, at den indeholder punktet $(\frac{7}{6}r, \frac{7}{6}\sqrt{3}\, r)$.

OPGAVE 2

En tre gange differentiabel rumkurve er i et retvinklet koordinatsystem i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I.$$

Rumkurven underkastes en homoteti ud fra koordinatsystemets begyndelsespunkt, dvs. $t \to a\,\underline{r}(t)$ $(a > o)$. Udtryk ved hjælp af buelængde, krumning og torsion for den oprindelige kurve, de tilsvarende størrelser for den nye kurve. Kommentér resultatet.

OPGAVE 3

En rumkurve har i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\cos t}{\cosh t}, \frac{\sin t}{\sinh t}, \operatorname{tgh} t\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

(1) Vis, at kurven ligger på enhedskugleoverfladen, og find buelængden ud fra det til $t = o$ svarende punkt.

OPGAVE 4

En flade har parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t,u) = (t - 2tu, t^2 + u, t^2 + u^2), \quad t \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R}.$$

(1) Vis, at en af fladens parameterkurver er en plan kurve, og angiv en ligning for den plan, hvori den ligger. Vis, at fladen er en differentiabel C^∞-flade overalt, på nær i $(o, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(2) Vis, at fladen i ethvert punkt på parameterkurven svarende til $u = o$ er elliptisk krummet. Bestem hovedkrumninger og hovedretninger i punktet (o,o,o).

S K R I F T L I G   E K S A M E N

I E M N E K R E D S E N

G E O M E T R I

januar 1985

Varighed: 4 timer

Alle hjælpemidler tilladt.

For at besvarelsen anses for fuldstændig må alle fire opgaver være tilfredsstillende besvaret.

OPGAVE 1

En plan kurve har i polære koordinater ligningen

$$r = 1 - (\theta - \tfrac{\pi}{4})^2, \quad \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}].$$

(1) Bestem længden af kurven.

(2) Vis, at kurven er monoton, og at krumningen er maksimal for $\theta = \frac{\pi}{4}$. Bestem det til denne parameterværdi svarende krumningscentrum.

OPGAVE 2

Lad F betegne fladen med parameterfremstillingen

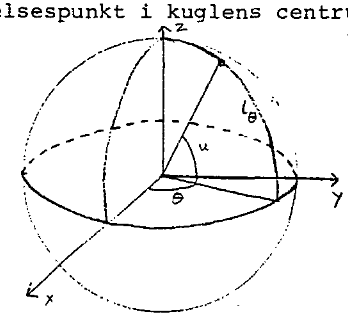
$$\underline{r}(u,v) = \left(v \cos u,\ v \sin u,\ \frac{u}{\frac{\pi}{2} - u} \ln v\right)$$

$$(u,v) \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0,\infty\right[.$$

Vis, at i ethvert punkt på parameterkurven svarende til v=1 er fladen hyperbolsk krummet.

OPGAVE 3

Lad enhedskuglen være anbragt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i kuglens centrum. Tænk på kuglen som en globus og på punkterne med ikke-negativ tredje-koordinat som den nordlige halvkugle. Ved længdebuen svarende til vinklen θ forstås storcirkelbuen fra Ækvator til Nordpolen liggende i den halvplan der fremgår af x,z-halvplanen med $x \geq 0$ ved en drejning på vinklen θ (målt i radian). Denne længdebue, der benævnes l_θ, har følgende parameterfremstilling:



$$l_\theta:\quad \underline{l}_\theta(u) = (\cos\theta \cos u,\ \sin\theta \cos u,\ \sin u)$$
$$u \in [0,\tfrac{\pi}{2}[\quad (\theta \in [0,\pi[).$$

Vi betragter nu en rumkurve k med parameterfremstillingen

$$k:\ \underline{r}(t) = (\cos\phi(t) \cos t,\ \sin\phi(t)\cos t,\ \sin t)$$

hvor $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$, og hvor $\phi: [0,\frac{\pi}{2}[\to [0,\pi[$ er en C^1-

funktion med $\phi'(t)>o$ for $t\in[o,\frac{\pi}{2}[$.

(1) Vis, at kurven k er en differentiabel kurve beliggende på enhedskuglens nordlige halvkugle.

(2) Bestem den vinkel hvorunder k skærer længdebuen l_θ $(\theta\in\phi([o,\frac{\pi}{2}[))$ på den nordlige halvkugle.

(3) Vis, at for $\phi(t) = c \ln \operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})$, $t\in[o,\frac{\pi}{2} - \varepsilon]$, hvor $o < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, og hvor c er en positiv konstant opfyldende at $c \ln \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - \varepsilon) < \pi$, bliver den i (2) omtalte vinkel konstant for alle $\theta\in\phi([o,\frac{\pi}{2}[)$(En konsekvens heraf er, at skib der sejler langs den til det her betragtede ϕ svarende kurve k holder en konstant kompaskurs.)

OPGAVE 4

(1) I den projektive plan er givet to forskellige linjer p og q, hvis skæringspunkt betegnes med S. Lad A, B og C være tre forskellige punkter på p og D, E og F tre forskellige punkter på q, så intet af disse seks punkter er sammenfaldende med S. Lad P betegne skæringspunktet mellem linjerne AF og CE og Q skæringspunktet mellem BF og CD.

Ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} p$ fastlægges en projektivitet ϕ: $p \underset{\wedge}{-} p$. Bestem $\phi(A)$ og $\phi(S)$.

Vis, at ϕ er hyperbolsk, hvis P, Q og S ikke ligger på samme linje.

(2) Lad der i den euklidiske plan ganske analogt være givet to forskellige linjer p og q med skæringspunkt S. Lad atter A, B og C være forskellige punkter på p og D, E og F forskellige punkter på q, alle forskellige fra S. Som før betegner P skæringspunktet mellem AF og CE og Q skæringspunktet mellem BF og CD.

Vis, at hvis linjerne AD og BE er parallelle, er også linjerne PQ og AD parallelle.

Opgavesæt slut.

Skriftlig eksamen

i

GEOMETRI

(differentialgeometri og projektiv geometri)

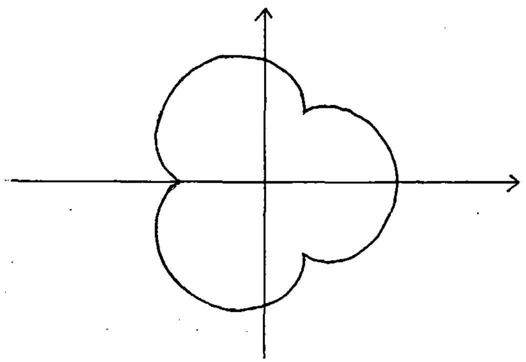
Den 7.juni 85

Alle hjælpemidler er tilladt. Eksamen varer fra kl. 10.00-14.00

En fuldstændig besvarelse forudsætter at alle opgaverne er fuldstændigt besvaret.

OPGAVE 1 En plan kurve har parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (\cos t + \tfrac{1}{4}\cos 4t,\ \sin t + \tfrac{1}{4}\sin 4t),\ t \in [o, 2\pi[.$$



(1) Vis, at kurvestykket svarende til parameterintervallet $[o, \frac{\pi}{3}[$ er en differentiabel kurve, og bestem buelængden af dette stykke.

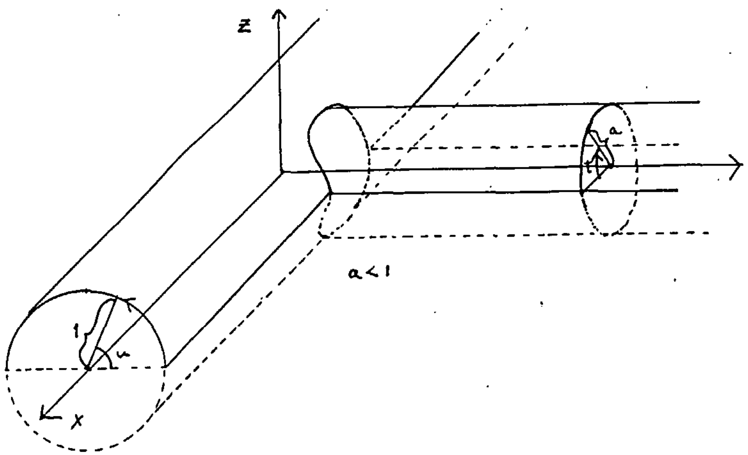
(2) Vis, at det under (1) omtalte kurvestykke har en evolut, og angiv en parameterfremstilling for denne.

OPGAVE 2 I et (x,y,z)-koordinatsystem er givet to cylinderflader med parameterfremstillingerne henholdsvis

$$(x,y,z) = (x, \cos u, \sin u),\ x \in \mathbb{R},\ u \in [o, 2\pi[,$$

og

$$(x,y,z) = (a \cos t,\ y,\ a \sin t),\ y \in \mathbb{R}_+ \cup \{o\},\ t \in [o, 2\pi[,$$
$$\text{hvor } o < a \leq 1.$$



(Opgave 2 fortsat)

(1) Angiv en parameterfremstilling for skæringskurven mellem de to cylinderflader, idet t benyttes som parameter. Godtgør at denne kurve er differentiabel netop når (o <) a < 1.

(2) Vis, at for a = 1 ligger den del af skæringskurven, der svarer til ikke-negative førstekoordinater, i en plan, og at denne kurvedel er en ellipsebue.

OPGAVE 3 Lad en flade have parameterfremstillingen

$$\underline{r}(u,v) = (u, v, ue^{-v^2}),\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Bestem for ethvert af de punkter på fladen, hvor v = o, hovedkrumningerne og hovedretningerne for punktet.

(2) Vis, at fladen er overalt hyperbolsk krummet for $v \neq o$.

OPGAVE 4 I den projektive plan er der givet tre forskellige linjer p, q og r gennem samme punkt S. Lad A og B være to forskellige punkter på p, begge forskellige fra S. Lad endvidere P og Q være to forskellige punkter, der ikke ligger på nogen af linjerne p,q og r.

Ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} r$ fastlægges en projektivitet $\varphi: p \underset{\wedge}{-} r$. Med R betegnes skæringspunktet mellem linjerne $A\varphi(A)$ og $B\varphi(B)$. Endelig fastlægges ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} r \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} p$ en projektivitet $\psi: p \underset{\wedge}{-} p$.

(a) Gør rede for, at $\psi(A) = A$.

(b) Vis, at ψ er den identiske afbildning af p.

(c) Vis, at P, Q og R ligger på samme linje.

SKRIFTLIG EKSAMEN

I

EMNEKREDSEN

TOPOLOGI

Januar 1986.

OPGAVE 1

Lad $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ være injektiv og kontinuert (i den sædvanlige topologi)

(a) Lad $a<c<d<b$, vis at $f(]c,d[) =]C,D[$ hvor $\{C,D\} = \{f(c),f(d)\}$.

(b) Vis, at $f(]a,b[)$ er et åbent interval (eventuelt kan et eller begge endepunkter være $\pm\infty$).

(c) Vis, at den omvendte funktion $f^{-1}: f(]a,b[) \to]a,b[$ er kontinuert.

OPGAVE 2

Lad V være et reelt vektorrum med en norm $\|\ \|$ og lad $f: V \to \mathbb{R}$ være en lineær funktion.

Vis, at hvis f er kontinuert i nul, så er f kontinuert overalt (kontinuitet er med hensyn til normen $\|\ \|$ på V og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

OPGAVE 3

Lad (S,d) være et metrisk rum og lad $x \in S$.

Sæt

$$B(x) = \{y \in S \mid d(x,y) < 1\}$$

og

$$d_x : S \to \mathbb{R}, \quad d_x(y) = d(x,y).$$

(a) Vis, at d_x er kontinuert (med hensyn til d på S og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

(b) Vis, at $\overline{B(x)} \subseteq \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ($\overline{B(x)}$ betegner afslutningen af $B(x)$).

(c) Gælder der altid $\overline{B(x)} = \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$?

Begrund svaret.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

OPGAVE 4

Lad for et $a \in \mathbb{R}$ $G_a =]-\infty, a[$.

(a) Vis, at systemet $\mathcal{T} = \{G_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ er en topologi på $\mathbb{R}$.

(b) Vis, at $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ opfylder andet numerabilitets aksiom.

(c) Beskriv de afsluttede mængder i $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(d) Lad $\mathcal{T}_o$ være den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$, og betragt afbildningerne

$$f_1, f_2 : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_o) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \text{ givet ved}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Undersøg, om f_1 og f_2 er kontinuerte.

(opgavesættet slut).

Skriftlig prøve i MATEMATIK,
emnekredsen Sandsynlighedsregning
og statistik,

<u>tirsdag d. 7.1.1986 kl. 10.00 - 14.00</u>,

Opgavesættet består af fire opgaver og fem sider.

Ved prøven er alle hjælpemidler tilladt.

Opgave 1.

I en boligforening bor der 10 bilejere, men foreningen bygger kun 9 carporte. Man indfører derfor følgende regel til fordeling af carport-plads: Hvert år trækkes der lod mellem bilejerne om, hvem der kan få en carport-plads det kommende år; men når man ét år ikke har haft nogen carport, er man automatisk sikret en carport i de to næste år. Ved begyndelsen af det første år, trækker alle lod på lige fod.

1) Hvad er sandsynligheden for, at bilejer Olsen har carport i de to første år, men ikke i det tredje ?

2) Hvad er sandsynligheden for, at bilejer Alibert har carport i de tre første år, men ikke i det fjerde ?

3) Hvad er sandsynligheden p_k for, at bilejer Schmidt har carport i netop de første k år, hvor k = 0,1,2,... ? (p_0 skal forstås som sandsynligheden for ikke at have carport i det første år.)

4) Bilejer Blihk må i det fjerde år undvære carport. Hvor lang en uafbrudt periode kan han derefter forvente at have en carport ?

5) Hvor mange år (regnet fra ordningens start) kan bilejer Schlange forvente uafbrudt at have carport til sin bil ?

Opgave 2.

Det er velkendt, at blodtrykket hos mennesker almindeligvis stiger med alderen. For nærmere at undersøge, hvordan det vokser med alderen, kan man analysere nedenstående talmateriale, der består af sammenhørende værdier af blodtryk og alder for 38 kvinder.

Tabel 1. Sammenhørende værdier af blodtryk (mm Hg) og alder (år) for 38 kvinder.

82.17	28	88.19	46	89.66	63	81.45	36	85.16	42
89.77	59	89.11	54	107.96	77	74.82	21	83.98	57
92.95	47	79.51	34	87.86	51	76.85	27	76.93	24
87.09	41	97.55	66	92.04	69	100.85	72	96.30	60
86.42	50	94.16	57	78.12	32	89.06	59	94.58	74
103.48	77	81.30	41	83.71	36	68.38	20	86.64	47
87.91	51	86.42	57	103.87	69	83.76	36	84.35	54
68.64	24	100.50	61	100.42	80				

Talmaterialet blev analyseret af et computer-program. En del af udskrifterne fra computer-programmet er gengivet på næste side.

Kommenter computer-resultaterne. Hvad er det for en statistisk model der er underforstået ? Hvad er skønnene over modellens parametre ? Hvad kan man sige om, hvor godt modellen passer ?

***** REGRESSION ANALYSIS *****

Y-VARIATE: BLODTRYK

*** REGRESSION COEFFICIENTS ***

	ESTIMATE	S.E.
CONSTANT	63.04315	2.01596
ALDER	0.49830	0.03825

*** ANALYSIS OF VARIANCE ***

	DF	SS	MS
REGRESSN	1	2647.7	2647.69
RESIDUAL	36	561.6	15.60
TOTAL	37	3209.3	86.74

PERCENTAGE VARIANCE ACCOUNTED FOR 82.0

Opgave 3.

Ved et amerikansk universitet foretog en kunststuderende en undersøgelse, der skulle klarlægge, om kunstnere i højere grad end andre mennesker tror på ESP (ESP = Extra Sensory Perception, dvs. sansning ad "overnaturlig" vej). Han spurgte 114 kunstnere og 344 ikke-kunstnere om, hvor meget de troede på ESP, idet de fik følgende svarmuligheder: "tror på ESP", "tror til en vis grad på ESP", og "tror ikke på ESP".

Blandt kunstnerne var der 67 der troede på ESP, 41 der til en vis grad troede på ESP, og 6 der ikke troede på ESP. Blandt ikke-kunstnerne var de tilsvarende tal 129, 183 og 32.

Hvad kan man på denne baggrund sige til spørgsmålet om, hvorvidt kunstnere i højere grad end andre mennesker tror på ESP ? Begrund svaret.

Opgave 4.

I slutningen af skoleåret 1982-83 foretog man en spørgeskemaundersøgelse blandt 1.g-matematikere i fire gymnasier i Århusområdet. Blandt andet blev eleverne bedt om at angive deres seneste karakter i hvert af fagene Matematik, Fysik og Kemi; resultaterne heraf ses i Tabel 1.

Tabel 1. Karakterfordeling i hvert af fagene Matematik, Fysik og Kemi for 384 1.g-matematikere.

karakterer	Matematik	Fysik	Kemi
13	1	0	0
11	3	2	4
10	67	31	32
9	119	92	98
8	111	128	130
7	59	97	82
6	22	25	32
5	2	8	6
03	0	1	0

Kan man på denne baggrund sige noget om, hvorvidt der er forskel på de karakterer der gives i de tre fag ?

(Ved besvarelsen kan man eventuelt benytte disse hjælpestørrelser:

	Mat.	Fysik	Kemi
sum af karakterer:	3230	3056	3082
sum af kvadrater på karakterer:	27708	24848	25262 .)

SKRIFTLIG EKSAMEN

I

EMNEKREDSEN

TOPOLOGI

Januar 1986.

OPGAVE 1

Lad $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ være injektiv og kontinuert (i den sædvanlige topologi)

(a) Lad $a<c<d<b$, vis at $f(]c,d[) =]C,D[$ hvor $\{C,D\} = \{f(c),f(d)\}$.

(b) Vis, at $f(]a,b[)$ er et åbent interval (eventuelt kan et eller begge endepunkter være $\pm\infty$).

(c) Vis, at den omvendte funktion $f^{-1} : f(]a,b[) \to]a,b[$ er kontinuert.

OPGAVE 2

Lad V være et reelt vektorrum med en norm $\|\ \|$ og lad $f: V \to \mathbb{R}$ være en lineær funktion.

Vis, at hvis f er kontinuert i nul, så er f kontinuert overalt (kontinuitet er med hensyn til normen $\|\ \|$ på V og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

OPGAVE 3

Lad (S,d) være et metrisk rum og lad $x \in S$.
Sæt
$$B(x) = \{y \in S \mid d(x,y) < 1\}$$
og
$$d_x : S \to \mathbb{R}, \quad d_x(y) = d(x,y).$$

(a) Vis, at d_x er kontinuert (med hensyn til d på S og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

(b) Vis, at $\overline{B(x)} \subseteq \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ($\overline{B(x)}$ betegner afslutningen af $B(x)$).

(c) Gælder der altid $\overline{B(x)} = \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$?

Begrund svaret.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

OPGAVE 4

Lad for et $a \in \mathbb{R}$ $G_a =]-\infty, a[$.

(a) Vis, at systemet $\mathcal{T} = \{G_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ er en topologi på $\mathbb{R}$.

(b) Vis, at $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ opfylder andet numerabilitets aksiom.

(c) Beskriv de afsluttede mængder i $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

(d) Lad $\mathcal{T}_o$ være den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$, og betragt afbildningerne

$$f_1, f_2 : (\mathbb{R},\mathcal{T}_o) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}) \text{ givet ved}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Undersøg, om f_1 og f_2 er kontinuerte.

(opgavesættet slut).

Skriftlig prøve i
emnekredsen

SANDSYNLIGHEDSREGNING OG STATISTIK

mandag den 19.1.1987

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Der gøres opmærksom på, at opgaverne ikke
vil blive tillagt samme vægt ved bedømmelsen.

OPGAVE 1

I 165o'erne behandlede matematikerne Fermat (franskmand) og Huygens (hollænder) følgende problem, vistnok på bestilling:

A og B spiller plat og krone med en fair mønt om en pulje penge. Det er aftalt, at A får hele puljen, hvis der kommer 8 krone før 8 plat, mens B stryger puljen, hvis det går omvendt. Imidlertid bliver spillet afbrudt i utide i en stilling, hvor der er kommet 6 krone og 5 plat. Hvordan bør puljen deles mellem A og B? Fermat og Huygens nåede frem til, at A bør have 11/16 og B 5/16 af puljen. Deres tankegang fremgår ved besvarelsen af nedenstående spørgsmål.

Vi forestiller os, at spillet i stedet for at være blevet afbrudt var bragt til afslutning efter de aftalte regler. Lad S være den stokastiske variable der angiver antallet af yderligere kast der skal til for at opnå dette.

(1) Hvilke værdier kan S antage? Bestem fordelingen af S og udregn ES.

Lad X være den stokastiske variable der angiver antallet af krone opnået i de yderligere kast, mens Y angiver antallet af plat.

(2) Bestem den simultane fordeling af S og X. Udregn derefter sandsynligheden for at A, henholdsvis B, ville vinde det fuldførte spil.

(3) Bestem den betingede middelværdi af S givet at A vandt det fuldførte spil.

OPGAVE 2

Vi antager at en partikel har stokastiske koordinater (X,Y) i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, hvor X og Y er indbyrdes uafhængige normalfordelte $N(0,\sigma^2)$ stokastiske variable. Med Z betegnes den stokastiske variabel, der angiver partiklens afstand til koordinatsystemets begyndelsespunkt.

(1) Vis, at det om Z gælder at Z^2/σ^2 er χ^2-fordelt med 2 frihedsgrader, og at Z har tæthedsfunktionen

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(Den dertil svarende fordeling kaldes Rayleigh-fordelingen med parameter σ^2).

(2) Godtgør, at Z har middelværdien

$$EZ = \frac{\sigma}{2}\sqrt{2\pi}$$

og

$$VZ = \sigma^2(2 - \frac{\pi}{2}).$$

(3) Bestem maksimum-likelihood-estimatoren $\hat{\sigma}^2$ for σ^2, ud fra observationssættet $Z_1,\ldots Z_k$, og gør rede for, at $\frac{2n}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2$ er χ^2-fordelt med 2n frihedsgrader. Bestem på dette grundlag et 95%-konfidensinterval for σ^2, ud fra en stikprøve $Z_1,\ldots Z_{10}$ af Z (og brug af en passende tabel).

OPGAVE 3

(1) Lad $\lambda > 0$ og $\gamma > 0$ være givne. Bestem a i $\mathbb{R}$, udtrykt ved λ og γ, så at

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq \gamma \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er en tæthedsfunktion.

(2) Antag, at $X_1, X_2, \ldots X_n$ er indbyrdes uafhængige stokastiske variable med tæthedsfunktion f. Bestem tæthedsfunktionen f_2 for $X_1 + X_2$. Vis derefter, f.eks. ved induktion, at tæthedsfunktionen f_n for $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} (x - n\gamma)^{n-1} e^{-\lambda(x - n\gamma)} & \text{for } x \geq n\gamma \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(3) Lad atter $X_1, X_2, \ldots X_n$ være indbyrdes uafhængige stokastiske variable med tæthedsfunktion f. Vis, at maksimum-likelihood-estimatoren for parametrene γ og λ er henholdsvis

$$\hat{\gamma} = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots X_n\}$$

og

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}} \quad \text{(forudsat, at ikke alle } X_1, \ldots X_n \text{ er ens),}$$

hvor som sædvanlig $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$.

Bestem tæthedsfunktionen for $\hat{\gamma}$.

(4) Opstil en likelihood-kvotientteststørrelse for den sammensatte nulhypotese

H_0: $\gamma \leq \gamma_0$,

hvor λ antages kendt, og angiv for dette test formen på den kritiske mængde svarende til signifikansniveau α.

OPGAVE 4

To forskellige metoder, I og II, til konservering af kød ønskes sammenlignet. Fra samme kødparti udtages tolv portioner, hvoraf de seks udsættes for metode I, de øvrige seks for metode II. Ved forsøgsperiodens afslutning måles for hver portion udbyttet af holdbart kød i % af den oprindelige vægt. Det giver:

I:	58.5	58.5	59.0	58.4	59.9	58.5
II:	58.2	57.9	58.1	60.0	57.7	59.1.

Bedøm - ud fra en forudsætning om at de to stikprøver hidrører fra to normalfordelinger med samme (ukendte) varians - om der er forskel i effektiviteten af de to metoder.

Opgavesæt slut

Skriftlig eksamen i Matematik
mandag den 9. januar 1989 kl. 10-14
i teorirum i hus 02.
Emnekreds: Sandsynlighedsregning og statistik.

Eksaminander: Hans O. Mortensen (modul 1)
Lars Frellesen (modul 2)

Alle hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver, som er vægtet med omtrentlige vægte. Sættet betragtes kun som værende fuldstændigt besvaret, hvis alle 3 opgaver er korrekt besvaret.

Eksamensopgaver til 9/1-89: Statistik og sandsynlighedsregning.

Opgave 1: (ca. 30%) Lad X_1 og X_2 være to indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, som hver har tæthed
$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x) \cdot 1_{]0,\infty[}(x)$, hvor λ er en positiv konstant.

a) Vis, at de stokastiske variable X_1+X_2 og $\frac{X_1}{X_2}$ er indbyrdes uafhængige, og angiv tætheden for fordelingen af X_1+X_2 og tætheden for fordelingen af $\frac{X_1}{X_2}$.

b) Angiv middelværdien af X_1+X_2.

c) Angiv også variansen af X_1+X_2.

Vink: Vis, at afbildningen $t:]0,\infty[^2 \to]0,\infty[^2$ givet ved $t(x_1,x_2) = (x_1+x_2, \frac{x_1}{x_2})$ er en bijektiv afbildning af $]0,\infty[^2$ på $]0,\infty[^2$ og at den omvendte afbildning t^{-1} er givet ved $t^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{y_1 y_2}{1+y_2}, \frac{y_1}{1+y_2}\right)$.

Opgave 2: (ca. 45%) Ved et forsøg med Schweizerost blev mælken tilsat salt i mængderne hhv. 0 g, 150 g, 300 g og 600 g pr. 100 l mælk. Hver af de fire prøver blev da lagret i 2 døgn. Efter de 2 døgn blev mængden af flygtige syrer i den modne ost målt. 100 ml af et destillat, som svarede til 20 g ost, blev titreret mod 0,05 N NaOH, og den mængde NaOH i ml, som var nødvendig for at neutralisere syren, blev målt. Denne mængde NaOH vil være et direkte mål for mængden af flygtige syrer i osten. For hver saltmængde er der foretaget 6 uafhængige målinger, som er anført i nedenstående tabel.

Undersøg på grundlag heraf, hvordan indholdet af flygtige syrer i osten varierer med salttilsætningen.

Obs: Man må gerne antage, at observationerne under for den enkelte gruppe kan beskrives ved en normalfordeling, så der ønskes ikke tegnet fraktildiagrammer eller histogrammer. Derimod ønskes Bartletts test udført.

Tabel 1

Målt mængde NaOH for de forskellige salttilsætninger

Salttilsætning	Målt NaOH	
0	44.2	42.2
	41.8	42.2
	43.9	36.4
150	44.9	41.1
	28.5	37.3
	46.3	37.1
300	37.2	37.8
	33.4	44.1
	33.0	30.7
600	33.8	23.9
	36.4	19.3
	31.6	36.0

Som hjælp ved udregningerne kan det oplyses, at summen af kvadraterne på alle observationerne, altså $\sum_i \sum_j Y_{ij}^2$, er 33553,79.

Opgave 3 (ca 25%)

Nedenstående tabel viser fordelingen af børnene af en gruppe på 2475 mandlige bloddonorer efter køn og faderens blodtype. Det ønskes belyst, hvorvidt de angivne data giver anledning til at formode, at der er en sammenhæng mellem faderens blodtype og barnets køn.

Faderens blodtype

		O+	O−	A+	A−	B+	B−	i alt
barnets køn	♂	504	88	461	106	85	14	1258
	♀	459	108	442	98	93	17	1217
i alt		963	196	903	204	178	31	2475

— SLUT —

Skriftlig eksamen i emnekredsen statistik og sandsynlighedsregning*

17. januar 1990 kl. 10.00 – 14.00

Opgave 1

Hr. Hansens store lidenskab er at spille på spilleautomater. I automathallen er der de sædvanlige spilleautomater af mærket *Everluck*, og så er der netop kommet nogle nye af mærket *Immerglück*. Hr. Hansen beslutter sig for at foretage en systematisk sammenligning af de to mærker. Han går frem på den måde, at han spiller på hver enkelt maskine, indtil han netop har vundet tre gange på dén maskine (han tager ikke hensyn til, hvor stor gevinsten er). Derved får han spillet 14, 11, 24, 27 og 11 gange på de fem *Everluck*-maskiner og 22, 18, 21, 20 og 15 gange på de nye *Immerglück*-maskiner.

1. Opstil en statistisk model og den tilhørende modelfunktion.

   (Hjælp: Sandsynligheden for at man skal spille netop x gange for at få netop tre gange gevinst er $\binom{x-1}{2} p^3(1-p)^{x-3}$, hvor p betegner sandsynligheden for at få gevinst i et enkelt spil.)

2. Tyder tallene på, at der er en reel forskel på nye og gamle spillemaskiner?

Opgave 2

Man har undersøgt hvordan rismelsbiller (*Tribolium castaneum*) overlever i forskellige populationstætheder. Man har anbragt forskellige koncentrationer af bille-æg i det mel, de lever i, og efter et givet stykke tid har man undersøgt,

*Alle hjælpemidler må medbringes.

Tabel 1: Brøkdel overlevende *Tribolium castaneum* ved fire forskellige koncentrationer af æg i mel-mediet.

Æg-tæthed (antal pr. g)			
5	20	50	100
0.775	0.812	0.730	0.640
0.725	0.794	0.675	0.585
0.875	0.750	0.725	0.574
0.775	0.713		
0.875			

hvor stor en del af æggene der er blevet til endnu levende biller. Resultaterne af et sådant forsøg er vist i Tabel 1.

Undersøg hvordan overlevelsesgraden afhænger af den oprindelige æg-tæthed.

Opgave 3

Et supermarked pynter ved juletid op med juletræer med elektriske lys. Der er fem juletræer, som hver er forsynet med en juletræskæde med 40 pærer. Efter fire ugers forløb, hvor træerne har været tændt 20 timer pr. dag, er en del af pærerne brændt over: på de fem træer er der henholdsvis 12, 10, 11, 8 og 12 pærer der ikke ikke længere virker (ved periodens begyndelse virkede alle pærer).

Supermarkedsbestyreren var blevet lovet, at pærerne havde en middellevetid på 2000 timer. — Det kan antages, at en elektrisk pæres levetid er eksponentialfordelt.

1. Gør rede for, hvordan de foreliggende data (altså antal pærer der ikke duer) har noget at gøre med pærernes middellevetid.

2. Hvordan er de foreliggende data forenelige med antagelsen om, at middellevetiden er 2000 timer?

Tabel 2: Nitrogenindhold i jord, bestemt af fem forskellige laboranter på hver af tre dage.

	laborant				
	A	B	C	D	E
tirsdag	509	512	532	506	509
onsdag	505	507	542	520	519
fredag	465	472	498	483	475

Opgave 4

Som led i en undersøgelse af, om forskellige laboranter får overensstemmende resultater ved rutineundersøgelser af nitrogenindholdet i jordprøver, gjorde man på hver af tre dage det, at man delte en jordprøve i fem dele, som blev fordelt tilfældigt mellem de fem laboranter, der indgik i denne del af undersøgelsen. Laboranterne bestemte hver gang nitrogenindholdet i deres portion jord, og man fik resultaterne i Tabel 2.

Hvad kan man på denne baggrund sige om, hvorvidt der er forskel på laboranternes nitrogenbestemmelser?

Slut på opgavesættet.