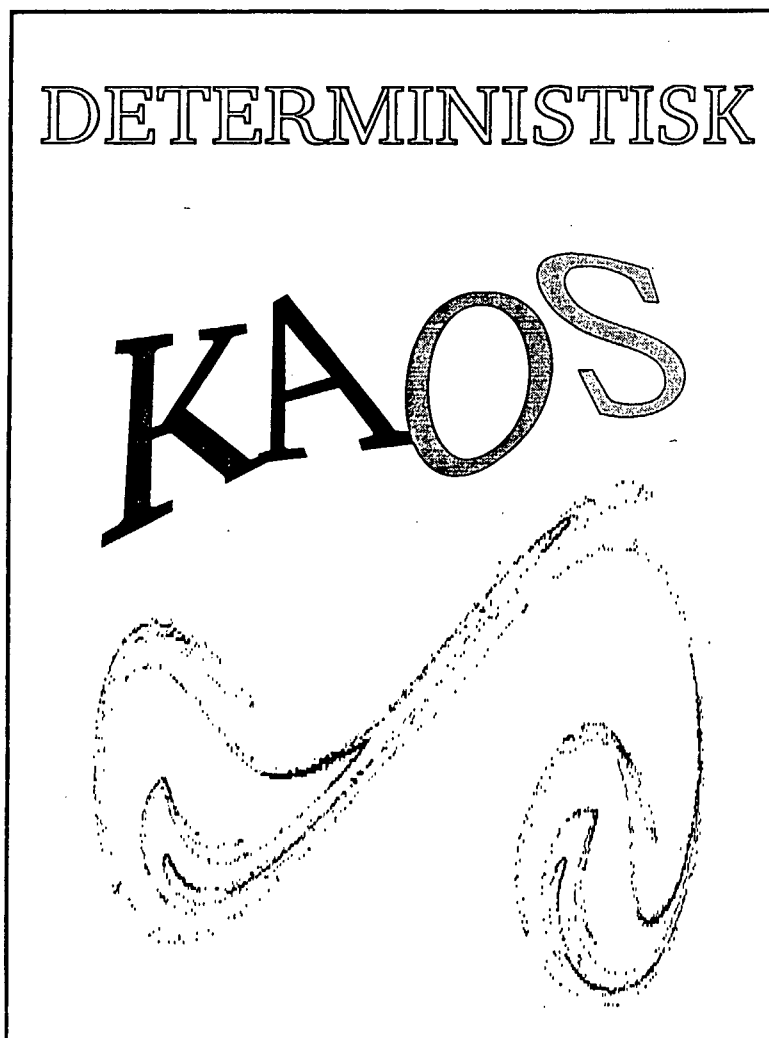


TEKST NR 194a

1990



Projektrapport af: Frank Olsen.

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde.

Deterministisk kaos.

Af: Frank Olsen.

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Karin Beyer.

IMFUFA tekst nr. 194a/90

72 sider

ISSN 0106-6242

Abstrakt.

Teksten falder i to dele. Første del omhandler kaosteori; hvorfor er kaosteori nødvendig og hvad er det. Dette er eksemplificeret med opstilling og behandling af en dynamisk model for et simpelt system, der udviser kaotisk adfærd, torsionspendulet. Anden del er en kørselsrapport med udvalgte kørsler fra computersimulation af torsionspendulet.

Frank Olsen,
RUC juni 1989.

DETERMINISTISK KAOS

At regne den ud for
torsionspendulet

2. moduls
rapport
i fysik

for

FRANK OLSEN

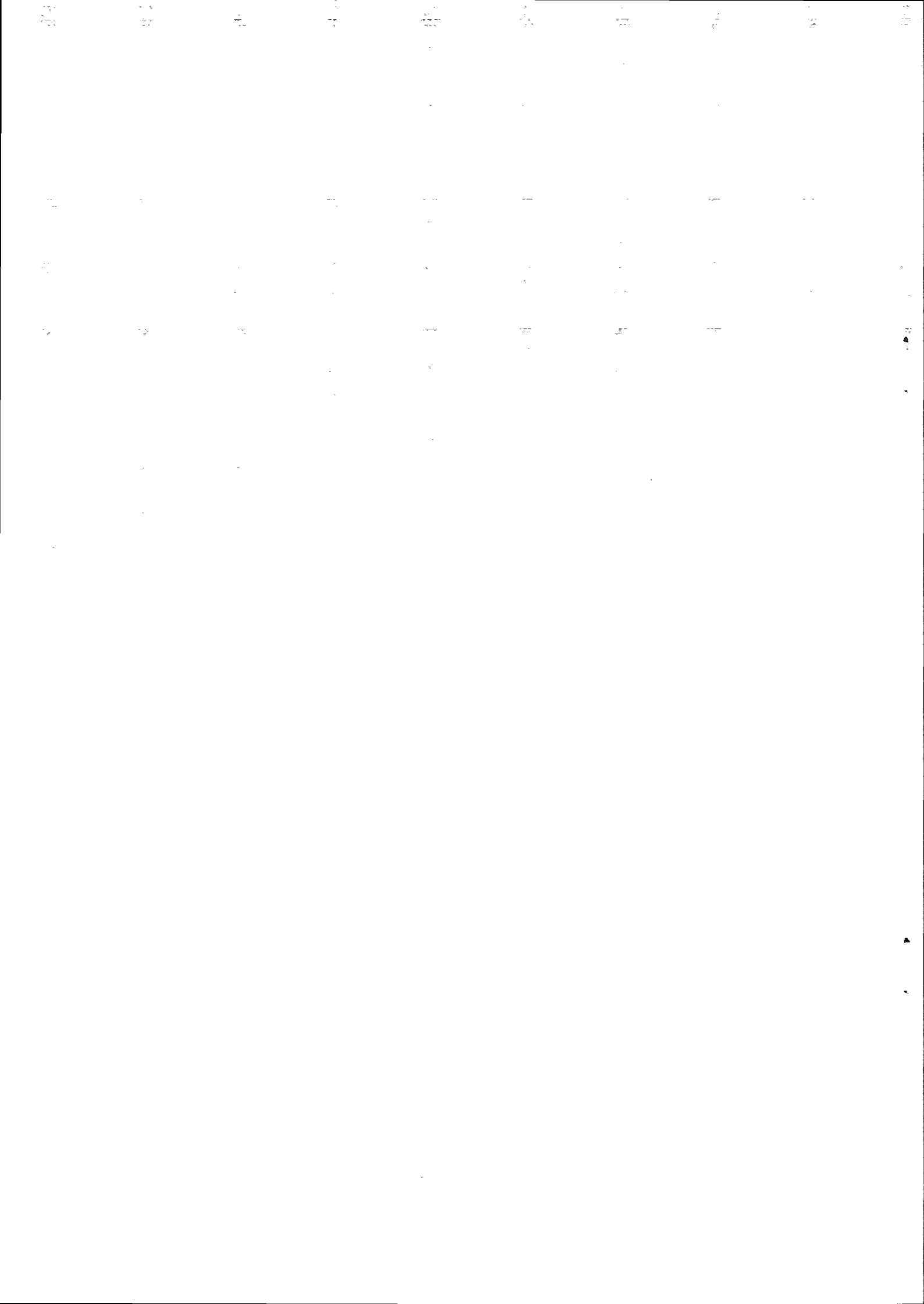
Vejledere:

Peder Voetmann Christiansen

Karin Beyer

JUNI 1989

IMFUFA • ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER



FORORD

"There was a story about the quantum theorist W. Heisenberg, on his deathbed, declaring that he will have two questions for God: Why relativity, and why turbulence. Heisenberg says, "I really think he may have an answer to the first question"."

(James Gleick)

Siden Landau i 1944 forsøgte en forklaring på turbulens, er der løbet meget vand i havet. Indenfor de sidste ca. 20 år, er der adskillige der er kommet med mere plausible svar på spørgsmålet. Vi nærmer os en mere fuldstændig beskrivelse af naturen. Denne nye beskrivelsesmåde er blevet kaldt kaosteori. Det er det, denne rapport handler om.

Rapporten er lavet på 2. modul (dybdemodulet) på fysikuddannelsen på RUC. Den er resultatet af et forsøg på at føre teorien ud i praksis igen. Op gennem 1970'erne og i starten af 1980'erne, har kaosforskningen stort set udelukkende drejet sig om matematiske abstraktioner (Feigenbaum og Mandelbrot). Men der er tale om andet end matematiske kuriositeter. De seneste år er der blevet brugt mange kræfter på at finde og undersøge virkelige systemer, der opfører sig kaotisk. Til syvende og sidst er det jo naturen, det drejer sig om.

-- o --

Rapporten indeholder

en fortælling om den ramme projektet er blevet til i; de øvelser IMFUFA udbyder, og hvordan de studerende har bidraget til dem, samt hvilke forudsætninger jeg vil stille til læseren.

En historisk gennemgang af kaosteoriens udvikling, om hvordan den er gået fra at beskæftige sig med matematiske systemer til fysiske. Desuden en kort introduktion til det system jeg har undersøgt, torsionspendulet.

En teoretisk gennemgang af de vigtigste begreber og redskaber i kaosforskningen. Kaos fremstillet som orden - kompliceret orden.

En gennemgang af det simulerede system, torsionspendulet. Hvordan påviser man kaos i praksis, hvilke ting fra det matematiske kaos kan man genfinde, osv.

En kort skitsering af øvelserne og det bidrag jeg er kommet med: En introducerende video.

En tilbagevenden til virkeligheden. Hvad kan vi bruge kaosteorien til, hvilken betydning har den for os.

Endelig en kørselsrapport. Udvalgte kørsler, nummereret med tal, hvorimod figurerne i hovedrapporten er nummereret med bogstaver.

En tak til....

Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
Iben Maj Christiansen
Søren Brønd
Andy Wierød
Jimmy Staal
og sikkert mange flere.....

God fornøjelse !

Frank Olsen

2. modul fysik
RUC juni 1989

INDHOLDSFORTEGNELSE

FORORD	5
INDLEDNING	9
A. Baggrund	9
B. Forudsætninger	10
HVORFOR KAOSTEORI	12
A. Udsigelseskraft	12
B. Historisk udvikling	12
C. Kompliceret?	15
D. Fra matematisk kaos til fysiske systemer	16
E. Kort introduktion til torsionspendulet	17
KAOSTEORI HVORDAN	19
A. Indledning	19
B. Orden	19
C. Verden er ikke lineær; den er ikke-lineær	20
D. Tilbagevendende opførsel	23
E. Poincaré-snit	26
F. Attraktorer	27
G. Stabilitet	30
H. Bifurkationer	33
I. Veje til kaos	35
J. Udmåling	38
K. Computersimulation	39
L. Retur-afbildningen	42
TORSIONSPENDULET	47
A. CTS	47
B. Modellen	48
KAOS PÅ COMPUTER	56
A. Model/virkelighed	56
B. Figentræet (torsionspæret)	57
C. Intermittens	59
D. Blue sky catastrophe	60
E. Poincaré-snittet	62
ELEVØVELSERNE	64
A. Øvelserne generelt	64
B. Videoen specielt	64
TILBAGE TIL VIRKELIGHEDEN	67
A. Hvad kan vi bruge kaosteorien til?	67
B. Fremad	68
LITTERATURLISTE	70

FIGUROVERSIGT

<u>Figur A</u> : Ikke lineært torsionspendul	18
<u>Figur B</u> : Fjederpotentialiet	23
<u>Figur C</u> : Power-spektrum, diskret	24
<u>Figur D</u> : Torus'en	27
<u>Figur E</u> : Liapunov-stabilitet	30
<u>Figur F</u> : Liapunov-eksponent	31
<u>Figur G</u> : Bestemmelse af l	32
<u>Figur H</u> : Bifurkation	34
<u>Figur I</u> : Kontinuert og diskontinuert bifurkation	35
<u>Figur J</u> : Intermittens	37
<u>Figur K</u> : 'Blue sky catastrophe'	37
<u>Figur L</u> : 'Kontrol-fase-rum'	38
<u>Figur M</u> : 'Kontrol-attraktor-basin'er'	39
<u>Figur N</u> : Retur-afbildningen	42
<u>Figur O</u> : Den itererede afbildning	43
<u>Figur P</u> : 2-cykel	44
<u>Figur Q</u> : Den 2. itererede af en 2-cykel	44
<u>Figur R</u> : Intermittent forløb (tangent-bifurkation) ..	45
<u>Figur S</u> : Tangent-bifurkation	45
<u>Figur T</u> : Retur-afbildninger for kontinuerte systemer	45
<u>Figur U</u> : Intermittentstyper	46
<u>Figur V</u> : Brugerskærm	48
<u>Figur W</u> : Torsionspendul uden lod, ligevægtspunkt ...	49
<u>Figur X</u> : Torsionspendul med lod	49
<u>Figur Y</u> : CTS-model	52
<u>Figur Z</u> : Diskontinuert gnidningskraft	53
<u>Figur Æ</u> : $\tanh(kx)$	54
<u>Figur Ø</u> : Fjederpotentialiet for den ene grøft	57
<u>Figur Å</u> : Plan for besøget på RUC	65

INDLEDNING

A. Baggrund

Fysik er et fagområde, som få ved særligt meget om, men som har betydning for de fleste gennem påvirkning af den teknologiske og samfundsmæssige udvikling. Bl.a. for at påvirke det forhold har jeg valgt kombinationen fysik/kommunikation.

I efteråret 1988 og foråret 1989 har jeg forsøgt at integrere begge fag i et stykke faglig formidling. Det er kun lykkedes i begrænset omfang. Ofte har jeg følt mig mellem to stole, historiefortællerens og fagdidaktikerens. Derfor er der ikke kommet ét kombineret projekt ud af det.

Mit medieprojekt forsøger at beskrive det spændingsfelt, der eksisterer omkring den faglige formidler. På den ene side skal han tage hensyn til en faglighed, og på den anden side til en modtager af informationen. Interesserede henvises til rapporten "Kaos på video", (Christiansen og Olsen, 1989).

Fysikprojektet er mere traditionelt; først vil jeg behandle emneområdet, kaosteoriene. Det vil jeg eksemplificere med det praktiske arbejde omkring opstillingen og behandlingen af en dynamisk model for et simpelt fysisk system, torsionspendulet (en kort introduktion gives i kapitlet "Indledning").

Projektet startede i "Idekatalog.....til de større eksperimentelle arbejder i gymnasiet":

IMUFA Roskilde Universitetscenter

Postbox 260, 4000 Roskilde

Indbydelse til gymnasieklasser.

Eksperimentelle "store øvelser":

Disse eksperimentelle øvelser har en varighed på ialt 10 timer (incl. bearbejdning af resultater) fordelt på 2 dage. Deltagerantallet kan være 4-8. Øvelsesvejledning kan bestilles i forvejen.

1) Stoffets tilstandsformer - struktur - dynamik.

Overgangen mellem uordnede (væske, glas) og ordnede tilstandsformer (krystal). Undersøgelse af glasovergangen ved differential termisk analyse (afkølingskurver) med dataopsamling. Reaktion på elastiske, termiske og elektriske påvirkninger.

2) Ikke-lineær dynamik, eller eksperimentelt kaos.

En række simple forsøg med mekaniske, elektriske og viscoelastiske systemer, der udviser kaotisk adfærd. Metoder til dataopsamling og simulation.

Et besøg bedes aftalt i god tid.

Kontaktperson: Peder Voetmann Christiansen, IMUFA
Tlf.: 02 75 11, lokal 2478

(Ahlgren m.fl., 1988, s. 136-7)

I starten af efterårssemestret 1988 var vi 4 studerende, der gik i gang med opstilling, udmåling og simulation af disse eksperimenter. Omkring årsskiftet skiltes vore veje. Jeg gik i gang med at lave en video, som skulle introducere til disse forsøg, mens de tre andre, Søren Brønd, Jimmy Staal og Andy Wierød, arbejdede videre med andre forsøg og med at udarbejde lærebogsmateriale, forsøgsvejledninger, osv. (Brønd m.fl., 1989b).

Samarbejdet med de tre andre fysikstuderende har bestået i opstilling og modellering af torsionspendulet og diskussion af resultater specielt og af kaos generelt. De resultater, jeg vil redegøre for i denne projektrapport, må jeg selv tage ansvaret for.

Jeg vil senere (i kapitlet "Elevøvelserne") komme nærmere ind på, hvordan videoen skal indgå i gymnasieelevernes forløb med kaos, ligesom jeg kort vil skitsere indholdet i øvelserne. Videoen skal ses som et stykke konkret faglig formidling, ganske som lærebogsmaterialet.

B. Forudsætninger

Det er min intention at give en kort, generel introduktion til kaosteorien. Målgruppen er den fysikkyndige, der endnu (!) ikke har stiftet bekendtskab med teorien. jeg har ikke til sinds at nå ud i alle kroge, men alligevel

give en teoretisk baseret ide om kaos som kompleks orden. Ved at inddrage torsionspendulet som eksempel, skulle ideen også gerne blive håndgribelig.

I det følgende vil jeg altså forudsætte en del fysisk viden hos læseren. Det handler fx om almindelige lineære dynamiske systemer og deres opførsel, om konservative og dissipative systemer, differentiaalligninger, transienter og Hamiltonformalisme. Altså emner, der ligger ud over gymnasielevelt niveau. For en mere grundlæggende gennemgang kan jeg henvise til Søren, Andy og Jimmys speciale (Brønd m.fl., 1989a), og de indledende kapitler i Thompson og Stewart (1986). Den læge læser vil jeg henvise til James Gleicks bog "Kaos" (1989), som giver en medrivende skildring af kaosteorien og dens bagmænd. Jeg kan varmt anbefale den.

Fraktaler er et vigtigt område af kaosteorien. Jeg vil ikke behandle det nærmere, men forudsætte nogen kendskab til området. Jeg kan henvise til Jakobsen (1989) og Peitgen & Richter (1986).

Desuden regner jeg med, at man har set 'figentræet' (fx fig. 9) før, og ikke bliver overrasket over, at systemet først har en periodefordoblingskaskade.

Modsætningen til de lineære systemer er de ikke-lineære, som altså afhænger ikke-lineært af mindst en af de indgående variable. Et eksempel kunne være Helmholtz' oscillator (1870):

$$(d^2x/dt^2) + g*(dx/dt) + x + x^2 = A*cos(w*t),$$

hvor x altså indgår ikke-lineært. Ligningssystemet er introduceret til at modellere 'hammerens' opførsel i det menneskelige øre.

HVORFOR KAOSTEORI

A. Udsigelseskraft

Ideen med denne rapport er at give et indtryk af og et eksempel på, hvad kaos kan være. Ideen kaos har været genstand for megen omtale i medierne. Desværre af og til så populært, at et misbrug ligger lige for: "Ha! Man kan ikke sige noget om noget som helst". Afmagten overfor teknologi og eksperter resulterer i et behov for begrundet afvisning. "Opgøret med den rette linies tyranni" - eller hvad med udenadslæren: Danmarks kystlinie er så lang som vi vil, osv. Hvis man aldrig har forstået det grundlag, beslutningerne er blevet taget på, kommer kaosteorien til at legitimere en afvisning, når den udlægges som, at det kan man heller ikke.

For mig at se betyder kaosteorien det stik modsatte, nemlig at videnskabsfolk nu kan sige endnu mere om verden! De har manglet nogle redskaber til at beskrive store dele af virkeligheden, men dem er de ved at udvikle nu.

Samtidig er der sket et brud i deres opfattelse af, hvordan verden ser ud. Og de har fået et nyt syn på hvordan forskellige systemer kan opføre sig. De har fundet ud af, at virkeligheden er kaotisk. Men jeg vil først beskrive, hvordan det hele begyndte.¹

B. Historisk udvikling

Det begyndte omkring århundredeskiftet med den franske fysiker, matematiker og topolog Henri Poincaré (1854-1912). Han undersøgte de topologiske egenskaber af dynamiske systemers trajektorier i faserummet². Poincarés

¹ Kilderne til de historiske facts er bl.a. Gleick (1988), Lundqvist (1988), Milloni m.fl. (1987), Sparrow (1982) og Thompson & Stewart (1986).

² Topologien studerer, hvad der forbliver uforandret under forskellige afbildninger - altså en kvalitativ undersøgelse frem for en kvantitativ.

arbejde blev videreudviklet af G. D. Birkhoff (1884-1944), og op gennem århundredet kommer der få, spredte bidrag (fx Liapunov i 30'erne, Peixoto (1962), Smale (1963)), som bagefter 'passer ind' i puslespillet.

Sideløbende med det undersøger en del forskere faktisk ikke-lineære ligningssystemer. Mest kendt er nok Duffing (1918) og Rayleigh-Van der Pol (1896/1927).

Birkhoff havde en elev, som senere skulle vise sig at få stor betydning for udviklingen af kaosteoriene, nemlig E. N. Lorenz. Meteorologen Lorenz publicerede i 1963 den første artikel, som omhandlede det, der senere blev kaldt kaos. Desværre blev den publiceret i et meteorologisk tidsskrift, så der var ingen udenfor meteorologkredse, der bemærkede den (Lorenz, 1963).

Senere fik "Lorenz-attraktoren" næsten for stor opmærksomhed. Lorenz' ligningssystem kom fra en idealiseret matematisk model af termisk drevet væske-konvektion (cylindrisk konvektions-rulle), men for de parametre, han benyttede sig af, gav modellen ingen fysisk mening for væskestrømninger. Så der er blevet brugt mange kræfter på at finde virkelige systemer, hvor ligningssystemet passer. Et eksempel er "Lorenz-vandhjulet" (Sparrow, 1982).

Allerede i 1961 havde Lorenz set, hvor stor betydning udgangsbetingelserne kan have for et system. Han havde lavet en model for, hvordan vejret over USA burde opføre sig. Sammen med sine kolleger morede han sig med at lave computersimulationer af den. Modellen var forholdsvis simpel (8 differentially ligninger), men kunne alligevel modellere skiftende vindretninger, osv. På et tidspunkt ville han lave en kørsel, som begyndte 'midt i' en tidligere. Han tog de værdier, som computeren havde skrevet ud, og tastede dem ind som startbetingelser for den nye kørsel. Han havde ikke tænkt på, at det kunne have nogen betydning, at computeren regnede med flere cifre (6 efter kommaet), end den skrev ud (3 efter kommaet).

"There's a convergence in the way things work, and arbitrarily small influences don't blow up to have arbitrarily large effects." Winfree.

Efter kort tid afveg den nye kørsel fra den gamle. Lorenz indså, at meteorologiske forudsigelser aldrig ville blive gode over længere tid. På fig. 1 er to tilsvarende

kørsler fra simulationen af torsionspendulet. Forskellen på udgangsbetingelserne er $1/1000000$ af en radian!

Det er først op i 1970'erne, at der rigtig kommer gang i kaosforskningen. Grunden er ligeså simpel, som den er symptomatisk for samfundsudviklingen; det er først med udbredelsen af de små billige computere, pc'erne, at man får det nødvendige redskab til kaosforskningen. Computeren er for kaosforskeren, hvad hammer og mejsel er for billedhuggeren.

Når computeren er blevet så udbredt, betyder det også, at mange forskellige mennesker bruger dem, på mange forskellige måder. Computeren er et stykke legetøj, der skal undersøges - hvad kan det?

James Gleick, videnskabsjournalist, har sagt, at der er tre årsager til kaosforskningens opståen :

"For det første er vi bl.a. på grund af den grønne bølge begyndt at sætte pris på den vilde natur, det der ikke kan rubriceres eller reduceres til sine mindste bestanddele. For det andet bliver vi nu dagligt gennem medierne præsenteret for helhedsbilleder af verden på mange forskellige niveauer. Og endelig må det nævnes, at videnskabsmændene er begyndt at bruge computere på en måde, der ikke var forudset. Meningen var, at de skulle bruges til at løse konkrete opgaver. I stedet er folk begyndt at lege med dem: Hvad ville der ske, hvis vi gjorde sådan eller sådan. Det sætter skub i fantasien."
(Information 25-4-1989)

Der går altså hul på bylden i 1970'erne, og det er to personligheder, der sætter det hele i gang: Feigenbaum og Mandelbrot. Feigenbaum er først og fremmest kendt for at arbejde med den diskrete logistiske ligning, og Mandelbrot opdager fraktalerne.

Begge bliver de beskrevet som outsiders i den videnskabelige verden, og Mandelbrot er også kendt for sin insisterende ubeskedenhed. Men som Gleick skriver, "the face of genius need not always wear an Einstein's saintlike mien".

Men der er også andre bidrag, fx leder Ruelle og Takens efter 'Landau-frekvenser' ved overgang til turbulens, men finder ikke flere end to, højst tre.

Betegnelsen 'kaos' bliver introduceret af James Yorke i 1975, men vinder ikke almindelig akcept straks. Ordet er tydeligvis for 'populært'.

Hvor man før kunne sige, at det lineære blev forfordelt, må man nu sige, at det ikke-lineære har fået sin plads, i hvert fald på de højere læreanstalter.

C. Kompliceret?

Når fysikere og matematikere har opponeret mod betegnelsen 'kaos', er det fordi ordet har nogle uheldige konnotationer. Når vi siger, at noget er kaotisk, mener vi som regel, at det er uordnet. Og det fænomen, vi vil beskrive, er ikke uordnet, det er ikke totalt tilfældigt. Det er bare en utrolig kompliceret form for orden.

Men er den i det hele taget så kompliceret, er det så utroligt svært at forstå og beskrive? Det kommer helt an på, hvilken beskrivelsesmåde man anvender!

Hvis vi skal beskrive Mandelbrot-mængden i sædvanlig forstand (Euklidsk geometri), kommer vi på en umulig opgave. Vi har jo set, hvordan der hele tiden dukker nye former op, når vi dykker ind i mængden. En af de fantastiske ting ved fraktaler er netop, at de næsten - og kun næsten - gentager sig i det uendelige. Så jo mere vi forstørrer, jo mere vi regner, jo mere information får vi.

Alligevel kan denne uendelige informationsmængde rummes i den simple iterative ligning

$$x_{n+1} = (x_n)^2 + c,$$

hvor c og x_i er komplekse tal. På lignende måde må naturen gemme på den information, der skal til for at opbygge de utrolige former, vi ser. Ud af blot ét æg og én sædcelle kommer mennesket.

Forskerne har forsøgt at 'eftergøre' naturen, fx har det været utroligt populært at lave bregner vha tilfældigheder (se fx forsiden af IMFUFA-text nr. 174). Heri ligger der store muligheder for at komme til at forstå naturen bedre.

I det hele taget er kaosforskerne kommet med mange forsøg på at forklare fænomener, man hidtil ikke har kunnet

forklare tilfredsstillende. Jeg vil nævne et enkelt: Jordens skiftende magnetfelt.

Gennem de sidste ca. 76 mill. år er jordens magnetfelt vendt (180°) mindst 171 gange (Elvekjær og Degn Nielsen, 1983). Det kan man sige med sikkerhed ved at undersøge magnetiseringen af den lava, der er strømmet op på havbunden langs oceanryggene. Når lavaen er glødende, er den umagnetisk, og når den størkner, vil magnetjernstenen (Fe_3O_4) indstille sig efter jordfeltets retning. Ved at undersøge lavaens magnetfelts retning, kan man se, at jordfeltet har skiftet retning.

Hidtil har man ikke haft nogen tilfredsstillende forklaring på fænomenet. Man har måttet antage, at til at fremkalde en så stor virkning (ændring af rotationsretning af jordens flydende ydre kerne), må der være en stor årsag (fx meteornedslag).

Nu har kaosteorien vist os, at kaotisk opførsel er en mulighed, og at selv den mindste ændring kan føre til utrolig stor ændring af systemets endelige opførsel. Det er nærliggende at tro, at det er tilfældet her.

Desuden er det et eksempel på det paradigmebrud, som kaosteoriens opdukken er. Hidtil har man antaget, at store virkninger har krævet store årsager, og det har udelukket visse typer forklaringer. Jeg vender tilbage til paradigmeskiftet i kapitlet "Tilbage til virkeligheden".

D. Fra matematisk kaos til fysiske systemer

Meget af kaoslitteraturen beskæftiger sig med 'matematisk kaos'. Ved det forstår jeg undersøgelser af simple ligningssystemer (1., 2., 3. orden), som enten er fiktive, eller udtryk for en høj grad af idealisation af virkeligheden. Et typisk eksempel kunne være den logistiske ligning. Tilknytningen til virkeligheden er svag, om overhovedet eksisterende.¹

Man har taget et (eller flere) ligningssystem (-er) og undersøgt det 'til bunds' ved at se på alle parameterområder. På den måde har man lært en masse om kaos gene-

¹ Jeg ser her bort fra, at denne slags modeller faktisk i visse tilfælde kan give en udmærket beskrivelse og forudsigelse af virkeligheden.

relt. Og det har vist sig, at de egenskaber, der karakteriserer den kaotiske opførsel, er universelle. De genfindes i alle mulige systemer. Et eksempel på dette er Uedas undersøgelser af Duffings ligning, fig M (fx Thompson & Stewart, 1986). Det har så været underordnet, om ligningssystemet havde nogen tilknytning til virkelige systemer.

Men hvis kaos skal være andet end et matematisk fænomen, skal det vise sig i virkelige systemer og i modelleringen af samme. Derfor er det vigtigt at påvise og beskæftige sig med kaos i mere komplicerede, realistiske systemer. Kaosteorien skulle gerne vise sig at være nyttig på ingeniørniveau til styring af tekniske systemer. Se fx Togeby (1988).

Indtil videre må vi holde os til simple systemer. Vi kan ikke skelne kaos i store, meget komplicerede systemer, som fx vejret eller styringen af en stor virksomhed. Der er alt for mange ting, der spiller ind, til at vi kan skelne årsagerne til fænomenerne fra hinanden.

Det kaos, vi er interesseret i at sige noget om, er i virkeligheden et samspil mellem få parametre, og er altså på sin vis ret simpelt. Det utrolige er, at det alligevel kan give anledning til så indviklet og forskellig opførsel.

Et af disse simple, virkelige systemer er torsionspendulet. En stor del af denne rapport handler om simulation af en realistisk model for dette virkelige, dissipative fysiske system.

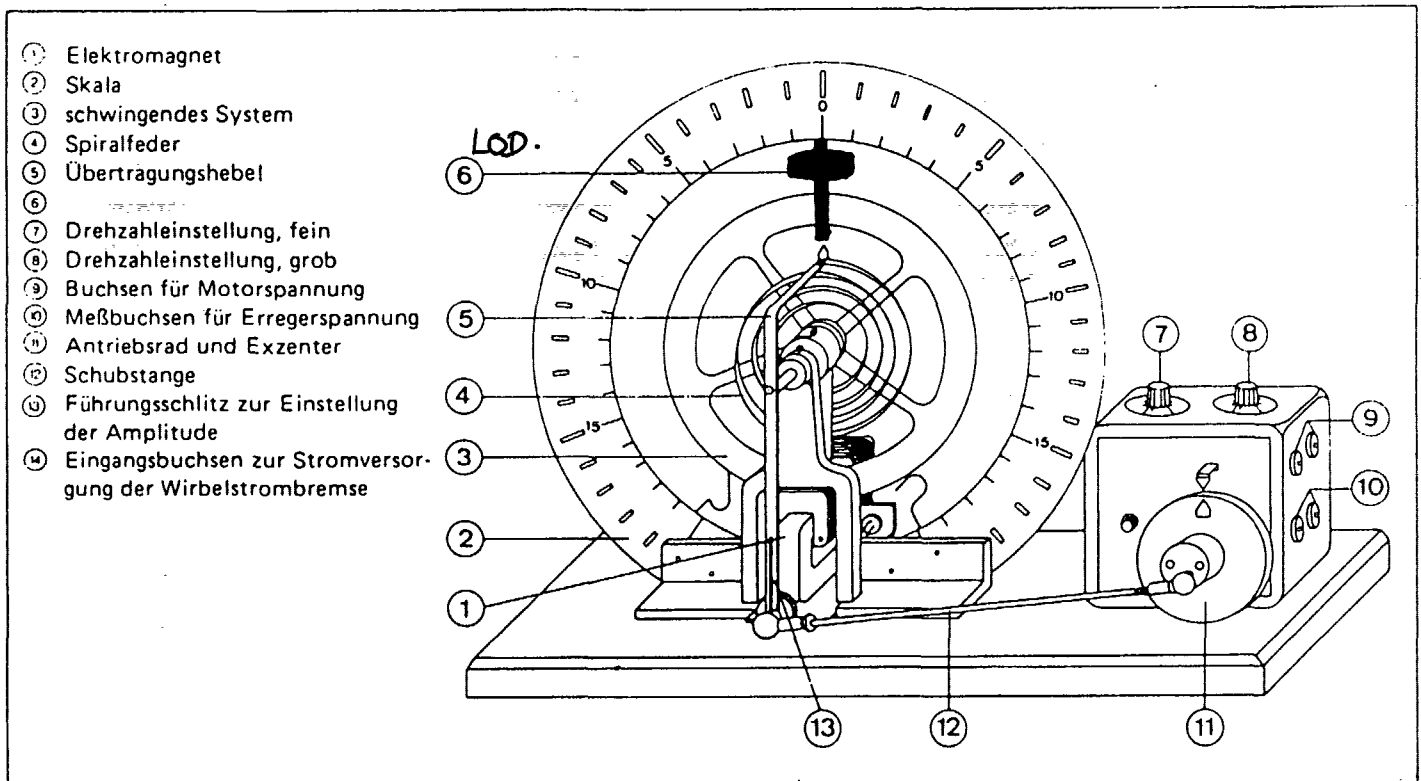
E. Kort introduktion til torsionspendulet

Det lineære torsionspendul er et almindeligt udbredt svingningssystem med dæmpning og motor. Det bruges bl.a. til at illustrere begreber som harmonisk bevægelse, egenfrekvens og resonans. Se figur A.

Ved at sætte et lod på skivens rand, tilføjer man torsionspendulet et ikke-lineært element ($\sin u$), der kan gøre bevægelsen kaotisk.

Det er muligt at lave dataopsamling direkte fra torsionspendulet vha to potentiometre (ét på skivens aksel og ét på motorens 'drivarm'), men systemet 'driver' temmelig meget. Det værste er spændingen over motoren, der driver 0.1-0.2 volt. Det betyder, at det kun er

muligt at se tre slags endelig opførsel: Periodisk opførsel med perioden en hhv to gange motorens periode (periode-1 og periode-2), og kaotisk opførsel.



Figur A: Ikke-lineært torsionspendul.
(her fra Leybold-Heraeus)

En gang er det lykkedes mig at optage en periode-4 på video, men den driver straks væk igen - og var det nu ikke blot en transient? Så resultaterne i rapporten stammer stort set alle fra simulationen af pendulet.

En gruppe studerende på Københavns Universitet har arbejdet udelukkende med direkte dataopsamling fra torsionspendulet (Jensen m.fl., 1989). Vores muligheder for direkte dataopsamling bestod i starten af almindelige (x,y)- og (x,t)- skrivere, men er siden blevet udvidet til opsamling vha potentiometrene. Enten direkte til en dataskærm (som det ses i videoen), eller til lagring i en computer (men med meget beskednen kapacitet).

KAOSTEORI HVORDAN

A. Indledning

Hvad er kaos? Ofte bliver kaos defineret negativt, som det modsatte af orden, og det er ikke alene synd; det er også forkert. Kaos er en utrolig kompleks form for orden. I det følgende vil jeg lave et portræt af denne orden, som ikke umiddelbart lader sig beskrive i få korte sætninger. Ikke endnu i hvert fald. Så det kommer i høj grad til at handle om, hvad vi vil forstå ved orden, hvordan vi kan påvise den, og hvilke udseender den kan have.

Foreløbig vil jeg sige, at et fysisk system udviser kaotisk adfærd, hvis det aldrig gentager sig selv, og hvis det er ekstremt følsomt overfor selv meget små ændringer i begyndelsesbetingelserne. Det skal også nævnes, at det er simple systemer, vi snakker om, hvis bevægelsesligninger vi (let) kan opstille, men ikke løse analytisk. Vi beskæftiger os altså med simple dynamiske systemer, hvis opførsel er - teoretisk - beregnelig, men ganske uforudsigelig.

B. Orden

Hvad forstår vi ved orden? Populært vil man sige, at et system er ordnet, hvis vi har styr på, hvordan det opfører sig. Den mest udviklede form for orden, man hidtil har været interesseret i at beskrive, har været periodisk opførsel. Det har man så brugt til at (forsøge at) forklare forskellige fænomeners opførsel, fx arbejdsløshed. Her snakker man om sæsonudsving, og om noget man kalder "udsving i de internationale konjunkturer", som selvfølgelig svinger sammen med nationale konjunkturer, og hvis man i hovedet skal kombinere alle disse svingninger, kan jeg godt forstå, at man ikke kan få styr på arbejdsløsheden.

Ligeledes med fx udsving i børspriser. Når børshandlere insisterer på, at børsprisers svingninger kan opfattes som sammensat af forskellige periodiske svingninger, er det fordi, det er den mest komplicerede form for ordnet opførsel, de kan forestille sig.

Ved orden vil jeg¹ forstå en eller anden form for 'tilbagevendende opførsel' ("recurrent behavior"). Umiddelbart kan det lyde selvimodsigende at påstå, at kaos er en form for tilbagevendende opførsel, når jeg før sagde, at et kaotisk system aldrig gentager sig selv. Men som det vil fremgå, er der alligevel en vis mening i det (i hvert fald for visse typer kaotisk opførsel). Vi kan tilskrive systemet en såkaldt kaotisk attraktor (tiltrækker), som bevægelsen 'holder sig på'. Og når vi kan være sikre på det (måske bortset fra transienter), er der mening i at sige, at bevægelsen er tilbagevendende.

Endnu har man ikke præcist kunnet definere hvilke typer kaotisk bevægelse, der er kvalificeret som grundliggende typer af tilbagevendende opførsel ("basic type of recurrent behavior"). I det følgende vil jeg komme nærmere ind på denne beskrivelse (hvad man vil forlange, dels af tilbagevendende adfærd, dels af en attraktor), men først vil jeg se på hvilke systemer vi overhovedet er interesseret i.

Der er ikke almindelig enighed om, hvad man skal benævne attraktoren for et kaotisk system. I begyndelsen benævnte man dem 'strange attractors' (introduceret af Ruelle i 1980), måske fordi man aldrig havde set sådan nogle før. Efterhånden som man begynder at forstå, hvordan de dukker op, synes tilnavnet 'strange' lidt overflødigt, og man betegner dem nu mest som kaotiske eller fraktale attraktorer. Som vi senere skal se refererer det fraktale til deres topologiske struktur. Jeg foretrækker i denne forbindelse betegnelsen kaotisk.

C. Verden er ikke lineær; den er ikke-lineær

Matematikeren Stanislaw Ulam har sagt, at det at kalde studiet af kaos for "ikke-lineær videnskab", var som at kalde zoologi for studiet af "ikke-elfant dyr". Verden omkring os retfærdiggør ikke den overvægt, studiet af de lineære systemer har haft. Grunden har selvfølgelig været, at det er de ligningssystemer man (principielt) kan løse analytisk.

¹ Nu og i det følgende inspireret af bl.a. Thompson & Stewart (1986).

Det ikke-lineære system, der nok har været brugt mest tid på, er den iterative ligning, som Mitchell Feigenbaum (re-) lancerede i 1970'erne,

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n),$$

hvor r er en konstant, og $0 \leq x \leq 1$. Denne en-dimensionale afbildning kommer fra populationsbiologien, og blev i 1845 foreslået af P. F. Verhulst til beskrivelse af fluktuationer i populationen af en enkelt art med ikke-overlappende generationer. Den er kendt som den (iterative) logistiske ligning. Den og andre vækstmuligheder er glimrende behandlet af Kurt Jakobsen (1989). For forskellige værdier af parameteren r , vil systemet opføre sig kaotisk. I iterative systemer er én dimension altså nok til at opnå kaos.

De systemer, jeg har modelleret, har været kontinuerte, dissipative systemer med flere dimensioner (én frihedsgrad, men med fler-dimensionalt tilstandsrum). Som sagt kan de lineære af slagsen principielt løses, hvilket kun vil være tilfældet for meget få af de ikke-lineære. Og af de ikke-lineære vil jeg hovedsageligt komme ind på dem, der beskriver periodisk drevne mekaniske oscillatorer, dvs dem, der kan modelleres ved 2. ordens differential-ligninger af formen

$$d^2x/dt^2 + f(x, dx/dt) = F_0 \cdot \sin(w \cdot t).$$

Resultaterne, jeg kommer frem til, er selvfølgelig ikke begrænset til denne type systemer. Funktionen $f(x, dx/dt)$ bestemmer om systemet er lineært eller ikke-lineært. Ikke-lineariteterne falder i to klasser, systemer med ikke-lineær friktion, $G(dx/dt)$, og oscillatorer med ikke-lineær elastisk kraft, $F(x) = -\text{grad } V(x)$, hvor $V(x)$ er potentialet. Det ikke-lineære torsionspendul er et eksempel på det sidste, altså en bevægelsesligning af formen

$$d^2u/dt^2 + k \cdot du/dt + \text{grad } V(u) = A \cdot \sin(w \cdot t),$$

hvor u er vinkeludsvinget. For den lineære oscillator er $F(u) = -k \cdot u$, og potentialet $V(u) = 1/2 \cdot k \cdot u^2$, fx som torsionspendulet uden lod. Med lod vil potentialet være

$$V(u) = 1/2 \cdot k \cdot u^2 + m \cdot g \cdot r \cdot \cos(u).$$

Jeg kommer nærmere ind på dette i kapitlet "Torsionspendulet", hvor det også vil vise sig at blive lidt mere indviklet, fordi motoren flytter ligevægtspunktet.

For at få en komplet kvalitativ forståelse (et 'portræt') af systemets mulige opførsel, er det nødvendigt og bekvemt at se på systemets bevægelse i faserummet. Hele øvelsen går ud på at undersøge systemets topologi i faserummet; hvilke strukturer i faserummet giver bevægelsen anledning til. Torsionspendulet har et 3-dimensionelt faserum, (u, w, p) , hvor u er vinkeludsvinget, w er vinkelhastigheden, og p er fasen af den drivende kraft, dvs motorfasen¹. Det er det mindste antal dimensioner, der for et kontinuert dynamisk system kan give anledning til kaos.

Poincaré og Bendixson beviste i starten af århundredet, at plane 2-dimensionale faserum kun kan give to typer af endelig opførsel, ligevægt eller periodiske bevægelser. Peixoto beviste i 1962, at i andre 2-dimensionale faserum (fx overfladen af en torus) kan endnu en type bevægelse komme på tale, kvasi-periodicitet eller næsten-periodicitet. Disse typer bevægelse vil jeg behandle i næste afsnit.

Ofte er det ikke særlig bekvemt at have med det 3-dimensionale faserum (u, w, p) at gøre. Derfor projicerer man ofte bevægelsen ind på (u, w) -planen, og får på den måde en 2-dimensional projektion, et fasediagram, af det 3-dimensionale faseportræt.

Det er værd at bemærke, at i det 3-dimensionale faserum, vil der aldrig være nogle trajektorier, der krydser hinanden. For hvis der var, ville det punkt være én tilstand, hvorfra to forskellige udviklinger kunne ske, og det er umuligt eftersom systemets udvikling fra et punkt i faserummet er entydig. Dog er det selvfølgelig muligt, at trajektorier asymptotisk nærmer sig et ligevægtspunkt, eller nærmer sig hinanden for at køre videre i samme spor.

Når man laver projektionen ned til det 2-dimensionale fasediagram, betyder det så selvfølgelig, at trajektorierne vil krydse hinanden. Det, at trajektorierne aldrig krydser hinanden, viser, at man skal have et 3-dimensionalt faserum for at opnå kaos. For hvis vi kun har én dimension, må trajektorierne enten nærme sig et ligevægtspunkt eller gå mod +/- uendelig, når de aldrig

¹ Det sker, at man benytter tiden som den 3. variabel, selvom den normalt ikke indgår i faserummet. Det giver visse fordele, såvel som ulemper.

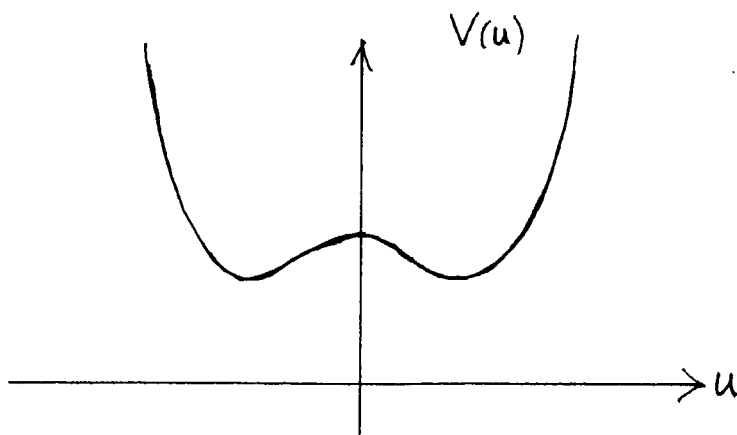
må krydse sig selv. Hvis man har 2 dimensioner opstår endnu en mulighed, periodisk bevægelse ('grænsecyklen') (evt på overfladen af en torus, kvasi-periodisk bevægelse/cykel).

D. Tilbagevendende opførsel

Kaotisk adfærd er ikke blot total tilfældig, den er i høj grad ordnet. Det ordnede består bl.a. i, at bevægelsen vil holde sig indenfor et begrænset område i faserummet. For Hamilton-systemer (konservative systemer) gælder Liouville's teorem; at ensemble-volumenet i faserummet er konstant. Hvis systemet er dissipativt, vil volumenet skrumpe ind og asymptotisk nærme sig nul. Det betyder ikke, at ensemblet skrumper ind til ét punkt, det kan ligeså godt nærme sig en overflade, eller enhver anden mængde med volumen nul. Det er fx tilfældet for Lorenz-atraktoren.

Inden vi ser på, hvordan man, foreløbig, definerer begrebet tilbagevendende opførsel, kan vi opstille et hierarki over de forskellige grundliggende typer af tilbagevendende opførsel, man kan forestille sig.

Den simpleste form for tilbagevendende opførsel er ligevægt, og den kan være stabil eller ustabil. Den ustabile vil vi meget sjældent observere, men dens tilstedeværelse vil influere på bevægelsen. Det udrevne torsionspendul har ét ustabil og to stabile ligevægts-punkter.

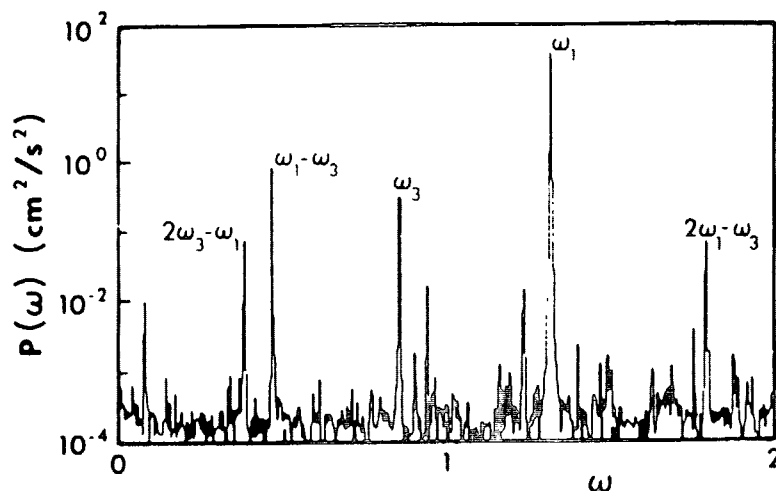


Figur B: Fjederpotentialiet, $V(u) = u^2 + 2.94 \cdot \cos(u)$.

Den næste type tilbagevendende opførsel er periodisk bevægelse, hvor systemet gentager sig præcist efter perioden T . I fasediagrammet vil periodisk bevægelse have

en trajektorie som laver en lukket kurve, også kaldet en grænsecykel. Grænsecyklen er stabil, hvis trajektorier, der starter i nærheden af den, til sidst ender på den. På fig. 2 og 3 er der vist periodisk bevægelse og grænsecykel (9-cykel).

En anden type tilbagevendende opførsel er den kvasi- eller næsten-periodiske bevægelse. Den er blevet sammensat af bevægelser med flere forskellige perioder/frekvenser. Blot man sammensætter to frekvenser, kan det give et utroligt indviklet forløb, og for at finde orden i det, må man lave et 'power-spektrum' vha fourieranalyse, hvor de indgående frekvenser, medsamte overtoner og stødtoner ("beat-frekvenser"), vil vise sig i et diskret spektrum.



Figur C: Power-spektrum, diskret.

Kvasi-periodisk bevægelse er ikke præcis repetitiv, fordi de overlejlrede frekvenser er inkommensurable. Antallet af overlejlrede frekvenser kaldes graden af kvasi-periodicitet. I fasediagrammet vil bevægelsen 'skride' og efterhånden fylde et areal ud (evt overflade af en torus).

I 1944 foreslog Landau, at overgang til turbulens i væske skulle skyldes stadig flere overlejlringer af frekvenser. Denne tese holdt i utrolig lang tid, helt til 1970'erne, hvor både teoretiske (Ruelle, Takens, Newhouse) og praktiske studier har vist, at mere end grad 2 kvasi-periodicitet faktisk er sjælden. Ofte vil man, ved yderligere destabilisation af grad 2 kvasi-periodicitet, ikke gå til grad 3, men til kaos. I 'power-spektret' ses det ved, at der ikke kommer flere diskrete værdier - spektret bliver kontinuert.

Den sidste form for bevægelse, man vil kalde tilbagevendende, er kaotisk adfærd, eller bevægelse på en kaotisk attraktor. En kaotisk attraktor er den - stabile - struktur, der fremkommer i faserummet, hvis vi lader systemet udvikle sig efter eventuelle transienter. Hvis man endelig skulle definere kaos negativt, kunne man sige, at det var tilbagevendende opførsel, som hverken var ligevægt, periodisk eller kvasi-periodisk.

Disse typer bevægelser kan man sammenfatte ved at sige, at en tilstand af et dynamisk system er tilbagevendende, hvis man, ved at vente længe nok, kan være sikker på, at systemet vender tilbage, vilkårligt tæt på denne tilstand. Et dynamisk system udviser tilbagevendende opførsel, hvis enhver tilstand (efter transienter) er tilbagevendende. Man vil kunne finde forskellige typer af tilbagevendende kaotisk opførsel, og vil så være interesseret i at kunne gruppere dem. Hvordan er endnu ikke afklaret. Ved en grundlæggende type tilbagevendende opførsel vil man forstå et ensemble af tilbagevendende tilstande, forbundet af en enkelt trajektorie af det dynamiske system¹.

På den måde kan vi få beskrevet kaotisk opførsel som tilbagevendende. Enhver tilstand på en kaotisk attraktor vil, før eller siden, vende tilbage vilkårlig tæt på sig selv, men dog aldrig præcist gentage sig. Og alle tilstande på attraktoren vil være forbundet af en enkelt trajektorie (nemlig ved den simulation eller kørsel vi har lavet).

Denne ide om tilbagevendende opførsel kan bruges til at observere det for dynamiske systemer. Men det er ikke alle mulige typer af opførsel, som man ville associere med tilbagevendende, som er dækket ind af den. Hvis vi fx starter to kugler på toppen af en uendelig høj skråning, ville de for evigt følges ad, men aldrig vende tilbage til samme tilstand. Til beskrivelse af det tilfælde, skal man bruge begrebet 'ikke-vandrende' tilstand ("non-wandering"), introduceret af Birkhoff. Hvis et system er ikke-vandrende, har det vilkårligt tætte tilstande, som, efter et stykke tid, igen vil komme vilkårligt tæt. Men som ikke nødvendigvis vender tilbage, tætte, på udgangstilstanden. Hvis et system er tilbagevendende, vil det

¹ Jeg gør opmærksom på, at definitionen er provisorisk - vi befinder os på et endnu ikke afklaret teoriområde.

også være ikke-vandrende, hvorimod det modsatte ikke vil være tilfældet.

Kaos er altså tilbagevendende opførsel i simple systemer, som har tilfældige aspekter så vel som en vis orden. Tilfældigheden skyldes, at et kaotisk system er utroligt følsomt overfor udgangsbetingelserne, og disse betingelser kan man aldrig kende præcist. Med utroligt følsomt menes, at løsningskurverne til ét system startet i to tilstande, vilkårligt tæt på hinanden, vil divergere eksponentielt. Dette gør, at et kaotisk system er uforudsigeligt, på trods af, at det er deterministisk.

E. Poincaré-snit

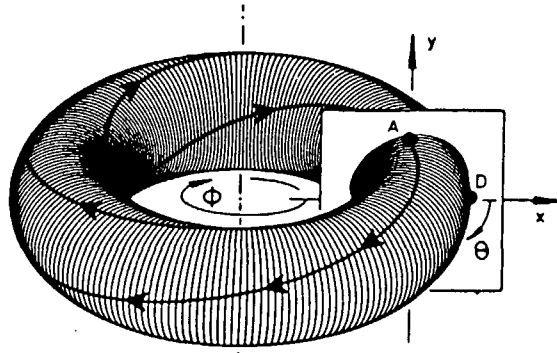
Jeg har beskrevet, hvordan man kan lave en 2-dimensionel projektion af det 3-dimensionale faserum ind på (u,w) -planen. Men der vil trajektorierne hele tiden skære hinanden, og vi vil mangle informationen om størrelsen af den påtrykte kraft (hvilket svarer til at kende motorens fase). For lettere at kunne overskue systemets adfærd, kan man lave et Poincaré-snit. Det går kort sagt ud på at se, hvor systemet er, når en eller anden betingelse er opfyldt.

Det 'ægte' Poincaré-snit er en løsningskurves skæring med et plan i faserummet (tilstandsvariabelrummet). Man skal blot sikre sig, at planen ikke er bøjet, eller er tangent til en trajektorie. Denne metode er bare ikke anvendelig, hvis man har valgt tiden som en af de variable (men er fx udmærket til Lorenz-attraktoren). I det tilfælde kan man lave et 'stroboskopisk' Poincaré-snit, altså registrere tilstanden efter bestemte tidsintervaller, typisk efter den påtrykte periode (hvis en sådan findes). Endelig kan man lave et 'max-plot', når en udvalgt variabel har maximum (fx til det magnetiske pendul).

I tilfældet med torsionspendulet, hvor den tredje variabel er motorfasen, er tredjeaksen 'bukket rundt' - når motoren har kørt en periode er den tilbage i samme position (idet $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$). Hvis man havde valgt at bruge tiden som variabel, skulle man have 'klippet' tidsaksen af efter en periode og 'limet den fast' ved $t = 0$. Poincaré-snittet laves vinkelret på motorfaseaksen, hvilket svarer til at lave et stroboskopisk snit efter den påtrykte periode, $T = 2 \cdot \pi / \omega_0$.

Hvis systemet er periodisk, vil det gentage sig efter den påtrykte periode, eller efter et helt multiplum af den (t

= $m \cdot T$, m hel). Man kan ikke forestille sig, at systemet skulle gentage sig indenfor en periode, da det ville betyde, at det skulle gentage sig under forskellige kraftpåvirkninger. Samme argument sikrer, at systemet kun vil kunne gentage sig efter et helt multiplum af T .



Figur D: Torus'en.

Nu kan vi rigtig se begrundelsen for Poincaré-snittet; vi laver simpelthen et snit i torus'en, det viser os jo præcis hvor systemet er i (u, w) -planet. Samtidig kender vi den sidste information, motorens fase - den afhænger jo af hvor vi lægger snittet ($0 \leq \text{fasen} \leq 2 \cdot \pi$). Og vi kan få en ide om den totale kaotiske attraktor ved at lægge snittet forskellige steder hele vejen rundt i torussen.

Hvis bevægelsen er periodisk, vil det vise sig som n punkter på Poincaré-snittet, alt efter hvor mange perioder af den påtrykte kraft, der går, før systemet er tilbage i samme tilstand. n perioder - n punkter. Hvis bevægelsen er kvasi-periodisk, vil det vise sig som en 'drivende' bevægelse, som altså næsten vender tilbage. Det vil så tilsidst danne en lukket kurve. Hvis systemet er kaotisk, vil det aldrig vende tilbage til samme punkt på Poincaré-snittet, men vil danne en kaotisk attraktor.

F. Attraktorer

Hvis et system er kaotisk, vil det altså aldrig vende tilbage til samme sted i Poincaré-snittet, men alligevel vil det holde sig indenfor et begrænset område. Det kan kun lade sig gøre, hvis der foregår en eller anden form for 'foldning'. Den kaotisk adfærd giver eksponentielt divergerende trajektorier, og når de skal holde sig indenfor et begrænset område, nødvendiggør det 'foldning', og den foldning er tilbagevendende.

Man kan altså også karakterisere kaotisk adfærd som bevægelse på en kaotisk attraktor. Når bevægelsen, uden

at gentage sig, skal holde sig indenfor et begrænset område, mens tiden går mod uendelig, må det resultere i fraktale strukturer. Hvis vi lader simulationerne køre længe nok, kan vi få former og variationer, uanset 'hvor langt' vi dykker ind/forstørret op. Det er kun et spørgsmål om regnekraft og -nøjagtighed. (Se fx figur 32-34)

Hvis man strengt skal følge definitionen på tilbagevendende opførsel, er det nødvendigt, at den kaotiske attraktor er lavet af een trajektorie, altså er startet af ét 'frø' (ét sæt udgangsbetingelser). Ellers snakker matematikerne om attraktor-mængder (hvilket de strengt taget også gør, hvis der er anvendt approximationer). Hvis man blot skal have et overblik af attraktoren, kunne man sagtens starte flere 'frø'; attraktoren er nemlig robust/stabil. Faktisk er det derfor, at det overhovedet går godt at anvende computersimulationer med dertil hørende approximationer. Mere herom i afsnittet om computersimulation.

Det, man leder efter, er underliggende, stabile strukturer; det er jo attraktorer! Lanford har (i 1981 (Milloni m.fl., 1987)) givet følgende definition af en attraktor:

- "En delmængde X af faserummet er en attraktor hvis
- 1) X er invariant under udviklingen,
 - 2) der er en omegn omkring X , som skrumper ind til X under udviklingen,
 - 3) ingen del af X er transient, og
 - 4) X ikke kan dekomponeres til to ikke-overlappende stykker."

(min oversættelse)

I daglig tale har vi en lidt løsere ide om, hvad en attraktor er. Vi siger, at et system har en attraktor (eller bevæger sig på en attraktor), hvis det, startet i forskellige begyndelsesbetingelser, udvikler sig mod en bestemt struktur i faserummet (attraktoren), for til sidst kun at bevæge sig på denne. En attraktor kan være et fast punkt, en grænsecykel, en 'drift-ring' (den drivende ring fra en kvasiperiodisk bevægelse) eller en kaotisk attraktor. Endelig kan man forestille sig, at et system slet ikke har en attraktor, at alle trajektorier (til sidst) vil forlade et hvilket som helst begrænset område i faserummet.

Det område af faserummet, hvorfra tilstande vil blive tiltrukket og til sidst ende på attraktoren, kaldes attraktorens basin. Man kan forestille sig faserummet

delt op i forskellige basin'er, hørende til forskellige attraktorer. Fx har torsionspendulet to grundliggende basin'er, nemlig de to grøfter. Men man kan udmærket forestille sig andre basin'er, fx vil jeg senere beskrive, hvordan torsionspendulet for visse betingelser har konkurrerende basin'er for to forskellige attraktorer, en periode-2 og en periode-9. Man kan også se forskellige attraktortyper for samme system, fx grænsecykel og kaos. For Hamiltonsystemer vil basin og attraktor være ens, mens for dissipative systemer vil basin'et altid være større end attraktoren.

Vi vil selvfølgelig forlange af en attraktor, at den er stabil, tiltrækkende. Hvis små afvigelser fra attraktoren fører trajektorierne væk fra den, vil vi kalde det en repellor, eller en frastødende grænsecykel, ligevægtspunkt o.lign. Det kan heller ikke nytte, at vi modellerer et observeret fænomen ved et ikke-stabilt system, for små fejl og fluktuationer i parametre er umulige at undgå.

De kaotiske attraktorer, jeg har lavet ved computersimulation, kan jeg, takket være computerens upræcighed, være sikker på er stabile. Computeren laver hele tiden små perturbationer (afrundinger), men alligevel forandrer den kaotiske attraktor sig ikke kvalitativt. Ved relativ lille forstørrelse, har den allerede nået sit 'endelige' udseende efter et par tusinde sekunder ud af de 13650 sek, som simulationerne typisk har kørt.

Thompson og Stewart (1986) definerer en kaotisk attraktor som

"enhver begrænset attraktor, som strækker og folder bundtet af endelige, uafbrudte trajektorier, og som bevirker fintmærkende afhængighed overfor udgangsbetingelserne og langtids uforudsigelighed".

(min oversættelse)

Kaotiske attraktorer har nogle fælles, vigtige egenskaber, nemlig at

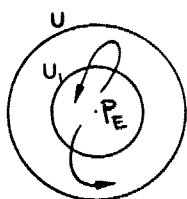
- det er et begrænset område i faserummet, hvortil alle trajektorier fra attraktorbasin'et bliver tiltrukket,
- trajektorierne passerer alle punkter på attraktoren i tidens løb, og derfor kan den ikke deles i ikke-sammenhængende stykker, eller bestå af isolerede punkter,

- den er følsom overfor udgangsbetingelserne,
- punkter, der oprindeligt ligger tæt, divergerer exponentielt fra hinanden,
- de folder trajektorierne, for at de kan holdes indenfor et begrænset område (det er denne foldning, der frembringer den kaotiske bevægelse), og
- de skal være strukturelt stabile for at kunne beskrive et fysisk system. Derfor ændres attraktorernes struktur også kontinuert med systemets parametre.

G. Stabilitet

Hvad vil vi forstå ved stabilitet? Man ved endnu ikke, hvad man skal forstå ved stabilitet af kaotisk adfærd, for som vi skal se, er kaotiske attraktorer strengt taget ikke nødvendigvis strukturelt stabile ud fra en topologisk synsvinkel. Men inden jeg når dertil, vil jeg skelne mellem to former for stabilitet, Liapunov- og strukturel stabilitet.

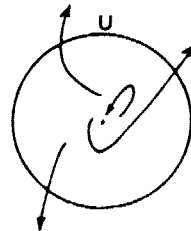
Normalt når man snakker om Liapunov i kaosteori, er det i forbindelse med eksponentielt divergerende trajektorier. Jeg vil imidlertid først vise, hvad Liapunov-stabilitet er, og til det formål betragte en ligevægtstilstand (det kunne lige så godt have været en grænsecykel osv, det er blot et spørgsmål om at definere passende omegne). Vi siger, at ligevægtstilstanden, P_E , i faserummet, er Liapunov-stabil, hvis der for enhver omegn U af P_E , eksisterer en mindre omegn U_1 af P_E , indeholdt i U , således at enhver løsning startet i U_1 vil forblive i U for alle $t > 0$. Hvis alle trajektorier går mod P_E for t gående mod uendelig, siges P_E at være asymptotisk stabil. Hvis det er muligt at finde en lokal perturbation, som leder systemet væk fra P_E , er systemet Liapunov-ustabil.



Stabilt



Asymptotisk stabilt

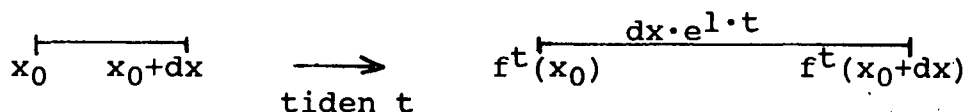


Ustabilt

Figur E: Liapunov-stabilitet.

Liapunov-stabilitet hænger altså sammen med stabiliteten af et enkelt punkt (eller grænsecykel osv) i faserummet,

overfor perturbationer af udgangsbetingelserne. Kaotiske systemer er Liapunov-ustabile, eftersom to vilkårligt tætte tilstande vil divergere eksponentielt. Som et mål for dette, har man Liapunov-eksponenten. Vi har et system, som vi starter i to tilstande i faserummet, x_0 og $x_0 + dx$, og ser igen på systemet efter tiden t :



Figur F: Liapunov-eksponent.

Hvis liapunov-eksponenten, l , er positiv vil de to tilstande divergere eksponentielt. Hvis den er negativ vil de konvergere. Det er kun hvis trajektorierne divergerer eksponentielt, at opførslen er kaotisk. På den måde kan man skelne kaotisk opførsel fra fx kvasi-periodicitet.

Det ses af figur F at:

$$dx \cdot e^{l \cdot t} = |f^t(x_0 + dx) - f^t(x_0)| \quad \Rightarrow$$

$$l = 1/t \cdot \ln |(f^t(x_0 + dx) - f^t(x_0))/dx|.$$

Det 'korrekte'¹ udtryk for $l(dx)$ fås for $dx \rightarrow 0$ og $t \rightarrow \infty$:

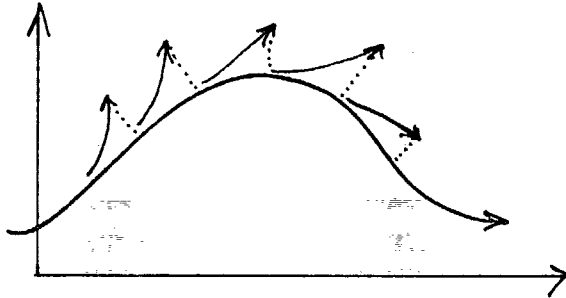
$$\begin{aligned}
 l(x_0) &= \lim(1/t) \cdot (\ln |(f^t(x_0 + dx) - f^t(x_0))/dx|) \\
 &= \lim \left[\frac{1}{t} \cdot \ln |df^t(x_0)/dx_0| \right]. \quad (t \rightarrow \infty, dx \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

Ved en virkelig simulation giver det ingen mening at lade tiden gå mod uendelig, for når alle trajektorier skal holde sig indenfor et begrænset område, kan de ikke blive ved med at divergere. Vi ved jo, at der finder en foldning sted. Derfor kan man godt komme ud for, at et kaotisk system i kort tid har en negativ Liapunov-eksponent, nemlig i områderne hvor foldningen finder sted. Men det vil altid være sådan, at trajektorierne efter et stykke tid divergerer. På fig. 1 ses eksponentielt divergerende trajektorier for torsionspendulet.

Praktisk, i computersimulationer, løses problemet ved at 'omstarte' perturbationen, altså ved kun at lade den perturberede tilstand udvikle sig en bestemt, kort tid.

¹ Det er kun for iterative systemer, at det er så simpelt. Dette udtryk er hjemmelavet og sikkert ikke strengt korrekt.

Denne tid skal være stor i forhold til den skridtlængde som simulationsprogrammet arbejder med, men så lille, at trajektorierne ikke adskilles makroskopisk.



Figur G: Bestemmelse af l .

Man midler så over de opnåede afvigelser.

Den slags undersøgelser er det kun muligt at foretage ved computersimulationer, man kan aldrig opnå at perturbere fx torsionspendulet med $1/1000000$ radian. Typisk kender man jo kun udgangsbetingelserne indenfor et interval, og dette interval vil i løbet af kort tid være spredt ud over hele måleområdet.

Hvor Liapunov-stabilitet altså drejer sig om stabiliteten af et enkelt punkt i faserummet overfor perturbationer af begyndelsesbetingelserne, så drejer strukturel stabilitet sig om stabilitet af hele systemet, ved perturbationer af selve systemet (ligninger og parametre).

Vi vil sige, at et system er strukturelt stabilt, hvis det, for tilstrækkeligt små perturbationer af de ligninger, der definerer systemet, er topologisk ækvivalent med det oprindelige. Ved ækvivalent forstås, at der findes en kontinuert, invertibel funktion, der fører faseportrættet af det oprindelige over i det perturberede systems¹.

Ved hjælp af denne 'definition' kan vi indse, at et simpelt system, som en lineær oscillator, ikke altid vil være strukturelt stabilt. Det vil være tilfældet, hvis systemet har en lineær dæmpning, som ikke er nul, men hvis dæmpningen er nul, er systemet strukturelt ustabil. Blot den allermindste perturbation, dvs den mindste

¹ Dette er ikke en præcis definition i topologisk forstand; til det skal man indføre et vektorfelt i et funktionsrum og undersøge perturbation af det. Men det vil føre for vidt.

positive eller negative dæmpning, vil ændre systemets opførsel radikalt. Fra at bevæge sig periodisk, vil det enten konvergere mod nul (positiv dæmpning), eller divergerer mod uendelig (negativ dæmpning).

Det samme kan være tilfældet for et kaotisk system. Fx vil der i tilfældet med torsionspendulet være uendelig mange intervaller, hvor bevægelsen går fra at være kaotisk til at være periodisk. Så der vil være en grænse, hvor den mindste ændring i kontrolparameteren vil ændre systemets topologiske struktur radikalt. Der vil også være parameterværdier, hvor systemet 'springer' fra én kaotisk attraktor til en anden.

På lignende måde har Thompson og Stewart fundet ændringer i Lorenz-attraktoren, som "...in a strictly rigorous topological view...are qualitatively different structures". Men som de skriver senere, "...this says less about the Lorenz-attractor than about our incomplete understanding of how to define structural stability in the most appropriate way for chaotic attractors" (Thompson & Stewart, 1986, p.227).

H. Bifurkationer

Hvordan går det til, at et system ændrer opførsel? Hvornår er ændringer 'harmløse' og hvornår er de det ikke. Man kan ændre et system på to måder, enten ved at ændre dets parametre eller ved at ændre ligningerne. I det følgende vil jeg holde mig til ændringer i parametre. I virkelige systemer, som torsionspendulet, vil der ofte være flere kontrolparametre. Hvis man ændrer på flere kontrolparametre på samme tid, bliver det let meget indviklet, så jeg vil kun se på ændringer i én kontrolparameter af gangen.

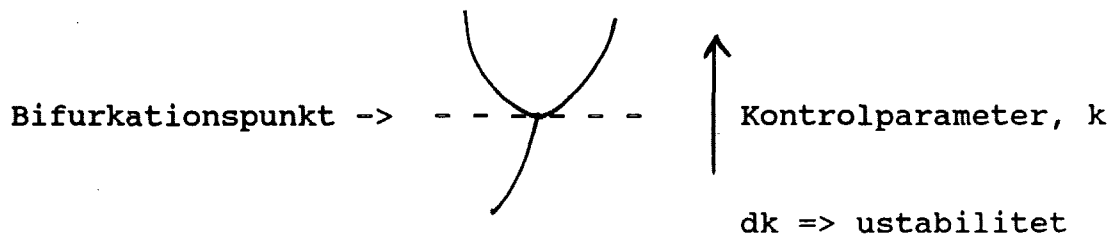
Et system med kun en kontrolparameter, er Feigenbaum-systemet

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n),$$

hvor vi ved at ændre på parameteren r , kan lære meget om kaos, også i større systemer. Det viser sig nemlig. bl.a. ved vores eksperimenter med torsionspendulet, at egenskaberne ved kaos er universielle. Vi genfinder måderne, de simple matematiske systemer ændrer adfærd på, i virkelige, fysiske systemer. Men hvad vil det sige, at et system ændrer adfærd, hvad vil man forstå ved en bifurkation?

Ved en bifurkation vil jeg forstå enhver kvalitativ ændring af et systems endelige adfærd¹. Det kan fx være, at en ligevægtstilstand går fra at være stabil, tiltrækende, til at være ustabil, frastødende, og omgivet af en stabil grænsecykel. Det er den simpleste dynamiske bifurkation, en såkaldt Hopf-bifurkation. Eller det kan være en periode-1 grænsecykel, der ændrer sig til en periode-2, eller fra periode-2 til periode-4, osv. Det kaldes naturligt for periodefordoblinger. Det kan også være overgang fra en periodisk cykel til kaos. En bifurkation siges at være af "co-dimension x ", hvis den fremkommer efter ændring af x kontrolparametre. Alle de bifurkationer jeg undersøger, er altså af co-dimension 1.

Et bifurkationspunkt er ethvert punkt i kontrolparameter-rummet, som svarer til et strukturelt ustabil system, dvs at selv den mindste ændring vil få systemet til at ændre opførsel radikalt (i topologisk forstand).

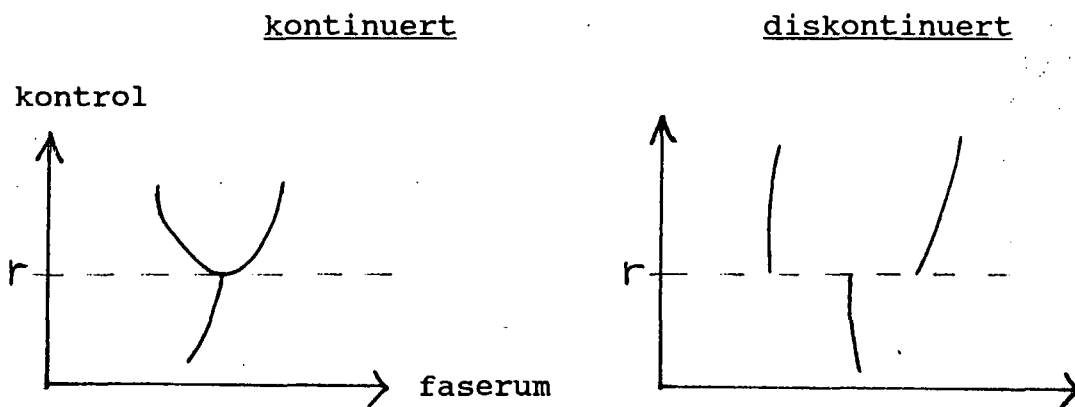


Figur H: Bifurkation.

Man skelner mellem forskellige typer bifurkationer, fx vil den (uendelige) række periodefordoblinger, man iagttaget i Feigenbaum-systemet, kaldes kontinuerte.

En bifurkation kaldes kontinuert, hvis den løsning den fremstiller, kan følges (er kontinuert) henover bifurkationspunktet. I modsat fald kaldes den diskontinuert eller 'katastrofal'. Russerne bruger betegnelserne 'sikker' hhv 'farlig' om sådanne grænser.

¹Ved en bifurkation forstår man normalt en forgrening (to grene), men jeg mener, at denne definition er mere anvendelig til at beskrive kaotisk adfærd.



Figur I: Kontinuert og diskontinuert bifurkation.

Et andet skel er mellem lokale og globale bifurkationer. En lokal bifurkation er den kvalitative ændring af faseportrættet, der kan karakteriseres nær et punkt i faserummet (eller på Poincaré-snittet), hvorimod en global bifurkation ændrer strukturen i hele faserummet, fx ved introduktion af gnidning.

I. Veje til kaos

Den eneste kontinuerede vej til kaos (ved co-dimension 1) er den komplette kaskade af periodefordoblinger, som fx findes i Feigenbaum-systemet og i simulationen af torsionspendulet. Alle bifurkationerne er desuden lokale. En af de universelle egenskaber ved denne overgang er, at afstanden mellem de parameterverdier, hvor bifurkationerne finder sted, har et konstant forhold, det såkaldte Feigenbaums tal.

$$f_i = \frac{r_i - r_{i+1}}{r_{i+1} - r_{i+2}} = 4.66920\dots \text{ for } i \rightarrow \infty.$$

Denne konstant har jeg forsøgt at genfinde for torsionspendulet, men, som det senere vil fremgå, uden den store præcision.

Periodefordoblingerne vil altså komme stadig hurtigere og fortsætter principielt uendeligt. Men for en bestemt værdi af parameteren, vil systemet blive kaotisk. Hvis vi fortsat hæver den, vil der senere igen komme periodiske systemer, man kalder det 'vinduer'. Det kan vises, at de parameterverdier, som giver kaos, er diskrete (se fx Kurt Jakobsen (1989)), afløst af intervaller ('vinduer') med periodisk forløb. Der vil være uendelig mange af de 'kaotiske' parameterverdier, og ligeledes uendelig mange intervaller med periodisk opførsel (og nye kaskader af

periodefordoblinger). Dette forløb har vi genfundet i simulationen af torsionspendulet.

En anden vej til kaos kaldes intermittens, og adskiller sig fra kaskaden af periodefordoblinger, ved at kontrolparameteren ikke nødvendigvis ændres. Intermittens er det fænomen, at et system, over utrolig lang tid (flere tusinde sekunder), kan se ud til at være periodisk, for så pludselig at blive afbrudt af kaotisk opførsel, for så senere måske igen at se periodisk ud, osv.

For at se et intermittent forløb, behøves man altså ikke ændre parameteren. Men den intermittente bifurkation sker selvfølgelig ved én bestemt parameterovergang.

Et sådant forløb har jeg fundet for torsionspendulet, se fig. 12-15. Jeg har en stabil 20-cykel, som ved en bestemt værdi af parameteren bliver ustabil. For værdier lige derunder, vil man se mange intermittente forløb.

Grunden er nok, at systemet befinder sig meget tæt på en kontrolparameter værdi, for hvilken der eksisterer en stabil periodisk cykel. For den aktuelle parameter værdi er der så en ustabil periodisk cykel. Det er tilfældet lige under vinduer i figentræet. Koncentrationen af punkter omkring 'fortsættelsen' af periodiske cykler støtter dette (for det betyder, at systemet oftere er dér).

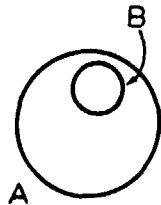
Praktisk har jeg lavet intermittenskørslen ved at lade udgangsbetingelserne være som på en af grenene, men lade værdien af parameteren være som nede i det kaotiske område. Jeg vil senere komme ind på, hvordan en såkaldt returafbildning kan vise dette fænomen. Et intermittent forløb kan også være en periodisk cykel, der bliver til en 'drift-ring'.

En overgang til kaos, jeg tidligere har været inde på, er overgangen fra en grad 2 (eller 3) kvasi-periodicitet til kaos. Den optræder fx i overgangen til turbulens i væske.

Den sidste (?) type overgang til kaos, er en 'ud i det blå katastrofe' ("blue sky catastrophe"). Den opstår, når en attraktor pludselig forsvinder. Det kan være en grænsecykel, der pludselig forsvinder (som vi skal se for torsionspendulet), eller det kan være en kaotisk attraktor, der gør det.

Ved intermittens vil det være sådan, at den ene attraktor er indeholdt i den anden. Pludselig, ved en bestemt

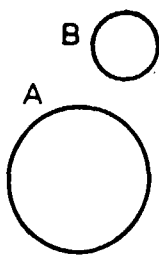
parameterværdi, 'kollapser' den ene attraktor og afløses af den anden. Den periodiske attraktor (før overgang) ligger inden i den kaotisk attraktor (efter overgang). Man kalder også intermittente bifurkationer for 'indre katastrofer' eller 'eksplosioner'. Fx har vi observeret det, hvor systemet er gået fra en kaotisk attraktor i den ene grøft, til en kaotisk attraktor i begge grøfter, se fig. 6 og 19. Intermittens kan altså også godt være en bifurkation fra kaos til kaos.



Figur J: Intermittens.

Selvom der ved et intermittent forløb ikke er to sameksisterende stabile attraktorer, vil der være sameksistens mellem en stabil og en ustabil attraktor. Den, der ved overgangen bliver ustabil, er indeholdt i den anden, den nu stabile. Hvis systemet tilfældigt lander på (eller meget tæt på) den ustabile attraktor, kan det godt blive på den i meget lang tid, se fx fig. 22-23. Men det vil uvægerligt tilsidst drive væk.

Ved en 'blue sky catastrophe' er attraktorerne adskilte og sameksisterende over et parameterinterval.



Figur K: 'Blue sky catastrophe'.

Ved én bestemt parameterværdi forsvinder den ene attraktor (der kan forud være et interval hvor den er ustabil, frastødende), og hvis systemet befinder sig på den, vil det 'falde ned' på den anden. Jeg vil senere fortælle om, hvordan jeg observerede det med simulationen af torsionspendulet, hvor en periode-9 faldt ned til en periode-2.

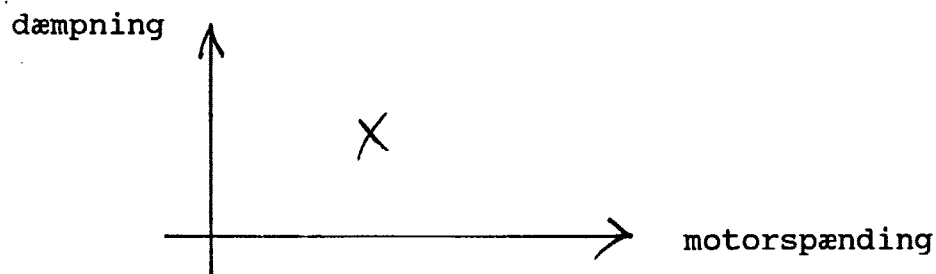
J. Udmåling

Men hvordan skal man holde styr på alt dette? Hvis systemet er diskret og en-dimensionalt med én kontrolparameter, kan man lave et 'figentræ', og på den måde få et overblik over systemets mulige opførsler. Hvis der er flere dimensioner og flere kontrolparametre, bliver det svært og hurtigt uoverskueligt.

I simulationen af torsionspendulet har vi stort set kun gjort brug af én kontrolparameter, dæmpningsspændingen. Til hver værdi af den hører en beskrivelse af systemets mulige opførsel. Hvis denne beskrivelse skal være fuldstændig, skal det være et portræt af den mulige attraktor i det 3-dimensionale faserum (u, w, p) . Vi kunne kalde det et faserumsportræt. Eftersom der kan være sameksisterende attraktorer, skal man måske have flere af slagsen.

Beskrivelsen kan principielt aldrig blive fuldstændig, for der vil være uendelig mange parameterverdier, vi skulle gøre rede for. Uanset hvor lille et parameterområde vi 'kiggede ned i', ville vi opdage nye ting - beskrivelsen er fundamentalt fraktal. I praksis er det ikke noget problem, for vi kan aldrig bestemme parametrene bedre end indenfor et interval, og som jeg før har været inde på, vil det kun være de strukturelt stabile systemer, der vil dukke op.

Hvis der er flere kontrolparametre, kan vi lave et 'kontrol-fase-rum', fx:

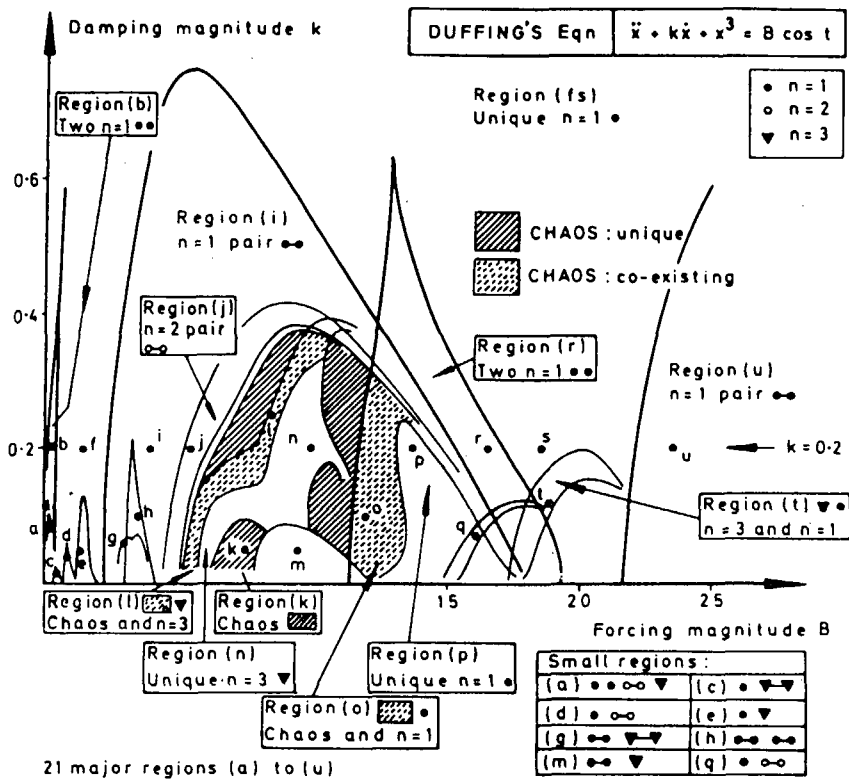


Figur L: 'Kontrol-fase-rum'.

Til hvert punkt i det hører et faserumsportræt (eller flere!). Vi er nu oppe på (mindst) 5 dimensioner. Et sådan 5-dimensionalt portræt kunne man kalde et 'kontrol-fase-portræt' (udarbejdelse af den slags vil være en typisk ingeniør-disciplin).

Som ingeniør kunne man være interesseret i at minimere et eller andet forbrug, fx el til et kølehus (se Togeby

(1988)). Hvis man kendte sit system og kunne variere sine parametre indenfor nogle grænser, ville et kontrol-fase-portræt kunne hjælpe til at styre udenom fx kaotiske områder. Svingninger i temperatur skulle i hvert fald gerne kunne minimeres og ikke være kaotiske. I de fleste tilfælde vil et mere upræcist portræt som figur M være tilstrækkeligt (man kunne måske kalde det et portræt af 'kontrol-attraktor-basin'er').



Figur M: 'Kontrol-attraktor-basin'er'.

Hvis man indfører en 'kontrol-fase-funktion', som til hvert punkt i kontrol-fase-rummet lod svare faserums-portrættet, kan man udvide (og præcisere) definitionen af, hvordan et system bifurkerer, til også at omfatte bifurkationer af periodiske og kaotiske attraktorer. Systemet vil da bifurkere diskontinuert for de parameter-værdier, hvor kontrol-fase-funktionen er diskontinuert (hvilket Zeeman viste i 1982).

K. Computersimulation

"Whenever a good physicist examines a simulation, he must wonder what bit of reality was left out, what potential surprise was sidestepped. Libchaber liked to say that he would not want to fly in a

simulated airplane - he would wonder what had been missed..."

J. Gleick.

Computeren er det centrale redskab i kaosforskningen. Uden den ville det ikke være muligt at foretage de lange rækker af beregninger, som er nødvendige, hvad enten det drejer sig om iterative systemer a la Feigenbaum, eller det er simulering af virkelige systemer.

Tidligere har jeg beskrevet kaotisk adfærd som uforudsigelig, men i princippet beregnelig, og har derfor benævnt det 'deterministisk kaos'. Men kan vi regne os frem til, hvordan et kaotisk system præcist vil opføre sig i fremtiden?

Nej! Og det hænger sammen med kaotiske systemers ekstreme følsomhed overfor udgangsbetingelserne. En computer vil altid have en endelig talrepræsentation og vil derfor altid lave afrundinger. Disse afrundinger repræsenterer små perturbationer i forhold til det 'virkelige' system. Altså vil de to systemer, det virkelige og det simulerede, divergere exponentielt fra hinanden. Uanset regnenøjagtighed, vil det kun være et spørgsmål om tid, hvornår afvigelsen bliver stor nok til at kunne 'ses'.

Hvis man skulle lave en simulation, som skulle modsvare en kørsel med et virkeligt system, ville man heller ikke kunne vide præcis hvilke udgangsbetingelser, man skulle starte simulationen ud fra. For virkelige systemer vil man altid kun kende tilstanden med en vis usikkerhed, altså indenfor et interval. Dette interval vil efter en tid være spredt ud over hele måleområdet.

Det vil altså ikke være muligt at forudberegne udviklingen pga computerens endelige talrepræsentation. Det bedste man kan gøre, er at vente og se hvordan systemet udvikler sig - hvis man vel at mærke kan være sikker på, at det er samme system! En motorspænding, der driver som vores, vil selvfølgelig give langt større afvigelser end en computersimulation.

Hvis man skal sammenligne computersimulation og virkelighed for et system, der opfører sig kaotisk, må man bruge den kaotiske attraktor som sammenligningsgrundlag. Den er nemlig uhyre robust overfor perturbationer. Det gælder både de perturbationer som computeren forårsager, og dem det virkelige system er udsat for, fx drivende spændinger, rystende borde, osv.

Når den kaotiske attraktor ikke ændrer sig under en computersimulation, eller ved en efterfølgende fortsat, kan man se, at attraktoren er robust. For når computerens usikkerhed ikke har nogen betydning, må den være det.

Men jeg har også set det modsatte; at en simulation af et kaotisk system (dvs for en kaotisk parameter værdi) var intermitterent. Den 'sprang' mellem to kaotiske attraktorer, den ene inden i den anden. Se fig. 19. Eller endnu mærkeligere; at den gik fra kaos til periode-8 til kaos! Se fig. 22-23.

Det var det, vi bemærkede i afsnit I: Et intermitterent forløb er kendetegnet ved sameksistens mellem to attraktorer, en stabil og en ustabil, den ustabile indeholdt i den stabile. Se figur J. Hvis systemet lander på den ustabile attraktor, kan det godt fortsætte på den et stykke tid, inden det driver tilbage (ud igen) til den stabile.

En anden metode, til undersøgelse af en attraktors robusthed, er vha perturbation. Hvis systemets endelige opførsel er den samme, uanset udgangsbetingelserne, er attraktoren robust.

De attraktorer, som torsionspendul-gruppen på KU har fundet (Jensen, m.fl., 1989), ligner vores.

Det er nok på sin plads at bemærke, at to computersimulationer, startet med samme begyndelsesbetingelser og udregnet med de samme approximationer, vil være identiske. Systemet er deterministisk (og entydigt).

Under simulationerne af torsionspendulet har vi set hvor stor betydning computerens regnenøjagtighed har. En af de ting vi kan ændre er nemlig regnenøjagtigheden, og vi er endt med at bruge 8-9 betydende cifre (det er på grænsen af det mulige for programmet/computeren). Hvis vi går ned i nøjagtighed (4-6 betydende cifre), ser vi 'underlige' ting.

Et system, som er faldet ind på en stabil attraktor, driver pludselig væk - for senere at vende tilbage. Eller når vi lavede kørsler, hvor vi ændrede en parameter gradvist, så 'eksploderede' opførslen. Regnenøjagtigheden svarede til, at vi hele tiden 'skubbede' til systemet. Og der er vel at mærke tale om fænomener, der forsvandt, når vi øgede regnenøjagtigheden - alle 'underlige' ting er nysgerrigt blevet undersøgt.

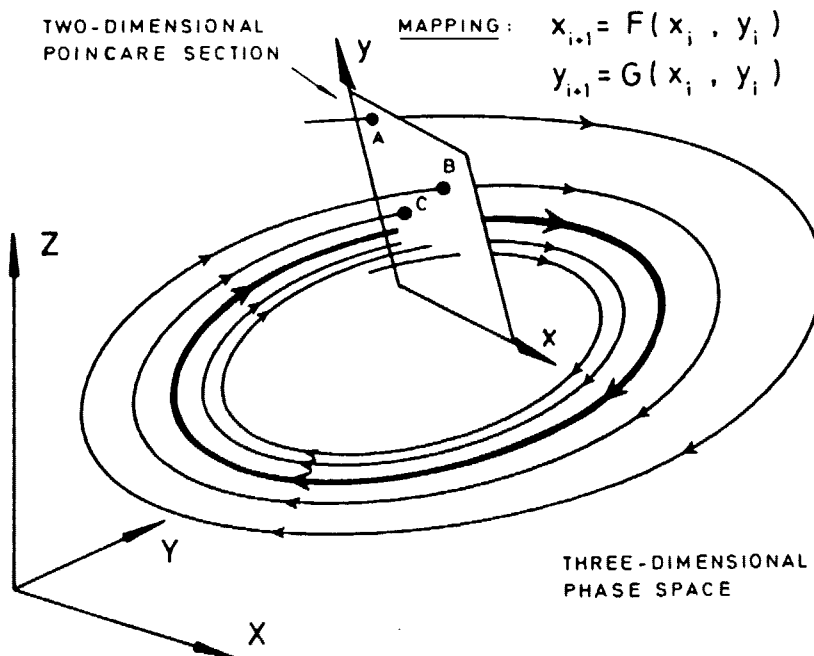
Det upraktiske, ved den store regnenøjagtighed, er selvfølgelig, at det så tager meget længere tid. Faktisk mere end 'real-time' (kontinuert fysisk tid)! Det vil sige at en simulation, der i real-time svarer til 13650 sek (max kapacitet) tager 4-5 timer. Jeg har, siden vi fik modelleret systemet og lavet computerprogrammet i efteråret 1988, lavet små 100 kørsler.

L. Retur-afbildningen

Som det er fremgået af det foregående, er kaosforskeren temmelig afhængig af computeren og af en række forskellige afbildninger ("maps"). Fx faserum, fasediagram og Poincaré-snit. Vi har tidligere set eksempler på de forskellige typer, men mangler én, returafbildningen ("return-map" eller "Poincaré-map").

Tidligere introducerede jeg den kaotiske attraktor for at få styr på et systems 'totale' opførsel. Men da en 3-dimensionel figur er svær at håndtere, er vi gået over til at se på Poincaré-snittet. Men selvom et Poincaré-snit er et meget sigende billede af et systems opførsel, er det ikke entydigt. Det fortæller intet om, hvor det næste punkt kommer.

Man kan få en ide om, hvordan attraktoren folder trajektorierne, ved at lave mange Poincaré-snit. Men man kan også anvende retur-afbildningen.



Figur N: Retur-afbildningen.

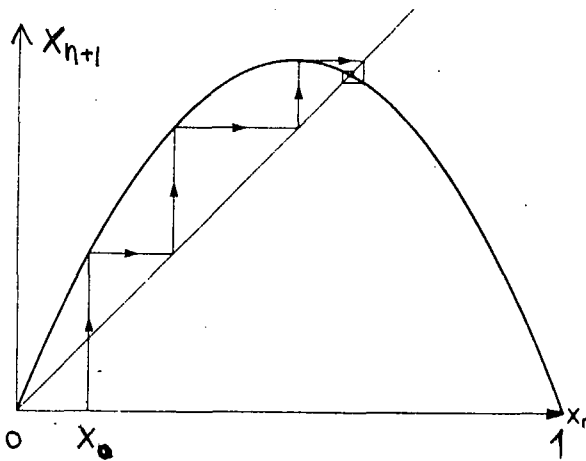
Retur-afbildningen er den funktion, der fører et punkt i Poincaré-snittet over i det næste. Selvom det kan lyde indviklet, så beskriver returafbildningen yderst økonomisk om foldningen eller 'mixningen' af trajektorierne. Hvornår strækkes de og hvornår sammenpresses de.

For at få en ide om retur-afbildningen, kigger vi først på Feigenbaum-systemet:

$$f(x_n) = x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) = -r \cdot (x_n)^2 + r \cdot x_n,$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq r \leq 4.$$

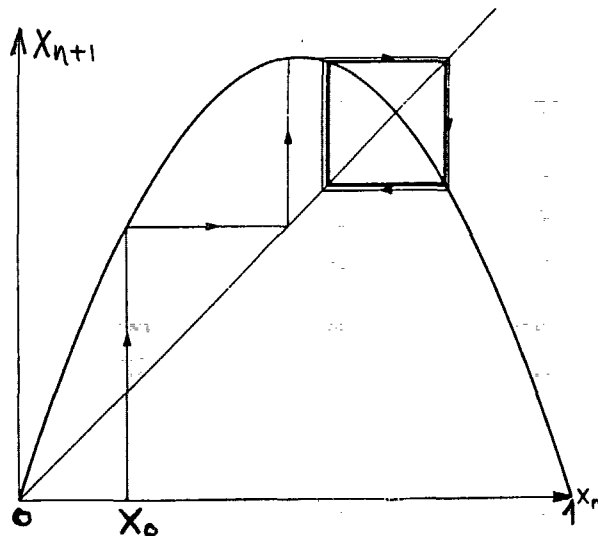
Hvis man afbilder den, har man retur-afbildningen:



Figur 0: Den itererede afbildning.

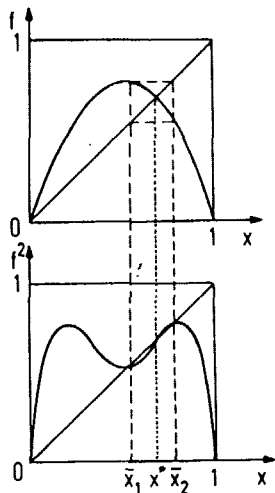
På figur 0 er angivet hvordan man fra et 'frø', x_0 , finder de næste værdier vha linien $y = x$. Parablens skæringspunkt med $y = x$ er i dette tilfælde et stabilt punkt. Kurvens hældning i skæringspunktet afgør om punktet er tiltrækkende eller ej. Hvis hældningen er mindre end 1 numerisk er punktet tiltrækkende, hvis den er større end 1 numerisk er det frastødende. Beviset er simpelt (se fx Jakobsen (1989) pp. 31-32), og man kan let overbevise sig om det ved at lave et par tegninger. Forøvrigt bemærker man, at punktet $x = 0$ er et ustabil, frastødende ligevægtspunkt.

Når man lader r vokse, vokser kurvens hældning i skæringspunktet med $y = x$, og når den passerer 1, bliver punktet frastødende. Vi får en 2-cykel:



Figur P: 2-cykel.

Hvis vi i stedet for at afbilde x_n mod den første itererede, afbilder den mod den anden itererede, ser vi, at vi kan bruge analysen fra før:



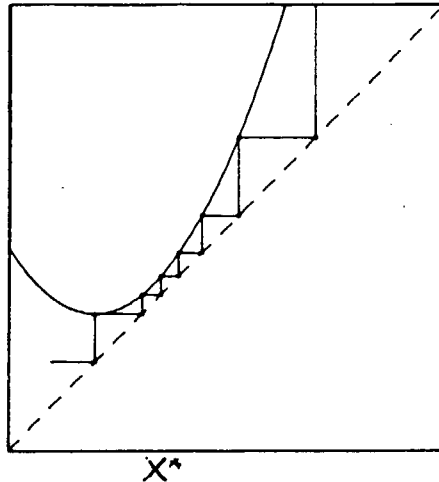
Figur Q: Den 2. itererede af en 2-cykel.

De to punkter vil være tiltrækkende, hvis hældningen, ved skæringen med $y = x$, er mindre end 1 numerisk. En tilsvarende analyse kan man foretage ved alle periodiske cykler (også fx 3-cykel).

Dette resultat kan vi bruge til at forklare en del intermitterende forløb, fx det omkring 20-cyklen, fig. 12-15. Ved at lave den m 'te itererede retur-afbildning (m -cykel), fås et forløb, der minder om fig. R.

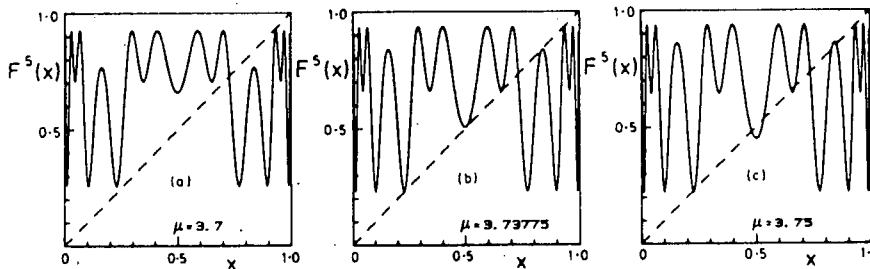
Figuren viser, hvor systemet lander efter m iterationer. Systemet er altså tvunget til at tilbringe lang tid

omkring x^* - det ligner en m -cykel. Den tilsvarende afbildning for 20-cyklen ses fig. 17-18.



Figur R: Intermittent forløb (tangent-bifurkation).

Kurven hæver og sænker sig med parameteren r , og det er først i det øjeblik, at den 'slipper' $y = x$, at punktet bliver ustabil. Derfor kalder man denne intermittente overgang til kaos for en tangent-bifurkation.



Figur S: Tangent-bifurkation.

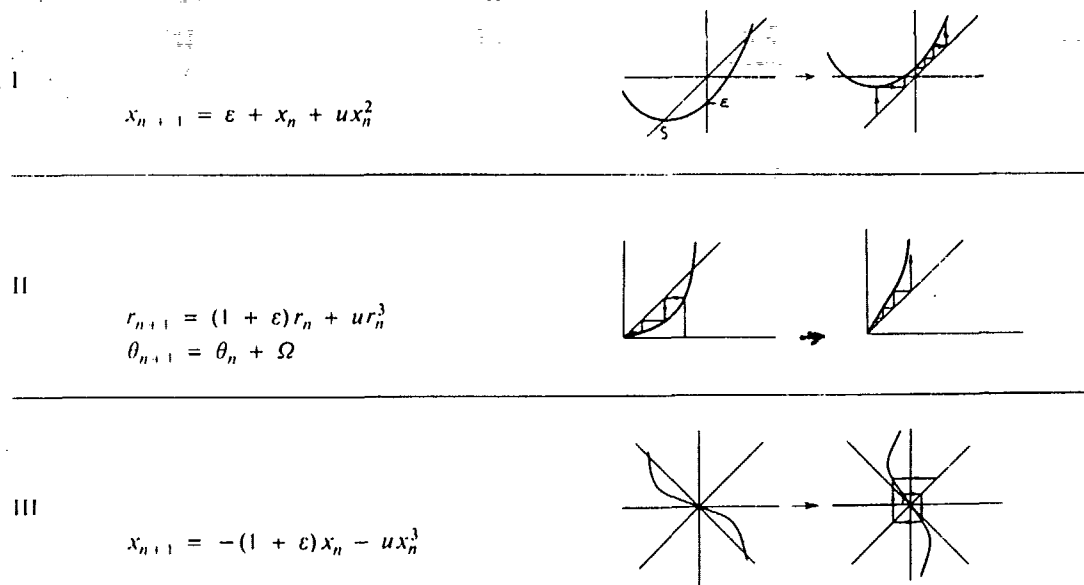
På tilsvarende måde må det forholde sig for andre systemer end det en-dimensionale iterative. Men som vi skal se for torsionspendulet (fig. 20 og 24), bliver returafbildninger meget hurtigt uoverskuelige.

For kontinuerte dynamiske systemer bruges som sagt punkterne fra Poincaré-snittet som diskret dynamisk system. Hvis der påtrykkes en kraft med en bestemt frekvens, bruger man den påtrykte periode som iterationsperiode. Computersimulationen giver outputs med bestemte intervaller, OI , derfor bruges OI som iterationsperiode.



Figur T: Retur-afbildninger for kontinuerte systemer.

Alt efter hvilket udseende retur-afbildningen har, taler man om forskellige typer intermittens. Hvis retur-afbildningen (ved intermittens) har et forløb med hældningen ca. 1, som i det ovenfor skitserede, kaldes det intermittens type I. Hvis den har et forløb med hældningen ca. -1, er det intermittens type III. De tre typer intermittens er skitseret på figur U.



Figur U: Intermittens typer.

Jeg har ikke gjort noget særligt ud af at undersøge de forskellige typer af intermittens, bl.a. fordi retur-afbildningerne fra torsionspendulerne er meget uoverskuelige. Det kommer jeg nærmere ind på i kapitlet "Kaos på computer".

Retur-afbildningen kan hjælpe med til at afgøre, hvilken type bevægelse et system udfører. Hvis bevægelsen er periodisk, vil man se en række punkter, der nærmer sig ét punkt (evt nærmer sig m punkter, periode-m).

Hvis bevægelsen er kvasi-periodisk, vil punkterne drive og tilsidst udgøre (næsten!) kontinuerte kurvestykker. Men punkterne vil kun drive 'langsomt', og derved kan man skelne kvasi-periodisk bevægelse fra kaotisk adfærd. Hvis et system er kaotisk vil punkterne danne en kaotisk attraktor, og to vilkårligt tætliggende punkter vil divergere eksponentielt (for kvasi-periodisk bevægelse vil de følges ad). Den enkelte trajektorie vil resultere i punkter på retur-afbildningen, som vil bevæge sig rundt på hele attraktoren på en totalt uforudsigelig måde.

TORSIONSPENDULET

I det følgende vil jeg redegøre for nogle af de resultater, jeg har fået ved arbejdet med torsionspendulet. Jeg vil kort fortælle om simulationsprogrammet, opstille modellen for torsionspendulet og fortælle om udvalgte resultater. Alene pladshensyn gør, at det kun bliver en beskedent del af de opnåede resultater. Således vil jeg tillade mig at skære ned på gennemgangen af modelleringen af torsionspendulet. Dels er det ikke vanvittigt interessant, ej heller relevant for kaos som begreb, og dels formoder jeg, af de tre i specialet vil behandle det grundigt.

A. CTS

Programmet, der er benyttet til simulationerne, hedder "CTS", Continuous Time Simulation. For en grundig behandling af det, se IMFUFA tekst 121, Christiansen (1986). Dog benytter vi en nyere udgave.

CTS simulerer den kontinuerte fysiske tid, og kan derved simulere dynamiske systemer. Den model brugeren indskriver i programmet skal være formuleret som et sæt samhørende 1. ordens differentiaalligninger (alle differentieret mht tid).

Integrationsmetoden er en speciel 4. ordens Runge Kutta med variabel skridtlængde. Programmet afpasser skridtlængden i forhold til to krav. Dels den af brugeren opgivne regnenøjagtighed (et antal betydende cifre), og dels den 'vildskab' systemet udviser. Det vil sige, at skridtene bliver små, hvis løsningskurverne krummer meget, og er store hvis de er retlinede¹. Der er ingen garanti for, at den ønskede regnenøjagtighed er opnået.

Programmet kan enten lagre kontinuert eller diskret. Ved diskret lagring vælges et output-interval, OI, og det forøger programmets kapacitet mht simuleret tid enormt (ca. faktor 100). Programmet lagrer da kun systemets tilstand til bestemte tider med mellemrum OI (typisk den af motoren påtvungne periode).

¹Praktisk sker det ved at se på 2. afledede, dvs ændringer i differentialkvotienterne.

```

Model: TORSPEND ( 5460 skridt, max 5460 ) Path: C:\TE
LE( 0 )= 13650 : Tid (0-levels: 0)
LE( 1 )= 0.935806419373907

```

```

LE( 2 )=-2.6779360035253E-003

```

Output variable:

U: Udsving (rad)

P: motorPosition (rad)

w: vinkelhast. (rad)

Eksterne konstanter

A = 0.1375 motorAmplitude (rad)

F = 0 motorstartFase (rad)

Q = 6.25 motorspaending (V)

g = 9.82 tyngdeacc. (m/s²)

I = 1.54E-003 Inertimoment af hjul (kg*m²)

K = 2E-002 elasticitetsKonstant (J)

M = 2.4E-002 Masse af stang + lille lod (kg)

N = 1E-003 faststofgNidning (J)

R = 0 afstand fra yderpunkt af stang til lod (m)

L = 0 Ledig konstant

B = 2.4 Begyndelses-daempningsspaending (V)

S = 1.2 Slut-daempningsspaending (V)

T = 13650 koerselsTid (s)

Antal Cifre DG = 8

Reference level LR = 1

Outputinterval OU = 2.5

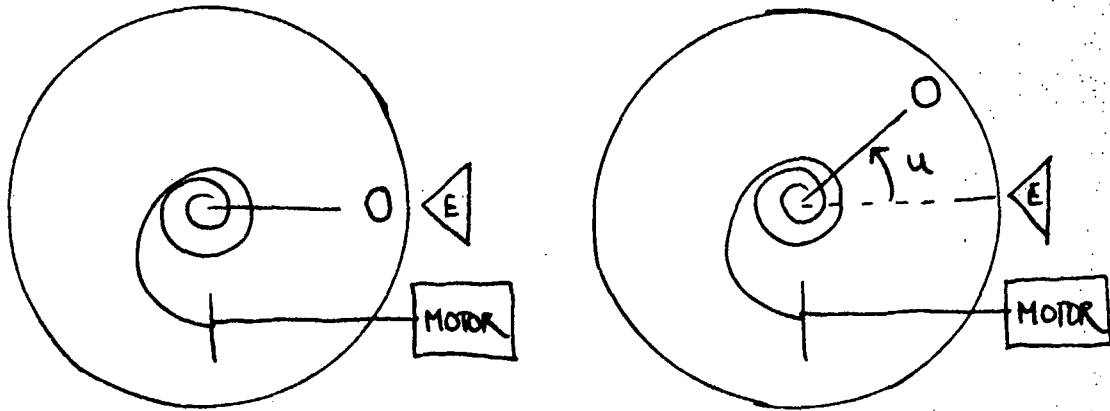
Figur V: Brugerskærm.

B. Modellen

CTS kræver, at man indfører såkaldte rate- og level-variable¹. En ratevariabel styrer ændringen af en level-variabel. Et eksempel kunne være: $le(1) = u$ (udsving i rad.) og $ra(1) = w$ (vinkelhast. i rad/sek). Ved hjælp af Hamiltonformalismen (se fx Goldstein (1980)), kan bevægelsesligningerne for torsionspendulet opstilles relativt let. I det følgende vil jeg altså anvende generaliserede koordinater.

Vi betragter først torsionspendulet uden lod. Af bekvemmelighedshensyn afmærker vi et ligevægtspunkt (og nulpunkt for den potentielle energi) ud for centrum af skiven.

¹Introduktion til den såkaldte energibandsformalisme: IMFUFA tekst 8, Christiansen (1978).



Figur W: Torsionspendul uden lod, ligevægtspunkt.

Punktet på skiven, der er ud for 'E', når skiven er i ligevægt, kalder vi 'O'. Hvis skiven drejes vinklen u fra ligevægt, er den potentielle energi

$$V(u) = 1/2 \cdot k \cdot u^2,$$

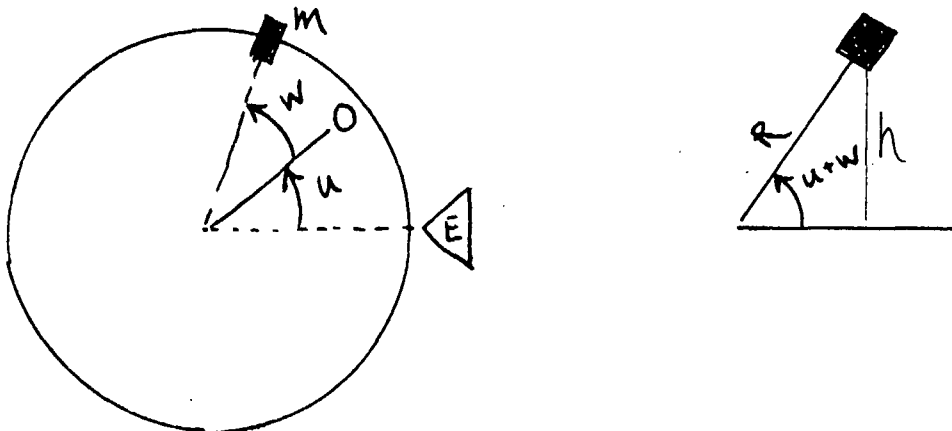
hvor k (J) er fjederens elasticitetskonstant. Hvis motoren kører flyttes ligevægtspunktet fra $u=0$ til

$$u_0(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi / T \cdot t).$$

Det vil sige

$$V_0(u, t) = 1/2 \cdot k \cdot (u - u_0(t))^2.$$

Vi sætter nu et lod, med massen m , på skivens rand. Afstanden fra skivens centrum til loddets tyngdepunkt er R , og vinklen mellem lod og punktet O er w .



Figur X: Torsionspendul med lod.

Den totale potentielle energi vil da være

$$V(u, t) = 1/2 \cdot k \cdot (u - u_0(t))^2 + m \cdot g \cdot R \cdot \sin(u+w).$$

Den kinetiske energi, T , kan tilsvarende skrives som en sum af skivens kinetiske energi, T_0 , og loddets kinetiske energi, T_L :

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_L \\ &= 1/2 \cdot I_0 \cdot (du/dt)^2 + 1/2 \cdot I_L \cdot (du/dt)^2 \\ &= 1/2 \cdot (I_0 + I_L) \cdot (du/dt)^2 \\ &= 1/2 \cdot I \cdot (du/dt)^2, \end{aligned}$$

hvor $I = I_0 + I_L$ er summen af skivens og loddets inertimomenter.

Impulsmomentet er

$$p = \delta T / \delta w = I \cdot w,$$

hvor $w = du/dt$. Sammenholdes udtrykkene for T og p fås

$$T = p^2 / (2 \cdot I).$$

Hamiltonfunktionen er da

$$\begin{aligned} H(p, u, t) &= T + V \\ &= p^2 / (2 \cdot I) + 1/2 \cdot k \cdot (u - u_0(t))^2 + \\ &\quad m \cdot g \cdot R \cdot \sin(u + w). \end{aligned}$$

Vi kan nu opstille bevægelsesligningerne, idet

$$du/dt = w = \delta H / \delta p = p/I$$

(1)

$$\begin{aligned} dp/dt &= - \delta H / \delta u \\ &= - k \cdot (u - u_0(t)) - m \cdot g \cdot R \cdot \cos(u + w). \end{aligned}$$

Impulsmomentændringen dp/dt er lig med kraftmomentet,

$$dp/dt = M = I \cdot dw/dt = I \cdot \alpha,$$

hvor α er vinkelaccelerationen. dp/dt er altså proportional med vinkelaccelerationen. Hvilket selvfølgelig stemmer med, at dp/dt er en generaliseret kraft.

Ligningssystemet (1) er konservativt, i modsætning til vores dissipative torsionspendul. I første omgang vil vi tilføje et led, der bremser bevægelsen proportionalt med

hastigheden. Det svarer til spolernes (magnetfelts) indvirkning på skiven¹. Vi får

$$w = p/I$$

$$dp/dt = k \cdot (u_0(t) - u) - m \cdot g \cdot R \cdot \cos(u+w) - G \cdot w.$$

Disse to størrelser, w og dp/dt , er vores ratevariable, svarende til de to levels, u og p .

Det vil sige, at CTS-modellen bliver

$$\begin{aligned} le(0) &= \text{tiden} & (ra(0) &= 1) \\ le(1) &= u \\ le(2) &= p \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} ra(1) &= p/I \\ ra(2) &= k \cdot (u_0(t) - u) - m \cdot g \cdot R \cdot \cos(u+w) - G \cdot w. \end{aligned}$$

For at få en tilfredsstillende overensstemmelse mellem model og virkelighed har vi tilføjet et ekstra led, som modellerer faststofgnidningen. Den er modsat rettet hastigheden, men ellers konstant (lig med N (J)). For det lod vi har monteret er $w = \pi/2$, og da $-\cos(u + \pi/2) = \sin(u)$, fås

$$\begin{aligned} le(0) &= t \\ le(1) &= u \\ le(2) &= p \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} ra(1) &= le(2)/I \\ ra(2) &= k \cdot (A \cdot \sin(2 \cdot \pi/T \cdot le(0)) - le(1)) + \\ &\quad m \cdot g \cdot R \cdot \sin(le(1)) - G \cdot ra(1) - \\ &\quad \text{sign}(ra(1)) \cdot N. \end{aligned}$$

Modellen ses på figur Y. Jeg vender tilbage til, hvorfor de ikke er helt ens.

¹Magnetfeltet inducerer hvirvelstrømme ('eddie currents') i skiven.

```

----- MODELDEFINITION TIL CTS -----
' Udfyld de forskellige programområder og kør programmet.
' Modellen gemmes ved at gemme denne tekstfil. Husk at navn-
' give modellen (MN#) og angive bruger-directory (UserPath#).

MN#="TORSPEND"
UserPath#="C:\TB"

#include "CTS.INC"

NLBetingelser:
----- NL-BETINGELSER -----

RETURN
InterneKonstanter:
----- INTERNE KONSTANTER -----
PERI=1/(0.08*Q-0.1)
RaMa=0.124B-0.490*R
ILOD=M*RaMa^2
ITDT=ILOD+I
TOPI=2*PI
KRMO=M*g*RaMa
BEGY=2.3e-5*exp(log(2)/0.7*B)
SLUT=2.3e-5*exp(log(2)/0.7*S)
DEMP=(1-SLUT/BEGY)/T

RETURN
OutputVariable:
----- OUTPUT-VARIABLE -----
u=LE(1)
F=A*sin(TOPI*LE(0)/PERI+F)
w=LE(2)/ITDT

RETURN
RateLigninger:
----- RATE-LIGNINGER -----
ra(1)=LE(2)/ITDT
ra(2)=K*(A*sin(TOPI*LE(0)/PERI+F)-LE(1))+KRMO*sin(LE(1))
      -BEGY*(1-DEMP*LE(0))*ra(1)
      - (exp(5*ra(1))-exp(-5*ra(1)))/(exp(5*ra(1))+exp(-5*ra(1)))*N

RETURN
StyringOgStoej:
----- STYRING OG STØJ -----

RETURN
----- BRUGERDEFINEREDE FUNKTIONER OG SUBROUTINER -----

```

Figur X: CTS-model.

Hvis man havde opstillet bevægelsesligningerne traditionelt vha en ligevægtsbetingelse på kraftmomentet, havde man fået

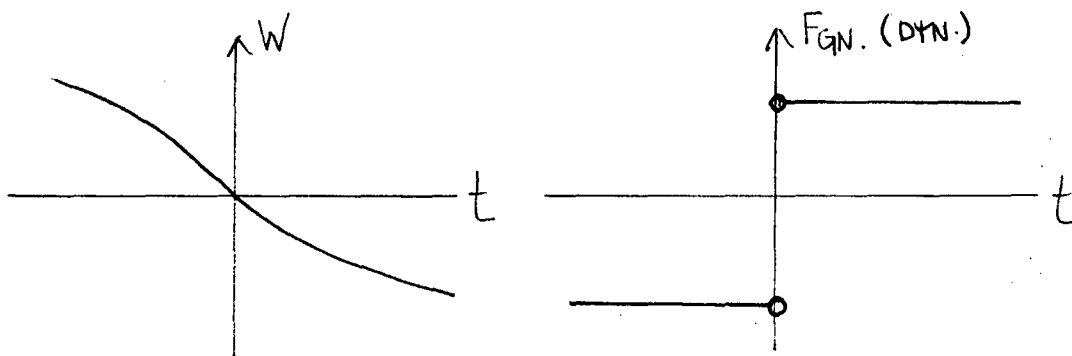
$$d^2u/dt^2 + l/I \cdot du/dt + k/I \cdot u - m \cdot g \cdot R/I \cdot \sin(u) = A/I \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

For at kunne køre modellen på CTS, mangler vi nu 'blot' at bestemme konstanterne. Inertimoment af skive og lod fandt vi ved udmåling og integration. Tyngdepunkt af lod målte og regnede vi os frem til. Elasticitetskonstanten, k , kunne vi finde ved udmåling med fjedervægt, men også ved at være lidt smarte. Ved at måle systemets svingningstid (uden lod, motor og spoler, for så er det en almindelig harmonisk oscillator), kunne vi finde k af

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{I/k}.$$

På den måde kunne vi også krydstjekke resultaterne (som forøvrigt stemmer med værdierne fra manualen).

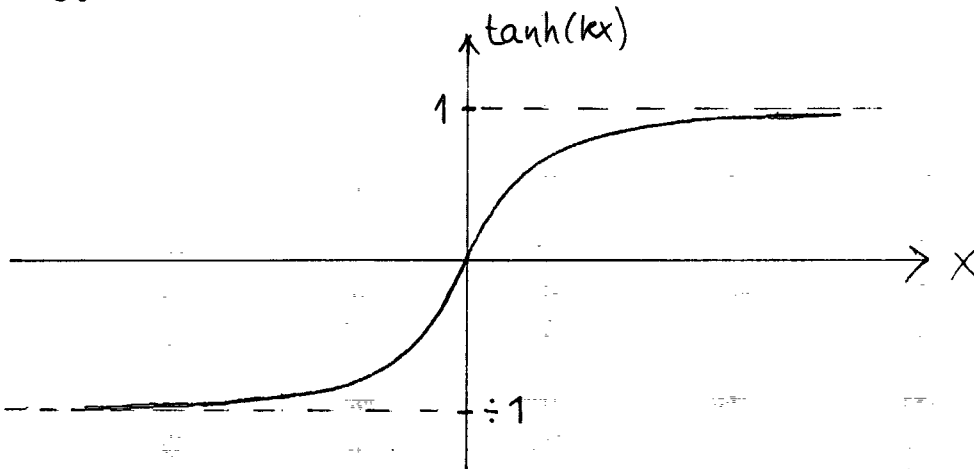
Faststofgnidningen fandt vi ved at undersøge hvor hurtigt pendulets bevægelse døde ud (uden lod, motor og spoler). Men når resultatet skal indarbejdes i CTS-modellen, løber man ind i nogle problemer. Faststofgnidningen virker som bekendt modsat rettet bevægelsen, dvs at når bevægelsen vender, så 'springer' gnidningskraften, se figur 2.



Figur 2: Diskontinuert gnidningskraft.

Sådan et spring kan programmet ikke regne på. Det forlanger pæne, kontinuerte funktioner. Hvis systemet springer på den måde, vil programmet tro, at det opfører sig 'vildt', og derfor sætte skridtlængden ned i det uendelige. Simulationen går i stå.

Så i stedet for at bruge "sign" funktionen, må vi bruge noget, der ligner, $\tanh(kx)$. Se figur 3.



Figur A: $\tanh(kx)$.

Vi skal blot passe på, at kurven ikke bliver for stejl (k for stor), så tror computeren nemlig, at systemet springer. Derfor har faststofgnidningsleddet det lidt underlige udseende.

Det giver desværre også lidt yderligere indviklinger. Vi har nemlig nu fået endnu et ikke-lineært element! Hvordan det indvirker på systemet er svært at sige. I bagklogskabens lys vil jeg sige, at vi nok burde have undladt leddet, og i stedet ladet faststofgnidningen 'indgå' i den hastighedsproportionale gnidning.

Sidste nyt! Lige før dead-line har jeg lavet en række kørsler uden faststofgnidning - se fig. 49-51.

Den hastighedsproportionale gnidning har vi valgt at udtrykke vha spændingen over spolerne. Grunden er den simple, at det er den størrelse, man rent praktisk stiller på. Det gør det altså meget lettere at sammenligne model og virkelighed.

Det betyder så, at programmet må omregne fra spænding over spolerne til dæmpning af skiven, vha formlen

$$\text{DÆMPNING} = 2.3 \text{ E-5} \cdot \exp(\ln(2)/0.7 \cdot \text{SPÆNDING}).$$

Denne formel er fundet ved rekursion af målinger på dæmpningen som funktion af spændingen over spolerne (faststofgnidning fraregnet).

Som jeg tidligere har været inde på, er den eneste parameter, vi for alvor har undersøgt systemet for, dæmpningsspændingen. Derfor har vi udformet den anden rateligning sådan, at det dels er muligt at holde denne parameter konstant, og dels er muligt at ændre den

kontinuert og lineært gennem et parameterinterval over en hel kørsel.

Alle de andre parametre kan man selvfølgelig også ændre, men altså ikke under en kørsel¹.

I det følgende vil jeg redegøre for nogle af de resultater, jeg har fundet under mine kørsler.

¹Som det fremgår, så opererer CTS med eksterne og interne konstanter. De eksterne er dem, man umiddelbart kan ændre.

KAOS PÅ COMPUTER

A. Model/virkelighed

Det første vi gjorde, da vi havde opstillet modellen, var at undersøge, hvordan den stemte overens med det virkelige torsionspendul. Det simpleste var at undersøge det for systemet uden lod, dæmpning (pga spolerne) og motor. Vi trak pendulet ud til et bestemt punkt, slap, og fik en (u, t) graf vha en skriver. Computersimulationen viste næsten præcis det samme forløb. Det virkelige torsionspendul havde 10 hele svingninger, det simulerede 1/2 mere, før også det gik i stå. Perioden var den samme ($T = 1.74$ sek).

Med lod, spoler og motor på, har vi været tilfredse med mere kvalitativt overensstemmelse. Fx at den første bifurkation kommer ved en dæmpningsspænding på ca. 2 volt. Jeg vil i næste afsnit omtale de forskellige typer bevægelse, vi har set for det virkelige torsionspendul.

Men var modellen så kaotisk? Det er principielt svært at afgøre, om det man ser er kaos, eller om det fx er meget langvarige transienter til en anden type tilbagevendende adfærd¹. Men der er nogle fænomener, der er stærke indicier på kaotisk adfærd.

For det første en periodefordoblingskaskade. Hvis man kan genfinde Feigenbaums tal, er det meget vægtigt.

For det andet exponentielt divergerende trajektorier fra vilkårligt tætte udgangsbetingelser, og dermed

for det tredje en positiv Liapunov-eksponent.

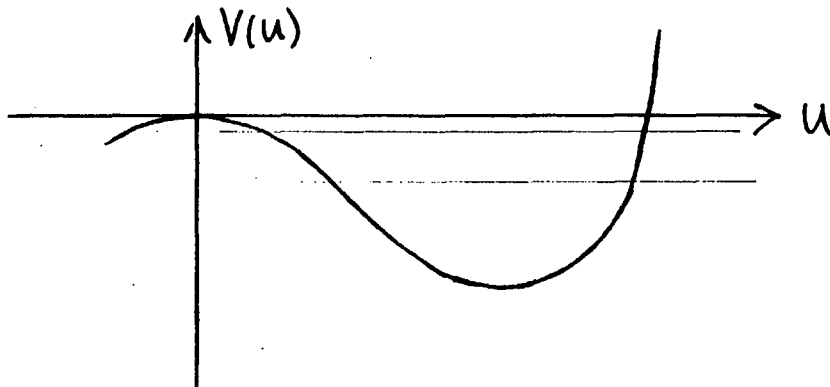
Vi har (endnu) ikke lavet et CTS-program, der kan udregne Liapunoveksponenter. De exponentielt divergerende trajektorier har vi set på fig. 1, men hvordan med periodefordoblinger?

¹Det kunne også være, at systemet 'sprang' mellem forskellige meget små, periodiske attraktor-basin'er, og derfor virkede kaotisk. Man har forsøgt at forklare kaotisk opførsel vha disse såkaldte "Newhouse-sinks", men man har endnu ikke fundet dem.

B. Figentræet (torsionspæretræet)

Jeg vil i dette afsnit holde mig til at undersøge systemet i den ene grøft. Det vil nemlig være sådan, at periodefordoblingskaskaden vil starte i den ene grøft. Der vil - som vi senere skal se - også være periodiske cykler, der går i begge grøfter.

Den parameter, som vi ændrer, er som sagt dæmpningsspændingen. Vi starter med den skruet op, dvs at systemet er meget dæmpet og altså er påtvunget motorens periode. Hvis vi skruer ned for strømmen til spolerne, vil pendulet få friere løb, og kan bygge energi op til et andet bevægelsesmønster.



Figur 0: Fjederpotentialiet for den ene grøft.

Hvis vi skruer tilstrækkeligt ned, vil pendulet kunne gå i begge grøfter. Som vi skal se, er det muligt for systemet at være periodisk i den ene eller i begge grøfter, og at være kaotisk i den ene eller i begge grøfter.

Når vi skruer ned for parameteren dæmpningsspænding, svarer det til at skruer op for en anden, nemlig motoramplituden (eller energien). Vi har ændret dæmpningsspændingen i intervallet $[0;3]$ volt.

Hvis vi ønsker at undersøge systemet mht én parameter, er det vigtigt, at vi ikke på anden måde påvirker systemet, fx ved at give det en stor startenergi (vha begyndelsesbetingelserne). Systemet har en meget lang 'hukommelse'.

Som det fremgår af fig. 5-11, har der været masser af periodefordoblinger. Jeg har været helt oppe på en periode-128! Allerede ved periode-8/16 kræver systemet temmelig lang indsvingningstid. Og det er meget følsomt overfor selv små ændringer i udgangsbetingelserne, også

selvom det er periodisk. Det betyder, at det er et møjsommeligt præcisionsarbejde at nå op på så høje perioder.

For det første kommer periodefordoblingerne stadig hyppigere. Forholdet mellem afstandene er jo konstant, nemlig Feigenbaums tal.

Det betyder, at det interval, dæmpningsspændingen skal løbe over, bliver stadig mindre og mere kritisk.

For det andet skal systemet startes meget præcist på en periodisk cykel for at kunne fortsætte periodefordoblingen. Ellers drukner alt i transienter. Hvis man fx startede systemet i $(u,w)=(0,0)$, ville man have givet det energi nok til, at det ville gå i den anden grøft.

Det har betydet en del (lomme-) regnearbejde. For at bestemme dæmpningsspændingen ud fra en tid i intervallet $[0;13650]$ sek. (Og regne frem og tilbage mellem den faktiske dæmpning og så spændingen over spolerne). Og for at bestemme $le(2)$ ud fra skærbilleder (w) .

Det er meget afgørende, at systemet startes præcist på en 'gren', med præcist den rigtige værdi af parameteren.

Når systemet er så følsomt, og når der uundgåeligt vil være små fejl (i udgangsbetingelserne i forhold til parameteren og ved computerens afrundinger), betyder det, at bifurkationerne ikke kommer særlig 'skarpt'. De vil komme indenfor et interval, typisk 100-200 sek.

Og transienter ved periode-32/64/128 kan være meget langvarige.

Alt dette gør det svært at bestemme Feigenbaums tal blot nogenlunde præcist. Jeg har forsøgt at aflæse afstandene mellem bifurkationerne op til periode-128, og min bestemmelse af Feigenbaums tal ligger mellem 3 og 10. Absolut ikke noget at råbe hurra over. Men måske gemmer noget af fejlen sig i vores design af modellen. Faststofgnidningen er som sagt ikke-lineær når pendulet 'vender'. Men vi har altså set periodefordoblinger.

Derefter går systemet i kaos i et antal bånd i den ene grøft. Det er hvad Lorenz (i 1980) kalder "noisy periodicity" eller en kaotisk n -bånds-attractor. Disse bånd 'bifurkerer modsat', for til sidst at ende i 2 kaotiske bånd. Disse 2 bånd når ikke sammen, og for en bestemt værdi af parameteren, går systemet direkte til kaos i

begge grøfter. Systemet undergår en 'indre katastrofe' eller 'indre eksplosion'.

I dette område vil der typisk være intermittente forløb, hvor systemet i længere tid befinder sig på den mindre, ustabile kaotiske attraktor. Det ses på fig. 19.

Som det fremgår, fx af fig. 27 og 50, vil der senere i forløbet være vinduer med periodisk opførsel i det ellers kaotiske område. I disse vinduer kommer nye periodefordblingskaskader, ganske som i Feigenbaumsystemet. Specielt bemærkes af fig. 27-28, at der er et periodisk forløb, hvor pendulet går i begge grøfter.

Hvis læseren mener, at det ville være spændende at se det samme for det virkelige torsionspendul, er jeg ganske enig - det kan bare ikke lade sig gøre. Dertil driver parametrene alt alt for meget.

Som nævnt i introduktionen har vi kun med sikkerhed set tre slags endelig opførsel, periode-1, periode-2 og kaos. Den kaotiske opførsel har vi set to varianter af; kaos i den ene grøft, og kaos i begge grøfter. Det betyder så, at vi har set tre bifurkationer. Fra periode-1 til periode-2, fra periode-2 til kaos i en grøft, og fra kaos i en grøft til kaos i begge grøfter.

Desuden er vores torsionspendul ikke symmetrisk; det er kun i den ene grøft, at det er muligt at se kaotisk opførsel. Umiddelbart virker det som om, at gnidningen i den ene grøft er større end i den anden. Men forklaringen på fænomenet skyldes nok inhomogenitet i fjederen. Fjederpotentiallet må være asymmetrisk. Gruppen på KU har haft nøjagtigt samme problem. Det har også betydet, at det har været svært at se kaotisk opførsel i begge grøfter over længere tid. Pendulet har en tendens til at gå i en periode-1 i den ene grøft.

Det har ikke været det største problem for mig, eftersom det virkelige apparat kun havde min interesse i starten og under optagelserne til videoen. Der er langt flere interessante fænomener at se i simulationerne.

C. Intermittens

Hvilke slags intermittens har jeg fundet? Det er svært at afgøre hvilke typer af intermittens, der er tale om for torsionspendulet. Retur-afbildningerne er simpelthen for komplicerede (se fig 20 og 24). Det ville være muligt at

gøre dem noget enklere, hvis CTS havde endnu en facilitet: At man kunne nøjes med at få afsat data fra et tidsinterval. Nu er man nødt til at se alle data fra hele kørslen. Og det intermittente forløb er jo kun en lille del af det, se fx fig. 13 og 25. Men som sagt har faststofgnindningsleddet måske også noget af skylden.

Jeg er rimelig sikker på at have set intermittens type I, nemlig tangent-bifurkationen af 20-cyklen. Som det fremgår af fig. 17-18, kan man se de steder hvor tangentterne slipper. Ud fra teorien formoder jeg også at have set intermittens type III, da man med lidt god vilje kan finde hældninger på ca. -1 på første returafbildning, se fx fig. 21.

Men de situationer jeg har observeret intermittente forløb i, har været

- ustabil 20-cykel, $B = S = 1.207764$ volt, fig. 12-18
- mellem to kaotiske attraktorer, den ene, ustabile, indeholdt i den større, stabile, $B = S = 1.1$ volt, fig. 19-21
- mellem en kaotisk attraktor og en ustabil 8-cykel, $B = S = 1.1$ volt, fig. 22-24
- mellem en kaotisk attraktor og en ustabil 12-cykel, $B = S = 1.75$ volt (!), fig. 25-26. (Disse attraktorer er altså sameksisterende med en periode-2, se fig. 5.)

Måske er nogle af disse forløb ikke ægte intermittente, men udtryk for, at forskellige (sameksisterende og stabile) attraktor-basin'er ligger så tæt, at CTS-modellen kan 'skubbe' systemet fra et basin til et andet, pga de indbyggede perturbationer, jeg har været inde på.

Jeg har en mistanke om, at det kunne være tilfældet på fig. 22-23. Her ser det nemlig ud som om, at systemet bliver 'indfanget' af 8-cyklen, som altså er tiltrækkende. Systemet krydser attraktor-basin-grænsen, og bliver så trukket ind på den. Når systemet krydser den modsatte vej, vil det, i den kaotiske attraktors natur, divergere exponentielt væk.

D. Blue sky catastrophe

En af de allermest spændende ting ved at studere kaotiske systemer, er alle de underlige og i starten utrolige

ting, man kommer ud for. Man observerer et fænomen og er på herrens mark efter forklaringer.

"Many numerical studies are being made but the problem, to paraphrase the artist, is that computers only give answers." (Milonni, Shih, Ackerhalt, 1987, p. 357).

I efteråret og vinteren lavede vi kørsler, hvor vi skruede ned for dæmpningen. På den måde fandt vi ud af, hvordan systemet opførte sig for de enkelte parameterverdier. Vi startede med et meget dæmpet system, påtvunget motorens periode, og gav det så gradvist friere løb.

I foråret skulle Søren så lave nogle illustrationer til lærebogsmaterialet, og ville bl.a. gerne have en konstant periode-2. Han aflæste på et bifurkationsdiagram, at det var tilfældet for en dæmpningsspænding på fx 1,5 V. Han startede en kørsel med den værdi og udgangsbetingelserne $(u,w) = (0,0)$. Og ud kom den nydeligste periode-9! Se fig. 2-4.

Søren var ikke særlig tilfreds med situationen, og det gjorde det ikke bedre, at vi andre var temmelig skeptiske. Men uanset hvor meget vi andre prøvede - samme resultat. Også selv om vi lod den køre i alle 13650 sekunder. Vi blev alvorligt bange for, at programmet var 'kommet ud af træning'. Vi 'vidste' jo, at systemet skulle være i en periode-2, se fig. 5.

Tilfældet ville, at jeg samme uge skulle læse om 'blue sky catastrophe'. Kunne det vi havde set virkelig være et tilfælde på sameksisterende attraktorer (se figur K). Jeg tvivlede. Dæmpningen var temmelig høj, og så en periode-9 - i begge grøfter!

Spørgsmålet kunne afgøres ved at skrue op for dæmpningen. Hvis det virkelig var sameksisterende attraktorer, ville der før eller siden komme en 'blue sky catastrophe' - periode-9 cyklen ville forsvinde ud i det blå! Det var en temmeligt opstemt fysikstuderende, der mødte den morgen og satte kørslen 'over'. Og der var timers ventetid ...

I starten var den stabil, men så ændrede den sig en anelse. Den begyndte at 'mudre', drive lidt, og hoppe omkring de 9 grene, man snart skulle være flink for at se. Og pludselig - den faldt ned på en periode-2! Jeg havde lavet en 'blue-sky catastrophe'. Se fig. 29-30.

Derefter begyndte jeg at lave kørsler, der gik 'den anden vej', satte dæmpningen op. Men man løber ind i et stort problem. Systemet kan 'huske', at det har haft friere løb, mere energi. Systemets lange hukommelse gør, at transienter bliver utroligt langvarige, når man skruer op for dæmpningen. Der kommer fænomener, der skyldes, at systemet har fået 'for meget' energi. Men det er en meget nyttig ting, hvis man leder efter sameksisterende attraktorer.

E. Poincaré-snittet

I det foregående har jeg beskæftiget mig med figentræer (u, t) og systemets mulige opførsel for forskellige parameterverdier.

Resten af kapitlet handler udelukkende om Poincaré-snit i de kaotiske attraktorer. Jeg vil koncentrere mig om to aspekter, dels den fraktale struktur af kaotiske attraktorer, og dels hvordan denne fraktale struktur bliver dannet ved folding 'rundt i' attraktoren.

Det første eksempel er fra en diskret kørsel, hvor systemet udviser kaos i 2 bånd i den ene grøft ($B = S = 1,19 V$), se fig. 31. Den kaotiske attraktor ser umiddelbart ud til at bestå af 2 kurvestykker, men når vi forstørrer op, ser vi tydeligt systemets fraktale struktur, se fig. 32-34. Kurvestykkerne deler sig igen og igen. Det eneste, der sætter en grænse, er computerens kapacitet, her 5460 punkter (svarende til 13650 sekunder, $T = 2.5$ sekunder).

For at undersøge hvad der afstedkommer denne fraktale struktur, lægger jeg Poincarésnittet forskellige steder i faserummet. Man flytter snittet ved at tillægge motoren en faseforskydning (parameteren F) i intervallet $[0; 2 \cdot \pi]$. På den måde flytter man det sted, hvor programmet noterer systemets tilstand, rundt i torus'en (se figur D).

"Som at løfte lysbilleder i en karussel", som der var en, der sagde.

Det er ikke særlig praktisk at gøre det for den attraktor, vi lige har betragtet. Systemet er så tæt på at gå i kaos i begge grøfter, at selv den mindste ændring (fx at lave en faseforskydning) kan få det til det.

Og desuden er de 2 kurvestykker ikke særligt 'livlige'.

Derfor har jeg lavet en række kørsler, hvor systemet befinder sig på en kaotisk attraktor i begge grøfter ($B = S = 1,1 V$). På figurene 35 til 48 fremgår attraktorens foldning af trajektorierne. Jeg vil ikke dræbe de flotte billeder med unødige kommentarer.

På fig. 20, 21 og 24 er der vist eksempler på 1. returafbildning for dette kaotisk system. Et eksempel på (u,t) -graf ses på fig. 19 (intermittent forløb).

ELEVØVELSERNE

På IMFUFA har man valgt at følge den store interesse for kaos op ved at indbyde gymnasieelever, med matematik og fysik på højt niveau, enten til foredrag om kaos eller for at udføre fysik-øvelser om kaos som led i den større skriftlige opgave i 3. g. Øvelserne står omtalt i et "Idekatalog", se side 9. Derfor har vi opstillet øvelserne.

A Øvelserne generelt

Planen for øvelserne er meget ambitiøs (jævnfør figur Å). Eleverne skal have oplæg om kaos, matematikredskaber og apparaterne, og de skal lave forsøg med magnetisk pendul, torsionspendul, dobbeltpendul, elektronisk iterationsgenerator, kemisk kaos og 'viscous fingering'. På 2 dage. For en nærmere gennemgang henviser jeg til "Kaos på video" (Christiansen og Olsen, 1989) eller de tre's speciale (Brønd m.fl., 1989a).

Vores (Ibens og min) vurdering er

- at der mangler noget til at holde forløbet sammen og give eleverne overblik over sammenhængen mellem de forskellige niveauer og tilgange til kaos,
- at eleverne har behov for information om, hvad det vil sige at komme på RUC, og
- at en del af lærebogens forklaringer kan gøres mere tilgængelige ved hjælp af levende billeder.

Derfor valgte vi at lave en video.

B. Videoen specielt

Videogrammet skal supplere lærebogen og øvelsesvejledningen, og ideen er, at det skal opfylde en række formål.

For det første vise nogle af de anvendte begreber og afbildningsmetoder på en mere tilgængelig måde ved hjælp af levende billeder.

For det andet vise opstillingerne, så eleverne i det mindste har set apparaturet før de kommer til RUC.

Figur A: Plan For besøget på RUC.

(Fra Pilotlærervejledningen af Brønd m.fl., 1989).

<u>Tids-</u> <u>punkt</u>	<u>Gruppe 1</u>	<u>Gruppe 2</u>	<u>Gruppe 3</u>	<u>Gruppe 4</u>
9.30- 10.15	Oplæg C	do.	do.	do.
10.30- 11.15	Kontinuert simu- lation, kaos m. plot	Kontinuert simulation, bifurkation	Torsionspendul, bifurkation	Magnetisk pertu- beret pendul
11.15- 12.00	Diskont. simula- tion, kaos	Diskont. simula- tion, bifurka- tion	herunder plot	Viscous finge- ring
12.30- 13.15	Oplæg A	do.	do.	do.
13.15- 14.00	Gruppearb., elektronisk. iterations gene- rering	do.	do.	do.
14.30- 15.15	Viscous finge- ring	Kont./diskont. simulering, n- periode	Magnetisk pertu- bations pendul	Pulserende kemisk proces
15.15- 16.00	Ens parametre, varierende be- gynd. beting.	Diskret simule- ring, kaos	Kont./diskont. simulering, bifurkationer	Dobbeltpendul
9.30- 10.15	Oplæg B	do.	do.	do.
10.30- 11.15	Kont./diskont. simulation, bi- furkationer	Torsionspendul, bifurkationer	Dobbeltpendul	Diskont. simula- tion, bifur., ens parametre
11.15- 12.00	Pulserende ke- misk proces	herunder plot	Diskret simula- tion af kaos	men varierede begynd. beting.
12.30- 13.15	Kont./diskont. simulation, bi- furkationer	Dobbeltpendul	Pulserende kemisk proces	Torsionspendul
13.15- 14.00	Torsionspendul, bifurkationer	Magnetisk pertu- bationspendul	Viscous finge- ring	Diskret simule- ring af kaos
14.30- 15.15	Dobbeltpendul	Torsionspendul, intermittens	Kont. simulation af kaos	Kont. simule- ring, bifurka- tioner
15.15- 16.00	Magnetisk per- tubationspendul	Torsionspendul, kaos	Kont./diskret simulering, n- periode	Kont. simulering af kaos

Og for det trede motivere eleverne for at arbejde med kaos. Denne motivation kan foranlediges af fascination af de sære fænomener i sig selv og/eller i kaosteoriens anvendelsesmuligheder i forståelsen af faktisk forekommende systemer.

I videoen har vi tilstræbt,

- * at fysik fremstår som et relevant og nødvendigt beskrivelsesmiddel i praktisk forekommende problemstillinger,
- * at forklare, hvad formålet med at beskæftige sig med emnet kaos er, og hvorfor vi går frem, som vi gør, dvs
- * at give eleverne overblik over samspillet mellem model, teori, forsøg og virkelighed
- * at vise, at fysik kan være sjovt,
- * at lade begrebspræsentationen foregå i samspil med forklaringen af forsøgenes idé
- * at vise, at kvinder også kan det der med fysik.

Videoen indeholder:

- * En præsentation af, hvad kaos kan være
- * En præsentation af, hvad øvelserne på RUC kan være
- * En gennemgang af torsionspendulet med og uden lod
- * En forklaring af
 - faserummet
 - Poincaré-snittet, og
 - den kaotiske attraktor

For yderligere oplysninger henviser jeg til rapporten (Christiansen og Olsen, 1989).

TILBAGE TIL VIRKELIGHEDEN

A. Hvad kan vi bruge kaosteorien til?

"Relativitetsteorien eliminerede den Newton'ske illusion om absolut tid og rum; kvanteteorien eliminerede den Newton'ske drøm om en kontrollabel måleproces; og kaosteorien eliminerer den Laplaci-anske fantasi om deterministisk forudsigelighed."

(Joseph Ford)

Man snakker om 3 paradigmebrud (i fysikken) i dette århundrede. Relativitetsteorien, kvantemekanikken og kaosteorien. Af de 3 er kaos den eneste, som handler om den verden, vi ser og føler, om ting i menneskelig størrelse. Men kaosteorien har også anvendelsesmuligheder indenfor mere traditionel fysik, fx med hensyn til lasere og partikelacceleratorer (og altså også i konservative systemer).

De sidste semestre har lært mig, at virkeligheden er kaotisk. Derfor må jeg som fysiker lære noget om kaos. Da det er lettest at undersøge enkle systemer, er fx torsionspendulet et fornuftigt valg.

Hvad kan man så lære af at se på fysisk 'laboratorie-virkelighed', der opfører sig kaotisk? Man lærer kaos at kende, lærer at se, hvornår noget er kaotisk, dvs at man kan genkende kaos, når man ser det.

Og hvis man akcepterer, at kaos er universelt, og at man kan slutte fra små til store systemer, må man sige, at matematiske modellers duelighed bliver yderligere begrænset. Den deterministiske forudsigelighed er, i mange systemer, umulig. Det nødvendiggør ganske simpelt en anden beskrivelsesmåde.

"... udvirker kaosforskningen en skilsmisse mellem et godt, gammelt udslidt par, den klassiske mekaniks Gøg og Gokke: determinisme og forudsigelighed. ..."

(Information, 29/5 1989)

Det er selvfølgelig ikke sådan, at alle systemer vil opføre sig kaotisk. Langt fra. Vi behøver ikke opgive

ingeniørdisciplinerne styring og kontrol. Vi skal bare være klar over, at for ikke-lineære systemer er kaotisk adfærd en mulighed.

Jeg har igennem rapporten givet eksempler på, hvor kaosteorien bryder med den traditionelle fysik. Bryder så kraftigt, at man taler om et paradigmeskift. Jeg vil her ridse de afgørende forskelle op.

Før har man ment, at

- simple systemer kun gav anledning til simpel opførsel
- kompleks opførsel skyldtes komplekse årsager
- komplekse ikke-lineære systemer skulle behandles enkeltvis.

Kaosteorien har lært os, at

- simple systemer kan give kompliceret opførsel
- komplekse systemer kan give simpel opførsel
- måden, kaotiske systemer opfører sig på, er universel.

Kaosteorien kan give anledning til gennembrud (og har allerede gjort det) på mange områder. Eksempelvis kan man sige, at vi 'forstår' den enkelte neuron, men ikke hele hjernen, at vi forstår det enkelte vandmolekyle, men ikke millioner af dem (turbulens).

Man har også brugt kaosteori til at forklare epidemi-forløb. Fx kan det undre, at man ved at sætte en kampagne ind, for forebyggelse af en sygdom, kan forårsage flere sygdomstilfælde. Men kaosteorien har lært os, at selv det mindste skub til et kaotisk system kan forårsage store udsving¹.

B. Fremad

Nu er jeg så nået dertil, hvor man først skuer tilbage og så fremad. Jo, verden er kaotisk. Og hvilken lettelse. Som Gleick skriver et sted, så betyder det, at man kan forsvare den frie vilje og determinismen. Selv om et system er deterministisk, betyder det ikke, at vi ved, hvad det vil gøre om lidt.

¹Der kan være andre årsager til pludselig stigning, fx øget registrering/anmeldelse i forbindelse med en kampagne.

Kaosforskningen har også betydet, at nogle skel mellem videnskaberne er blevet brudt ned. Beskrivelsesmåderne er de samme på tværs af både fag og skala - kaos handler om systemers natur, ikke deres substans.

I den forbindelse er torsionspendulet principielt ligegyldigt. Men jeg vil gerne runde af med at fortælle, hvad jeg ville have haft nået, hvis jeg altså blot havde haft tiden.

Jeg ville gerne have

- undersøgt systemets opførsel ved ændring af andre parametre
- lavet et CTS program til bestemmelse af Liapunov-konstanter
- lavet grundigere undersøgelser af intermittente forløb
- lavet dataopsamling fra det virkelige torsionspendul

- lavet undersøgelse af andre systemer, fx dobbeltpendulet.

"You can't know how happy
I am that we met,
I'm strangely attracted to you."

Cole Porter
("It's all right with me")

LITTERATURLISTE

- Ahlgren m.fl., 1988 Ole Ahlgren, Finn Christiansen, Eigil Dixen, Lisbeth Dragsted, Hans Krogh, Jens Vaaben, Niels Jørgen Vestergaard, Ove Østergaard: IDEKATALOG ... til de større eksperimentelle forløb i gymnasiets fysikundervisning. Århus Universitet, september 1988.
- Bekendtgørelse, 1988a Undervisningsministeriet, Direktoratet for Gymnasieskolerne og HF: Fysik - Bekendtgørelse og vejledende retningslinier. 1988.
- Bekendtgørelse, 1988b Undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 320 af 14. juni 1988: Bekendtgørelse om ændring af bekendtgørelse om fagene m.v. i gymnasiet.
- Brønd m.fl., 1989a Søren Brønd, Jimmy Staal og Andy Wierød, Speciale fra fysikuddannelsen, endnu upubliceret.
- Brønd m.fl., 1989b Søren Brønd, Jimmy Staal og Andy Wierød: Lærervejledning, Lærebog og øvelsesvejledninger til store eksperimentelle øvelser på RUC. Upubliceret, 1989.
- Christiansen, 1978 Peder Voetmann Christiansen: DYNAMIK OG DIAGRAMMER. Introduktion til energy-bond-graph formalismen. IMFUFA-tekst nr. 8, RUC, 1978.
- Christiansen, 1986 Peder Voetmann Christiansen: Simulation i kontinuert tid. IMFUFA-tekst nr. 121, RUC, 1986.
- Christiansen, 1989 Peder Voetmann Christiansen: Grafisk fremstilling af FRAKTALER OG KAOS. IMFUFA-tekst nr. 174, RUC, 1989.
- Christiansen og Olsen, 1989 Iben Maj Christiansen og Frank Olsen: Kaos på video. 3. modul rapport fra kommunikationsuddannelsen, RUC, 1989.
- Elvekjær og Nielsen, 1983 Finn Elvekjær og Børge Degn Nielsen: Kraft og bevægelse. GAD, 1983.

- Feigenbaum, 1980 Mitchell J. Feigenbaum: Universal behavior in nonlinear systems. Los Alamos Science, 1980.
- Ford, 1987 Joseph Ford: "Directions in classical chaos" fra Directions in chaos, volume 1, redigeret af Hao Bai-Lin. World Scientific, 1987.
- Gleick, 1988 James Gleick: Chaos - making a new science. Heinemann, London, 1988.
- Gleick, 1989 James Gleick: Kaos. Munksgaard, Nysyn, maj 1989. Dansk udgave af Gleick, 1988.
- Goldstein, 1980 Herbert Goldstein: Classical mechanics. 2. edition. Addison-Wesley, 1980.
- Guckenheimer, 1983 John Guckenheimer: Persistent properties of bifurcations. Physica 7D, 1983.
- Hofstadter, 1981 Douglas R. Hofstadter: Metamagical Themas. Sc. Am., November 1981.
- Hofstätter, 1988 Marianne Hofstätter: Fraktalerne måler det umålelige. Forskning og samfund nr. 6, 1988.
- Information 25/4 1989 Interview med James Gleick: "Legen og vildskaben baner vej for forståelsen af kaos", Information, 25/4 1989.
- Information 29/5 1989 Anmeldelse af James Gleicks bog "Kaos". Information, 29/5 1989.
- Jakobsen, 1989 Kurt Jakobsen: Fra lineær vækst til kaos, Lademann, 1989.
- Jensen, Jensenius og Johansen, 1989 P.S. Jensen, H. Jensenius og M.S. Johansen: Kaos i ulineært torsionspendul. Københavns Universitet, 1989.
- Leybold-Heraeus Leybold-Heraeus: Gebrauchsanleitung: Drehpendel nach Pohl. Werksgruppe Naturwissenschaftlich-technische Lehrmittel. Erstausgabe.
- Li og Yorke, 1975 T.Y. Li og J.A. Yorke: "Period three implies chaos" i American mathematical monthly, 82, 1975.

- Lorenz, 1963 E. N. Lorenz: Deterministic nonperiodic flow. Journal of Atmospheric Science 20, 1963.
- Luchner, 1988 Karl Luchner: Chaotic motion (mechanical systems in experiment and simulations). 1988.
- Lundqvist, 1988 Lundqvist: "Chaos, order, patterns, fractals - an overview" fra Lundqvist, March, Tosi: Order and chaos in nonlinear physical systems. Plenum Press, 1988.
- Mishina, Kohmoto og Hashi, 1985 T. Mishina, T. Kohmoto og T. Hashi: Simple electronic circuit for the demonstration of chaotic phenomena. American Journal of Physics 53, 1985.
- Milonni, Shih, Ackerhalt, 1987 Milonni, Shih, Ackerhalt: Chaos in laser-matter interactions. World Scientific, 1987.
- Olsen og Nielsen, 1988 Frank Olsen og Ida Nielsen: Hvad rammer Tors hammer - en receptionsanalyse af det naturvidenskabelige program HVÆLV. Projektrapport på modul II, Kommunikationsuddannelsen, RUC, 1988.
- Peitgen og Richter, 1986 H.O. Peitgen og P.H. Richter: The beauty of fractals. Springer-Verlag, 1986.
- Pomeau og Manneville, 1980 Yves Pomeau og Paul Manneville: Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. Commun. math. phys. 74 (side 189-197), 1980.
- Schuster, 1984 Hans Georg Schuster: Deterministic chaos, Physik-verlag, 1984.
- Sparrow, 1982 Colin Sparrow: The Lorentz equations: Bifurcations, chaos and strange attractors. New York, Springer, 1982.
- Thompson og Stewart, 1986 J.M.T. Thomson og H.B. Stewart: Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley & sons, 1986.
- Togeby, 1988 Mikael Togeby: Deterministisk kaos i energitekniske systemer. Licentiat-afhandling, Fysisk laboratorium III, DTH, 1988.
- Velarde, 1988 M.G. Velarde: Intermittens and chaos. 1988.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projekt rapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss. Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIORAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum". Projekt rapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projekt rapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen, Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projekt rapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality". Af: Helge Kragh.
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE". a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projekt rapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodul/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projekt rapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS". Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller". Projekt rapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projekt rapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER - MOSSBAUEREFFEKT MÅLINGER". Projekt rapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen. Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIEBETRIKT OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørregaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høytrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høytrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høytrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Høytrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?".
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgaard Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i l.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projekt rapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projekt rapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projekt rapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et hørings svar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projekt rapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Heddal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projekt rapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "TJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 90/84 "ENERGI I L.G. - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.
-
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projekt rapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projekt rapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projekt rapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lillethorup.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDALDEREN".
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projekt rapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSISTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 "OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jøger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS TRANSITION".
Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIEETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kattler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FØR TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONFIGURATIONSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY, 8 - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15."
Af: Bent Sørensen.
-
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"
Projektrapport af Finn C. Physant
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"
af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"
Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/87 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEML MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale
Af: Hans Hedal
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/87 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"
By: Jeppe Dyre
- 155/87 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"
by: Michael Pedersen
- 156/87 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 157/87 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."
by: Michael Pedersen
- 158/87 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"
by: Jeppe Dyre
- 159/87 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"
by: Bent Sørensen
- 160/87 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"
by: Jens Gravesen
- 161/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"
by: Michael Pedersen
- 162/87 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/87 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/87 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/87 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"
by: Jens Gravesen

- 166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"
Af: Jørgen Larsen
- 167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.
Fysikspeciale af:
Birger Lundgren
Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ
- 169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."
Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.
Introduktion og oversættelse:
Peder Voetmann Christiansen
- 170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988
- 171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"
af: Johnny Tom Ottesen
- 172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"
Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.
Fysikprojekt af:
Erik Lund og Kurt Jensen
Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen
-
- 173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"
af: Mogens Brun Heefelt
- 174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"
af: Peder Voetmann Christiansen
- 175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"
af: Michael Pedersen
- 176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"
af: Jeppe Dyre
- 177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"
af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 178/89 "BIOSYNTESSEN AF PENICILLIN - en matematisk model"
af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden
vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen
- 179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
- 181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"
by: Jeppe Dyre
- 183/89 "MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction
by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)
- 184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmfylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"
af: Tage Emil Christensen
-
- 185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"
Et matematisk projekt
af: Steen Grode og Thomas Jessen
Vejleder: Jacob Jacobsen
- 186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen
- 187/90 "RSA - et kryptisk system"
af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen
Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk
- 188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"
by: Jeppe Dyre
- 189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER
af: Finn Langberg

190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN
APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE
THEORY"

by: Jeppe Dyre

191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL
BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS
ON C*-ALGEBRAS"

by: Iain Raeburn and Dana P. Williams

192/90 "Age-dependent host mortality in the
dynamics of endemic infectious diseases
and
SIR-models of the epidemiology and natural
selection of co-circulating influenza virus
with partial cross-immunity"

by: Viggo Andreasen

193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"

by: Stig Andur Pedersen

195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling
der førte til dannelsen af kvantemekanikken.
Projektrapport for 1. modul på fysikuddan-
nelsen, skrevet af:

Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm
Larsen, Nicolai Ryge.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatisk
status i fysikken.

af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og
Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

What is chaos?
What does it mean?
Who needs it?
What purpose does it serve?
(Joseph Ford)

Of all the possible pathways
of disorder, nature favors
just a few.
(Gleick)

Man skal have kaos i sig for
at se en dansende stjerne.
(Nitzsche)

Øjet er en trussel mod et
klart syn, øret er en trussel
mod en følsom hørelse,
forstanden er en trussel mod
visdom, enhver sans er en
trussel mod sin egen formåen
...

Postyr, det Sydlige Havs gud,
og Uro, det Nordlige Havs gud
mødtes engang i riget som
blev styret af Kaos, centrets
gud. Kaos tog godt imod dem,
og de diskuterede, hvordan de
skulle gengælde hans venlig-
hed. De havde lagt mærke til,
at hvor alle de andre havde
syv åbninger til at se, høre,
spise, trække vejret, og så
videre, så havde Kaos ingen.
Så besluttede de at prøve at
bore huller i ham. Hver dag
borede de et hul, og på den
syvende dag døde Kaos.

(Cuang Tzu)

The whole point of over-
simplifying was to model
regularity. Why go to all
that trouble just to see
chaos?

(Gleick)

Physicists like to think
that all you have to do is
say, these are the condi-
tions, now what happens
next?

(Feynmann)

Such an intelligence, would
embrace in the same formula
the movements of the grea-
test bodies of the universe
and those of the lightest
atom; for it, nothing would
be uncertain and the future,
as the past, would be
present to it's eyes.

(Laplace)

... But dead physics is
usually dead for good
reason.

(Gleick)