TEKST NR 2 1978

OPTIMERING.
Menneskets forøgede
beherskelsesmuligheder
af natur og samfund.

Projektrapport

Tom J.Andersen
Tommy R.Andersen
Gert Kreinøe
Peter H.Lassen

Vejleder:
Bernhelm Booss.

TEKSTER

fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

INDHOLDSFORTEGNELSE.

1. INDLEDNING.

Dette projekt har som sit hovedsigte,at undersøge det forhold der består mellem matematikkens udvikling og udviklingen af de samfund ,hvori de implicerede videnskabsfolk færdes.Specielt ønsker vi at belyse forholdet mellem et samfunds optimeringsproblemer,udviklingen af matematiske resultater til løsning af disse problemer og de udviklede resultaters anvendelse i praksis.

I århundrede har det været forbeholdt videnskabsfolk og filosoffer at beskæftige sig med begrebet optimering.Først i de sidste er begrebet blevet alment kendt ,og i de sidste år har man endda kunnet høre begrebet optimering anvendt i det daglige sprog.Dette faktum skyldes utvivlsomt at optimering benyttes i langt større udstrækning i dag,end man tidligere har gjort.

Den stadigt stigende anvendelse af optimering kan ses som udtryk for to ting.For det første har den stigende kompleksitet i vores moderne samfund medført et øget behov for optimering.For det andet,at den teknologiske og matematiske udvikling har medført,at det overhovedet er muligt at finde optimale løsninger på mange af de komplicerede problemer som findes i samfundet.

Således gælder det indenfor så forskellige områder som nationaløkonomi, stor-industri og transportsektoren,at planlægningsproblemerne er blevet så store,at det er nødvendigt,at finde optimale løsninger på planlægningen. Men også indenfor planlægning og styring af mindre foretagender,findes ønsker om optimale løsninger,således at materialeforbruget bliver mindst og/eller gevindsten maksimal.Tænk f.eks. på styring af et landbrug,hvor man ønsker at udnytte sine ressourcer (jord,maskiner,vand,gødning,ect.) optimalt,og derved opnå det maksimale udbytte.

At begrebet optimering virkelig benyttes i stadig større udstrækning, kan f.eks. ses af programmet for den 8. Internationale Konference for Anvendt Matematik i Ingeniørvidenskaben,hvor tredive procent af foredragstitlerne indeholder ordene optimal eller optimering. Som et andet eksempel på optimerings centrale placering er at det nævnes som et af tolv væsentlige videnskabelige problemer i en rapport fra UNESCO (UNESCO,1972).

Hvad er begrebet optimering?

At optimere er, ifølge Gyldendals Fremmedordbog:

"at bringe til optimum" (det under de givende betingelser, bedste resultat)

Om samme emne skriver Encyclopedia Britannica:

"Optimization consists in the study of the extremal (greatest or least) values of functionals on sets of generelly very complex structure." (Great Soviet Encyclopedia,vol. 5,s. 78)

Vi følger her et lidt bredere optimalitetsbegreb:

"Optimization is a technique for improving or increasing the value of some numerical quantity that in practice may take the form of temperature,air flow,speed,pay-off in a game,political appeal, destructive power,information,monetary profit,and the like." (Encyclopedia Britannica,Macropedia,optimization)

Som det ses,kan optimering altså opfattes som:

1.-den aktive proces ,hvor man bevidst søger at bringe til optimum.
2.-den mere generelle analyse af optimalitetsprincipper,som de forekommer i naturen.

Imidlertid er mange metoder,som vi vil opfatte som hørende til bevidst optimering,fremkommet ved en analyse af naturfænomener.Det kan derfor være problematisk at foretage en skarp skelnen,og det er da også kun for at kunne omtale de to opfattelser af begrebet optimering,at vi foretager følgende inddeling:

Aktiv optimering: En aktiv proces,der har til formål at bestemme det handlingsmønster, der vil bringe en given funktion til dens optimum: Menneskets beslutninger, planlægning og styring af processer; det vil sige menneskets vekselvirkning med naturen.

Naturgiven optimering: hvor optimum forstås som et naturprincip,hvoraf man kan aflede egenskaber ved naturen.: æbler falder af træer, bier bygger bikuber og lysbølger går den hurtigste vej; det vil sige naturens "vekselvirkning" med naturen.

Det er imidlertid et gammelt filosofisk problem,om man i det hele taget kan afgøre,hvilken type optimering en given optimeringsproces tilhører.Se f.eks. "Materialen zur analyse der berufspraxis des mathematikers",hefte 15(Bøge, 1975,s.137),her lettere omskrevet:

> "En prognose med tilbagekobling,en anbefaling (Empfehlung),bygger på en aktiv optimering,der siger:"Jeg anbefaler,at du gør det og det,for så vil den optimale tilstand opstå."
> En prognose uden tilbagekobling siger derimod:"Jeg formoder,at du vil gøre det og det,for så vil den optimale tilstand opstå".
> Vi har altså her en naturgiven optimering.

Sammenhængen mellem begge sider af optimeringsbegrebet er ikke helt klar. Men det er helt klart at naturens ekstremalprincipper altid gælder, mens optimering af menneskelig aktivitet kun er et afledet princip. En forkert forståelse af dette forhold kan tjene som antividenskabelige, religiøse opfattelser.

Det ses også flere steder,at extremalitetsprincipper,som de kan observeres i naturen,kan give anledning til overvejelser af mere religiøs karakter.Se f.eks. Klaus Buhr,"Philosophisnes Wörterbuch" under Optimal(Buhr, 1972,s. 811)

> "Sowohl die organishen systeme als auch die systeme der Gesellschaft streben einem optimalen Zustand zu.Da das Aufsuchen von optimalen Lösungen,Wegen usw. am augenfälligsten mit der zwecksetzenden gesellschaftlichen Tätigkeit des Menschen verbunden ist und aus dieser auch hinreichend erklärt werden kann,wurde das Streben organismisher Systeme nach struktureller und funktionaler Optimalität in der Geschichte der Biologie und Philosophie vielfach idealistisch auf eine transzendente,das Ziel der Entwicklung vorgebende Vernunft zurückgeführt."

Udover de to hovedtyper af optimering kan systematiseres under en generel matematisk teori,har de imidlertid også andre fælles træk.Det er således oplagt,at den aktive optimering kræver et indgående kendskab til de processer ,man ønsker at optimere.Man kan med andre ord sige,at ønsket om at optimere kun kan formuleres,når processerne der indgår ,er forstået og afmystficeret,eller i en vis grad er blevet trivielle.På den anden side kan man opfatte forståelsen og formuleringen af den naturgivne optimering som et led i dens trivialiseringsproces.

Optimering som emne for et projekt,der er tidsmæssigt begrænset til fire måneder,er for omfattende til,at vi kan give emnet en bare rimelig dybtgående behandling.Dette skyldes for det første,at et meget bredt spektrum af matematikken indgår i emnet.For det andet,at optimeringens historie næsten er lige så lang som menneskets,og som det tredie,at optimering indgår i en uendelig række af anvendelser.

Af ovennævnte grunde,har vi valgt,kun at arbejde med et begrænset antal optimeringsmetoder og vil ligeledes nøjes med at belyse et enkelt anvendelsesområde

Ovenstående overvejelser fører os frem til følgende problemstilling:

1. Hvorledes har samfundets udvikling og udviklingen indenfor andre videnskaber end matematikken påvirket udviklingen af optimering metoder,specielt hvad er det for typer problemer,der har gjort det det nødvendigt at udvikle optimeringsmetoderne?

2. Hvordan systematiseres matematisk optimering under en generel teori,og har en sådan systematisering nogen betydning for den videre udvikling?

3. Hvilke behov er der i dansk landbrug for anvendelse af optimering,og hvordan tilfredsstilles de?Herunder en diskussion af forholdet mellem forskningens stade og den faktisk forekommende anvendelse.

I forbindelse med besvarelse af ovennævnte tre problemer vil vi søge at besvare nogle mere generelle spørgsmål som: Hvad er det begrebslige indhold af "optimum" og "optimering".

Vores tre problemstillinger giver anledning til tre undersøgelser:en historisk,en strukturel og en undersøgelse af landbrugets forhold.

<u>Den historiske undersøgelse</u>:

I den historiske undersøgelse har vi forsøgt at klargøre forholdet mellem et givet samfundssystem med dets problemer og dets videnskab.Her specielt selvfølgelig udviklingen af forskellige optimeringsmetoder:men også udviklingen i forståelsen af optimering.

Vi vil ligeledes se på ,hvornår forskellige problemer er blevet erkendt som optimeringsproblemer,og i hvilken samfundsmæssig sammenhæng de er blevet dels formuleret,dels løst.

Den strukturelle undersøgelse:

I denne undersøgelse vender vi problemet om,således at vi ser på optimeringsproblemernes internt matematiske sammenhæng,uden at skele til deres historiske udvikling.Dette fører til en generel formulering af optimeringsproblemet ,således at det bliver muligt at redegøre for forskelle og ligneder mellem enkelte optimeringsproblemer.Denne fremstilling bruger vi til en diskussion om betydningen af de strukturerende bestræbelser for matematikkens udvikling ,specielt med henblik på generalisering og præciseringsbestræbelserne ,har nogen betydning for anvendelsen af matematik,eller om de kun har akademisk betydning.

Vi har i denne forbindelse specielt set på følgende optimeringsproblemer:

1. Ekstremum for funktioner af een reel variabel
2. Ekstremum for funktioner af flere reelle variable
3. Ekstremum for funktioner af flere reelle variable med bibetingelser
4. Lineær programmering
5. Ikke-lineær programmering.Herunder konveks programmering.
6. Klassisk variationsregning
7. Lagrangeproblemet
8. Lagrangeproblemet med non-holonome bibetingelser
9. Optimal control

Landbrugsundersøgelsen:

For at se konkret på vekselvirkningen mellem den matematiske forskning indenfor optimering,og anvendelsen af samme,har vi valgt at se på de optimeringsmetoder der benyttes i landbruget.

Valget af dette område skyldes en række faktorer:

1. At udviklingen indenfor dansk landbrug de senere år er gået mod større enheder,hvor planlægning og styring derfor er blevet mulig.

2. At informationer om planlægningsmetoder og deres anvendelse,ville være lettere tilgængelige end f.eks i industrien.

3. At planlægningen for det enkelte brug,vil være mere "moralsk",idet det er landmanden selv,som arbejder,der i sidste ende skal tage stilling til,om planlægningstilbuddet skal benyttes eller ej.

4. For at kunne konstatere,om en "optimal" planlægning,ensidigt forsøger at maksimere det økonomiske overskud,eller også tager hensyn til andre faktorer,f.eks. miljø og økologiske hensyn.

Vi har som led i denne landbrugsundersøgelse,og som led i afviklingen af vores 3o-timers praktik bl.a. besøgt flere landmænd,for at kunne konstatere,hvorledes de oplever anvendelsen af forskellige optimeringsmetoder i deres hverdag.

Sammenfatning:

For at undersøge vekselvirkningen mellem matematikkens indre dynamik og samfundets behov for matematiske resultater,tager vi vort udgangspunkt i udviklingen af optimeringsmetoder under forskellige samfundsforhold,for at summere denne udviklingop til en moderne generel formulering,der samtidig er et udtryk for matematikkens strukturelle egenskaber. For igen at belyse vekselvirkningen mellem produktion og matematik ser vi på en nutidig anvendelse af matematik i landbruget,og problemerne med at overføre generelle problemer til konkrete anvendelser.

Derved er vi så at sige nået hele vejen rundt, idet vi tager udgangspunkt i samfundsproblemer, ser på deres oversættelse til matematiske (optimerings) problemer, undersøger generaliseringen af det matematiske problem,til det fjerner sig fra det konkrete,og fortsætter med at belyse problemerne ved igen at anvende den generelle teori på et nyt snvendelsesområde.

2. DEN HISTORISKE UDVIKLING AF OPTIMERINGSMETODER.

I dette kapitel vil vi forsøge at belyse hvordan og hvorfor matematik, eksemplificeret ved optimering,opstår.Dette er selvfølgeligt et stort emne,da menneskeheden gennem hele sin historie med større og større intensitet har beskæftiget sig med at finde bedre og bedre strategier for sine handlinger.

Vi har derfor,for at holde hovedlinierne klare,bestræbt os på at fremstille udviklingen på kort og oversigtsmæssig form.

Som det første vil vi forsøge at gøre rede for,hvorfor det overhovedet er relevant at foretage historiske undersøgelser af videnskabsudviklingen. Derefter vil vi kort beskrive,hvordan vi har foretaget analysen, inden vi går igang med selve undersøgelsen.

2.1 HVORFOR HISTORISKE UNDERSØGELSER.

Et første og temmeligt unuanceret svar på ovenstående spørgsmål er,at historien er interessant i sig selv,og at det derfor er legitimt at studere den uden noget andet formål end interesse.Denne interesse giver sig normalt udslag i en personorienteret historieforskning,der opremser enkelte store mænds resultater,her forstået som internt videnskabelige resultater. Interesse er selvfølgelig en forudsætning for at lave historiske undersøgelser,men uden et formål med studierne bliver alle oplysninger lige relevante,og resultaterne kan drukne i detaljer.

Hvis man ønsker at behandle og formidle den moderne matematik på en bevidst og rationel måde, er det nødvendigt at have en historisk korrekt opfattelse af fagets udvikling.En sådan fagopfattelse,formidlet gennem de historiske analyser,vil give en forståelse af matematikkens udvikling som en kreativ proces,hvor begreber og metoder ofte har været århundreder om at få et klart og præcist indhold.

Dette formål er dog stadigt set på fagets egne betingelser,og de drivkræfter man ser på denne måde, begrænser sig til fagets egne. For at få en i vore øjne realistisk fagopfattelse, er det nødvendigt at se faget som en del af det omgivende samfund, og altså ikke begrænse sig til at studere, hvordan matematiker N.N. kom fra A til B i 1735, men også se på i hvilket samfundssystem hun levede, hvad det var for udviklingsproblemer videnskaben beskæftigede sig med.

Et andet perspektiv af historiske undersøgelser er,at erkende vekselvirkningen mellem videnskaben og produktionen således at fremtidige handlinger bl.a. kan besluttes ud fra denne erkendelse.Som eksempel på en sådan erkendelses-"opgave" ,kan nævnes Harald I Sharlin's spørgsmål:

> "Between the discovery of electromagnetic induktion and the development of the electromagnetic generator 5o years elapsed. Why did it take so long for Faraday's basic work to be applied? (Sharlin,1961,s.1o7)

Det er på grundlag af et sådant formål,at J.D. Bernal har skrevet "Science in History",idet han skriver:

> "Scientist in the past were able to neglect all but their immediate predecessors' work and even to reject the traditions of the past as more likely to block than assist progress.Now,however,the troubles of the times,together with the inescapable connexion between them and the advance of science, have focused attention on the historical aspect of science.To find how to overcome the difficulties that face us,and to release the new forces of science for welfare rather than destruction,it is necessary to examine anew how the present came about." (Bernal,1954,s.1)

Endvidere citerer B.V, Gnedenko i (Gnedenko,1977,s.122),Leibniz for at have sagt:

> "It is extremely useful to know the true origin of remarkable discoveries, particularly those which were not by chance, but through the force of intellect.This is beneficial not so much in that history renders to each his own and stimulates others to acieve the same renown,but rather in that knowledge of method,based on outstanding examples,develops the art of discovery."

Som en opsummering har vi opstillet følgende formål med at lave historiske undersøgelser:

1. Historiske undersøgelser af matematikkens udvikling gør indlæring af matematik nemmere og giver desuden en bedre forståelse af hvorfor matematiske argumenter er som de er.

2. En undersøgelse af vekselvirkningen mellem matematik og det omgivende samfund er medvirkende til en erkendelse af det samfund vi lever i, og hvordan det udvikler sig.

2.2 DEN ANVENDTE UNDERSØGELSESMETODE.

I vores forsøg på at gennemføre en matematikhistorisk undersøgelse, vil vi sammenholde samfundets generelle udvikling med udviklingen indenfor matematik.Men da der dels er en tradition indefor den almindelige historievidenskab til at focuserepå den politiske og økonomiske historie og kun perifert berøre videnskaben, og dels en tradition for at dyrke videnskabshistorie, der så vidt muligt er støvsuget for henvisninger til de konkrete samfundssystemer videnskaben er udsprunget af,ligger der noget af et dedektivarbejde foran en, når man ønsker at føre de to ting sammen, hvis eneste fællesnævner er nogle årstal.

Vi har valgt at beskrive udviklingen af optimeringsmetoder kort og oversigtsmæssigt,således at hovedlinierne træder tydeligt frem,og søgt at finde frem til de problemer forskellige tiders matematikere har arbejdet med, og udfra dette kendskab at sammenknytte dem, med matematikkens funktioner i det givne samfund.

2.3 DEN HISTORISKE UNDERSØGELSE.

I den historiske undersøgelse har vi foretaget en periodisering efter Hans Wussing: Biographien bedeutender Mathematiker.(Wussing,1975)

1. Oltiden (frem til 4oo e.v.t.)
2. Middelalderen (4oo - 14oo)
3. Renæssancen (14oo - 16oo)
4. Den rationelle tidsalder (16oo - 17oo)
5. Det 19. århundredes matematik (18oo - 1917)
7. Efter 1917.Moderne optimeringsmetoder.

Hver periode er søgt behandlet efter følgende tre hovedemner:

A. Matematikkens placering i samfundet.
B. Hvilke optimeringsproblemer fandtes.
C. Hvilken matematik udvikledes.

2.3.1. Oltiden.

Matematikkens placering i samfundet.
Med opkomsten af organiserede samfund og dermed af klassesamfundene, opstod der muligheder for at skabe en merproduktion, således at der kunne frigøres arbejdskraft fra produktionen.Dette førte til dannelsen af en overklasse,som ejede, men ikke producerede.Denne overklasse fik hermed mulighed for en udvikling af videnskaberne.Matematikken startede som købmandsregning (aritmetik) og landmåling (geometri).

I Mesopotamien havde man allerede forståelse for kontrolproblemer:

> " As long as human culture has existed,control has always meant some kind of power over man's environment. Cuneiform fragments suggest that the control of irrigation systems in Mesopotamia was a well-developed art at least by the 2o th. century BC."(Britannica,s. 634).

De metoder der har været anvendt i Mesopotamien ,har givetvis ikke været, hvad vi vil betegne som matematiske.Der har snarere været tale om handlinger udfra en forståelse af problemerne,som er udsprunget af erfaringer.

De enevældigt styrede orientalske samfund,Mesopotamien,Ægypten,Kina,Indien,blev administreret af en overklasse.Denne overklasse bestod hovedsageligt af embedsmænd og præsteskabet, der ved hjælp af deres kendskab til astronomi,landmåling,årstidernes skiften osv.,styrede samfundet.

Embedsmændene ville vide hvordan de skulle udføre bestemte ting,ikke hvorfor, idet samfundet var bygget op omkring religionen, som gav svaret på det sidste spørgsmål.

I modsætning til dette havde købmændene i de græske by-og landsdelskulturer større udfoldelsesmuligheder:

"Den handlende havde aldrig tidligere været så uafhængig, men han var klar over, at denne uafhængighed var et resultat af en konstant og hård kamp. Orientens statiske livsanskuelse kunne aldrig blive hans. Han levede i en epoke, hvor der blev gjort geografiske opdagelser af et omfang som i det sekstende århundrede i Vesteuropa. Han anerkendte ingen absolut monark eller nogen guddomelig overhøjhed. Desuden havde han et vist mål af fritid takket været rigdom og slavearbejde. Han kunne filosofere om den verden han levede i. Mangelen på en fast forankret religion førte mange af indbyggerne i disse kystbyer ind i mysticisme, men samtidigt beforderes en udvikling i modsat retning henimod rationalisme og en videns. belig livsanskuelse. (Struik,1966,s. 45).

Videre skriver Struik:

"Den moderne matematik fødtes i denne atmosfære af ionisk rationalisme-den matematik,som ikke kun stillede det orientalske spørgsmål:hvordan? men også det moderne videnskabelige hvorfor?".

Den græske matematik var altså en metode til at forstå, ikke til at styre. Videre siger Struik:

"De tidligste græske studier af matematik havde det hovedsigte,at få bestemt menneskets plads i universet i overensstemmelse med et rationelt system. Matematikken tjente til at få skabt orden i kaos, til at ordne ideer i deres logiske sammenhæng og til at finde grundlæggende principper. Det var den mest rationelle af alle videnskaber." (Struik,1966,s.46).

Hvad angår de teknologiske fremskridt,bør fremhæves,at der i tidlig hellenistisk tid skabtes nyt og mere effektivt krigsmaskineri. Desuden var romernes vandledningsnet til deres storbyer et meget stort teknisk fremskridt.

Hvilke optimeringsproblemer i samfundet.

De orientalske samfund havde, som tidligere nævnt, brug for en planlægning og styring af deres vandingssystemer. Herudover havde man forskellige problemer med at finde tilnærmede volumener, som senere i den græske matematik blev formuleret til abstrakte optimeringsproblemer.

I Grækenland var problemerne af en lidt anden karakter, idet man her forsøgte, at formulere militære problemer som matematiske. For eksempel diskuterer grækeren Proklos (Geminus de Rhodes,1976,s.113,loo f.v.t.-loo e.v.t.) om militærtaktik hører med til matematikken. Han afviser dette, men viser som et eksempel på forbindelsen, at man kan bruge matematikken til at finde den bedste måde at opstille sin hær på. Hvis den opstilles i en cirkel ser den ikke ret stor ud-og kan derved narre fjenden! Ved angreb kan hæren så opstilles på linie, således at der kommer til at "fylde meget".

Hvilken matematik.

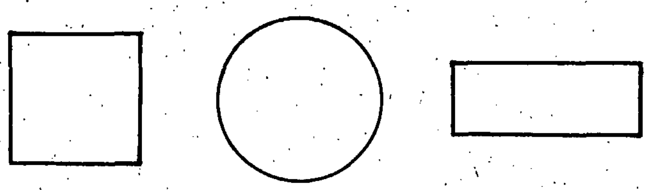
Det er først indenfor den græske matematik, at man kan tale om at optimeringsproblemer er formuleret;men her gælder det, som for meget af den græske matematik, at det ikke var anvendelsesaspektet, men forståelsen der var drivkraften.

Euklid(cs.35o-25o f.v.t.),Appollonius (ca. 26o-17o f.v.t.) og Zenodoros (ca. 2oo f.v.t. -1oo e.v.t.) beskæftigede sig med forskellige maksimums- og minimumsproblemer.Således skriver Struik om Euklids "Elementer":

> "Af særlig interesse er theoremet VI,27,som indeholder det først kendte maksimumsproblem med et bevis for, at kvadratet blandt alle rektangler med en given omkreds, har det største areal."(Struik,1966,s.61)

Apollonius beskæftigede sig i bog V om keglesnit,med at finde maksimum- og minimumslængder, der kan tegnes fra bestemte punkter til et keglesnit,uden dog at dette anvendes før af Kepler i middelalderen.

I samme linie som Euklid beskæftigede Zenodoros sig med forskellige isoperimetriske figurer(figurer med samme omkreds,se figur)



Figur:Isoperimetriske figurer.

og han beviste følgende theoremer:

1. Among n-side polygons of the same perimeter, the regular one has most area.

2. Among regular polygons og equal perimeter, the one having more sides has greates area.

3. The circle has greater area than a regular polygon of the same perimeter.

4. Of all solids with the same surface,the sphere has the greatest volume.

The subjekt of the theorems,which today we would describe as maxima and minima problems.was novel i Greek mathematics.(Kline,1972,s.126).

Sammenfattende kan man sige, at optimeringsmetoder var kendt i Antikken.Men de var for abstrakte og fjernei forhold til virkeligheden til at kunne anvendes til andet end teoretiske overvejelser.

2.3.2 Middelalderen.

I middelaldren sker en opløsning af det store romerske rige,og en decentralisering af magten på en lang række feudalherrer, hvis økonomi byggede på livegne bønder.Samtidig sker der en opblomstring af handlen i Vesteuropa i og omkring de store handelsbyer i Italien, Tyskland, Holland og England. Til effektivisering og udvikling af handelen udvikledes multiplikations-og divisionsalgoritmen, og man indførte dobbelt bogholderi.I forbindelse med de store katedralbyggerier er der en matematisk skole der beskæftiger sig med statik, og det bliver det nærmeste middelaldrens matematikere kommer på optimeringsmetoder og principper.

2.3.3. Renæssancen. (14oo-16oo).

Matematikkens placering i samfundet.

Renæssancen er en af de mest frugtbare perioder i Europas historie. Borgerskabet i byerne repræsenteret ved rige købmænd og andre handelsfolk overtog den ledende og styrende indflydelse fra adelen, af følgende årsager:

1)-man havde udviklet en meget bedre teknologi til søfarten: bedre ski e,bedre sejlbare veje (bl.a. kanaler).

2)-ved opdagelsen af Amerika blev Europa forsynet med store guld-og sølvmængder, der førte til en enorm inflation, hvorved adelen, som fortrinsvis levede af faste pengeafgifter fra fæstebønderne, led store tab (Høyrup,1973,s.62)

3)-bogtrykkerkunstens opfindelse i 145o har givetvis også haft en gunstig ind lydelse til fordel for borgerskabet.

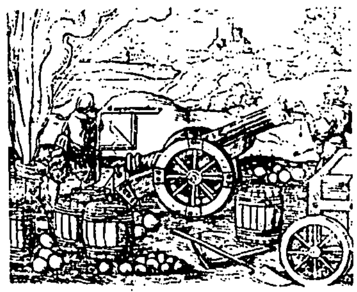
I Renæssancen ses for første gang, at matematikere proffessionaliseres. Dette sker ved at "markedet" (f.eks. købmænd) ansætter matematikere (regnemestre,målemestre ect.) til løsning af forskellige praktiske problemer ,indenfor regnekunst og navigation.

Også hærførere får pludselig brug for matematikere til beregning af krudtmængder og affyringsvinkler for kanoner.Dette sidste problem blev dog ikke løst, skønt flere forsøgte (Tartaglia,Galilei,m.fl.).

> "Es ist sehr unwahrscheinlich, dass die theoretischen Uberlegungen der Mathematiker irgend etwas änderten an den vielen Praxisregeln, Kannierweisheitet und Quasi-Theorien, mit denen der Artillerist die Elevation des Geschützrohres und die Quantität des Schiesspulvers für den Schuss auf das vorgeschriebene Ziel wählte." (Bos,1978,s.11).

Hvilke optimeringsproblemer i samfundet.

N. Tartaglia fandt (Wussing,1975,s 91) at den største skudlængde med en kanon opnås, når den blev affyret i en vinkel på 45^{o}:(se figur næste side).



Det var vigtigt at vide, hvor langt man skød, og hvordan man skød længst, fordi hvert skud var meget dyrt.

De lange sørejser over oceanerne skabte et behov for pålidelige navigationsmetodder og god korttegning. Derved blev jordkuglens geometri et helt centralt problem. (Vi vil vende tilbage til dette i næste periode med Bernoullis arbejder med geodæter, der var en matematisering af disse overvejelser fra Renæssancen). Dette arbejde førte til anvendelsen og udbygningen af astronomien. Tidligere var breddegradsbestemmelse almindelig kendt ud fra solhøjden, eller stjernernes højde, medens længdegradsbestemmelse først blev muligt ca. år 1600 ud fra Jupitermånernes bevægelser. J. Kepler studerede i denne forbindelse planeternes bevægelserr, og forsøgte at finde den største og mindste afstand en given planet havde fra solen. Kepler var også beskæftiget med at beregne det nøjagtige volumen af vinfade, idet han havde bemærket, at vinhandlernes metode til dette var meget upræcis. Kline skriver om dette (Kline, 1972, 347)

> " He was interested in the shape of casks for wine; in his Stereometria Doliorum (1615) he showed that, of all right parallel pipeds incribed in a sphere and having square bases, the cube is the largest. His method was to calculate the volumes for particular choices of dimensions. This in itself was not significant; but he noted that as the maximum volume was approached, the change in volume was approached, the change in volume for a fixed change in dimensions grew smaller and smaller.

Dette var første gang, at max. min. betragtninger for en funktion af een variabel forekommer.

Hvilken matematik.

Grundlaget for periodens matematik var den græske geometri. Tartaglia's og Galilei's forsøg på at løse bevægelsesproblemer kan dog betragtes som de første skridt mod differentialregning.

Keplers beregning af vinfades rumfang er en direkte forløber for infinitisemalregning, som dog blev formuleret præcist i den rationelle tidsperiode af Newton og Leibniz.

2.3.4 Den rationelle tidsalder.

Matematikkens placering i samfundet.

Med den voksende handel ændredes magtforholdene i Europa, således at borgerskabet i byerne øgede deres indflydelse og mange steder endda tog magten fra feudalherrerne..

Samtidig med borgerskabets fremmarch i byerne, med øget international handel til følge, blev den håndværksmæssige produktion nyorganiseret, for at kunne følge med efterspørgslen. Produktionsudvidelsen førte til en voldsom teknologisk vækst, og en voksende del af befolkningen konsamtidigt til at beherske den elementære matematik (aritmetikken), dvs. der skete en trivialisering af dele af matematikken, nemlig den simple aritmetik. (Høyrup, 1973, s. 73)

I denne optimistiske atmosfære havde videnskaben gode kår, og fysikken (mekanikken og astronomien) udvikledes stærkt af folk som Galilei og Kepler.

De grundlæggende matematiske ideer udvikledes nærmest eksplosivt, i løbet af få år omkring 1650, således grundlagdes både sansynlighedsregning og infinitisemalregning.

Det er et uafklaret spørgsmål, hvad denne videnskabelige eksplosion skyldtes; men man må nok sige, at den borgerlige optimisme med dens forkastelse af feudalsystemet, og den ortodokse kirke, simpelthen har dannet en helt ny type mennesker, der var præget af skepticisme overfor religiøse argumenter, og med tillid til egne evner. Det har selvfølgelig også haft betydning, at de enkelte stater, for første gang i historien, så en økonomisk interesse i at støtte forskningen. Således blev forskellige videnskabelige selskaber (f.eks. det engelske Royal Society) skabt i denne periode, og økonomisk understøtte.

Hvilke optimeringsproblemer.

Først og fremmest var fysikken inspireret af naturvidenskaberne, især fysikken. P. Fermat bidrog til udviklingen af begrebet optimering ved sin bog: "Metoder til bestemmelse af maxima og minima", (1638). Desuden formulerede Fermat et princip, som kunne anvendes i optikken. Fermats princip siger, at lysets vej fra et punkt til et andet er karakteriseret ved, at det vælger den vej som tager kortest tid. (Wussing, 1975, s. 159). Dette medførte, at man nu havde et princip, udfra hvilket man kunne fastlægge lysets bane ved at minimere en funktion.

Newton arbejdede i samme periode med at finde:

> "The shape that a surface of revolution moving at a constant velocity in the direction of its axis must have, if it is to offer the least resistance to the motion." (Kline, 1972, s. 573).

Af andre optimeringsproblmer i tiden kan nævnes brachistochronproblemet (se afsnit 3.2.6) og forskellige geodæsiproblemer. Disse sidste problemer har dog, trods deres navn, ikke været anvendelsesorienteret; men man kan måske sige, at der er kommet en vis inspiration fra navigation, hvor det selvfølgelig havde stor betydning at vælge en kort rute, f.eks. fra Europa til Amerika.

Hvilken matematik.

Den vigtigste nye landevinding indenfor optimeringsmatematik i det 17.-århundrede, var Newtons og Leibniz infinitisemalregning, som gjorde det muligt at samle de hidtil kendte optimeringsproblemer under en fælles teori. Infinitisemalregningens hovedide stammer ikke fra Newton og Leibniz, idet regning med uendeligt små størrelser er diskuteret af Leonardo da Vinci , Galilei, Kepler, og mest systematisk af Fermat. Når Newton og Leibniz ofte tildeles æren, skyldes det, at de har formuleret deres teorier præcist, og vist dens store anvendelsesmuligheder.

Principperne for infinitisemalregning blev også brugt til at løse variationsregningsproblemerne i slutningen af århundredet.

2.3.5 Afklaringstidsalderen. (1700 - 1800)

Matematikkens placering i samfundet.

I løbet af det 18. århundrede styrkedes borgerskabets magt, og med den industrielle revolution, specielt i England, flyttedes vægten fra handelskapitalisme til den såkaldte manufaktur, eller små virksomheders produktion.

I slutningen af århundredet kunne man endda spore en begyndende monopolisering. Under den "oplyste enevælde" fik netop matematik en stor betydning.

> "Det var en periode, hvor en række af de førende europæiske nationer blev styret af, hvad man så pænt kaldte de "oplyste despoter": Frederik den Store, Ludvig XV og Ludvig XVI. Den glorie, disse despoter smykkede sig med, fik en yderligere glans ved at de som regel var omgivet af lærde. Dette var ikke alene en slags intellektuelt snobberi, men også et udtryk for en vis forståelse for den betydning naturvidenskaben og matematikken havde for industrien og militæret. Man påstod f.eks., at den franske flådes overlegenhed beroede på, at man ved konstruktion af fregatter og linieskibe havde ladet sig lede af matematiske teorier."(Struik,1966,s,144)

Hvilke optimeringsproblemer.

Det var fortsat naturvidenskaberne, der var den dominerende drivkraft i optimeringsproblemerne, og nogle matematikere, som Euler og senere Gauss, mente, at alle naturlige fænomener opførte sig således, at de kunne beskrives ved at maximere eller minimere en eller anden funktion.

Specielt fysik havde stor indflydelse på optimeringsmatematikken, idet der netop i det 18.-århundrede blev diskuteret forskellige principper, som kunne bruges til at udlede fysiske resultater. Således formulerede Maupertuis i 1744 et enkelt generelt princip til at beskrive dynamiske systemer: Princippet om den mindste virkning.

Også Euler formulerede et lignende princip; men selvom begge principper var vage, og ikke særlig slagkraftige ,var de dog medvirkende til en forøget interesse i at løse optimeringsproblemer. Først med den præcise formulering af princippet om den mindste virkning af Lagrange, kan man sige, at det fysiske problem er oversat fuldstændigt til et matematisk.

Hvilken matematik.

Den mindste virknings princip hænger meget tæt sammen med variationsregningen, og grundlaget for variationsregningen skabtes derfor i denne periode. Således løste man både specielle (Brachistochronen, kædelinien) og generelle (det klassiske variationsregningsproblem 3.2.6, og variationsregning med bibetingelser), problemer, som blev formuleret ud fra fysiske principper.

Det generelle udtryk for den nødvendige betingelse for at løse det klassiske variationsregningsproblem m. og uden bibetingelser, blev formuleret af Euler og Lagrange,og er grundlaget for den moderne variationsregning. De omformulerede variationsregningsproblemerne til ordinære differentialligninger,dvs. til problemer der kunne formuleres i den ordinære differentialligningsteori.Det nye ved Lagranges formulering er, at den er rent analytisk og ikke som tidligere, en blanding mellem geometriske og analytiske metoder. Han skriver selv i indledningen af sin bog,"Mecanique analytiqe":

> "On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques."(Lagrange,1788,fra Struik, 1966,s.168).

Lagranges arbejde på at fremstille variationsregningen analytisk førte til, at der nu kunne formuleres en lang række nye spørgsmål indefor optimeringsteorien, nemlig

1. Eksistens af løsninger
2. Entydighed
3. Nødvendige betingelser
4. Tilstrækkelige betingelser
5. Afhængighed af nærhedsbegreb.

Lagranges arbejde skulle, netop på grund af dette, vise sig, at være meget frugtbart for den rene matematik i det 19. århundrede.

2.3.6 Det 19 århundredes matematik (frem til 1917)

I det 19. århundredes begyndelse var England førende i den industrielle udvikling, men dette førte ikke til en tilsvarende førerstilling indenfor videnskaberne.

Den videnskabelige udvikling var mere inspireret af de ideologiske strømninger på kontinentet. Specielt i Frankrig og Tyskland, hvor man markant havde brudt med feudalsystemet.

Med kontrarevolutionen i de førende europæiske stater opstod et nyt fænomen indenfor det videnskabelige samfund, idet først matematik og senere fysik delte sig op i to grene, ren og anvendt videnskab.

Det er et ubesvaret spørgsmål, hvad det var for drivkræfter, der gjorde, at tidens førende matematikere nærmest skyede praktiske problemer. Således måtte fysikere, og andre videnskabsfolk som anvendte matematik, selv udvikle deres metoder.

Vores bud på en forklarin af fænomenet er, at dels har den romantiske naturfilosofis påvirkning været stor, og dels-hvilket måske er mere væsentligt-har skuffelsen over knægtelsen af de borgerlige frihedsidealer gjort, at matematikere er flyttet fra den reale verden ind i teoretiske spidsfindigheder.

Hvilke optimeringsproblemer.

Det var stadig indenfor fysikken at hovedparten af optimeringsproblemerne opstod. Hamilton formulerede et generelt fysisk princip for mekaniske systemer, hvorfra man kunne udlede alle bevægelsesligninger. Dette princip kunne endda generaliseres til andre grene af fysikken, således at matematikken fik en lang række variationsregningsproblemer, som skulle løses.

I år 19oo formulerede D. Hilbert 23 problemer, som han mente, man burde løse i det 2o. århundrede, under mottoet:

> " Das ist das problem, suche die Lösung.Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus." (Hilbert,19oo,fra Alexandrov,1971,s.34)

Mindst 6 af disse 23 problemer indeholder optimeringsaspekter og i det sidste problem, eller område: "Videreføring af metoderne i variationsregningen", diskuteres bredt, hvilke områder af variationsregningen der ikke var tilfredsstillende løst.

Hvilken matematik.

Dels på grund af formuleringen af generelle fysiske ekstremalitetsprincipper, og dels på grund af de uafklarede spørgsmål fra Lagrange, havde variationsregningen en høj prioritet blandt det 19. århundredes matematikere.

Det var, som nævnt ovenfor, hovedsagligt internt videnskabelige problemer, der prægede matematikken. Dette slog også igennem hos de matematikere, der beskæftigede sig med variationsregningen.Det var de problemer, som Lagranges arbejde stillede (eksistens,entydighed,nødvendige og tilstrækkelige betingelser og nærhedsbegreber), som man bearbejdede, og i vid udstrækning fik løst.

2.3.7. Efter 1917. Moderne optimeringsmetoder.

I dette århundrede har den teknologiske udvikling været nærmest eksplosiv, og det gælder ikke alene kvantitativt, men også kvalitativt. Med udviklingen indenfor elektronikken er det blevet muligt at styre og effektivisere forskellige dele af produktionen.

Matematikken har fuldstændigt frigjort sig fra den nære tilknytning til fysikken og astronomien, og er indgået i flere og flere sammenhænge.

Som vi omtaler i afsnit 2.3.4 formuleredes indenfor en ganske kort tidsperiode omkring 165o-uvist af hvilken grund-en række af matematikkens fundamentale problemer.På samme måde udviklede matematikken sig både kvalitativt og kvantitativt i løbet af den korte årrække fra 194o -5o, og fik også her en enorm betydning for den videre samfundsudvikling. Således bliver optimering på denne tid, til en bærende del af såvel ingeniørvidenskab som samfundsvidenskab (økonomi,produktion evt.).

Det er ikke klart hvad det er for drivkræfter, der gør, at matematik og i særdeleshed optimering, får denne centrale placering.

Det har selvfølgelig haft stor betydning at den teknologiske udvikling, dels har muliggjort de store beregninger (datamaskiner), der er nødvendige for optimering, og dels har øget antallet af styreparametre enormt; men vi er også af den opfattelse, at udviklingen må ses i lyset af konkurrencen, ikke kun firmaer imellem, men også mellem de kapitalistiske lande på den ene side, og de socialistiske lande på den anden.

Hvilke optimeringsproblemer.

I denne periode har der været et utal af problemer, som har givet anledning til udvikling af nye optimeringsteknikker.

I 2o'erne og 3o'ernes Sovjet førte ønsket om en rationel planlægning frem til formuleringen af det lineære programmeringsproblem. I praksis var det dog ikke muligt at anvende resultaterne, da man på daværende tidspunkt manglede tilstrækkeligt effektive regnemaskiner.

Med krigen opstod en række problemer, som blev omformuleret til optimeringsproblemer. For eksempel kan nævnes følgende (McCloskey,1956)

- -bedste placering af radaranlæg
- -udlægning af miner
- -konvojstørrelser
- -navigation ved kamikaze-angreb
- -bombning af U-både med dybvandsbomber fra fly
- -bombeformationer
- -forskellige strategier for bombeangreb
- -rationel patruljeflyvning
- -dimensionering af bombeangreb

Disse problemer blev dog ikke løst ved matematiske argumenter, men snarere ud fra sunsfornuftige argumenter. De kan do alligevel siges at være begyndelses til efterkrigstidens store forskningsområde, operationsanalysen.

I perioden efter krigen har matematisk optimering fået stigende betydning. Dels har man udviklet systemer til styring af raketter (både med militære og videnskabelige formål), og dels har optimeringsmetoderne været en af forudsætningerne for automationen i dele af industrien. I dag løser man ved hjælp af optimeringsproblemer indenfor så forskellige områder som industri, landbrug, transport, fysik, biologi og kemi.

Hvilken matematik.

Hilberts formulering af hvad han mente ville være det 2o. århundredes 23 største matematiske problemer, har vist sig i stor udstrækning at holde stik. Dette kan selvfølgelig skyldes, at Hilberts autoritet har gjort, at en masse matematikere har kastet sig over de problemer, han har vurderet som de vigtigste; under alle omstændigheder har det dog vist sig, at variationsregningen, ligesom alle andre optimeringsmetoder, har fået stor betydning.

I 1939 formulerede og løste Kantorovich det lineære programmeringsproblem, dog på en sådan måde, at det ikke fik praktisk betydning. Samtidig fik man klarhed indenfor variationsregningen, idet McShane angav et bevis for de nødvendige betingelser for at løse det klassiske variationsregningsproblem med og uden bibetingelser (Clarke,1978,s. 49).

Det første førte til udviklingen af Simplex-modellen indenfor lineær programmering og videre til ikke-lineær programmering. Afklaringen indenfor variationsregningen førte til udviklingen af optimal control, og det nært beslægtede dynamisk programmering, i 5o'erne og frem til i dag.

2.4 UDVIKLINGEN I BEGREBET OPTIMERING.

Optimering som centralt begreb i vores hverdag er af forholdsvis ny dato, men som vi har set, har man i forskellige haft andre fordele af det vi i da sammenfatter under betegnelsen optimering.

I den orientalske oldtide havde man problemer, som i dag ville høre under optimal control, men som man dengang ikke erkendte var optimeringsopgaver. Man valgte ikke mellemen række muligheder, for at tage den bedste, derimod byggede man på århundredes erfaringer, når man igangsatte projekter.

Man kan med Struiks ord sige, at de var interesseret i hvordan de skulle gøre,for at noget virkede, men ikke om det var den bedste måde at gøre det på.

I modsætning til dette sker der i antikkens Grækenland et kvalitativt spring i udviklingen. For første gang stiller man spørgsmål om maksimale of minimale afstande, arealer og rumfang. Det gælder, at disse spørgsmål udelukkende er af teoretisk interesse. Det at finde maximum og minimum er ikke et spørgsmål om at finde en, i en eller anden forstand, bedste længde, men et problem af samme karakter som vinklens tredeling.

i middelalderen var forholdet det samme; man udviklede godt nok bedre regnekundskaber, men der blev ikke formuleret problemer, hvor man skulle finde den bedste løsning.

I Renæssancen sker der igen en udvikling, idet vi her for første gang støder på praktiske spørgsmål: " hvordan skyder man længst med en kanon", og"hvordan tilnærmer man bedst den kendte rumfangsberegning af parallelepipeder til vinfade. Sådanne problemer søger man at oversætte til matematiske maximumsproblemer.

De problemer man løste, havde i deres praktiske formulering karakter af at være maximumsproblemer. Der er derfor ikke tale om en egentlig generalisation af nogle maximumsproblemer; men snarere en løsning af problemer, på lige fod med andre praktiske og matematiske problemer.

Renæssancen førte til en fortrolighed med begreber som maximum og minimum, og dette udnyttedes i de følgende perioder til at omformulere praktiske problemer (fra fysikken), som ikke umiddelbart var ekstremumsproblemer, til at være det. Dette førte til, at man begyndte at formulere naturlove som værende ekstremalitetsprincipper, og herved får optimering et helt nyt aspekt, idet det pludselig er en metode til at forstå og beskrive forskellige systemer.

Denne udvikling fortsættes i det 19. århundrede, men nu med det tilsnit, at beskrivelsen af naturen ved hjælp af ekstremalitetsprincipper får en religiøs og en filosofisk betydning, mere end en egentlig praktisk.

Først i vores århundrede, med dets intensive udnyttelse af ressourcer og store beregningsmuligheder,(datamaskiner), er optimering blevet et begreb, der indebærer en aktiv handling. Optimering er blevet metoder til at finde de bedste løsninger på praktiske problemer.

3. STRUKTURERING AF UDVALGTE OPTIMERINGSMETODER.

I dette afsnit vil vi, efter i afsnit 3.1. at have diskuteret formålet med aksiomatisereing af matematiske metoder, i afsnit 3.2. gennemgå en liste af udvalgte optimeringsmetoder, samt vise eksempler på disse problemer. I afsnit 3.3. vil vi behandle den generelle løsning af de af de i 3.2. nævnte problemer, samt konkret løse nogle af de viste eksempler. Afsnit 3.4. handler om numerisk løsning af nogle typer optimeringsproblemer, mens afsnit 3.5. er en mere nøjagtig gennemgang af en metode til numerisk løsning af det lineære programmeringsproblem, nemlig SIMPLEX-algoritmen.

For at gøre teksten mere tilgængelig har vi udviklet et program til at lave illustrationer til afsnit 3.2. og 3.3.

3.1. FORMÅL MED AKSIOMATISERING OG STRUKTURERING AF MATEMATIK.

Det er vores grundlæggende opfattelse, at matematikken har sit udspring i virkelige problemer fra samfund og produktion, og at de matematiske metoder og teorier, der er taget i anvendelse til løsning af problemerne, senere er blevet indpasset i en aksiomatisk-deduktiv ramme. Aksiomatisering og strukturering er derfor en opsamlingsfase, som ikke har meget at gøre med praktiske problemer.
Om dette siger R.A.Fisher:

> "Den aksiomatiske matematiske teori er ikke blevet - og bør heller ikke blive - taget særligt alvorligt indenfor de områder af matematikken, hvor man har anvendelser i virkelige situationer for øje. I anvendt matematik kan man nemlig ikke komme uden om, fra tid til anden, at indføre nye begreber, efterhånden som anvendelsesvidenskaben udvikles, og enhver ny definition med aksiomatiske implikationer er uungåeligt en trussel mod den indre konsistens i hele det system af aksiomet, hvori den skal indlemmes. Vi har set, at indførelsen af begrebet sandsynlighed har afstedkommet netop en sådan aksiomatisk forstyrrelse, som kun kan afhjælpes gennem en grundig analyse af dens betydning. I sine anvendelser kan matematikken derfor ikke uden videre reduceres til et afsluttet og statisk system, men må udvikle sig som et led i den menneskelige tænknings udvikling, hvor den spiller en vigtig befordrende rolle." (R.A.Fisher:De logiske følger af uvished, oversat af Jørgen Larsen, jan.1978).

Når vi taler om aksiomatisering, er det også vigtigt at skelne mellem aksiomatisering af enkeltdicipliner og af matematikken som helhed. Man kan populært sig, at aksiomatisering fører til en bedre strukturering og omvendt at har man struktureret har man mulighed for en bedre aksiomatisering. Selvom man ikke aksiomatiserer for at løse praktiske problemer, kan aksiomatiseringen, såvel som struktureringen, godt føre til opdagelsen af nye problemer af essentiel betydning for matematikken. Aksiomatiseringen kan også betyde at tidligere seperate problemer nu kan løses samtidigt i en generaliseret teori.

Som et eksempel kan nævnes Kolmogorovs anvendelse af mål- og integralteori, som medførte at et problem nu kunne løses samtidigt for diskrete og kontinuerte sandsynlighedsfordelinger, idet Kolmogorovs teori var en generalisering og aksiomatisering af disse teorier.

Man kunne sluttelig spørge, om strukturering, systematisering og aksiomatisering fører til en indsnævring i matematikkens bevægelsesfrihed, så man ikke kan se nye strukturer, på nye problemer. Til dette vil vi svare med et citat:

> "Frihed består ikke i en drøm om uafhængighed fra naturlovene, men i en viden om disse love, og den mulighed dette giver for systematisk at lade dem arbejde mod definerede mål." (F.Engels fra SELSAM,1974,s.391)

3.2. OPTIMERINGSPROBLEMER.

Dette afsnit indeholder en gennemgang af nogle udvalgte typer af optimeringsproblemer. Gennemgangen af de enkelte problemer består af en matematisk formulering af problemets objektfunktion (målfunktion), samt eventuelle restriktioner, og en mere intuitiv fortolkning af hvilken type problemer, der falder ind under det behandlede optimeringsproblem. Endvidere er der til ethvert problem givet et eksempel, der er tilpasset den matematiske formulering. I de matematiske formuleringer er de indgående funktioner defineret på R (R^n), selv om det i mange tilfælde er tilstrækkeligt, at de er defineret på åbne delmængder af R (R^n). Denne forenkling er foretaget for ikke at gøre fremstillingen for uklar ved indførelse af en unødigt detailleret notation.

Den væsentlige inspirationskilde til dette afsnit, er hentet hos (Girsanov, 1972), men for at opnå ensartethed for alle problemer, er der også hentet ideer fra andre.

3.2.1. Funktioner af en reel variabel.

Givet : en funktion
$F_o: R \to R$

Problem : find et $x_o \in R$, således at F_o har lokalt ekstremum i x_o

Eksempel : En kanons skudvidde, $F(x)$, kan opfattes som en funktion af elevationen, x. Find den elevation, x_o, for hvilken kanonen skyder længst.
Altså, find $x_o \in R$, således at

$$F_o(x_o) = \frac{2 \cdot v_o^2}{g} \sin(x_o) \cos(x_o)$$

har maksimum, idet v_o er kuglens **starthastighed**, og g er tyngdeaccelerationen.

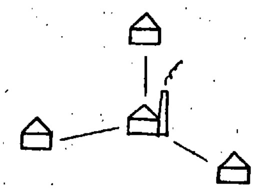
3.2.2. Ekstrema for funktioner af flere reelle variable.

Givet : en funktion
$F_o: R^m \to R$

Problem : find et $x_o \in R^m$, således at F_o har lokalt ekstremum i x_o

Kommentar : er m = 1 svarer til problemet ovenfor.

Eksempel :



Tre byer skal forsynes med el-kraft fra et kraftværk. Hvor skal kraftværket placeres, således at der skal benyttes mindst muligt kabel for at forsyne de tre byer.

Det kan nævnes, at man også har problemer af denne type indenfor statistik (regression) og indenfor termodynamikken.

3.2.3. Ekstrema for funktioner af flere variable med bibetingelser.

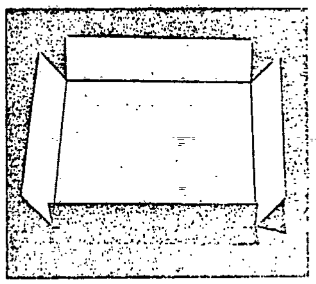
Givet : 1. n+1 differentiable funktioner
$F_i: R^m \to R$, (i = 0,1,2,.....,n)

: 2. en mængde $Q \subset R^m$,
$Q = \{ x \in R^m \mid F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0 \}$

Problem : find et $x_o \in Q$, således at $F_o|_Q$ har et ekstremum i x_o

Kommentar : Det ses at hvis $Q = R^m$, altså hvis der ikke er nogen bibetingelser, svarer problemet til problem 3.2.2.

Eksempel :



: En kasse skal fremstilles af et stykke kvadratisk pap med side a. Kassen skal være uden låg, og vi ønsker den fremstillet således at den får maksimalt volumen.

$$\text{Volumen} = F_0(x) = x_1 x_2 x_3$$

og

$$F_1(x) = 2x_1 + x_2 - a = 0$$

$$F_2(x) = 2x_1 + x_3 - a = 0$$

Vi skal nu finde $x_0 \in R^3$ således, at F_0 bliver maksimal, og x_0 opfylder bibetingelserne, idet $x = (x_1, x_2, x_3)$ er længderne af kassens sider.

3.2.4. LINEÆR PROGRAMMERING.

Givet: 1) n+1 lineære funktioner

$$F_i : R_+^m \sim R \quad , (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

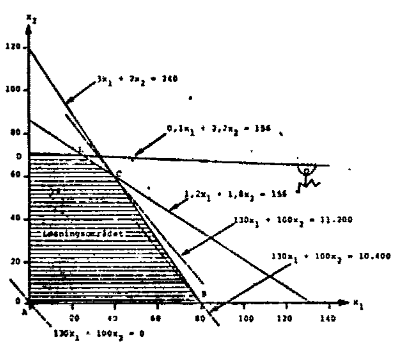
2) en mængde $Q \subset R^m$, (og $0 \leq k \leq n$) hvor

$$Q = \{x \in R_+^m \mid F_i(x)=0 \text{ for } i=1,..,k \text{ og } F_j(x) \leq 0 \text{ for } j=k+1,..,n\}$$

Problem: find et $x_0 \in Q$, således at $F_0|_Q$ har et ekstremum i x_0

Kommentar: Hvis k=n kan problemet løses som problem 3.2.3.

Eksempel 1.



Et firma sælger to varetyper, der produceres på tre forskellige maskiner. Vi ønsker at finde, hvormange enheder, x_1, af varetype 1, og hvormange enheder, x_2, af varetype 2, der skal produceres pr. uge, for at maksimere indtjeningen, F_o. F_o er givet ved:

$$F_o(x_1,x_2) = 130x_1 + 100x_2 ,$$

da varetype 1 giver en fortjeneste på 130 kr. pr. enhed, og varetype 2 giver en fortjeneste på 100 kr. pr. enhed.

Produktionen er begrænset af, at varetype 1 kræver 3 timer ved første maskine, 0.1 time ved anden og 1.3 timer ved tredie maskine, mens varetype 2 kræver henholdsvis 2, 2.2 og 1.8 timer på hver maskine. Maskintiden er begrænset af, at maskine 1, 2 og 3 er til rådighed i henholdsvis 240, 156 og 156 timer pr. uge. Disse begrænsninger kan formuleres som bibetingelserne:

$$F_1(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 - 240 \leq 0$$

$$F_2(x_1,x_2) = 0.1x_1 + 2.2x_2 - 156 \leq 0$$

$$F_3(x_1,x_2) = 1.2x_1 + 1.8x_2 - 156 \leq 0$$

Problemet er nu at finde den produktionsplan, (x_1,x_2), der opfylder bibetingelserne F_1, F_2 og F_3 og gør objektfunktionen, F_o, størst mulig.

Et andet eksempel: En købmand fremstiller to nøddeblandinger, selskabsblanding og alm. blanding, der blandes af 4 slags nødder: paranødder, jordnødder, hasselnødder og valnødder. Han ønsker at vide, hvormange pund selskabsblanding, x_1, til en fortjeneste på 100 cent/pund, og hvormange pund alm. blanding, x_2, til en fortjeneste på 32 cent/pund, han skal blande af en given mængde nødder for at maksimere fortjenesten, F_o, der altså er givet ved:

$$F_o(x_1,x_2) = 100x_1 + 32x_2$$

Da der til 1 pund selskabsblanding bruges 6 oz paranødder, mens der ikke bruges paranødder i alm. blanding, og da købmanden i alt har 1200 oz paranødder, kan begrænsningen mht. paranødder udtrykkes således:

$$F_1(x_1,x_2) = 6x_1 - 1200 \leq 0$$

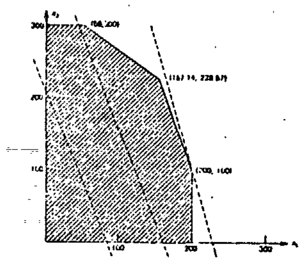
Tilsvarende begrænsninger mht. de andre nøddesorter giver følgende uligheder:

$$F_2(x_1,x_2) = 8x_2 - 2400 \leq 0$$

$$F_3(x_1,x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2000 \leq 0$$

$$F_4(x_1,x_2) = 6x_1 + 2x_2 - 1400 \leq 0$$

Problemet er nu at finde en blandingsplan, (x_1,x_2), der tilfredsstiller ulighederne F_1,F_2,F_3 og F_4, og som gør $F_o(x_1,x_2)$ størst mulig.



3.2.5. IKKE-LINEÆR PROGRAMMERING.

Givet: 1) n+1 differentiable funktioner

$F_i : R^m \to R$, $(i=0,1,2,\ldots,n)$

2) en mængde $Q \subset R^m$, (og $0 \leq k \leq n$) hvor

$Q = \{x \in R^m \mid F_i(x)=0 \text{ for } i=1,..,k \text{ og } F_j(x)\leq 0 \text{ for } j=k+1,..,n\}$

Problem: find $x_o \in Q$ således at $F_o|_Q$ har ekstremum i x_o.

Kommentar: a. er k=n er problemet det samme som i 3.2.3.

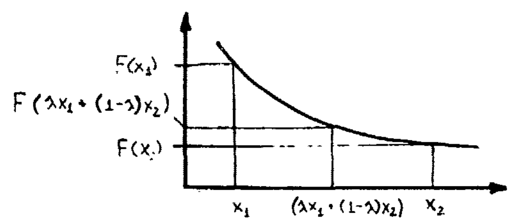
b. er $F_i(x)$ lineære for i=0,1,..,n, er problemet det samme som i 3.2.4.

c. hvis $F_o(x)=c_ox + x^TCx$, hvor $c_o \in R^m$ og C er en (m x m) - matrix, samt $F_i(x)$ er lineære for i=1,2,..n, kaldes problemet et kvadratisk programmeringsproblem.

d. hvis $F_i(x)$, (i=0,1,..,n) er konvekse funktioner, dvs. :

$\forall x_1,x_2 \in R^m \; \forall\lambda \in [0,1] : F_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F_i(x_1)+(1-\lambda)F_i(x_2)$

er problemet et konvekst programmeringsproblem.



Eksempel: Der skal bygges en flyveplads, hvorfra der dagligt skal flyves til de seks flyvepladser A-F. Vi ønsker at placere flyvepladsen således, at det dagligt tilbagelagte antal flyvekilometer minimeres. De seks flyvepladsers placering er angivet i nedenstående tabel, der også angiver det daglige antal fly til pladsen.

flyveplads i	x_i (km)	y_i (km)	antal fly, z_i
A	40	200	40
B	160	210	10
C	250	160	20
D	220	80	30
E	100	40	20
F	30	100	10

Objektfunktionen, F_o, ses at blive:

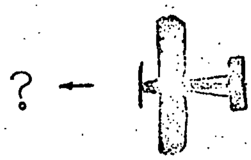
$$F_o(x,y) = \sum_1^6 z_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

Et sumpområde, der kan defineres ved uligheden $x + y \geq 250$, er uegnet til flyvepladsen, lige som en sø, der kan defineres ved uligheden $(x-100)^2 + (y-100)^2 < 400$. Dette giver følgende betingelser for løsningen:

$$F_1(x,y) = x + y - 250 \leq 0$$

$$F_2(x,y) = -((x-100)^2 + (y-100)^2) + 400 \leq 0$$

Det er tilstrækkeligt at bestemme flyvepladsens placering indenfor 10 km.



3.2.6. KLASSISK VARIATIONSREGNING.

Givet: 1) en funktional

$F_o : X \to R$,

$$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), \frac{dx}{dt}(t), t)\, dt ,$$

hvor $x \in X$,

$X = \{x \mid x : [t_o, t_1] \to R$ og x er differentiabel $\}$

og

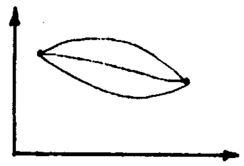
$\Phi : R^3 \to R$ er differentiabel og $t_o, t_1 \in R$ og $t_o < t_1$

2) en mængde $Q \subset X$ hvor

$Q = \{x \in X \mid x(t_o) = c$ og $x(t_1) = d\}$, $(c,d) \in R^2$

Problem: find $x_o \in Q$ så $F_o|_Q$ har et lokalt ekstremum i x_o

Eksempel: En partikel med massen m skal under påvirkning af tyngdekraften bevæges fra punktet A til punktet B. Idet punkterne A og B gives koordinaterne (0,0) og (b_1,b_2) i et koordinatsystem i det lodrette plan gennem A og B, skal man bestemme den kurve, y(x), som partiklen skal følge for at komme hurtigst fra A til B.



Partiklen bevæger sig stykket ds på kurven y(x), når den bevæger sig stykket dx i x-aksens retning.

$$ds = dx\ \sqrt{1 + y'^2(x)}$$

Den hertil anvendte tid, $dt = \frac{ds}{v}$, kan, idet den øjeblikkelige hastighed $v = \sqrt{2gy}$, skrives som:

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$, hvoraf fås den samlede tid

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Problemet er nu at finde $y_o \in Q$,

$Q = \{y(x) \in Y \mid y(0) = 0 \text{ og } y(b_1) = b_2\}$, hvor

$Y = \{y \mid y : [0,b_1] \to R \text{ og } y \text{ er differentiabel}\}$, således at

$T|_Q(y_o)$ er et ekstremum, idet

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \Phi(y(x),\tfrac{dy}{dx}(x),x)\,dx$$, hvor

$$\Phi(y(x),\tfrac{dy}{dx}(x),x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

3.2.7. LAGRANGE-PROBLEM.

Givet: 1) en funktional

$F_o : X \to R$

$$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x_1(t),x_2(t),\tfrac{dx_1}{dt}(t),\tfrac{dx_2}{dt}(t),t)\,dt ,$$

hvor $x = (x_1,x_2) \in X$,

$X = \{x \mid x : [t_o,t_1] \to R^2 \text{ og } x \text{ er differentiabel.}\}$

og $\Phi : R^5 \to R$ er differentiabel.

2) en mængde $Q \subset X$,

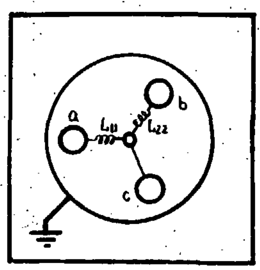
$Q = \{x \in X \mid G(x_1, x_2, t) = 0\}$.

hvor $G : R^3 \to R$ er differentiabel.

Problem: find $x_o \in Q$ således at $F_{o\,Q}$ har et ekstremum i x_o

Kommentar: Idet $(x_1(t), x_2(t))$ beskriver et systems tilstand til tiden t, og F_o er en funktion af tilstandens forløb gennem et tidsinterval, (f.eks. en energifunktion), ønsker vi altså at finde den funktion, systemets tilstand skal følge, for at minimere F_o, idet systemets bevægelsesfrihed er begrænset af $G(x_1, x_2, t) = 0$.

Eksempel: Lad os betragte et elektromagnetisk system (se fig.) bestående af tre ledere, a, b og c. De er alle forbundet til en generator V(t), a og b gennem spoler med selvinduktionskoefficienter henholdsvis, L_{11} og L_{22} og indbyrdes induktionskoefficient, L_{12}. Kapaciteten mellem a, b og c og den ledende væg (som er forbundet til jord) er C.



Før vi sætter generatoren igang er ladningen på de tre ledere 0, og da systemet er isoleret, vil det til enhver tid gælde, at den totale ladning i systemet er 0. Vi har altså følgende bibetingelse:

$q_a + q_b + q_c = 0$, hvor q'erne er ladningen på a, b og c.

For at se hvordan systemet vil opføre sig, når generatoren, V(t), giver en impuls, ser vi på Lagrangefunktionen, L. (L = T - V, hvor T er den magnetiske energi og V den potentielle elektriske energi.)

$$L = \tfrac{1}{2}L_{11}q_a'^2 + \tfrac{1}{2}L_{22}q_b'^2 - L_{12}q_a'q_b' - \frac{1}{2C}(q_a^2+q_b^2+q_c^2)+\lambda(q_a+q_b+q_c)$$

Systemet vil opføre sig således at

$$\int_0^{t_1} L(q_a, q_b, q_c, q_a', q_b', q_c', t)\, dt$$

bliver minimalt.

Vi vil ikke løse dette problem, da det er temmelig pladskrævende, og vi har kun medtaget problemet her for, at vise hvilke typer problemer Lagrangeproblemer er.

3.2.8. LAGRANGE-PROBLEM MED NON-HOLONOME BIBETINGELSER.

Givet: 1) en funktional

$F_o : X \times U \to R$,

$$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),u(t),t)\ dt$$

hvor $x = (x_1,x_2,\ldots x_n) \in X$,

$X = \{x \mid x : [t_o,t_1] \to R^n$ og x er differentiabel.$\}$

og $u = (u_1,u_2,\ldots u_r) \in U$,

$U = \{u \mid u : [t_o,t_1] \to R^r$ og u er differentiabel.$\}$

samt

$\Phi : R^{n+r+1} \to R$ er differentiabel.

2) en mængde $Q \subset X \times U$

$Q = \{x \in X \mid \frac{dx}{dt} = \varphi(x(t),u(t),t)$ og $x(t_o)=c,\ x(t_1)=d\}$

hvor $c,d \in R^n$ og $u \subset U$, samt

$\varphi : R^{n+r+1} \to R^n$

Problem: find x_o og u_o således at $F_o|_Q$ er minimal i (x_o,u_o)

Kommentar: Lad x(t) betegne systemets tilstand til tiden t, og u(t) betegne den styring, hvormed vi til tiden t ønsker at påvirke systemets tilstand. Tilstandens afhængighed af styringen er angivet ved differentialligningssystemet, der bestemmer Q.

Eksempel: Hvis vi i eksemplet fra 3.1.7. fjerner de to ledende legemer øverst (se figur) og forbinder spolerne direkte til den ledende væg, vil vi opnå en situation med non-holonome bibetingelser. Der er nu kun et ladet system q_c. Ifølge Kirchoffs lov for summation af strømme er strømstyrkerne forbundet gennem følgende non-holonome bibetingelse: $q_a' - q_b' - q_c' = 0$, hvor q' erne er strømstyrkerne i lederne a, b og c.

Systemet er oprindeligt i hvile med $q_c = 0$. Det sættes i bevægelse via en generator, V(t). Defineres Lagrange-funktionen som i 3.2.7. fås:

$$L = \tfrac{1}{2}L_{11}q_a'^2 + \tfrac{1}{2}L_{22}q_b'^2 - L_{12}q_a'q_b' - \frac{1}{2C}q_c + \lambda(q_a' - q_b' - q_c')$$

og igen har vi, at systemet vil opføre sig således, at

$\int_{t_0}^{t_1} L(q_a,q_b,q_c,q_a',q_b',q_c',t)\,dt$ er minimalt.

3.2.9. OPTIMAL CONTROL-PROBLEMET.

Givet: 1) en funktional

$F_o: X \times U \rightarrow R$

$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),u(t),t)\,dt$

hvor $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in X$,

$X = \{x \mid x : [t_o,t_1] \rightarrow R^n$ og x er differentiabel.$\}$

og $u = (u_1,u_2,\dots,u_r) \in M \subset U$,

$U = \{u \mid u : [t_o,t_1] \rightarrow R^r$ og u er stykvis kontinuert.$\}$

samt

$\Phi : R^{n+r+1} \rightarrow R$ er differentiabel.

2) en mængde $Q \subset X \times M$,

$Q = \{x \in X \mid \frac{dx}{dt} = \varphi(x(t),u(t),t)$ og $x(t_o)=c,\ x(t_1)=d\ .\}$

hvor $c,d \in R^n$ og

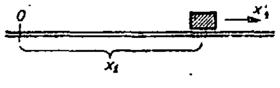
$\varphi : R^{n+r+1} \rightarrow R^n$

Problem: find x_o og u_o således at $F_o|_Q$ er minimal i (x_o,u_o) ,

Kommentar: problem 3.2.8. er indeholdt i dette for M = U. Problemet adskiller sig fra 3.2.8. ved, at der kan lægges begrænsninger på styrefunktionen u, samt at u ikke kræves differentiabel.

Eksempel: Et legeme med den konstante masse m, i det følgende betragtet som et massepunkt, udfører en vandret, retliniet bevægelse. Idet vi betegner legemets afstand fra et fast punkt O med x_1, vil x_1 ændres som funktion af tiden, når legemet bevæges, og x_1' vil beskrive legemets hastighed. Vi vil antage, at der på legemet virker to ydre kræfter, nemlig en gnidning $-bx_1'$ og en elastisk kraft $-kx_1$, samt at legemet er udstyret med en motor. Motoren udvikler en kraft, u, der virker på legemet, og kan styres som funktion af tiden. Ifølge Newtons 2. lov kan legemets bevægelse beskrives ved differentialligningen:

$$mx_1'' = -bx_1' - kx_1 + u \Leftrightarrow$$



$$x_1'' = -\frac{b}{m}x_1' - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$$

Idet vi indfører en ny tilstandsvariabel, x_2, for hastigheden, x_1', kan differentialligningen omskrives til systemet:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

Legemets tilstand x er nu beskrevet ved tilstandsvariablene (sted,hastighed) = (x_1,x_2), mens u betegner styringen af legemet.

Inden vi går videre i eksemplet, vil vi, for at lette regningerne, antage, at gnidningen og den elastiske kraft er 0, samt massen $m = 1$. Styreparametren u er endvidere underkastet begrænsningen $|u| \leq 1$.

Legemets bevægelse kan altså nu beskrives ved:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = u \qquad , \quad -1 \leq u \leq 1.$$

Vi ønsker nu at bestemme, hvilken styring, $u(t)$, der skal anvendes for hurtigst muligt at bringe legemet fra tilstanden x_o , $x_o = (x_{1_0},x_{2_0})$ til tilstanden $x_1 = (0,0)$. Altså fra stedet x_1 med hastigheden x_2 til stedet 0 med hastigheden 0.

For at løse problemet under den generelle problemformulering, indfører vi det lidt søgte integral:

$$T = \int_0^{t_1} \Phi(x(t),u(t),t)\,dt = \int_0^{t_1} 1\,dt$$

idet sluttidspunktet t_1 er variabelt.

$$u(t) \in U = \{u \mid u : [0,t_1] \rightarrow [-1,1] \text{ og u er stykvis kontinuert.}\}$$

Tilstandsfunktionens afhængighed af styrefunktionen u(t) er beskrevet ved betingelsen:

$$x(t) \in Q = \{x \in X \mid \frac{dx}{dt} = (x(t),u(t),t), x(0) = (x_{1_0},x_{2_0}), x(t_1) = (0,0)\}$$

idet $X = \{x \mid x : [0,t_1] \rightarrow R^2$ og $\dot{x}$ er differentiabel.$\}$ og

$$\varphi(x(t),u(t),t) = (x_2(t),u(t)).$$

Problemet er nu at finde en optimal styring $u_*(t)$, således at den tilhørende bane $x_*(t) \in Q$ gør tiden T minimal.

3.3. LØSNING AF OPTIMERINGSPROBLEMER.

Dette afsnit indeholder de matematiske løsninger på de problemer, som vi har gennemgået i 3.2.

Med en løsning mener vi følgende: Vi definerer først, hvad optimum er, for efter en kort kommentar at angive en nødvendig betingelse for optimum, og i nogle tilfælde tillige en tilstrækkelig. Derefter vil vi for at vise gangen i anvendelsen af metoderne gennemregne et af de eksempler, som er nævnt i afsnit 3.2.

Til dette afsnit har vi hovedsageligt brugt følgende referencer: (Tolle, 1975), (Müller-Merbach, 1971), (Kruse Jacobsen, 1976), (Krarup, 1974), (Girsanov, 1972), (Eriksson, 1968), (Collatz, 1975), (Bronstein, 1971), (Boltjanski, 1972), (Berkovitz, 1974).

3.3.1. Ekstrema for funktioner af en reel variabel.

Definition af optimum.

Lad $F_o : R \to R$ være defineret i et interval I og lad x_o være et indre punkt i I. F_o siges at have lokalt maksimum (minimum) i x_o, dersom der findes en omegn U om x_o så:

$$\forall x \in U : F_o(x) \leq F_o(x_o) \qquad (\forall x \in U : F_o(x) \geq F_o(x_o) \;)$$

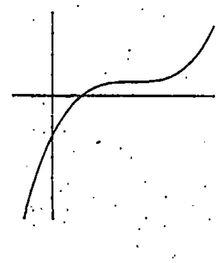
Har F_o enten maksimum eller minimum i x_o, siges x_o at være et ekstremumspunkt og $F_o(x_o)$ at være ekstremum.

Det vil sige, vi har altså et optimum, når alle punkter i nærheden har mindre henholdsvis større funktionsværdier end optimumspunktet. Vi vil ikke løse dette problem generelt, skønt det ikke er vanskeligt, men derimod indskrænke os til at finde optimum for "pæne" funktioner, det vil sige, F_o skal være differentiabel.

Nødvendig betingelse.

Er $F_o : R \to R$ en differentiabel funktion, og er x_o et ekstremumspunkt for F_o, gælder $F_o'(x_o) = 0$.

Den nødvendige betingelse siger, at i et punkt, hvor der er optimum, vil funktionens tangents hældning være 0. (se figur). Vi kan desværre ikke være sikre på, at alle punkter, der opfylder, at funktionens afledede i punktet forsvinder, også er ekstrema. (se figur).



For at kontrollere, om et givent bud på et ekstremum også er et ekstremum, har vi følgende tilstrækkelige betingelse.

Tilstrækkelig betingelse.

Er $F_o : R \rightarrow R$ en to gange differentiabel funktion gælder: x_o er et ekstremumspunkt hvis $F_o'(x_o) = 0$ og $F_o''(x_o) \neq 0$.
(Er $F_o''(x_o) > 0$ er $F_o(x_o)$ et minimum, og er $F_o''(x_o) < 0$, er $F_o(x_o)$ et maksimum.)

Lad os se lidt på et eksempel fra afsnit 3.2.1. Hvilken vinkel skal man indstille en kanon i for at få den til at skyde længst muligt? Vi får afstanden, $F_o(x)$, mellem kanonen og nedslagspunktet givet som en funktion af vinkelen, x.

$$F_o(x) = \frac{2v_o^2}{g} \sin(x) \cos(x)$$

Den maksimale værdi af F_o fås ved anvendelse af den nødvendige betingelse:

$$\frac{dF_o}{dx} = 0$$

eller

$$\frac{dF_o}{dx} = \frac{2v_o^2}{g} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0$$

som giver

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \qquad (n= 0,1,2.....)$$

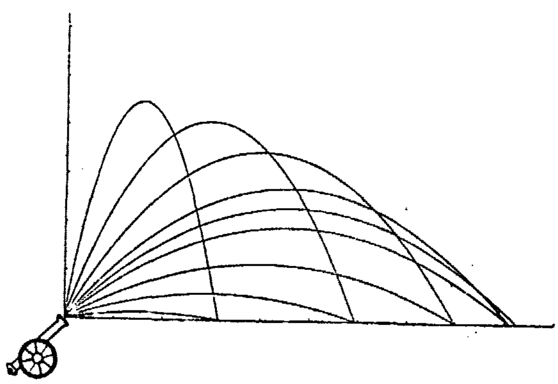
eller, da vi af indlysende grunde begrænser os til intervallet $(0,\frac{\pi}{2})$,

$$x_o = \frac{\pi}{4}$$

Sætter vi dette punkt ind i den tilstrækkelige betingelse, ser vi at

$$F_o(\tfrac{\pi}{4}) = 1414 \text{ m} , \ (g = 10 \tfrac{m}{s^2} , \ v_o = 100 \tfrac{m}{s})$$

er maksimum for F_o.



3.3.2. Ekstrema for funktioner af flere reelle variable.

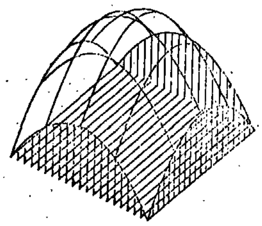
Definition af optimum.

At funktionen $F_o : R^n \sim R$ har lokalt maximum henholdsvis minimum i punktet $x_o \in R^n$ betyder, at der findes en omegn $U \subset R^n$ om x_o, hvor det gælder:

$F_o(x) \leq F_o(x_o)$ henholdsvis $F_o(x) \geq F_o(x_o)$ for alle $x \in U \subset R^n$.

Lokale maxima og minima kaldes under et for ekstrema.

Igen begrænser vi os til "pæne" funktioner, idet vi vil kræve, at F_o har partielle afledede af første orden. Definitionen ovenfor svarer iøvrigt fuldstændigt til definitionen for optimum af funktioner af en variabel. Vi får følgende nødvendige betingelse.



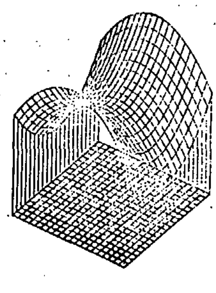
Nødvendig betingelse.

Er $F_o : R^n \sim R$ en funktion med kontinuerte partielle afledede af første orden, og er $x_o \in R^n$ et ekstremumspunkt, da gælder: grad $F_o(x_o) = 0$ (hvor 0 er nulelementet i R^n).

Det ses, at for $n = 1$ er denne betingelse den samme, som blev givet i sidste afsnit, idet grad F_o for $F_o : R \sim R$ netop er F_o'.

Ideen i betingelsen er, at et tangentplan lagt i optimumspunktet har hældning 0. (se figur). Desværre optræder der også i højere dimensioner fænomener af samme slags som nævnt ovenfor, idet gradienten også forsvinder i såkaldte saddelpunkter (se figur).

Vi formulerer derfor følgende tilstrækkelige betingelse, hvor vi dog yderligere antager, at F_o har partielle afledede af anden orden.



Tilstrækkelig betingelse.

Antag at funktionen $F_o : R^n \rightarrow R$ har kontinuerte partielle afledede af anden orden $F_o{}''_{ij}$ i en omegn om punktet $x_o \in R^n$, hvor grad $F_o(x_o) = 0$. Hvis A er den symmetriske (n x n) matrix med elementer $a_{ij} = F_o{}''_{ij}(x_o)$, da gælder:

1. Hvis alle egenværdier til A er positive, er $F_o(x_o)$ et strengt lokalt minimum.
2. Hvis egenværdierne alle er negative, har vi et maksimum.

3.3.3. Ekstrema for funktioner af flere reelle variable med bibetingelser.

Definition af optimum.

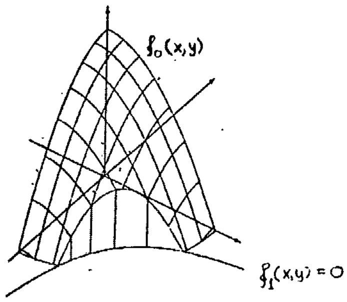
At funktionen $F_o : R^m \rightarrow R$ har lokalt minimum i x_o under bibetingelserne $F_i(x) = 0$ $(i=1,..,n)$ betyder:

1. x_o opfylder bibetingelserne
2. x_o har en omegn $U \subset R^m$, sådan at $F_o(x_o) \leq F_o(x)$ for alle $x \in U$, som tilfredsstiller bibetingelserne.

I princippet kan man løse ekstremumsproblemer med bibetingelser ved at udtrykke k variable ved de resterende n-k i bibetingelserne, og derefter indsætte i F_o. Derved fremkommer en funktion af n-k variable, som man så kan finde ekstrema for ved samme metode, som er angivet i afsnit 3.3.2.

Denne fremgangsmåde er i reglen upraktisk og normalt endda uigennemførlig, da det jo ikke altid er muligt at udtrykke de k variable explicit som funktioner af de n-k.

I stedet bruger vi den nødvendige betingelse, som er udviklet af Lagrange.



Nødvendig betingelse.

Antag:

1. at funktionen $F_o(x)$, $(F_o : R^m \rightarrow R)$ har lokalt ekstremum under bibetingelserne $F_i(x) = 0$, $(i=1,..,n)$ i et punkt x_o,
2. at samtlige funktioner F_i $(i=0,1,..,n)$ er definerede og har kontinuerte gradienter i en omegn om x_o .

Da gælder:

a. at enten findes reelle tal (Lagrange-multiplikatorer) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, så det i x_o gælder at hjælpefunktionen $G = F_o + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_n F_n$ $(G : R^{m+n} \rightarrow R)$ har ekstremum, altså at x_o er løsning til ligningssystemet:
$\frac{\partial}{\partial x_h}(F_o + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_n F_n) = 0$ for $h = 1,2,..,m$.
b. eller også er alle funktionaldeterminanterne af bibetingelsesfunktionerne med hensyn til n af variable x_h lig 0.

Vi vil ikke anføre en tilstrækkelig betingelse her; dette gør, at man skal være forsigtig med denne metode, da man ikke har anden kontrol på, om man har fundet et optimum, end at den situation, man beskriver, ser ud til at have et optimum.

Vi vil nu se på eksemplet på anvendelse af Lagranges multiplikatorer fra afsnit 3.2.3. Problemet var givet ved:

$F_o(x)$ = volumen = $x_1 x_2 x_3$
og
$F_1(x) = 2x_1 + x_2 - a = 0$
$F_2(x) = 2x_1 + x_3 - a = 0$

Vi skal nu finde $x_o \in R^3$ således, at F_o bliver maksimal, og x_o opfylder bibetingelserne.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1x_2x_3 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - a) + \lambda_2(2x_1 + x_3 - a)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1x_2x_3 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - a) + \lambda_2(2x_1 + x_3 - a)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_2x_3 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - a) + \lambda_2(2x_1 + x_3 - a)) = 0$$

og vi har nu fem ligninger med fem ubekendte $(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)$.

$$\begin{aligned}
x_2x_3 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0\\
x_1x_3 + \lambda_1 &= 0\\
x_1x_2 + \lambda_2 &= 0\\
2x_1 + x_2 - a &= 0\\
2x_1 + x_3 - a &= 0
\end{aligned}$$

som har løsningerne

$$x_1 = a/3\ ,\ x_2 = a/3\ ,\ x_3 = a/3\ ,\ \lambda_1 = -a^2/9\ ,\ \lambda_2 = -a^2/9$$

Da vi kun har brugt en nødvendig betingelse til at finde dette punkt, må vi samtidig gøre os nogle overvejelser, om F_o med disse bibetingelser overhovedet har et maksimum. Hvis vi ser på den fysiske realitet i dette tilfælde, er det temmelig oplagt; men det er ikke altid tilfældet, at det er så nemt at overskue.

3.3.4. Det lineære programmeringsproblem.

Definition af optimum.

At funktionen $F_o : R_+^m \to R$ har minimum i $x_o \in R_+^m$ under bibetingelserne $F_i(x) \leq 0$, $(i=1,2,\ldots,n)$ hvor F_j $(j=0,1,\ldots,n)$ er lineære, betyder:

1. x_o opfylder bibetingelserne
2. $F_o(x_o) \leq F_o(x)$ for alle x, som tilfredsstiller bibetingelserne.

Da de indgående funktioner alle er lineære, kan de skrives:

$$F_o(x) = c\ x\quad ,\ (c \in R^m,\ x \in R_+^m)$$

og bibetingelserne:

$$A\ x \leq b\quad ,\quad (A \text{ er en } (n \times m)\text{-matrix.})$$

Ved indførelse af n såkaldte slackvariable kan dette problem omformes til: Find minimum for $F_o(x) = c\ x$, under bibetingelserne $A\ x = b$, hvor $F_o : R^{m+n} \to R$, $c,x \in R_+^{m+n}$ og A er en $(n \times (m+n))$-matrix. (For den konkrete omformning, se eksempel nedenfor og afsnit 3.5.)
Vi kan nu formulere følgende nødvendige betingelse:

<u>Nødvendig betingelse.</u>

En optimal løsning til et lineært programmeringsproblem findes i et ekstremt punkt, dvs. et punkt som tilfredsstiller bibetingelserne, men som ikke kan dannes som en konveks kombination af andre punkter, der tilfredsstiller bibetingelserne. Såfremt en optimal løsning findes i flere ekstreme punkter, så er enhver konveks kombination af disse også en optimal løsning.

Denne sætning siger, at en optimal løsning vil ligge i et hjørne, dog således at forstå at der også kan være andre punkter, der er optimale; men at vi har løst problemet, hvis vi kender de hjørner, der giver optimale løsninger. Denne betingelse er desværre ikke så god til at bruge til at finde optima, til det brug er følgende sætning mere velegnet, idet den karakteriserer hjørnerne, som de optimale punkter er en del af.

<u>Nødvendig og tilstrækkelig betingelse (for hjørnepunkt).</u>

Såfremt $g \leq m$ søjlevektorer i A, f.eks. $a^1, a^2, .. a^g$, er lineært uafhængige og

$$\sum_{j=1}^{g} a^j x_j = b, \text{ hvor } x_j \geq 0 \text{ for } j=1,2,..,g \text{ , og } x_j=0 \text{ for } j=g+1,..,n,$$

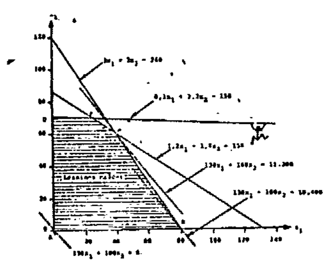
da er $x = (x_1, x_2, ... x_g, 0, 0, ..., 0)$ et ekstremt punkt af løsningsområdet. Omvendt gælder, at hvis x er en ekstremløsning, da er de vektorer a^j, der er knyttet til de positive elementer x_j i løsningen, lineært uafhængige.

Vi vil nu se på løsningen af det første eksempel i afsnit 3.2.4., hvor vi havde følgende problem:

Find (x_1, x_2) så

$$\begin{aligned} z(\max) &= 130x_1 + 100x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 240 \\ 0.1x_1 + 2.2x_2 + x_4 &= 156 \\ 1.2x_1 + 1.8x_2 + x_5 &= 156 \end{aligned}$$

idet 240, 156 og 156 er antallet af timer maskinerne er til rådighed pr. uge, og x_3, x_4 og x_5 er uudnyttet kapacitet på de tre maskiner (slackvariable).



Ifølge den nødvendige og tilstrækkelige betingelse nr.2 gælder, at vektorerne

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

i matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 2.2 & 0 & 1 & 0 \\ 1.2 & 1.8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige, og derfor kan vi fastslå, at $x = (0,0,240,156,156)$ er et ekstrempunkt (et hjørne). Den er givetvis ikke maksimal, da den indebærer, at der ikke skal produceres noget. Men vi kan nu ved hjælp af Simplex-algoritmen (se 3.5) så at sige kravle fra hjørne til hjørne, og til sidst få $x = (40,60,0,20,0)$ som optimal løsning, med $z(\max) = 11200$.

3.3.5. Ikke-lineær programmering.

Definition af optimum.

At funktionen $F_o : R^m \to R$ har minimum i $x_o \in R^m$ under bibetingelserne $F_i(x) \leq 0$ ($F_i : R^m \to R$), $(i=1,2,..,n)$ betyder:

1. x_o opfylder bibetingelserne.
2. x_o har en omegn $U \subset R^m$, sådan at $F_o(x_o) \leq F_o(x)$ for alle $x \in U$ som tilfredsstiller bibetingelserne.

Sammenligner man problemformulering og definition af optima for dette problem og for problemet med at finde ekstrema for funktioner af flere variable med bibetingelser, ses det, at de minder meget om hinanden, blot er i dette problem bibetingelserne uligheder og ikke ligheder.

Ligheden fortsætter også på løsningsmetoden, idet vi også her danner hjælpefunktionen (Lagrange-funktionen)

$$G = F_o + u_1F_1 + \dots + u_nF_n$$

og får følgende nødvendige betingelse:

Nødvendig betingelse.

Saddelpunktsteorem:

Antag:

1. at der eksisterer et $x_1 \geq 0$, hvorom det gælder, at $F_i(x_1) < 0$ for $i=1,2,\dots,n$,
2. at $x_o \geq 0$ er en løsning til det ikke-lineære programmeringsproblem.

Da gælder at
for alle $x \geq 0$, $u \geq 0$ eksisterer et u_o så

$$G(x_o,u) \leq G(x_o,u_o) \leq G(x,u_o)$$

Som det ses adskiller denne sætning sig fra sætningen i afsnit 3.3.3., idet der ingen krav er til de indgående funktioner om differentiabilitet. For differentiable funktioner gælder den mere operationelle sætning:

Nødvendig betingelse.

Lokale Kuhn-Tucker betingelser:

Antag:

1. at der eksisterer et $x_1 \geq 0$ hvorom det gælder, at $F_i(x_1) < 0$ for $i = 1,2,\dots,n$,

2. at $F_i : R^m \to R$, $(i=0,1,\ldots,n)$ har kontinuerte partielle afledede,
3. og at $x_o \geq 0$ ($x_o \in R^m$) er en løsning til det ikke-lineære programmeringsproblem.

Da gælder at
der eksisterer et $u_o \geq 0$ ($u_o \in R^n$) således at

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_o,u_o) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m) ,$$

$$F_i(x_o) \leq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) ,$$

$$u_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(x_o,u_o) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Det gælder specielt for konveks programmering (herunder kvadratisk og lineær programmering), at saddelpunktsteoremet og de lokale Kuhn-Tucker betingelser udover at være nødvendige tillige er tilstrækkelige betingelser.

Men lad os se lidt på eksemplet med at anlægge en lufthavn (3.2.5.).
Problemet var at minimere

$$F_o(x,y) = \sum_1^6 z_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

under bibetingelserne

$$F_1(x,y) = x + y - 250 \leq 0$$

$$F_2(x,y) = -((x - 100)^2 + (y - 100)^2) + 400 \leq 0 \quad .$$

Vi danner hjælpefunktionen (Lagrange-funktionen)

$$G(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_1^6 z_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \lambda_1(x + y - 250)$$
$$+ \lambda_2((x-100)^2 + (y-100)^2 -400)$$

og den nødvendige betingelse (ikke tilstrækkelige, problemet er ikke konvekst), giver følgende ligningssystem:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_1^6 \frac{z_i(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \lambda_1 - 2\lambda_2(x-100) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sum_1^6 \frac{z_i(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \lambda_1 - 2\lambda_2(y-100) = 0$$

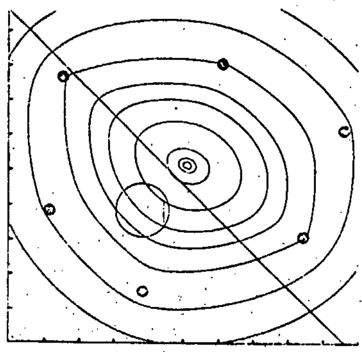
$$x + y - 250 \leq 0$$

$$-((x-100)^2 + (y-100)^2 -400) \leq 0$$

$$\lambda_1\frac{\partial G}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(x + y -250) = 0$$

$$\lambda_2\frac{\partial G}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(-((x-100)^2 + (y-100)^2 - 400)) = 0$$

Systemet kan løses iterativt på datamaskine, og den optimale værdi fås til 13961 km i punktet $(x_o,y_o) = (120,130)$, der er bestemt med 10 km. nøjagtighed. (se iøvrigt nedenstående figur med niveaukurver for målfunktionen).



3.3.6. Klassisk variationsregning.

Definition af optimum.

Lad $F_o : X \to R$ være

$$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),x'(t),t)\, dt$$

og lad $x_o \in X$. F_o siges at have minimum i x_o dersom:

$$\forall x \in X : F_o(x) \geq F_o(x_o).$$

Vi søger altså nu en funktion i X istedet for et punkt i R^m. Antager vi, at Φ og x er differentiable, har vi følgende nødvendige betingelse.

Nødvendig betingelse.

Eulers ligning:

Er $F_o(x_o)$ et minimum, gælder at x_o er en løsning til Eulers ligning:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,x',t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\Phi(x,x',t)\right) = 0$$

Specielt har vi, at hvis Φ ikke indeholder t eksplicit bliver Eulerligningen til:

$$\Phi - x'\frac{\partial}{\partial x'}\Phi = \text{konstant.}$$

Som eksempel på et klassisk variationsregningsproblem (klassisk i mere end en forstand), kan nævnes det såkaldte Brachistochrone-problem (se 3.2.6.). Vi skal finde minimum for

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

$$y_o(x_1) = y_1 \ , \ y_o(x_2) = y_2 \ .$$

Da $\Phi(y,y',x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ ikke indeholder x eksplicit, har vi Eulerligningen, som den søgte funktion skal tilfredsstille.

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

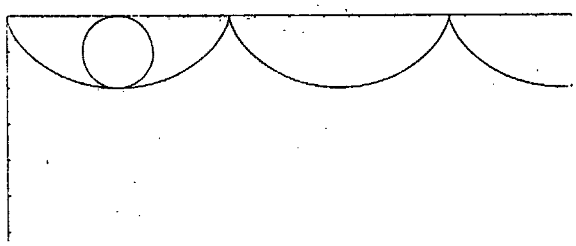
hvoraf $\quad y' = \frac{\sqrt{1-c_1^2 y}}{c_1\sqrt{y}}$

eller $\quad dx = \int \frac{c_1\sqrt{y}}{\sqrt{1-c_1^2 y}}\,dy$

som med substitutionen $y = \frac{1}{c_1}\sin^2(\frac{u}{2}) = \frac{1}{2c_1^2}(1-\cos(u))$ integreres til

$$x = k_1(u - \sin(u)) + k_2$$
$$y = k_1(1 - \cos(u))$$

som er parameterfremstillingen for en cykloide.



3.3.7. Lagrange-problemet.

Definition af optimum.

Lad $F_o : X \sim R$, hvor

$$F_o(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x_1(t), x_2(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, t)\,dt$$

$F_o(x)$ siges at have minimum i $x_o = (x_{o1}, x_{o2})$ hvis

1) x_o opfylder bibetingelserne, og for alle x:

2) $F_o(x_o) \leq F_o(x)$

Nødvendig betingelse.

Hvis vi i det oprindelige udtryk for $F_o(x)$ erstatter Φ med:

$$\hat{\Phi} = -\lambda_o\Phi + \sum_1^m \lambda_j G_j(x(t), x'(t), t)$$

(hvor $G_j(x(t),x'(t),t)$ er et sæt ordinære ligninger som bibetingelser, λ_o, λ_j er Lagrangemultiplikatorer), kan vi komme til Eulers differentialligning, der udtrykker den nødvendige betingelse for optimum:

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i'}\right) = 0 \quad .$$

3.3.8. Lagrange-problemet med non-holonome bibetingelser.

Definition af optimum.

Lad $F_o : X \times U \to R$, hvor

$$F_o(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),u(t),t)\,dt$$

F_o siges at have minimum i (x_o,u_o) hvis

1) $\frac{dx_o}{dt} = \varphi(x_o(t),u_o(t),t)$, $x_o(t_o)=c$, $x_0(t_1)=d$

2) $\forall(x,u) \in X \times U : F_o(x_o,u_o) \leq F_o(x,u)$

Nødvendig betingelse.

Hvis vi i det ordinære udtryk for F_o erstatter Φ med:

$$\hat{\Phi} = -\lambda_o\Phi + \sum_1^m \lambda_j(t)\varphi(x(t),u(t),t) \quad , \text{ hvor}$$

$\lambda_o,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ er funktioner, der svarer til Lagrange-multiplikatorer, kan vi komme frem til Eulers ligning:

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial u(t)}\right) = 0 \quad i= 1,2,..,n \quad ,$$

der udtrykker den nødvendige betingelse for et optimum.

3.3.9. Optimal Control.

Definition af optimum.

Et par af funktioner $(x_o(t),u_o(t))$ tilhørende $X \times U$ siges at være et optimalt par, hvis

1. x_o er en løsning til

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x(t),u_o(t)), \; x_o(t_o) = c_1, \; x_o(t_1) = d$$

2. $u_o(t) \in M \subset U$
3. $F_o(x_o,u_o) \leq F_o(x,u)$ for alle (x,u) i $X \times M$

(u_o kaldes en optimal control og x_o en optimal bane.)

I punkt 1) kan $x_o(t_1) = d$ evt. erstattes af andre slutbetingelser.
Vi søger altså nu en kontrol (styring), u_o, som giver en bane, x_o, således at (x_o,u_o,t_1) minimerer omkostningsfunktionen F_o.
Til dette brug har vi følgende nødvendige betingelse.

Nødvendig betingelse.

Pontryagins maksimumsprincip.

Antag:

1) Funktionerne $\Phi(x,u,t)$ og $\varphi(x,u,t)$ er definerede på R^{n+r+1} med værdier i henholdsvis R og R^n, er kontinuerte i u og kontinuert differentiable i x.

2) $x_o(t)$, $u_o(t)$, t_1 er en løsning til optimal control problemet.

Så eksisterer en funktion $\psi(t)$ og $\lambda_o \geq 0$, ikke begge o, så

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi\frac{d\varphi}{dx}(x_o,u_o) + \lambda\frac{d\Phi}{ddx}$$

og således at $u_o(t)$ opfylder

$$H(x_o(t),u_o(t),\psi(t),t) = \max_u H(x_o(t),u(t),\psi(t),t) \quad \text{hvor}$$
$$H(x,u,\psi,t) = \varphi(x,u)\psi - \lambda_o\Phi(x,u)$$

Som for de andre optimeringsproblemer gælder det også her, at problemet ikke er løst ved at udlede en nødvendig betingelse. I praktiske problemer må man normalt anvende sin viden om problemets specielle karakter.
Vi vil nu se på løsningen af et eksempel, som ikke er spor realistisk, men som gerne skulle vise gangen i løsningen af et kontrolproblem. (se 3.2.9.)

Vi skal minimere "integralet" $F_o(x_o,u_o) = t$ under bibetingelserne

$$\varphi_1(x,u) = \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\varphi_2(x,u) = \frac{dx_2}{dt} = u \qquad \text{og } -1 \leq u \leq 1 \ .$$

Hamiltonfunktionen bliver:

$$H(x,u,\psi,t) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t) - \lambda_o$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og derved

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi\frac{d\varphi}{dx} + \lambda_o\frac{d\Phi}{dx} = -(\psi_1,\psi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = (0,-\psi_1(t))$$

som medfører $\psi(t) = (d_1, -d_1t + d_2)$ hvor d_1 og d_2 er reelle konstanter.
Da det for en optimal løsning (x_o,u_o) skal gælde at

$$H(x_o,u_o,\psi,t) = \max_u H(x_o,u,\psi,t) \text{ har vi}$$

$$d_1x_{o2} + (-d_1t + d_2)u_o - \lambda_o = \max_u (d_1x_{o2} + (-d_1t + d_2)u - \lambda_o)$$

Da d_1x_{o2} og λ_o er uafhængige af u_o skal vi bare finde u_o således at $(-d_1t + d_2)u_o$ er maksimal.
Det ses, at er $(-d_1t + d_2)$ positiv, skal u_o være 1, og er $(-d_1t + d_2)$ negativ skal u_o være -1.
Vi har altså nu fået fastlagt en optimal kontrol, vi mangler blot at fastlægge den til den optimale styring svarende bane, x_o, samt tidspunktet for omskiftning af motoren. (Fra $u_o = 1$ til $u_o = -1$, eller omvendt.)

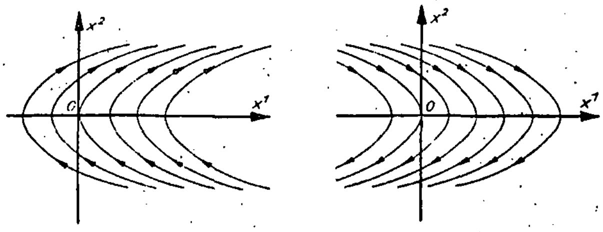
For $u = 1$ gælder: $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dx_1}{dt}\frac{dt}{dx_2} = x_2$ og man får

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x_2^2 + c$$

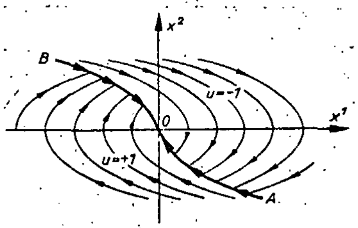
Tilsvarende fås for $u = -1$:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}x_2^2 + c_1.$$

Blandt disse skarer (se figur) af parabler er der kun to, der skærer i $(x_1,x_2) = (0,0)$, nemlig for $c = 0$ og $c_1 = 0$ (OB og OA).



Da vi ved, at u kun antager to værdier (1,-1), skifter vi kun en gang fra en parabelbue til en anden, og vi skal derfor følge en bue, til vi møder enten OB eller OA (se figur), som så fører os til (0,0).



Lad os se lidt på en startsituation, hvor $(x_1,x_2) = (a,b)$ og $a;b > 0$, så vi ligger i 1. kvadrant.
Her er $u = -1$, og vi skal bevæge os af parablen P_1 , altså $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c$, hvor c på grund af startbetingelserne er $c = a + \frac{1}{2}b^2$.
Vi skifter parabel i skæringspunktet mellem P_1 og AO, som er givet ved

$$\left(-\sqrt{a - \tfrac{1}{2}b}\ ,\ \tfrac{1}{2}a + \frac{b^2}{4}\right).$$

Ser vi lidt på bevægelsesligningen $x_2' = u = -1$, fås $x_2 = -t + b$, hvoraf vi får den tid, det tager at nå fra udgangspunkt til skæringspunkt til $t = b + \sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}$, som er det tidspunkt, hvor vi skal skifte accellerationens retning for at nå til (0,0).

3.4 NUMERISKE LØSNINGSMETODER.

De matematiske metoder, som er gennemgået i afsnit 3.3, er ikke altid tilstrækkelige til løsning af praktiske problemer. Der kan f.eks. være forudsætninger, der ikke er opfyldt. Det har derfor været nødvendigt at udvikle forskellige numeriske metoder, der ved hjælp af datamaskiner kan beregne løsninger til forskellige optimeringsproblemer.

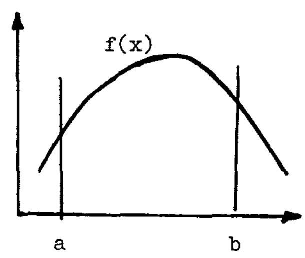
De numeriske metoder er nært knyttet til de konkrete optimeringsproblemer, og man kan derfor ikke angive en generel metode til løsning af disse. Dette har medført, at der i dag findes et utal af forskellige metoder til løsning af numeriske problemer. Nogle bygger direkte på ideerne fra den matematiske behandling, mens andre går helt andre veje.

For at belyse problemerne vil vi i det følgende gennemgå nogle udvalgte eksempler på numeriske optimeringsmetoder. Som det første vil vi se på nogle metoder til løsning af optimeringsproblemer uden bibetingelser, og derefter i afsnit 3.5, behandle en generel metode til løsning af lineære programmeringsproblemer, nemlig Simplex-algoritmen.

3.4.1 Ekstremum for funktion af een variabel.

Lad os som start se på hvordan man kan finde et maximumpunkt for en funktion af een variabel. Om funktionen f ved vi:

a) Den er kontinuert og differentiabel
b) f' kendes
c) f har kun eet maximumpunkt (hvor f' = o) i intervallet [a,b]
d) Er iøvrigt "pæn" (se fig. 1).



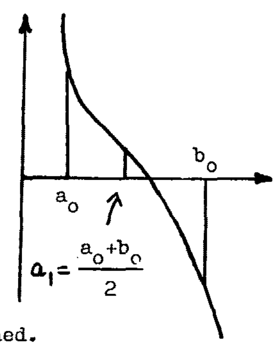
Hvad vi søger er altså et x, hvor f(x) er maxpunkt. Dette er som bekendt opfyldt for et x, hvor f'(x) = o. Med andre ord, vi skal finde et nulpunkt for funktionen f'.

Dette nulpunkt kan findes på en række måder. Her skal vi blot nævne nogle enkelte.

Bisektionsmetoden.

Her flytter man intervalgrænserne a eller b til

$$x = \frac{a + b}{2}$$



Man vælger a, hvis f'(x) > o, b, hvis f'(x) < o .Ved en sådan fortløbende proces, kan det interval, hvor nulpunktet befinder sig i, indsnævres til en ønsket størrelse. Ved en sådan fortløbende proces, kan det interval, hvor nulpunktet befinder sig sig i, indsnævres til en ønsket størrelse.

Dermed kan nulpunktet findes med den ønskede nøjagtighed.

En anden, og mere effektiv metode, kan komme på tale, hvis man kender f''. Den såkaldte, Newton's metode (efter den herre Isaac Newton (1642-1727) naturligvis).

Fra Taylors formel, med den første afledede,

$$f'(x) = f'(x_o) + (x - x_o)\, f''(x_o) + r_2$$

har vi at x er nulpunkt for f', når tilnærmet:

$$f'(x_o) + (x - x_o)\, f''(x_o) = o \text{ ;eller når } f''(x_o) = o :$$

$$x = x_o - \frac{f'(x_o)}{f''(x_o)}$$

Højresiden kan da udregnes for et givet x_o, og x vil da i almindelighed ligge tættere på nulpunktet end x_o. Metoden kan illustreres som vist på figuren. Værdien x er skæringspunkt mellem x-aksen og tangenten til f' i punktet $(x_o, f(x_o))$. Man kan altså beregne en række tilnærmelser udfra udtrykket;

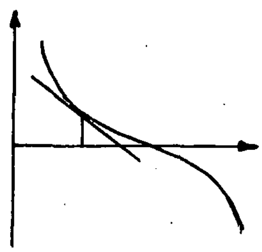
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

for i = 1,2,3...til den ønskede nøjagtighed opnås.

De her omtalte metoder kræver begge, at funktionen er differentiabel. Dette krav kan imidlertid ikke altid opfyldes i praktiske situationer. Der må altså andre metoder til i disse tilfælde.

Vi vil her beskrive en slags "standard"-metode, hvis filosofi også kan benyttes til funktioner af større kompleksitet. (mere om det senere).

Metoden går i alt sin enkelthed ud på at tage et skridt af en vis længde, ud fra et begyndelsespunkt, og derefter afgøre om man har "skridtet" forbi max-punktet. Lad os skitsere princippet. Vi tager et skridt ud fra punktet x_o (med længden $x_1 - x_o$) og lander i punktet x_1. Er $f(x_1) > f(x_o)$ ligger maxpunktet i intervallet x_o , x_1 eller længere fremme. Intet er altså afklaret endnu. Vi tager derfor et skridt til, af samme længde, og når x_2. Er $f(x_2) > f(x_1)$ ligger maxpunktet i intervallet x_1, x_2 eller længere fremme. Denne fremgangsmåde kan benyttes indtil $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, hvilket indicerer, at vi er kommet forbi maxpunktet. Maxpunktet må da ligge i intervallet $[x_{n-1}, x_{n+1}]$. Dette interval kan så igen formindskes udfra de samme principper, dog med en mindre skridtlængde og startende i punktet x_{n-1}.



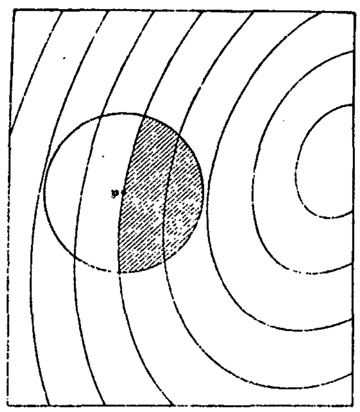
3.4.2 Ekstremum for funktioner af flere variable.

I det følgende vil vi kun behandle funktioner af to variable, idet disse kan visualiseres. Problemer og metoder er iøvrigt de samme, selvom der indgår mere end 2 variable.

Vi vil starte med at beskrive nogle problemer, som forekommer ved disse funktioner. I en stor del af litteraturen omtaler man disse problemer, som "den blinde bjergbestigers problemer" med at nå toppen af et bjerg.

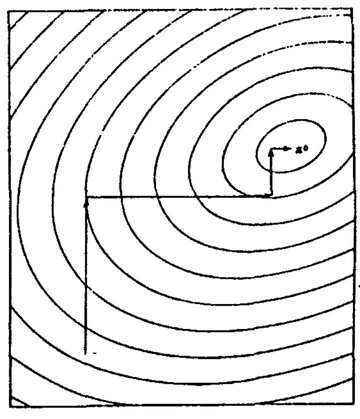
Funktionerne identificeres altså med bjerge, hvilket pædagogisk set er en vældig god fremstillingsform.

Situationen er den, at man står midt på et pænt-glat bjerg.(punkt P).Kontourlinierne er højdekurver. Man ønsker nu at komme nærmere toppen.af bjerget. Dette kan gøres ved at tage et skridt ind i det skraverede område, hvor alle punkter er en bedretilnærmelse til max-punktet end P. Problemet er selvfølgelig, at man som "blind", ikke kan "se" det skraverede område.(man må føle sig frem med stokken. Der findes en række metoder til at føle sig frem. Her vil vi gennemgå nogle få af de mere simple.



Den første kaldes ofte "en variabel af gangen", og er, som navnet antyder, en metode, hvor man ændrer een variabel ad gangen.Med andre ord, man ændrer en variabel med en eller anden værdi, og lader de øvrige uændret. Herved "føler" man et skridt frem (med stokken) i den aktuelle variables retning.

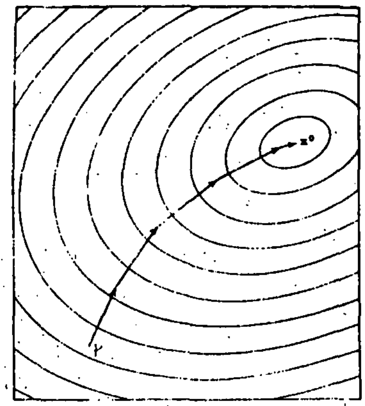
Hvis dette skridt, vil føre os over i et punkt, som er bedre, f.eks.: $f(x_n + \text{"skridt"}, y_n) \lessgtr f(x_n, y_n)$, tager vi skridtet. I modsat fald bliver vi stående. Herefter kan vi forsøge at tage et skridt i en ny variabels retning, osv. Dette kan fortsætte til vi ikke kan forbedre vores "position", og altså må være i max.-punktet.(I hvert fald det bedste max.-punkt vi kan finde med denne metode).



Gradientmetoden

Den næste metode vi vil nævne, er den såkaldte "gradienttmetode". Princippet i denne metode er, at tage et skridt i gradientens retning. Gradienten er som bekendt en vektor, som peger i den retning funktionen(bjerget), stiger mest. Gradienten kan findes ved partiel differentiation.

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots\cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$



Vi står altså igen i et punkt P, og skal tage et skridt mod maximum. Skridtet tages denne gang i gradientens retning, hvor landingspunktet kan beskrives med følgende rekursive formel:

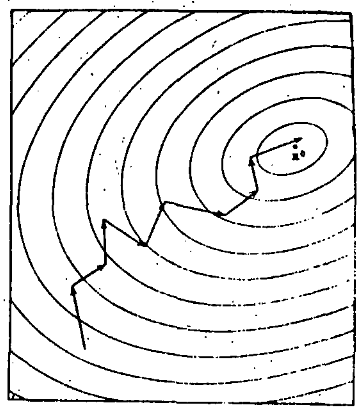
$$X^{j+1} = X^j + s_j G(X^j)$$

hvor s_j er længden af det j'te skridt.

<u>Mønstersøgning og Randomsøgning.</u>

Endelig vil vi nævne to metoder, som minder en del om hinanden: "Mønstersøgning", og "Randomsøgning".

Mønstersøgningen giver mulighed for, at søge bedre punkter, efter et bestemt mønster. Med andre ord, hvor "En variabel ad gangen"-metoden, ændrer een variabel, kan Mønstermetoden ændre flere variable, efter et bestemt mønster, som også kan være dynamisk.



Vi kan foreksempel vælge at tage "springerskridt", dvs. to skridt frem og en til højre. (Ikke-skakspillende læsere må her bære over med os).

Randomsøgningen er en metode, hvor man forsøger sig med helt tilfældige skridt. (se figur). Man tager altså et skridt i den tilfældige retning, hvis det kan forbedre positionen. Ellers forsøger man sig med en ny tilfældig retning. Visse metoder indenfor denne kategori benytter både tilfældig retning og skridtlængde.

En ofte benyttet forbedring, (metoden er faktisk kun brugbar med denne forbedring), er at indføre en "historie-vektor". Denne vektor skal sørge, for, at de helt tilfældige forsøg ikke bliver fuldstændigt tilfældige. Vektoren skal med andre ord påvirke forsøgene i den retning, man erfaringsmæssigt véd forbedrer positionen.

3.5 SIMPLEXALGORITMEN.

Vi vil i det følgende vise, hvorledes løsningen af det generelle lineære programmeringsproblem kan formuleres i tre niveauer:

1. En beskrivelse af det lineære programmeringsproblems løsningsegenskaber, der ikke umiddelbart viser hvordan problemet skal løses.

2. En beskrivelse af hvordan man, ved hjælp af aritmetiske operationer kan løse problemet.

3. En algoritmisering af løsningsmetoden, der ved hjælp af en strukturering af problemets, fører til at løsningsmetoden bliver generelt anvendelig.

Forinden vil vi dog kort redegøre for det lineære programmeringsproblem: I det generelle LP-problem skal bestemmes en vektor

$$x \in R^n \quad x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1,2,\ldots\ldots\ldots n$$

som maximere (minimere) funktionen

$$z = cx \quad c^T \in R^n$$

og opfylder et system af lineære ligninger og uligheder:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \{\leq, =, \geq\}\ b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n \{\leq, =, \geq\}\ b_n
\end{array}$$

For at dette problem kan løses med Simplex-algoritmen, og andre algoritmer, bringes det, ved indførelse af en slack-variabel for hver ligning eller ulighed, på en såkaldt standardform, hvor problemet formuleres således:

$$n := m + n$$

$$\text{Find } x \in R^n,\ x \geq 0$$

således, at

$$z = cx \text{ maximeres, } c^T \in R^n \text{ og } Ax = b \text{ er en } m \times n\text{- matrix, } b \in R^m$$

Denne omskrivning kan udføres for alle generelle LP-problemer. Vi har yderligere behov for at definere en såkaldt pivotoperation, som er et sæt regneregler, hvormed man kan transformere et ligningssystem til et dermed ækvivalent ligningssystem, d.v.s. med samme løsninger, og som er karakteriseret ved, at en given variabel optræder med koefficienten 1 i én ligning, og 0 i alle andre:

Givet et ligningssystem $Ax = b$, hvor A er en $m \cdot x$ n-matrix, $x \in R^n$, $b \in R^m$
Vi vil skrive dette ligningssystem ud for at klargøre trinene i en pivotoperation:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + \cdots\cdots & a_{1s}x_s & + \cdots\cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{r1}x_1 & + \cdots\cdots & a_{rs}x_s & \cdots\cdots & a_{rn}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + \cdots\cdots & a_{ms}x_s & \cdots\cdots & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

En pivotoperation kan opdeles i tre trin.

1. Udvælgelse af et element, $a_{rs} \neq 0$, det såkaldte pivotelement.

2. Dividér den r'te ligning med a_{rs}, dvs. erstat den r'te ligning med
   $(a_{r1} / a_{rs})x_1 + \cdots\cdots 1x_s \cdots\cdots (a_{rn} / a_{rs})x_n = b_r/a_{rs}$

3. For $i = 1,2,\ldots\ldots,r-1,r+1,\ldots\ldots m$. Erstat den i'te ligning
b med summen af den i'te ligning, og den nye r'te ligning ganget med $(-a_{is})$:

$$(a_{i1} - a_{is} \times a_{r1}/ a_{rs})x_1 + \cdots\cdots 0x_s + \cdots\cdots = b_i - a_{is} \times b_r/a_{rs}$$

Pivotelementet ses undertiden under navnet "akseelementet". Ordet "pivot" kan nærmest oversættes ved "tap", den tap hvorom processen drejer sig. Hver af disse elementaroperationer ændrer naturligvis ligningssystemet til et ækvivalent ligningssystem, og derfor ændrer den samlede pivotoperation også systemet til et ækvivalent ligningssystem.

<u>Ad 1 : LP-problemets løsningsegenskaber.</u>

Et LP-problem har følgende løsningsegenskaber:

1. Hvis løsningsområdet ikke er tomt, vil en optimal løsning altid kunne findes i et extremt punkt af løsningsområdet (et hjørne). Hvis der findes flere extrempunktløsninger, som er optimale, vil enhver konvex-kombination af disse også være en optimal løsning. (men ikke et hjørne).

2. Enhver mulig løsning(basisløsning) svarer til et extremt punkt i løsningsområdet.

3. Til ethvert extremt punkt i løsningsområdet, svarer m lineært uafhængige søjlevektorer blandt de givne n vektorer i A, hvor de elementer i løsningen, der svarer til de m lineært uafhængige søjlevektorer er $\geqslant 0$, mens de øvrige = 0.

4. En løsningsalgoritme behøver kun at undersøge extrempunktløsninger, altså mulige basisløsninger med m dertil hørende lineært uafhængige vektorer.

Ad. 2 Eksempel på aritmetiske operationer

Antag at et firma sælger to varetyper, der produceres på tre maskingrupper. Dækningsbidraget for første vare er 13o kr. ved produktion og salg, og loo kr. pr. stk. for den anden varetype.

Hver enhed af vare 1 beslaglægger maskingruppe 1 i 3 timer, maskingruppe 2 i o.1 time og maskingruppe 3 i 1,2 timer. De tilsvarende data for maskintidsforbruget pr. enhed for vare 2 er hhv. 2,o 2,2 og 1,8.

Maskingruppe 1 kører på toskift, og har en maskinkapacitet på ialt 24o timer pr. uge. Maskingrupperne 2 og 3 kører på enkeltskift og har hver en maskinkapacitet på 156 timer pr. uge.

Problemet er nu at udarbejde en produktionsplan, der maximere det totale dækningsbidrag pr. uge under de givne betingelser. Problemet kan formuleres på kanonisk form således:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 24o \\
o.1x_1 + 2.2x_2 + \qquad x_4 \qquad &= 156 \\
1.2x_1 + 1.8x_2 + \qquad\qquad x_5 &= 156 \\
13ox_1 + loox_2 \qquad\qquad &= z - z_o \ (=o)
\end{aligned}
$$

hvor vi har indført objektfunktionen $z = 13ox_1 + loox_2 + ox_3 + ox_4 + ox_5$ i ligningssystemet, idet vi har omskrevet den til formen:

$$z - z_o = 13ox_1 + loox_2 ,$$

hvor z_o er værdien af objektfunktionen for den nuværende basisløsning. Det ses, at løsningen x = (0,0,24o,156,156) er en mulig basisløsning, da der til x_3, x_4, x_5, de tre basisvariable, svarer 3 lineært uafhængige søjlevektorer. Vi kan nu ved at betragte ligningssystemets sidste ligning se, at x_1 er den variabel, der ved at øges en enhed, giver den største øgning af objektfunktionen. Vi ønsker derfor nu at transformere ligningssystemet på en sådan måde, at vi nemt kan finde en mulig basisløsning, hvor x_1 er positiv. Dette kan gøres ved at lade søjlevektoren, svarende til x_1 blive en af de tre lineært uafhængige søjlevektorer, den skal erstatte, altså i hvilken af de tre første ligninger x_1 skal have koefficienten 1. Det vi ønsker at gøre, er altså at øge x_1 mens x_2 er uændret. På grund af de tre første ligninger, og ikke-nagativitetsbetingelserne, kan dette kun gøres, til en af de tre basisvariable bliver 0.
(Kender De den om bådebyggeren, der ikke kunne holde sig i ro, så han måtte lægges på køl?)

Dette bliver netop i den ligning, hvor koefficienten til x_1 er positiv, og kvotienten mellem højresiden og koefficienten til x_1 er mindst. I denne ligning vælges koefficienten til x_1 som pivotelement, og hele ligningssystemet transformeres ved en pivotoperation til et ækvivalent ligningssystem II, hvor søjlevektorerne svarende til x_1, x_4 og x_5 ses at være lineært uafhængige, hvorfor løsningen $x = (8o,o,o,148,6o)$ er en ny mulig basisløsning:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2/3\, x_2 + 1/3\, x_3 &= 8o \\
32/15\, x_2 + 1/3o\, x_3 + x_4 &= 148 \\
x_2 - 2/5\, x_3 + x_5 &= 6o \\
4o/3\, x_2 - 13o/3\, x_3 &= z - 1o4oo
\end{aligned}$$

Af dem fundne basisløsning ikke er optimal, ses af, at værdien af z vil øges med 4o/3 for hver enhed x_2 øges med. Vi vil derfor endnu engang transformere ligningssystemet, så vi kan finde en mulig basisløsning, hvor x_2 er positiv. Vi transformere ved hjælp af en pivotoperation, med koefficienten i ligning 3 som pivotelement, II til III.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3/5\, x_3 - 2/3\, x_5 &= 4o \\
123/15o\, x_3 + x_4 - 32/15\, x_5 &= 2o \\
x_2 - 2/5\, x_3 + x_5 &= 6o \\
- 114/3\, x_3 - 4o/3\, x_5 &= z - 112oo
\end{aligned}$$

Den fundne basisløsning $x = (4o,6o,o,2o,o)$ ses at være optimal , da værdien af z kun vil mindskes ved at øge x_3 eller x_5 .Værdien af z findes af sidste ligning at være 112oo.

Disse operationer, der virker på matricen A samt ligningens højreside b og objektfunktionen, kan formuleres som en algoritme, SIMPLEX-algoritmen, der arbejder på en tabel, SIMPLEX-tabellen, der netop indeholder A, b og objektfunktionen svarende til de ækvivalente ligningssystemer, der skabes undervejs, fra standardformen til den optimale løsning.

Ad 3. Algoritmisering af løsningsmetoden. Simplex-algoritmen.

Vi har i det foregående eksempel set, hvorledes hver iteration medfører beregning og nedskrivning af en komplet Simplex-tabel, se tegning på næste side, styret af et efter visse regler udvalgt pivotelement. Disse regler vil vi nu formalisere i følgende 4 theoremer:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">oprindelige omkostningskoefficienter</td></tr>
<tr><td colspan="2">basisvariable</td><td colspan="2">navne på de transformerede søjler</td></tr>
<tr><td>x_1
.
.
.
.
.
.
x_m</td><td>øjebliks-
værdi af
basis-
variable</td><td>BASIS
N x M
enhedsmatrix</td><td>transformerede
søjler
svarende til de
variable
der ikke er
basisvariable</td></tr>
<tr><td>"Z"</td><td></td><td colspan="2">relative omkostningsfaktorer
altid nuller her</td></tr>
<tr><td colspan="2">objektfunktionens øjebliks-
værdi m. modsat fortegn</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Theorem 1.

Koefficienterne svarende til de (n-m ikke - basisvariable i en Simplex-tabels række (m + 1), kaldet de relative omkostningsfaktorer, repræsenterer det beløb, som objektfunktionens værdi ændres med, hvis variablens værdi øges med en enhed, mens alle andre ikke- basisvariable forbliver nul, og de m basisvariable ændrer værdi, således at ligningssystemet stadig holder.

Theorem 2.

For en given basis,B, kan alle relative omkostningsfaktorer beregnes ud fra de oprindelige a_{ij} i standardformen ved

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \pi_i a_{ij} \qquad \text{for alle } j$$

Theorem 3.

En mulig basisløsning er optimal, hvis alle $\bar{c}_j \leqslant 0$ (hvis z skal minimeres vil løsningen være optimal, hvis alle $c_j \geqslant 0$).

Theorem 4.

Lad x være en mulig ikke-degenereret basisløsning, med B som basis. I den dertil hørende kanoniske form antages $\bar{c}_s > 0$. Endvidere antages eksistensen af et $\bar{a}_{ks} > 0$.

Idet $\bar{a}^k$ (der er en enhedsvektor med et 1-tal i række k) forlader basis og a^s indføres i basis , kan vi frembringe et nyt kanonisk system ved transformation af samtlige (m + 1) x (n + 1) elementer i den nuværende kanoniske form (Simplex-tabel):

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ij} = \bar{a}_{ij} - \dfrac{\bar{a}_{kj}}{\bar{a}_{ks}} \bar{a}_{is} & i = 1,2.........m + 1, \\ & i \neq k \\ a_{kj} = \dfrac{\bar{a}_{kj}}{a_{ks}} & \end{array}\right\} \quad j = o,....n$$

Simplex-algoritmen kan herefter beskrives formelt på følgende måde:

Lad os antage, at vi befinder os midt i den iterative proces, og at vi har et kanonisk system med $B = (a^1, a^2, ...a^m)$ som basis, hvor B er en enhedsmatrix.

1. Hvis alle $c_j \leqslant 0$ er den nuværende løsning optimal, og den iterative proces stopper.

Regelen for valg af S (og dermed x_s) , hvis der er flere kandidater:

$$\underbrace{S = \min\left\{ t \mid \underbrace{\bar{c}_t = \max_j \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j > 0 \}}_{\text{vælg større relative omkostningskoefficienter}} \right\}}_{\text{Hvis valget ikke er entydigt, vælg den blandt de største, hvis index er mindst.}}$$

2. Der konstrueres en ny løsning, hvor x_s bliver positiv, og hvor alle øvrige ikke-basisvariable forbliver nul. Forøg x_s fra nul til

$$\bar{b}_k / \bar{a}_{ks} = \min_{a_{is} > 0} \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{is} \}$$

Hvis alle $a_{is} \leqslant 0$ kan x_s øges vilkårligt, uden at nogle af de øvrige basisvariable bliver negative. Dette betyder, at der eksisterer en løsning, hvor z ikke er opadtil begrænset. I så fald standses beregningerne.

3. Den k'te ligning i det kanoniske system, med $a_{ks} > 0$ som pivoelement benyttes til elimination af x_s fra de øvrige ligninger.

Denne procedure gentages til:
enten 1) $z \to \infty$
eller 2) en optimal basisløsning er bestemt. (alle $\bar{c}_j < 0$).

Under forudsætning af ikke-degeneration i hver iteration vil processen afsluttes med enten 1) eller 2) efter et endeligt antal iterationer, fordi en basis kun kan udtages på $\binom{n}{m}$ måder, og da z forøges efter hver iteration, vil en bestemt basis ikke kunne "gå igen".

For at gøre Simplex-algoritmen operationel, for et hvilket som helst LP-problem, må vi fjerne den tidligere antagne forudsætning om at alle løsninger var ikke-degenerede. I så fald kan en eller flere b_i antage værdien nul, og hvis de tilsvarende elementer a_{is} i a^s er positive, vil en forøgelse af x_5 ikke kunne gennemføres uden at en eller flere variable i basis bliver negative. Dette medfører, at anvendelsen af de tre trin kan resultere i en ny basis (extrempunkt) løsning, og derfor i en nu simplex-tabel, uden at objektfunktionen bliver forøget. Teoretisk set kan det bevirke at antallet af iterationer kan blive uendeligt. En basis fra en tidligere Simplex-tabel vil kunne genopstå som basis i en senere tabel hvorved iterationerne gentages i en cyklus. I praksis er det uhyre sjældent at "cykling" finder sted, og de allerfleste standardprogrammer er forberedt herpå, således at der ved hjælp af en såkaldt perturbation også kan opnås konvergens selv hvis cykling skulle finde sted.

4. OPTIMERING I LANDBRUGET.

I nærværende afsnit vil vi forsøge at gøre rede for en praktisk anvendelse af optimering.

Behandlingen af dette emne har to hovedformål:

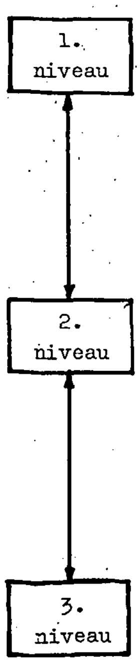
1. At udvikle en erkendelse om samspillet mellem den udviklede teori og teoriens praktiske anvendelse, herunder specielt problemerne i forbindelse med oversættelsen fra teori til praksis, samt problemer med formidling af opnåede resultater.

2. I forbindelse med undersøgelserne omkring den praktiske anvendelse af optimering, at afvikle den i bekendtgørelsen nævnte 3o - timers praktik.

Som nævnt i indledningen har det af arbejdsmæssige hensyn været nødvendigt at begrænse undersøgelsesområdet til landbruget.
  I det følgende vil vi derfor kun beskæftige os med de optimeringsmetoder og problemer som forekommer i landbruget.

Vore opgave i dette afsnit bliver derfor at belyse hvilke styringsmuligheder af produktionen, der findes på en landbrugsejendom, hvordan man i praksis planlægger, samt hvilke muligheder man har for at planlægge v.hj. a. matematiske optimeringsmetoder.

Igennem vores arbejde med dette emne, viste det sig imidlertid hurtigt, at det var nødvendigt, at sætte sig ind i landbrugets organisationshierarki, for at kunne finde frem til relevante oplysninger.
  Vi vil her give en meget forenklet fremstilling af dette organisatoriske system, da et sådant kendskab vil lette den videre behandling.



Planlægningsfirmaerne.
EDB-firmaer der har specialiseret sig i landbrugets planlægningsproblemer.
F.eks.:
Landbrugets EDB-central (LEC)
Regnecentralen (RC)
Jordbrugets EDB-Central

Konsulenttjenesten.
I landbrugets egne organisationer som: Landboforeninger, Husmandsforeninger og Kontrolforeninger, er ansat konsulenter indenfor områder som:
Planteavl
Kvæghold
Grisehold
Etablering, økonomi

Landmanden.

De nødvendige informationer til denne undersøgelse er hovedsageligt indkommet ved interview af landmænd og konsulenter. Dog kan det nævnes, at vi også har haft kontakt til LEC og til enkelte personer på Landbohøjskolen, som har forsket i disse planlægningsproblemer.

I det følgende vil vi se på de enkelte niveauer, hvilke problemer og muligher landmanden har, hvad konsulenternes opgaver er, og hvad EDB-firmaerne tilbyder.

4.1 PROBLEMBESKRIVELSE.

En landbrugsejendom er somregel en virksomhed, hvor der findes et stort antal variable (gødning, vand ect.) til styring af produktionen. For at få et overblik over, hvad det er for typer variable, vil vi liste nogle typiske og prøve og gruppere dem efter, om de er variable, som kan styres af landmanden, staten eller slet ikke kan styres.

> Variable som landmanden kan styre.
> Jordareal, jordkvalitet, staldplads, maskiner, dyr, gødningsmængde, fodermængde, planternes fordeling på jordarealet, arbejdstimer, medhjælp.
>
> Variable som staten til en vis udstrækning kan styre.
> Lånemuligheder, gæld og i det hele taget forskellige finansieringsmuligheder.
>
> Variable som ikke er styrbare.
> Klima (regnmængde, jordfygning ect.).

Udfra sit kendskab til ovennævnte variable har landmanden hidtil skullet tage stilling til problemer som:

- -hvad skal der sås på markerne
- -hvor mange svin skal der købes
- -hvor meget kvæg skal der købes/sælges
- -evt. investeringer i maskiner
- -hvor meget foder skal der købes/sælges
- -hvordan skal der gødes
- -skal der investeres i ny jord, nye maskiner eller en ny stald
- -hvordan skald foderet blandes
- -ect.

Disse spørgsmål er dog kun detail-spørgsmål i hovedproblemet for landmanden:

> Hvordan planlægger jeg mine investeringer, afgrøde-fordelinger og dyrehold således, at mit udbytte under de givne begrænsninger (herunder også min arbejdstid) bliver optimal.

Løsningen på dette spørgsmål bliver i disse år mere og mere aktuel, idet fortjenesten pr. produceret enhed bliver mindre og mindre, og landmanden derfor må udvide/ændre sin produktion for at opretholde sin årsindtægt.

I sine bestræbelser på at kunne løse sådanne planlægningsproblemer har man dels på landbohøjskolen, dels i et under landbrugsministeriet nedsat driftsøkonomiudvalg søgt, at udvikle optimeringsmetoder, der specielt er anvendelige i landbruget. Hvad det er for problemer man specielt ønsker belyst og løst, ses af formålsformuleringen for driftsøkonomiudvalget:

1. Udvikling og forbedring af metoder til brug for planlægning på den enkelte bedrift.

2. Udvikling af metoder til brug for kontrol med og styring af produktionen på kortere og længere sigt.

3. Vurdering af nye teknisk-biologiske produktionsmetoder i forhold til eksisterende metoder (gennem modelbrugsstudier).

4. Udvikling og ajourføring af materialer til brug i arbejdet med analyse, kontrol og planlægning.

5. Undervisning i og information om brugen af de udviklede metoder og arbejdsmaterialer.
(Fra beretning,76-77,s.249)

Imidlertid er det ikke mange landmænd, der søger denne optimale planlægning. Derimod tilrettelægger de deres produktion ved at tage isolerede beslutninger angående de tidligere nævnte detailproblemer. Dette skyldes ikke alene konservatisme, men sikkert også et ønske om selv at have indflydelse på beslutningerne, således at det ikke alene er økonomiske betragtninger der ligger til grund for planlægningen, men også miljømæssige. Dette sidste skal nok (desværre) ikke så meget ses som det totale miljø, men snarere som landmandens eget arbejdsmiljø, hans lyst til og glæde ved arbejdet.

Disse forhold har ført til at man har måttet udvikle systemer til beregning af planlægninger på forskellige niveauer.Ikke alaene kan man give svar de enkelte spørgsmål, uden at se på relationerne mellem dem, men der er også udviklet systemer til generelle korttids-såvel som langtidsplanlægninger for de landmænd, som er interesseret.

4.2 OPTIMERINGSBESTRÆBELSER I LANDBRUGET.

Det sted, hvor man i landbruget først og fremmest ser et reelt udtryk for optimeringsbestræbelser, er i de kvægholdende landmænds medlemsskab af kontrolforeningerne.Ved medlemsskab af en kontrolforening får landmanden med jævne mellemrum kontrolleret de enkelte køers ydeevne, og på dette grundlag beregner kontrolforeningen, gennem LEC, hvilken fodersammensætning de enkelte køer skal have.

Det siges, at de landmænd der følger foderanvisningerne, kan opnå et dækningsbidrag på 25 kr. pr ko pr. dag,mens andre er nede på 3-5 kr pr. ko pr. dag.

Der er altså virkelig penge at hente, hvorfor det kan virke absurd, at der er landmænd, der betaler for medlemsskab af kontrolforeningen, ca. 7o kr. pr. ko pr. år, uden at benytte sig af kontrolforeningens foderanvisninger. Denne absurditet forklares med, at en del specielt ældre landmænd, ikke synes, at den forøgede fortjeneste er det ekstra arbejde med individuelle forderblandinger værd. Denne holdning hos ældre landmænd hænger selvfølgelig sammen med, at de ikke har de samme store faste udgifter, som de yngre nyetablerede landmænd.

Kontrolforeningens resultater bygger ikke på en egentlig matematisk optimering, men på mange års erfaringer, der er gjort tilgængelige i tabeller. Der er altså tale om nogle beregninger, som landmanden i princippet godt selv kunne udføre. Den store fordel ved at lade kontrolforeningen udføre arbejdet, er imidlertid, at det så bliver gjort, hvorimod landmanden ikke kan overkomme efter en hel dags arbejde at tilbringe aftenen med at udføre kedelige beregninger.

Andre bestræbelser, der heller ikke er udtryk for en egentlig matematisk optimering, er konsulenternes rådgivning af landmændene, når det f.eks. gælder gødning af markerne. Man bygger her på erfaringer, der siger, hvilken gødning man skal give en bestemt slags jord, for at opnå et bedre udbytte af en bestemt afgrøde.

Endelig kan man nævne de senere års stærkt stigende antal anskaffelser af markvandingsanlæg. De giver selvfølgelig mulighed for et større udbytte på et givet areal, men de giver samtidig landmanden mulighed for en langt mere effektiv arealudnyttelse. Hvis landmanden f.eks. har meget kvæg, skal han til dette kvæg benytte en bestemt mængde græs. Hvis han ikke vander græsmarkerne, er han nødt til at lægge et uforholdsmæssigt stort græsareal ud, for at være sikret i tilfælde af tørke. Ved vanding kan han derimod styre græsudbyttet utroligt sikkert, og derved dyrke andre afgrøder på det frigivne areal.

4.3 PRODUKTIONSPLANLÆGNING VED LINEÆR PROGRAMMERING.

For at kunne løse et optimeringsproblem med lineær programmering, er det en betingelse, at både objektfunktionen og begrænsningerne kan beskrives ved lineære udtryk. For at opnå dette, er det tit nødvendigt at tilnærme de virkelige forhold , som man måske ikke engang kender særlig præcist, med lineære udtryk, som man mener er tilstrækkelig ; i hvert fald indenfor det interessante område.

Af denne grund er lineær programmering ikke velegnet ved optimeringsproblemer af biologisk art, hvor det f.eks. ikke er givet, at der er et lineært forhold mellem det enkelte svins væksthastighed og fødemængden. Derfor anvendes lineær programmering mere ved driftsplanlægning af mere makroskopisk art, hvor det kan være rimeligt at antage, at der er en lineær sammenhæng mellem f.eks. antallet af svin og den nødvendige fodermængde, eller mellem mængden af dyrket korn og det nødvendige markareal.

Det er således først og fremmest ved planlægning af landbrugets samlede drift, herunder også investeringsplanlægning, at lineær programmering kan komme til anvendelse. Det er dog ofte p.gr. af optimeringsproblemets natur, f.eks. køb af en traktor eller ej, nødvendigt at kræve at nogle af løsningens parametre er heltallige, altså lineær heltalsprogrammering.

De optimeringsproblemer der herved kan løses, kan kort eksemplificeres således:

Til gården er knyttet et bestemt markareal og en given staldkapacitet. Der kan vælges mellem dyrkning af et antal forskellige afgrøder, for hvilke markkrav, arbejdskrav og dækningsbidrag er kendt. Bedriftens nuværende besætning kendes, og kravene til staldkapacitet og arbejdsinsats samt dækningsbidraget ved ændret besætning kendes. Gårdejeren ønsker nu at få at vide, hvordan han skal sammensætte afgrøderne, og hvordan kvægbesætningen skal være, for at han kan opnå det maksimale dækningsbidrag, når han højest vil arbejde 6o timer pr. uge.

Et konkret eksempel med realistiske tal kan ses i :(Stryg og Hjortshøj, Landbrugets operationsøkonomi, 1975, s.143) mens en samlet oversigt over, hvorledes man får en sådan driftsplanlægning udført af Landbrugets EDB-Center kan ses i "Driftsplanlægning med anvendelse af lineær programmering", LEC 1974. Denne bog indeholder endvidere oplysninger om, hvilke typer informationer man får fra LEC, samt hvordan EDB-udskrifterne skal læses.

Specielt med henblik på investeringsplanlægning kan man se:

"Seminar om 'Belysning af investeringstakten for den enkelte landbrugsbedrift under forskellige vækstforudsætninger' , Erik Maegaard, Økonomisk Institut, Den Kgl. Veterinær-og Landbohøjskole, marts 1976."

4.4 LANGTIDSPLANLÆGNING I DANSK LANDBRUG.

Indledende bemærkninger

At planlægge indebærer opstillelsen af et beslutningsprogram, der fører til de valgte mål.

Det første store problem man i den forbindelse støder på, er det fantastisk vanskelige i, at gennemføre en lantidsplan for landbruget. Dette skyldes at andre af samfundets sektorer ikke handler koordineret med landbrugssektoren, hvorved disse sektorer sammen med udviklingen i aftagerlandene, modvirker beslutningerne i landbrugssektoren.

En lantidsplanlægning af landbrugets udvikling på landsplan kan naturligvis kun foretages af staten, hvilket med Danmarks medlemsskab af EF vil sige på fælleseuropæisk plan. Da dette gør problemet meget kompliceret på grund af modstridende interesser i EF, og da man efter alt at dømme ikke kan blive enige om en fælles linie, har vi ikke set dybere i problemet.

Langtidsplanlægning for den enkelte bedrift.

Som grundlag for en prognose for landbrugets udvikling frem til 1985 har man ment, at derskulle ske en nedgang i antallet af bedrifter, hvorved der skulle ske en øgning i bedrifternes størrelse, med heraf følgende voksende planlægningsmulighder. Denne prognose har imidlertid allerede nu vist sig at slå fejl, da den store arbejdsløshed i i de typiske byerhverv har nedsat vandringen fra land til by.

Formodningen om, at udviklingen vil gå imod større bedrifter, har ført til, at man bl.a. har arbejdet med metoder til bestemmelse af den optimale investeringsstrategi for ekspanderende bedrifter. Man vil her bl. a. tage hensyn til varierende forudsætninger som : lånemuligheder, markedsrente, inflation, afsætningsmuligheder og produktionsformer.

Til disse langtidsplanlægningsproblemer, der strækker sig over perioder på op til 12 år, anvendes ofte de såkaldte flerperiode-LP modeller, der i princippet består af et antal enkeltperiode LP modeller, der er koblet således sammen, at beslutninger truffet i een periode, får indflydelse på de næste perioder.

De er altså i princippet traditionelle lineære programmeringsmodeller, men de indeholder ofte så mange variable og restriktioner (op til 25oo X 25oo), at det selv med en datamaskine er en langvarig affære at løse det enkelte eksempel.

4.5 PLANLÆGNINGSPERSPEKTIVER I DANSK LANDBRUG.

En af de meget store ændringer i landbruget indenfor de sidste ti år, er anvendelsen af elektronisk databehandling indenfor specielt regnskabsføring, men også i stigende grad i planlægningen. Endnu er denne udvikling kun i sin vorden. På længere sigt er det meningen, at hele bedriftens produktionsplan kan lægges via et "optimeringsprogram", der er opbygget på grundlag af de oplysninger om bedriftens størrelse, sammensætning, investeringer i bedriften osv. der er indsamlet.

Vi mener endvidere, at man i de kommende år må ændre fremgangsmåde ved den kortsigtede produktionsplanlægning, idet man hidtil har planlagt ud fra et kortsigtet ønske om maksimalt dækningsbidrag, uden at man har skænket langtidskonsekvenserne af et stort ressourceforbrug den helt store opmærksomhed. Denne situation mener vi er uholdbar på længere sigt, idet det må blive nødvendigt at inddrage overvejelser over ressourceforbrugets langtidskonsekvenser for at opnå et maksimalt dækningsbidrag over en længere periode.

5. SAMMENFATNING OG DISKUSSION.

I denne rapport har vi bearbejdet tre forskellige indgangsvinkler for at forstå det abstrakte begreb "optimering", nemlig en historisk, en matematisk og en anvendelsesmæssig indgangsvinkel.

Det har vist sig, at begrebet optimering ikke er et en gang for alle fast defineret begreb, men et begreb med en udviklingshistorie, som sandsynligvis vil fortsætte. Således har optimering først fået en central betydning i dagligdagen indenfor de sidste årtier.

For at forstå, hvad optimering er, må man se på to sider af begrebet, dels dets rent matematiske definitioner og dels dets meget konkrete sammenhæng med virkeligheden.

De matematiske definitioner fremstiller klart, hvad man ved en matematisk behandling af et matematisk problem skal forstå ved et optimum. Derimod er det normalt ikke klart, hvad man skal forstå ved optimum i et praktisk problem, da det her ofte er således, at forskellige kriterier prioriteres forskelligt af forskellige interessegrupper, eller der kan være kriterier, der ikke kan sættes på matematisk form.

Vi har dog i kap. 2 set, at de matematiske formuleringer af optimalitet er udsprunget af praktiske problemer, og definitionerne af optimum må derfor være et bud på en beskrivelse af disse problemer. Men det faktum, at den matematiske problembeskrivelse udspringer af praksis, er ikke synonymt med, at den beskriver praksis, idet der også ligger et andet kriterie til grund for en matematisk formulering, nemlig at problemet skal kunne løses.

Som et eksempel på det sidste kan nævnes, at lineær programmerings store udbredelse i højere grad skyldes den effektive Simplex-algoritme end en nøjagtig problembeskrivelse. Eller med andre ord: antagelsen om, at det praktiske problems sammenhænge er lineære, må sluges til gengæld for løsninger.

Vi er her inde på noget helt centralt ved optimering, nemlig dets begrebsmæssige placering på grænsen mellem praktiske og matematiske problemer. I dette ligner optimering begreber som "bevægelse" og "sandsynlighed", som begge er fuldstændigt fastlagt matematisk, men hvis tolkning i praktiske problemer ikke er tilsvarende entydig.

For at forstå den dialektiske vekselvirkning mellem den matematiske formulering af optimalitet på den ene side og praktiske problemer på den anden, må man se empirisk på den historiske udvikling af såvel de matematiske som de praktiske optimeringsproblemer.

Vekselvirkningen mellem samfund og optimeringsmatematikken.

Vores historiske undersøgelser viser, at der har været en meget tæt forbindelse og vekselvirkning mellem de konkrete samfundsforhold, og den udviklede optimeringsmatematik.
Denne vekselvirkning har været mere eller mindre umiddelbar, idet man direkte har benyttet matematiske optimeringsmetoder til løsning af praktiske problemer, og mere inddirekte, ved at en økonomisk og ideologisk understøttelse af matematikken har styret denne i bestemte retninger, afhængig af magthavernes ideologi, og omfanget og arten af den økonomiske understøttelse.

Dette gælder ikke kun specielt for optimeringsmatematikken.; men det fascinerende ved optimeringsmatematikken er, at den som følge af samfundenes udvikling, har fået en stadig mere central placering i disse, som følge af de øgede behov for styring og planlægning af vore dages komplekse samfundssystemer.
Det generelle problem i denne vekselvirkningsproces, har været at oversætte de praktiske problemer til matematiske optimeringsproblemer, og at anvende den udviklede optimeringsmatematik på nye problemer. Som et eksempel på dette dialektiske forhold kan vi nævne, at Nicolo Tartaglias løsning af kanonproblemet (se under Renæssancen), kun havde matematisk interesse, fordi han ikke i sin model tog hensyn til vindmodstanden. Men senere, ved udviklingen af optimeringsmatematikken, har det været muligt at løse dette problem tilfredsstillende, set ud fra kanonérerens synspunkt, således at kanonen kan stilles i den rette vinkel når den skal skyde længst.

Som et andet eksempel kan vi nævne, at det i det gamle Grækenland ikke var af særlig vital betydning at kunne planlægge sine aktiviteter for at opnå et maksimalt udbytte. Men den ideologiske fortolkning af matematikken som en guddommelig beskæftigelse, uden nogen praktisk relevans, førte til en frugtbar teoretisk udvikling, også indenfor optimeringsmatematikken.I dette tilfælde, var der ingen problemer med at "oversætte" matematikken til anvendelse på praktiske problemer. Men alligevel er der en meget stærk vekselvirkning mellem samfund og matematik, blot på det ideologiske plan.

Udviklingen af optimeringsmatematikken har, som en samlet vurdering, gået fra at være underproblemer i en større teori (Apollonius, over at være en metode til beskrivelse af naturen (Lagrange), til at være et stadigt mere effektivt værktøj til styring og planlægning af menneskelige aktiviteter (Pontryagin).

Systematisering af optimeringsmatematikken.

Dette værktøj, optimeringsmatematikken, bliver mere og mere effektivt via en systematiserings-og struktureringsprocedure, af de forskellige teorier der er udviklet. Vi har i kapitel 3 vist, hvorledes 9 forskellige optimeringsproblemer kan samles som særtilfælde af en generel matematisk teori. Disse 9 problemer repræsentere dog kun et meget lille hjørne af optimeringsmatematikken, men viser dog klart udviklingstendenserne i optimeringsmatematikken.

Det betyder, at selvom vi får flere og flere optimeringssituationer, og der sker en kvalitativ og kvantitativ vækst af optimeringsmatematikken, kommer vi - via struktureringen til en trivialisering af det matematiske begrebsapparat. Noget tilsvarende kan ses, når de sociale forhold i et land bliver meget udbyggede og komplekse, idet man derved opnår, at det bliver mere simpelt for det enkelte menneske at overskue sin situation.

Ser vi konkret på optimeringsmatematikkens nuværende stade, har (Girsanov, 1972) givet et bud på, hvorledes vores 9 problemer samt et par stykker mere, kan samles under en fællesnævner, via en fælles bevisførelse for de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at løse problemerne. Heri anføres en generel fremgangsmåde til bevis af de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for optimeringsproblemernes løsning.

Der er ingen tvivl om, at systematiseringen af optimeringsmatematikken vil fortsætte, særligt i de lande, hvor en total samfundsplanlægning er mulig, og ikke kun som i Danmark, hvor den er ønskværdig men desværre næppe mulig. Gennem en systematiserings-og struktureringsproces afslører matematikken sig som en bevidst og systematisk måde at beherske natur og samfund på.

<u>Anvendelse af optimeringsmetoder i landbruget.</u>

Som udgangspunkt for vores undersøgelse af anvendelsen af optimering i landbruget, stillede vi spørgsmålet:

Hvilke behov er der i dansk landbrug for anvendelse af optimering, og hvordan tilfredsstilles de ?. Herunder en diskussion af forholdet mellem forskningens stade og den faktisk forekommende anvendelse.

Det viste sig, at landbruget var dårligt valgt som eksempel på et anvendelsesområde for optimering, da det faktisk kun er lineær programmering, og det endda i ringe udstrækning, vi rent faktisk har set eksempler på anvendelse af. Det er ikke afklaret, hvilke typer optimeringsproblemer, i matematisk forstand, landbruget specielt har behov for at få løst; men det er tydeligt, at der er behov for en eller anden form for optimering. F.eks. betyder de dårlige financieringsvilkår for unge landmand, at de må klare deres leveomkostninger ved lån i de første år, og de har derfor brug for en planlægning, der hurtigst muligt får bedriften til at give overskud.

Vi kan altså ikke sige, at de optimeringsbehov, landbruget må siges at have, bliver løst tilfredsstillende; men det er på den anden side vanskeligt at sige, om problemet ligger i de udviklede metoders utilstrækkelighed, eller om den manglende anvendelse skyldes, at der endnu ikke er særlig mange færdige konsulenter med uddannelse i operationsøkonomi.

Det eneste, vi kan konstatere, er, at den nuværende forskning på området ligger langt fra den faktiske anvendelse; men at den på den anden side beskæftiger sig med nogle af de problemer, som man med rimelighed kan antage vil blive mere fremtrædende fremover. Der er dog en tendens til, at forskningen indenfor optimering i landbruget går i retning af rent økonomiske overvejelser, og ikke i retning af ressourcemæssige overvejelser.

Vi mener, at det ville have stor betydning for udbredelsen af anvendelsen af optimering, hvis struktureringen af optimeringsmetoderne, som Girsanov har påbegyndt, blev udvidet til et bredere felt af optimeringsmetoder. Girsanovs bog lider dog af den mangel, at den totalt mangler eksempler, hvilke vi mener er en væsentlig del af den trivialisering, som struktureringen er en anden del af.

REFERENCELISTE.

Alexandrov,1971 : Alexandrov,P.S.:Die Hilbertschen Probleme,Leipzig 1971

Andersen,1974 : Andersen,Frede et al: Dansk Landbrug i 1985?,Økonomisk Institut,Den Kgl. Veterinær-og Landbohøjskole,København 1974.

Berkovitz,1974 : Berkovitz,L.D. : Optimal Control Theory,Springer Verlag Berlin 1974.

Bernal,1969 : Bernal,J.D. : Science in History,Penguin Books,1969

Bos,1978 : Bos,H.J.M.: "Was Lehren uns Historische beispiele über Mathematik und Gesellschaft,duplikat 1978.

Boltjanski,1972 : Boltjanski,W.G. : Mathematische Methoden der Optimalen Steuerung. Carl Hansen Verlag,München 1972.

Bronstein,1971 : Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik,Verlag Harri Deutsch,1971

Buhr,1972 : Buhr,Manfred und Klaus,Georg: Philosophisches Wörterbuch,Leipzig 1972

Clarke,1978 : Clarke :Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 84, 1978

Collatz,1975 : Collatz L.,Wetterling W.:Optim zation Problems,Springer Verlag,Berlin 1975

Eriksson,1968 : Eriksson,Folke: Flerdimensionell analys,Studentlitteratur,1968

Fischer,1973 : Fischer,R.A. : Statistical Methods and Scientific Inference,3. udgave,1973,kapitel 5 afsnit 1 er oversat og kommeteret af Jørgen Larsen,1978

Géminos,1975 : Geminos ,De Rhodes: Introduction aux Phénoménes,Société D'édition " Les Belles Lettres",1975

Gnedenko,1977 : Gnedenko: American.Math.Soc.Trans.,Vol 1o9: Gnedenko,B.V.: Current Studies in the history of Mathematics in USSR,1977

Girsanov,1972 : Girsanov,I.V.: Lectures on the Mathematical theory of Extremum Problems,Springer Verlag,1972

Gossick,1967 : Gossick,B.R. : Hamiltons Principle and Physical Systems, Academic Press,1967.

Høyrup,1973 : Høyrup, Else og Jens : Matematikken i samfundet, Gyldendals Samfundsbibliotek,1973

Jacobsen,1976 : Jacobsen,S.K.: Elementær Operationsanalyse,2. udgave IMSOR,1976.

Kline,1972 : Kline,M.: Mathematical Thought fron Ancient to Modern Times, Oxford University Press,1972.

Krarup,1974 : Krarup,J. og Pruzan,P.M.: Lineær Programmering, Polyteknisk forlag 1974

LEC,1974 :Landbrugets EDB-Center: Driftsplanlægning med anvendelse af lineær programmering,1974.

Maegaard,1976 : Maegaard,E.: Belysning af investeringstaksten for den enkelte landbrugsbedrift under forskellige vækstforudsætninger,Økonomisk Institut,dem Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole,marts 1976.

McCloskey,1956 : McCloskey & Trefthen: Operations Research for Mangement,156,John Hopkins.

Müller,1971 : Müller-Merbach: Operations Research,München 1971,Verlag Franz Vahlen.

Selsam,1974 : Cohen,R.S. et al : " For Dirk Struik",D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974

Sharlin,1961 : Sharlin,H.I : "From Faraday to the Dynamo", i Science America,1961

Struik,1966 : Struik,D.J.:Matematikkens historie,Haases Facetbøger 1963.

Stryg,1975 : Stryg,D.J. og Hjortshøj A: Landbrugets Operationsøkonomi,DSR,1975,

Tolle,1975 : Tolle,H: Optimizations Methods,Springer Verlag 1975.

Unesco,1972 : Unesco: Scientific Thought,Mouton/Unesco 1972

Wussing,1975 : Wussing,H. og Kaufmann A.: Biographien Bedeutender Mathematiker,Volk und Wissen,Berlin 1975

Zwicky,1967 : Zwicky F. og Wilson A.G.: New Methods of thought and Procedure,Springer Verlag,Berlin 1967.

Optimering

MENNESKETS FORØGEDE BEHERSKELSESMULIGHEDER

AF NATUR OG SAMFUND