TEKST NR 19 1979

Geometri, skole og virkelighed

Tom J Andersen

Tommy R Andersen

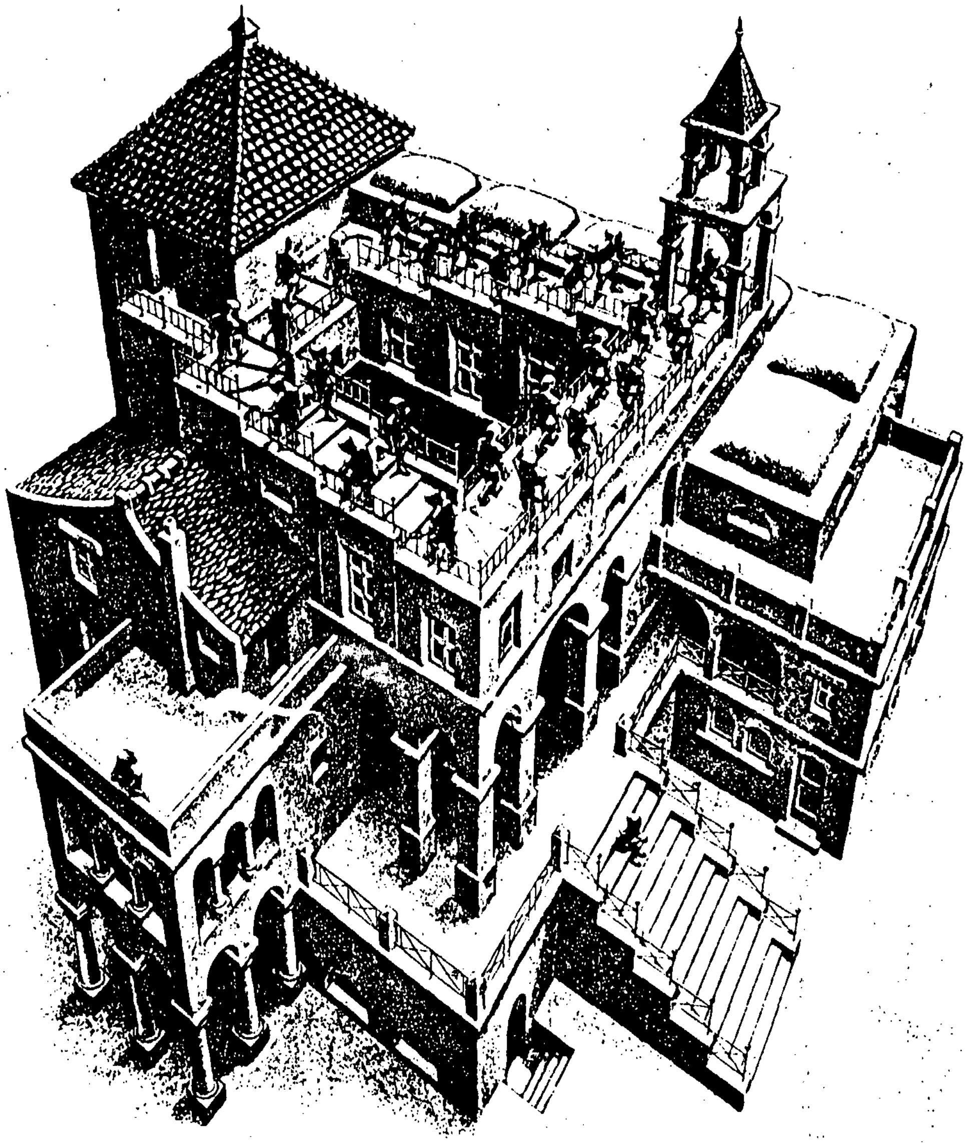
Per H H Larsen

vejleder:

Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER



"Trappe op og trappe ned"

- Escher -

Geometriens anvendelse til figurbetragtninger
kan i visse situationer være noget misvisende.

DISPOSITION.

FORORD.

Dette projekt er udarbejdet til matematikuddannelsens 1. modul (breddemodulet) og 3. modul (det videnskabsteoretiske modul), og beskæftiger sig med forholdet mellem geometri og virkelighed, geometripensaet i gymnasiet gennem dets historie, geometridebatten, geometri som pædagogisk redskab, samt egne standpunkter angående geometriundervisningen.
Det har været en spændende arbejde at indsamle og bearbejde det historiske materiale om gymnasiet, men desværre også uforholdsmæssigt tidskrævende, hvorved en række andre delemner ikke har fået så dybtgående behandling, som vi oprindeligt havde ønsket. Vore overvejelser over for eksempel forholdet mellem geometri og virkelighed indeholder absolut ikke det endelige bud på den sag, da vi kun har diskuteret og beskæftiget os med dette emne nogle få måneder. Imidlertid mener vi dog at dette har været tilstrækkeligt til at fremdrage nogle hovedpointer, der har været til stor nytte for vores egen forståelse af hvad geometri er, og hvorledes vi skulle bearbejde synspunkterne om geometriundervisningen. Noget tilsvarende kan siges om emnet geometri som pædagogisk redskab i gymnasieundervisningen, hvor vi specielt har mærket den dårlige forbindelse mellem moderne pædagogisk/psykologisk forskning og egentlig fagdidaktik for området de 16-19 åriges matematikundervisning. Vi har derfor i høj grad måttet bygge på materiale beregnet specielt for folkeskolen, hvilket naturligvis ikke er tilstrækkeligt til at opbygge mere dybtgående fagdidaktiske overvejelser for gymnasiet.
På den baggrund får spørgsmålene om hvad der har været undervist i, samt hvorfor denne undervisning har fundet sted, tilsammen med geometridebatten en fremtrædende plads i projektet, hvilket kan mærkes på vores egne konkluderende overvejelser over geometriundervisning i gymnasiet.

Det skal sluttetligt anføres, at der i projektet forekommer en del geometriske figurer, som udelukkende har til formål at bryde teksten, uden direkte at referere til teksten (selvom de ofte gør).

Vi vil gerne afslutningsvis rette en tak til vores vejleder Mogens Niss.
Uden hans ildhu og ihærdighed havde vi havde vi ikke kommet til at kende kopimaskinen så godt, og vi havde aldrig opnået det fortrolige forhold til slettetasten på skrivemaskinerne vi har nu.

Roskilde Universitetscenter, d. 31 maj 1979

Tom Juul Andersen   Tommy Rytcher Andersen   Per Højland Larsen

1. INDLEDNING.

Geometri har gennem årtusinder beskæftiget matematikere og filosoffer, og på baggrund af dels geometriens relation til verden, som middel til beskrivelse af virkeligheden, og dels dens placering som prototype for en matematisk teori (den axiomatisk-deduktive metode), har den indtaget en særstilling blandt de matematiske emner.
Det er derfor ikke mærkeligt, at geometri "altid" har indtaget central placering indenfor almenskolers undervisningsplaner.
Uanset hvad de forskellige tiders intentioner har været med geometriundervisning, kan det konstateres, at der i Danmark er en lang tradition for, at der findes geometri som en central del af de forskellige pensa i matematik.
På denne baggrund stillede vi os følgende spørgsmål: Hvorfor er geometri i gymnasiet ikke genstand for nogen selvstændig behandling?
Dette spørgsmål ledte os til følgende fire spørgsmål, som har været vores udgangspunkt for denne rapport:

1. Hvad er forholdet mellem geometri og virkelighed? og hvilken rolle spiller geometri i matematikken.

2. Hvilke dele af geometrien har pensum i gymnasiet/de lærde skoler omfattet gennem tiderne.

3. Hvad har begrundelserne igennem tiderne været for den valgte undervisning i geometri.

4. Giver besvarelserne af 1,2, og 3 anledning til, at man efter vores mening bør ændre synspunkter angående geometriundervisning i gymnasiet og i bekræftende fald på hvilken måde?

Denne rapport vil søge at give svar på disse spørgsmål.
Rapporten indeholder følgende hovedafsnit.

1. Hvad er geometri.
2. Geometriundervisningens historie.
3. Geometridebatten.
4. Geometri som pædagogisk redskab.
5. Vores standpunkter angående geometriundervisningen i gymnasiet.

I det første afsnit vil vi kort forsøge at redegøre for geometriens udvikling, dens rolle i matematikken og dens forhold til virkeligheden.
I det andet afsnit redegører vi for den gymnasiale geometriundervisnings historie, hvad angår indhold og begrundelser for samme. Da der tilsyneladende ikke er udarbejdet en a jour-ført samlet oversigt over de enkelte perioders pensa, har vi på baggrund af love, anordninger, bekendtgørelser og cirkulærer fra de enkelte perioder udarbejdet en kronologisk oversigt over pensum i geometri og i betænkninger, samt artikler fra de enkelte perioder, søgt at finde begrundelserne for det valgte pensa.

Tredie afsnit er et destillat af den geometridebat, som er forløbet siden århundredeskiftet i Danmark såvel som i udlandet.
I det fjerde afsnit behandler vi de pædagogiske kvaliteter, som geometri er/kan være i besiddelse af, og vi giver et bud på hvordan geometrien kan anvendes i denne forbindelse.
Endelig giver vi i det femte afsnit vores konkluderende synspunkter angående geometriundervisning i gymnasiet.

2. HVAD ER GEOMETRI.

2.1 Geometri og virkelighed.

2.1.1 Geometriens historiske udvikling.

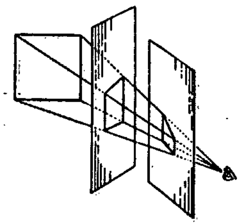
Ordet geometri kommer fra det græske ord geometrein (geo: jord, metrein: måle) , og har sit opspring i praktiske forhold vedrørende opmåling af landområder samt opbygningen af en kalender på baggrund af atronomiske observationer, og kendes i det mindste 1ooo år f.v.t. ifølge den græske historiker Herodot (7). Det var Babylonerne og Ægypterne der som de tidligste kulturer anvendte geometri, for at opnå geometriske resultater til anvendelse uden for geometrien selv.
Denne tidlige geometri var således meget tæt knyttet til erfaringen, og ønsket om at frembringe praktiske resultater.

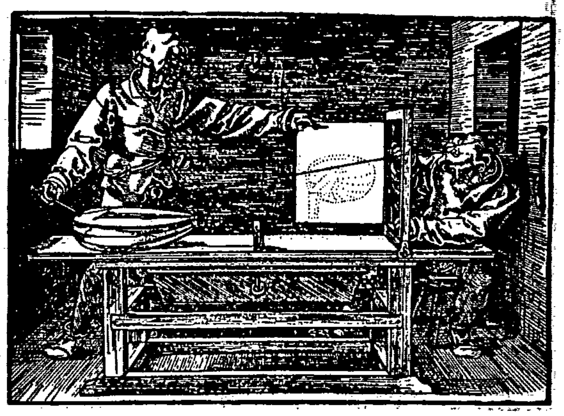
Grækerne,(ca. 3oo f.v.t.-3oo e.v.t.) frigjorde geometrien fra erfaringen gennem en erkendelse af tal og geometriske figurer som abstraktioner, der kunne adskilles skarpt fra fysiske objekter eller billeder. Derved blev det muligt at udvikle matematiske egenskaber af de betragtede geometriske figurer og foretage generaliseringer. De forestillede sig et sammenfald mellem deduktiv tænkning med udgangspunkt i selvindlysende påstande, og empiriske udsagn om naturens indretning, hvorved der for dem var en enhed mellem logisk ræsonneren og naturens lovmæssigheder. Den græske periode førte til en systematisering af den geometriske viden, og en indpasning af denne i en axiomatisk-deduktiv ramme, Euklids elementer, som tog udgangspunkt i fem grundlæggende axiomer,der kan formuleres som:

1. Det er muligt at trække en ret linie fra ethvert punkt til ethvert andet punkt.
2. Man kan forlænge en begrænset ret linie ud i ét.
3. Det er muligt at tegne en cirkel med vilkårlig radius og omkreds.
4. Alle rette vinkler er lige store
5. Når en ret linie skærer to rette linier, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linier, når de forlænges ubegrænset, på den side hvor de to vinkler, der er mindre end to rette, ligger.

Det er tydeligt, at det femte postulat adskiller sig i komplikationsgrad fra de andre, og det kommer da også til at spille en afgørende rolle i geometriens udvikling, som vi senere skal se under de ikke-euklidiske geometrier.

Efter den græske periode, kommer der en relativ stilstand i geometrien, medens algebraen fortsat udvikledes under Araberne. I 16oo-tallet blev geometrien påny genstand for opmærksomhed, ved udviklingen af projektiv geometri. Desargues (1591-1661) tog udgangspunkt i den græske matematiker Apollonius's arbejder vedrørende keglesnit, for at videreudvikle idéerne og skabe nye teoremer.Imidlertid kom hans arbejde til at strække sig langt videre, idet han angreb problemet: Hvis vi projicerer en geometrisk figur fra ét plan til et andet plan, hvilke dele af figuren er da invariante under denne lineære transformation.Projektiv geometri er altså en forløber for algebraisk topologi, der beskæftiger





sig med invariansproblemer under meget større transformationsgrupper, og med mere komplicerede geometriske figurer.

I samme periode systematiserede Descartes forbindelsen mellem algebra og geometri. Descartes var blandt andet utilfreds med grækernes ofte meget lange og komplicerede argumenter for en eller anden geometrisk sætning, og ved at aritmisere problemet via en koordinatfremstilling lykkedes det Descartes at give meget enkle og klare beviser for en række sætninger i Euklids geometri. Descartes formulerede selv kernen i sin metode på følgende måde (8):
" Ønsker vi at løse et eller andet problem, begynder vi med at forestille os løsningen udført, hvorefter vi navngiver alle for konstruktionen nødvendige linier, ubekendte såvel som bekendte."
Udviklingen af denne analytiske geometri tilbød en algebraisering af geometrien, og dermed en udvidelse af mulighederne for at fremsætte kvantitative udsagn om plangeometriens indhold, og for at kunne definere og betragte geometrien af løsningsmængder (kurver) til forskellige algebraiske ligninger.

En lignende kombination af to matematiske teoribygninger opstår næsten samtidigt ved fremkomsten og udviklingen af infinitesimalregningen. Differentialgeometrienen kombinere Descartes analytiske geometri med resultaterne fra differentialregningen. Newton studerede som den første højere-ordens kurver, og viste, at alle kurver, der kunne skrives på en generel ligning af tredie grad, kunne reduceres til fire andre ligninger, der hver beskrev specielle kurvetyper. Ved differentialgeometrien er det ikke mere bestemte geometriske figurer der er genstand for betragtning, men algebraiske udtryk som frembringere af geometriske figurer, man ikke nødvendigvis kan komme til umiddelbar visuel erkendelse af.

Geometrien har selvfølgelig hele tiden været et redskab, der i andre dele af matematikken kunne lette forståelsen af, hvad det var man arbejdede med. Men særligt markant ser man dette ved udviklingen af teorien for komplekse tal. Wessel (1745-1818) viste hvorledes komplekse tal kunne opfattes som punkter i det todimensionale koordinatsystem. Herved udvikledes ingen ny geometri i direkte forstand, men det førte bland andet til udviklingen af vektorbegrebet: Komplekse tal kunne adderes og ganges geometrisk som vektorer.

Tiden omkring 18oo- tallet var ved at være moden til et endeligt angreb på Euklids femte postulat. Forskellige mennekser havde, lige siden antikken, fundet, at dette såkaldte parallelpostulat burde være et teorem og ikke et postulat, fordi det i struktur og kompleksitet adskilte sig meget fra de øvrige axiomer og postulater.

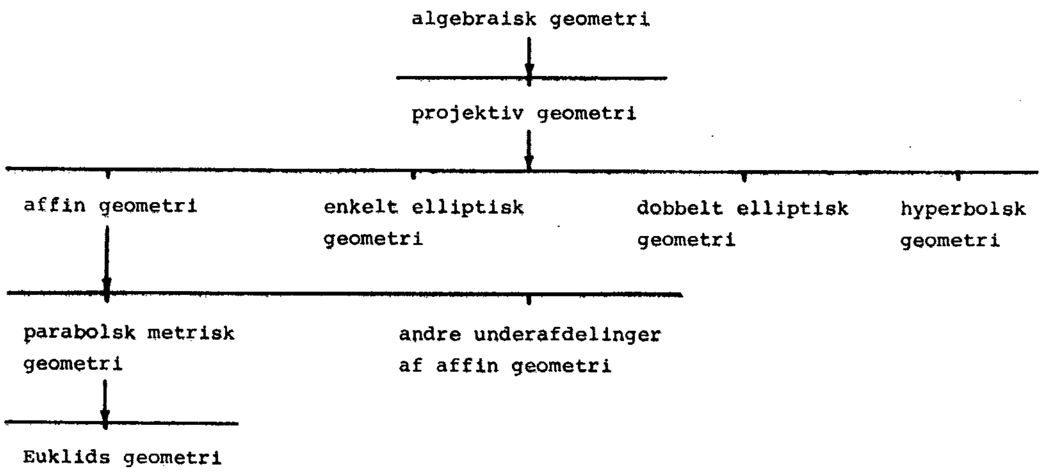
Gauss, Bolyai og Lobachevski opdagede (uafhængigt) den ikke-euklidiske geometri, forstået som et logisk konsistent system, omfattende alt andet end parallelpostulatet samt en negation af dette. Lobachevski siger (8):
"I geometrien finder jeg visse ufuldkommenhedder regner jeg uklarheden i de grundlæggende geometriske begrebsdannelser, samt i fremstillingen af de fremgangsmåder og metoder, der benyttes i målingen af geometriske størrelser, og endelig den afgørende mangel i parallelteorien, som matematikernes samlede anstrengelser indtil nu ikke har kunnet råde bod på."
Lobachevski's arbejder førte ham til at opstille en ny form for parallellitet, som senere skulle blive udvidet med endnu en form. De tre former er:

1. Gennem et givet punkt findes uendeligt mange linier, der ikke skærer en ret linie. (Lobachevski-geometri)
2. Gennem et givet punkt findes én og kun en ret linie, der ikke skærer en givet linie. (Euklids geometri)
3. Gennem et givet punkt findes der ingen linier, der ikke skærer en givet linie. (Riemann-geometri)

Gauss's opdagelse af den ikke-euklidiske geometri opstod i forbindelse med hans konstatering af og studier over hvordan den euklidiske plangeometri følger alene af afstandsbegrebet i planen. Hans arbejde med at betragte afstandsbegrebet som et lokalt afstandsbegreb, knyttet til omegnen af ethvert punkt, "linieelementet", i forbindelse med hans opfattelse, at sædvanlige cartetiske, retvinklede koordinater ikke var de eneste mulige til at beskrive og formulere geometriske anliggender(vilkårlige såkaldte gaussiske koordinater bestemt ved systemer af hinanden skærende kurver, kunne lige så vel bruges) gav stødet til hans opdagelse.
I en udnyttelse af disse forhold til at beskrive krumningen af flader, indså han nemlig at flader med konstant gaussisk krumning falder i tre klasser,sfærisk geometri (svarende til positiv krumning),euklidisk geometri (svarende til krumning o) og hyperbolsk geometri (svarende til krumning negativ), og at fladernes "indre geometri" (dvs. geometrien anskuet uafhængigt af det omgivende tredimensionale rum) kun har de sædvanlige euklidiske egenskaber i det midterste tilfælde. Derved bliver den euklidiske plan et specialtilfælde af en hel fimilie af mulige og konsistente geometrier for flader.
I begyndelsen betvivlede man overhovedet konsistensen af de nye udviklede geometrier, og man tillagde dem under alle omstændigheder ingen realitet i forhold til det virkelige fysiske rum. Gauss havde ovenikøbet ikke offentliggjort sine resultater før 1832, selvom de var udviklet allerede 1817 (9).Dette skyldes selvsagt,at udviklingen af den ikke-euklidiske geometri viste, at der ikke var noget sammenfald mellem på den ene side det logisk mulige, og abstrakt konstruerbare, og på den anden side den fysiske virkeligheds egenskaber.
Den almindelige opfattelse var, at Kant havde ret når han mente, at rummet og tidens geometriske og algebraiske struktur var absolutte tænkekategorier, som er bærende for vores opfattelse af virkeligheden, og som vi principielt ikke kan overskride. Vi tænker altså automatisk euklidisk , fordi det var den måde rummet var indrettet på, og det skulle ikke være logisk muligt at udvikle andre geometrier.

en ca. 4o år senere blev det endeligt bevist at de nye udviklede ikke-euklidiske geometrier var konsistente, og i 1915 blev Riemann-geometrien benyttet til at beskrive det fysiske rum. (se 2.1.2)
D'Alembert udtrykte resultaterne ved at sige (9):
"Ethvert legeme af hypoteser, som ikke førte til selvmodsigelser kan i princippet benyttes til at udvikle en mulig teori."

En del af den projektive geometri kaldes metrisk geometri, og dette er læren om geometrier med et eller andet afstandsmål. Laguerre, Cayley og Klein arbejdede i slutningen af 19oo-tallet med at karakterisere de forskellige geometrier ud fra deres afstandsmål, således at de alle kunne samles under projektiv geometri. Klein viste, at hver geometri var invariant under en bestemt transformationsgruppe, og kunne på den måde samle størstedelen af geometrien under projektiv geometri. Ydermere kunne projektiv geometri karakteriseres som som en undergruppe af algebraisk geometri, som beskæftiger sig med algebraiske strukturer af helt generel karakter. Differentialgeometrien kan dog ikke indpasses i et sådant skema, fordi den også omfatter studiet af ikke-algebraiske objekter. (9)



Vi har tidligere nævnt, at Euklids geometri indeholdt"huller" og betragtningsmåder der så at sige var hentet ned fra snoreloftet. En del beviser indeholdt elementer af intuitiv karakter, og derfor begyndte flere matematikere i slutningen af det 19. århundrede at opbygge geometrien ud fra en mere streng logisk-deduktiv ramme.(Peano, Veronese,Hilbert). Hilbert havde med sin "Grundlagen der Geometrie", (1899) størst succes. Ved kombinationen af logik og mængdelære med geometri ergeometrien udviklet til en position, der er helt uafhængig af erfaringerne med det fysiske rum, således at geometriens grundlag ikke mere er hverken a priori intuition eller opsamlede erfaringer, men axiomer der vælges som konventioner.

Ganske vist havde Euklids geometri i et vist omfang samme logiske struktur, men den blev betragtet som omhandlende virkeligheden umiddelbart. Med den moderne geometri var dette ikke længere tilfældet.

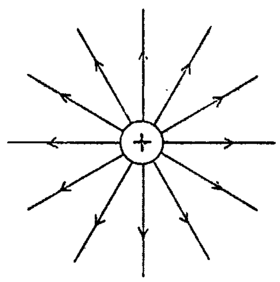
2.1.2 Geometri som naturvidenskab.

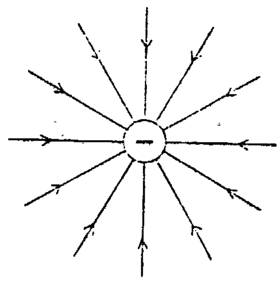
"Geometri siger intet om reale tings opførelse; Kun geometri sammen med totaliteten af fysiske love (P) kan gøre det. Bruger vi symboler kan vi sige, at kun summen (G) + (P) lader sig underkaste eksperimentel efterprøvelse. DErfor kan (G) vælges vilkårligt og også dele af (P); Alle disse love er konventioner. Det eneste der er nødvendigt for at undgå modsigelse, er at vælge resten af (P) således, at (G) og hele (P) tilsammen er i overensstemmelse med erfaringen.

Einstein (lo).

Ovenstående citat er fra en forelæsning Einstein holdt i det preussiske Videnskabsakademi 1921, med titlen: Geometri og erfaring. I denne artikel siger Einstein stort set hvad der kan siges om forholdet mellem naturvidenskab og geometri, og specielt geometri som naturvidenskab. Da der ingen grund er til at gentage og omformulere hvad der allerede er sagt krystalklart, vil vi i det følgende hænge vores argumentation op på citater fra artiklen, uden at fordybe os i forskellige historiske epokers opfattelse af dette spørgsmål.
I virkeligheden startede geometri som en slags naturvidenskab, og endda den ældste disciplin i fysikken. Baggrunden for denne opfattelse giver Einstein i følgende pasus:
Det er klart at den axiomatiske geometris begrebssystem ikke alene kan sige os noget om, hvorledes reale genstande opfører sig, genstande vi kalder "praktisk taget stive legemer". For at kunne bruges i den forbindelse må geometrien afklædes for sin blotte logisk-formelle karakter, gennem en koordination af reale erfaringsgenstande med den axiomatiske geometris tomme begrebsformer. For at gøre dette behøver vi blot at tilføje : Faste legemer er med hensyn til deres mulige placeringer forbundet ligesom legemer i den tre-dimensionale geometri. Så kommer Euclids sætninger til at rumme udsagn om praktisk taget stive legemers opførsel. Kompletterer man geometrien på den måde, er den ganske oplagt en naturvidenskab; vi kan i virkeligheden betragte den som den ældste disciplin i fysikken".
Einstein kalder denne kompletterede geometri for "praktisk geometri" og skelner den fra axiomatisk-deduktiv geometri. Hvis vi ønsker at undersøge om universet eller "virkeligheden" er styret af en euklidisk praktisk geometri eller en anden praktisk geometri må vi tage erfaringen til hjælp: Hvad siger vores målinger og observationer af rummet om dette spørgsmål?
insteins synspunkt er selvfølgelig en konsekvens af hans egne resultater med at anvende ikke-euklidisk riemman-geometri til at beskrive det fysiske rum, en geometri der i fysiske forstand repræsenterer gravitationskræfter ved en egenskab ved selve det fysiske rum: Det krummer. Og et materielt legeme har den egenskab, at det kan ændre på rummets krumning i det område legemet befinder sig.
Konsekvensen af Einsteins ide var f.eks.,at lys, der også er masse via formlen $E=mc^2$, skulle krumme i nærheden af materielle legemer, fordi de afbøjes af legemets tyngdekraftsfelt. Dette har man eksperimentelt påvist ved lyset fra fiksstjerner

der passerer tæt forbi solen.
Vi kan sammenfattende siges, at tilbeskrivelse af virkeligheden benyttes den geometri, der i det foreliggende tilfælde giver den bedste overensstemmelse med eksperimentelle facts. Det eneste krav der stilles til en sådan geometri, er dens konsistens og dens brugbarhed.Om "sandhed" eller "falskhed" af den valgte geometri som sådan er der ikke tale.
Poincaréudtrykker dette ved at sige (33):
"Geometriske axiomssystemer, og de dermed forbundne geometrier er i matematisk forstand alle eksakte. De er hverken a priori intuition eller eksperimentelle facts, men rene konventioner.. én geometri kan derfor ikke være mere sand end en anden; den kan kun være mere praktisk til beskrivelse af det fysiske rum i den foreliggende situation".

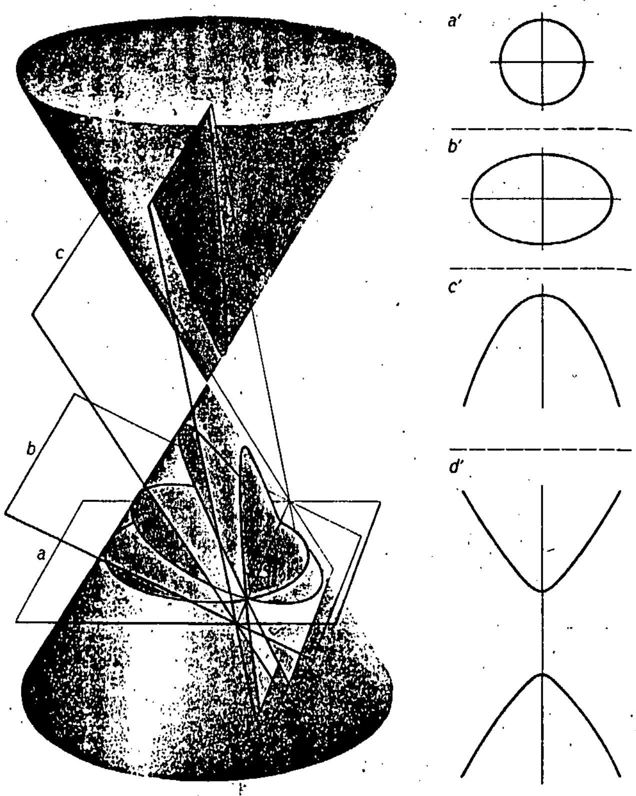




3. Geometriundervisningens historie.

3.1 Indledende bemærkninger.

I dette kapitel beskrives hvad man har undervist i af geometri og begrundelserne for denne undervisning. For at man kan få et overblik over denne udvikling, har vi lavet en kort beskrivelse af gymnasiets historiske udvikling, med særlig vægt på de aspekter af udviklingen, som vi mener har interesse for matematikundervisningen generelt og for geometriundervisningen specielt.
En forhåbentlig fuldstændig oversigt over love, anordninger, bekendtgørelser, cirkulærer og betænkninger, der er omtalt i teksten, er i skemaform givet umiddelbart efter den historiske oversigt.
I forbindelse med vores analyse af udviklingen har vi fremhævet de år, hvor der fremkommer væsentlige ændringer af geometripensum. I de mellemliggende år/perioder sker der imidlertid mange interessante ting, som har betydning for disse ændringer. Derfor er afsnittet om begrundelserne for eksistensen af geometriundervisningen periodeinddelt (f.eks. perioden 1871-1906), således at årstallene markerer begyndelsen henholdsvis afslutningen på en epoke.



3.2 Gymnasiet gennem tiderne.

Den protestantiske latinskole 1537 - 1809.

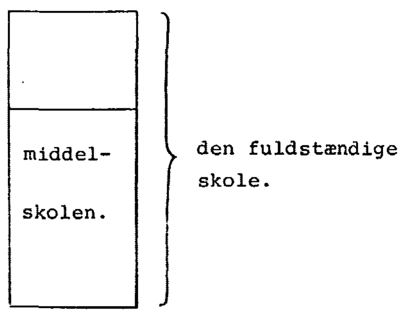
Gymnasiets historie kan føres tilbage til feudalperiodens dom- og klosterskoler. Skolerne virkede som forberedelse til uddannelsen af embedsmænd til kirke- og fyrstemagten.
Vores undersøgelser starter ved Christian d. IV's reform af latinskolerne den 22 oktober 1604, hvor geometri sammen med aritmetik og musikteori kommer med på skemaet for første gang. I forbindelse med reformen pålagde Chr. d. IV professorene ved Københavns universitet at udarbejde lærebøger til brug ved undervisningen og i 1612 udkom den første danske lærebog i geometri for "gymnasiet":

" Initia Geometrica seu in Euclidem Isagoge compendiosa, un acum Logistica Astronomica brevissima"
(Geometriens begyndelseselementer, eller kortfattet indledning til Euklid, sammen med algebraisk astronomi).

Perioden efter reformationen og frem til 1809 var en meget stillestående tid i "gymnasiet" og der blev kun foretaget mindre ændringer af hele latinskolen. Ved en Kgl. Anordning af 17 april 1739 skete en sammenlægning og koordinering af de lærde skoler; således at deres antal reduceredes hvorved kapaciteten koncentreredes.

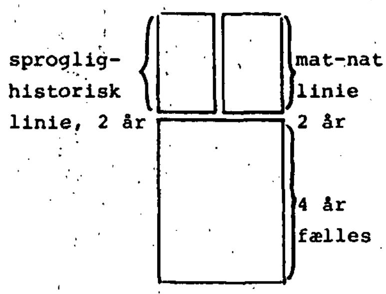
Det nyhumanistiske embedsmandsgymnasium 1809-1903.

Med baggrund i humanismens sejrsmarch gennem Frankrig og Tyskland opstod herhjemme det nyhumanistiske embedsmandsgymnasium. Det var præget af, at være universitetsforberedende eliteskoler for embedsmandsstanden og af at det hyldede den formale dannelsesteori sat i forbindelse med det nyhumanistiske dannelsesideal.
Hovedsigtet med den lov, som kom den 7 november 1809, var bl.a. at koordinere alle forberedelsesskoler, så man kunne få etableret en enheds-forberedelsesskole. Loven drejede sig altså især om de organisatoriske forhold og ikke så meget om det indholdsmæssige.
De lærde skoler skal, som sagt, forberede til universitetets adgangseksamen, men i denne lov nævnes det for første gang, at de lærde skoler kan benyttes til andet end universitetsforberedelser. Det siges nemlig i loven, at "folk som ikke er skikket til universitetet", alligevel kan have gavn af "en lærd uddannelse".
Selve skolen er iøvrigt på nærværende tidspunkt opdelt i to, den fuldstændige skole og middelskolen.
Den fuldstændige skole gav i modsætning til middelskolen ret til at indstille sig til adgangseksamen til universitetet og undervisningen havde et omfang der gjorde det sandsynligt, at man kunne bestå den. I 1850 ændres



skolen ved en bekendtgørelse af den 13 maj. Den lærde skole er nu ikke

længere forberedelsesskole, men en 8-årig, men 7-klasset (den sidste klasse varer i 2 år), afgangsskole der giver ret til videre studier på universitetet. Der er altså foretaget en strukturering af de lærde skoler; således at de nu underviser i de samme emner og på samme niveau. Det bør måske understreges, at skolen altså giver en enhedsforberedelse til enhver form for videre studium på universitetet.
Umiddelbart efter at den Madvigske ordning, som den blev kaldt efter den på den tid herskende kultusminister, blev vedtaget, begyndte man at kritisere den for at overbebyrde eleverne. Bekendtgørelsen er iøvrigt bemærkelsesværdig derved, at geometrien for første gang nævnes mere detaljeret. Det nærmere indhold specificeres dog først i en bekendtgørelse fra 1858 (se senere), efter at universitetsprofessorene Ramus (mat.) og Holten (fysik) sammen med overlærer Petersen ved Metropolitanskolen i 1855 havde indsendt et forslag til præcisering af fordringerne (1).
Forslaget blev ikke modtaget venligt af faglærerne, som anså det for at være for krævende og de mente desuden, at den færdighed i løsning af matematiske opgaver, som lå i forslaget ikke giver noget større bidrag til den almene dannelse.
Kritikken af den Madvigske ordning fortsatte, man forhandlinger, som kritikken resulterede i, endte resultatløse indtil man lavede den Hall-ske ordning i 1871 (Kgl. Anordning 5.8.71). I forbindelse med denne ordning ændredes den lærde skole til en 6-årig skole ved at man nedlagde de to første klasser, men udover denne tidsmæssige indskrænkning, skete der en opdeling af skolen, således at de sidste to år deltes i to linier, en sproglig-historisk og en matematisk-naturvidenskabelig.



Efter de første (fælles) 4 år tager man en eksamen, som kaldes 4.klasses hovedeksamen. Denne eksamen giver, på linie med forskellige forberedelseskurser/eksamener, adgang til bl.a. polyteknisk læreanstalt og pharmaceutisk højskole. Elever, der er i færd med at tage 4.klasses hovedeksamen eller et af de forskellige forberedelseskurser, kaldes ofte for real-disciple, mens de elever, som er i færd med at tage afgangsprøven (altså studentereksamen) kaldes for studerende disciple.
Den Hall-ske ordning var der imidlertid heller ikke tilfredshed med. Den blev kritiseret/debatteret kraftigt. En del af kritikken gik på opdelingen i de to linier. Mange anså det for uheldigt med en linie, som (ensidigt) forbereder til specielle fagområder, som matematik og fysik. De mente, at man skulle vende tilbage til enhedsgymnasiet. Andre, derimod, mente at reformen ikke var vidtgående nok, da hovedvægten fortsat var lagt på de klassiske fag, hvorved de nysproglige og matematisk-naturvidenskabelige fag blev underbetonet. I denne forbindelse kan det bl.a. nævnes, at der i 1898 kom et andragende fra nogle privatskoler om tilladelse til at afholde undervisning og afgangseksamen efter en såkaldt 3. retning (en nysproglig retning).

Det socialliberale gymnasium 1903-

Som en følge af systemskiftet i 1901, hvor venstre kommer til magten og, påvirket af bl.a. Gertz(prof. i kl.filologi og medlem af undervisningsinspektionen, se iøvrigt senere), der som rektor afholdt en brandtale ved Københavns universitets jubilæumsfest i 1898, vedtages en lov af den 24 april, som følges op ad kgl. anordning den 1 dec. 1906, som forårsager en stor gymnasie- og mellemskolereform. De lærde skoler erstattedes af de højere almenskoler. Almenskolen opdeles i en 4-årig mellemskole med eksamen og et 3-årig gymnasium, som igen var delt i en klassisk-sproglig, en nysproglig og en matematisk-naturvidenskabelig retning. Lovens ene hovedsigte var at skabe forbindelse mellem almenskolen og latinskolen; således at der blev givet mulighed for, at visse elever kunne gennemløbe hele uddannelsessystemet frem til universitetet. Det andet hovedsigte var at styrke de moderne sprog.

Efter 1903-loven er der debat om hvorvidt det er rimeligt, at bibeholde matematik på de sproglige linier, idet de 2 gange 3 timer, som er til rådighed, alligevel efter manges mening er for lidt. Argumentet for at bibeholde matematikundervisningen er, at det lærer elever at tænke (logisk). Debatten går desuden (som tidligere) på, at (1903) ordningen alt i alt er for krævende. Den nyoprettede sproglige linie var til at begynde med meget populær med stor søgning, men i de følgende år faldt tilgangen imidlertid væsentligt (2).

I 1930 udkommer en betænkning om det 4-årige gymnasium (Højbjerg Christensen), men den bliver aldrig realiseret da Madsen-Mygdal regeringen, som havde givet det nedsatte udvalg et kommissorium, var gået af til fordel for en radikal-socialdemokratisk regering, som ikke delte den forrige regerings syn på undervisningen i gymnasiet. Store dele af betænkningens indhold overførtes imidlertid til en betænkning fra den 14.9.1933, (det 3-årige gymnasium bibeholdtes dog) som dannede grundlag for Kgl. Anordning angående undervisningen i gymnasiet fra den 9 marts 1935. I forbindelse med 35-ordningen fjernedes matematikken på de sproglige linier i 3g. Man har altså nu kun 2 gange 2 timer, hvor man i begyndelsen af århundredet (Tuxen 1914) anså 2 gange 3 timer for så beskedent, at det (næsten) var omsonst at undervise i det.

Under krigen blev der indført en del lempelser af gymnasiets pensumopgivelser, da der var betydelige vanskeligheder for såvel gennemførelsen af en regelmæssig undervisning som for en normal forberedelse. Lempelserne var tænkt som midlertidige foranstaltninger, men gymnasieskolernes lærerforening bad om, atman bibeholdt disse lempelser indtil man havde forhandlet sig til nogle lempelser over en bredere bank. Et udvalg med Højberg Christensen som formand fik netop dette som kommissorium i 1948 og man afgav i 1949 en betænkning angående begrænsning af læse- og eksamenspensa til studentereksamen. Udvalget foreslog bortfald af matematik for de sproglige, hvilket man i forbindelse med Kgl. Anordning af 8 april 1953 holdt sig til. Anordningen indeholdt iøvrigt kun nogle mindre justeringer, og der sker således intet afgørende før loven af 7 maj 1958, som beskriver strukturen af det gymnasium vi kender idag. Loven af 58 har dog slet ikke den reformkarakter, som 1903-loven havde. 58-loven er en rammelov og undervisningens indhold og omfang fastsættes først i en bekendtgørelse i 1961 ligesom ønsket om en øget grendeling står omtalt i 1960 betænkningen "Det nye gymnasium". Af 61-bekendtgørelsen fremgår det, at matematik er genindført for de sproglige, samt at

der oprettes en samfundsfaglig og en naturfaglig retning.
I 1968 kommer en bekendtgørelse, hvor der tilføjes en musiksproglig retning og hvor antallet af matematiktimer reduceres for såvel de sproglige som de matematiske linier.
Endelig kom i 1971 den bekendtgørelse, som vi lever under idag. Denne bekendtgørelse har kun medført nogle mindre indholdsjusteringer, bl.a. indførtes plangeometri på den samfundsfaglige og den naturfaglige retning.

Gymnasiet gennem tiderne.

Love	Anordninger	Bekendtgørelser	Cirkulærer	Betænkninger & vejledninger
	17 april 1739: Ang. de latinske skoler i Danmark og Norge.			
	7 nov. 1809: Ang. de lærde skoler i Danmark og Norge.			
		13 maj 1850: Undervisningsplan og eksamensbestemmelser for de lærde skoler i Danmark.		
		8 nov. 1858: Ang. nogle forandringer og nærmere bestemmelser vedrørende bekendtgørelsen af den 13 maj 1850.		
64; 1 april 1871: Om undervisningen i de lærde skoler i Danmark.	124; 5 aug. 1871: Ang. undervisningen i de lærde skoler.			
	86;16 juni 1882: Ang. forandringer i og tillæg til A.5-8-1871.			

62; 24 april 1903: Lov om højere almenskoler m.m.	260; 1 dec. 1906: Ang. undervisningen i gymnasiet.	265; 4 dec. 1906: Ang. undervisningen i gymnasiet.	367; 4 dec. 1906: Ang. en normaltimeplan for gymnasiets tre linier, og udkast til eksamensopg. 85; 14 apr. 1924: Ang. forsøg med en ændret matematikundervisning på gymnasiets sproglige lin.	
	68; 9 mar. 1935: Ang. undervisningen i gymn. 327;2 dec. 1935: Ang. fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereks.	69; 13. mar. 1935: Ang. undervisningen i gymnasiet.		Betænkning angående begrænsning af læse- og eksamenspensa til studentereksamen, 1949.
	129;8 apr. 1953: Om undervisningen i gymnasiet.	130; 9 apr. 1953: Om undervisningen i gymnasiet.		
165; 7 juni 1958: Lov om gymnasieskoler.	292;6 sept 1961: Om undervisningen i gymnasiet. 293;6 sept 1961: Om fordringer ved og eksamensopgivelser til studentereksamen. 277;5 juli 1968: Om midlertidig ændring af B. 292 fra den 6.9.61.			Betænkning nr. 269 af 1960 ("den røde"): Det nye gymnasium.

234;27 maj 1970: Om fritidsundv., om gymnasieskoler og om højere forberedelseseksamen. (bekendtgjort i B.328, 10.7.70)		322;16 juni 1971: Om undervisningen i gymnasiet og om fordringerne ved og eksamensopg. til stud.eks.		Vejl. og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, 1971.

3.3 Hvilken geometri har man undervist i.

1604:

I dette år kommer geometri første gang ind i skolen. Indholdet er ikke nærmere specificeret i det kildemateriale vi har kunnet finde, men at dømme på titlen af den første geometribog (se side 12) var det en kortfattet indledning til Euklid tilsammen med anvendelser på astromien.

Vi ved ikke noget, men vi gætter på at der ikke sker væsentlige ændringer af geometriundervisningen frem til 1850.

1850:

Første gang geometrien nævnes mere detaljeret, er i denne bekendtgørelse, som bygger på loven fra 1809. Om geometri hedder det:

> "Undervisningen heri, der ligeledes går gennem hele skolen forberedes ved geometrisk tegning, og indeholder foruden den almindelige plangeometri også stereometri og plantrigonometri, hvortil føjes en sådan kort oversigt over det vigtigste af astronomien, at den, uden vanskelig kalkul eller detail kan give en tydelig anskuelse af himmellegemernes forhold, af lovene for deres bevægelser og af måden hvorpå disse love erkendes, samt over hovedsætningerne af matematisk geografi".

Det nærmere indhold fastsættes først i en Kgl. bekendtgørelse af den 8 august 1858. Det hedder heri om undervisningen i geometri, at den skal omfatte:

1. Plangeometri.
- Sætninger om vinkler og rette liniers stilling til hinanden (lodrette og parallele linier),
- rette liniers længde afhængig af deres stilling,
- om trekanter, deres inddeling efter sider og vinkler, kongruens,
- almindelige sætninger om firkanter, deres inddeling, parallogrammer og mangekanter
- cirklen, rette linier og vinkler i og ved cirklen,
- retlinede figures sammenligning, proportionalitet, ligedannethed og deres udmåling,
- regulære polygoner i om cirklen,
- areal- og omkredsberegning

2. Stereometri.
- planers og rette liniers stilling i rummet, vinklerne mellem dem, parallelisme, hjørner, kongruens og symetri navnlig med henblik på prismer og pyramider,
- udmåling af cylindre, kegler og kugler (areal og rumfang)

3. Trigonometri.
- de trigonometriske funktioner (navnlig sin og cos) og ligninger, trekanters opløsning og de dertil nødvendige formler,
- trigonomiske tabeller samt logaritmetabeller (eftervisning af gyldighed samt anvendelse af),

Afgangseksamen består i matematik af én skriftlig prøve i geometri og en i aritmetik.

I Kgl. Anordning af 5 august 1871 siges det om geometripensaet:
1 - 4 år, der som tidligere nævnt er fælles.

"Undervisningen i første klasse indledes med en på materielle former støttet abstraktion af de første geometriske begreber, således at disciplen herved tillige føres til en sådan klar opfattelse af legemers, fladers og liniers inddeling efter deres frembringelsesmåde og beskaffenhed, som uden geometriske beviser ad anskuelsens vej ved iagttagelse af og forsøg med legemelige former kan opnås. Derefter meddeles et plangeometrisk kursus af det i skolerne hidtil sædvanlige omfang".

Herudover
- beregninger af arealer (på basis af plangeometriske sætninger)
- volumener (uden beviser, og for at"tydeliggøre matematikkens anvendelser i det praktiske liv".)

4.klasses hovedeksamen:
- prøve: skriftligt bl.a. i geometriske konstruktioner eller sætninger.
  mundtligt bl.a. i geometri.

2 år - sproglig linie.
- astronomi med kort matematisk indledning

2 år - matematisk-naturvidenskabelig linie.
- stereometri
- plantrigonometri
- analytisk geometri, ret linie, cirkel, parabel, ellipse, hyperbel
- projektionslære, bl.a. rumlige figurer på to vinkelrette planer

Eksamen:
- prøve: skriftligt - projektionstegning, anvendelse af stereometri eller trigonometri.
  mundtligt - bl.a. i geometri og altid spørgsmål i analytisk geometri.

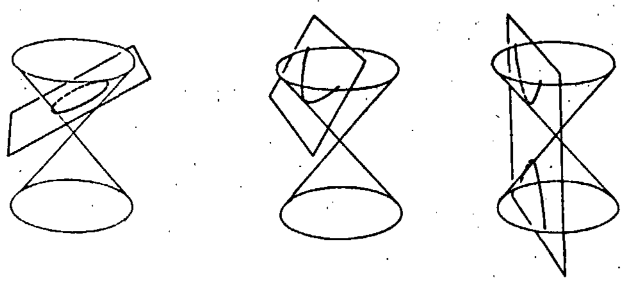
1903:
Her indføres matematik for de sproglige linier, men pensum bliver, som for mat-nat linien, først beskrevet i Kgl. A. af 1 dec. 190[illegible], hvori det hedder:

Mat-nat linie.

Plangeometri:
- bevis for sætninger for proportionalitet i to ensvinklede trekanter og rektanglets areal.
- ligedannethedsteori og areal af ligedannede figurer.
- regulære polygoner, cirkelperiferiens deling i 4,6,10 og 15 lige store dele og beregning af tilhørende korder.
- omkreds og areal af cirkel, cirkeludsnit og cirkelafsnit.
- koordinatsystem og simple funktioner i dette.
- geometriske steder, harmonisk forbundne punkter og linier.

Trigonometri:
- trigonomiske funktioner, logaritmiske udtryk, grænseværdier,
- bestemmelse af terkant stykker.

Stereometri:
- hovedsætning om ret linie og plan.
- et punkts bestemmelse ved retvinklede koordinater.
- polyedre: prisme, pyramide, pyramidestub.
- de 5 såkaldte platoniske legemer. (særlig: tetraeder, tærning og oktaeder).
- cylinder, kegle, keglestub.
- kuglen.
- de sfæriske grundformler (særlig: trekanter).
- kongruens, symmetri og ligedannethed.
- arealet af omdrejningslegemer.
- rumfang af: prisme, pyramider, pyramidestub cylinder, kegle, kegle keglestub, kugle, kugleudsnit og kugleafsnit.



- det påvises, at plane snit i en omdrejningskegleflade kan være elipse, hyperbel eller parabel.

"der bør gennem undervisningen lægges vægt på at udvikle elevernes rumsans".

Analytisk plangeometri:
- punkter og kurvers bestemmelse ved retvinklede og polære koordinater.
- liniens og cirklens ligninger.
- skæring mellem ret linie og cirkel.
- parabel, ellipse og hyperbel henførte til symmetriakse til koordinatakse.
- hovedsætninger om brændpunkt, ledelinie, tangent (asymptoter) og normal, diametre.

Endelig kan man vælge:
- analytisk geometri: diskussion af den almindelige ligning af 2.grad
- stereometri: ikosaeder, dodekarder, fremstilling af simple polyedre ved retvinklet projektion på to hinanden vinkelrette billedplaner og af plane snit i sådanne legemer.

, hvad der imidlertid ikke var mange der gjorde.(fremgår af 1949-betænkningen) I 1913 og i næsten alle de efterfølgende år indtil 1935, valgte alle skoler nemlig et andet valgfrit emne, infinitesimalregning, som i 1935 blev fast del af pensummet i matematik

For de to sproglige linier:

Geometri:
- bevis for sætninger om sidernes proportionalitet i to ensvinklede trekanter.
- bevis for sætningen om et rektangels areal.
- ligedannethedsteori og arealet af ligedannede figurer.
- regulære polygoner, cirkelperiferiens deling i 4,6,10 og 15 lige store dele og beregning af tilhørende korder.
- omkreds og areal af cirkel, cirkeludsnit og cirkelafsnit.
- trigonomiske funktioner (trekantsberegninger).
- koordinatsystem og simple funktioner i dette.

1935:
Ifølge Kgl. Anordning af 9 marts 1935 ophører undervisningen i matematik i 3g for de sproglige linier. Undervisningen omfatter iøvrigt for:

de sproglige linier:

Geometri:
- analytisk geometri (planen).
- koordinatsystemer, afstand, ret linie, vinkel, skæring.

Trigonometri:
- trigonomiske funktioner (cos,sin,tg)
- den retvinklede trekant, sinusrelationerne.
- bestemmelse af trekant-stykker, når 3 er givne.
- kordeberegning.
og praktiske anvendelser.

Mat-nat linien:

Pensumopgivelsen i matematik er inddelt i to grupper:

a) Aritmetik og plangeometri.

b) Stereometri.

Som man kan se udmærker stereometrien sig ved fortsat at være et selvstændigt samlet hele, en enhed.

Pensaet er iøvrigt i udpluk:

Aritmetik og plangeometri:

- ligedannethed, konstruktioner p.g.a. geometriske steder.
- harmoniske forbundne ting,
- arealer af trekanter og polygoner.
- vinkler m.v., vinkelbuers længde.
- alm. trekants-grundformler, beregninger herunder højder, medianer og vinkelhalveringslinier samt radius i trekantens omskrevne cirkel.
- trigonometri
- vilkårlige vinkler
- relationer mellem trigonometriske udtryk m.v.
- simple trigonometriske ligninger
- analytisk geometri (planen).
- koordinatsystemer, og parallelforskydninger, polære koordinater,(ligninger og parameterfremstilling) for ret linie, cirkel, ellipse, parabel, hyperbel.
- vektores sammensætning og opløsning.

Stereometri:

- linier, planer, hjørner,
- retvinklede koordinater i rummet
- afstand, kegleretninger, vinkel
- linier, polyedre, cylinder, kegle, keglestub
- sfæriske grundformler og trekanter samt simple anvendelser på astronomi og geografi
- areal af de betragtede omdrejningslegemers overflade
- rumfang af de betragtede legemer
- kegle- og cylindersnit.

1953 (8 april). Ifølge denne Anordning om undervisningen i gymnasiet fremgår det af formålsparagrafen for faget matematik, at "arbejdet hermed skal udvikle og skole elevernes evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform". Af Anordningen kan det ses, at undervisningen skal omfatte en række (tilsyneladende) ligestillede emner (38 ialt), hvoraf følgende er et udpluk indeholdende geometriske ingredienser:

- deling af et givet liniestykke i et givet forhold. Harmonisk forbundne pkt.
- den almindelige ligedannethedslære, ligedannede polygoners arealer
- længde af cirkel og cirkelbue. Areal af cirkel, cirkeludsnit og cirkelafsnit.
- konstruktionsopgaver
- de trigonometriske funktioner (sin,cos,tg og cot) af vilkårlige vinkler.
- relationer mellem de trigonometriske funktioner.
- grundformler for den retvinklede og den skævvinklede trekant.
- de til trekantens opløsning sædvanligt benyttede logaritmiske formler.
- beregning af trekantens højder, medianer og vinkelhalveringslinier samt radius i trekantens omskrevne cirkel og i dens røringscirkler.
- hovedformerne for den rette linies ligning (herunder normalformen) med anvendelser.
- ligning og parameterfremstilling for cirklen, ligning for tangenten.
- diskussion af andengradsligningen $ax^2 + by^2 + cx + dy + c = 0$.
- ligning og parameterfremstilling for parablen henført til symmetriaksen og toppunktstangenten som koordinatakser; ligning for tangent, normal og den til et givet kordesystem svarende diameter; hovedsætninger om tangenten med anvendelse på konstruktioner.
- ligning for ellipse og hyperbel henført til symmetriakserne som koordinatakser.
- geometriske steder i analytisk behandling; herunder ellipsen og hyperblen som geometrisk sted for de punkter, hvis afstande fra et givet punkt og en given ret linie har et givet forhold.
- i rumgeometrien behandles hovedsætninger om ret linie og plan; det tresidede hjørne, konvekse hjørner.
- kongruens, symmetri og ligedannethed i rummet.
- polyedre, herunder prisme, pyramide og pyramidestub samt de fem regulære polyedre.
- cylinder, kegle og keglestub; kuglen.
- sfærisk geometri
- areal- og rumfangsberegninger
- bestemmelse af plane snit i omdrejningscylinderflade og omdrejningskegleflade.

1961 (6 september). Denne bekendtgørelse udfylder rammeloven fra 1958 og bygger på 1960 betænkningen "Det nye gymnasiet".

De sproglige linier.

Matematik bortfaldt helt i 1953 og ved genindførelsen er geometri gledet ud.

Mat/nat og mat/sam - linierne har ingen geometri.

Mat/fys linie.

Bekendtgørelsen nævner kun, at plan- og rumgeometri skal være indeholdt i undervisningen, men i 60 betænkningen er det nærmere indhold præciseret:

plangeometri (analytisk):

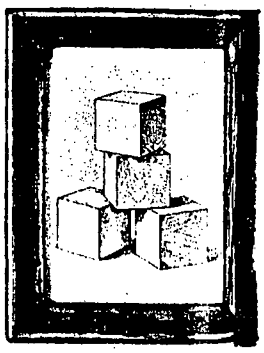
- retvinklede koordinatsystemer, koordinatskifte, afstande
- vektorer og deres koordinater, regning med vektorer, skalarprodukt
- ret linie, vinkel, parabel, hyperbel,ellipse,
- i analytisk fremstilling (linier, parameterfremstilling og vektorligning)
- areal af trekanter og parallelogrammer
- afbildninger af planen på sig selv (flytning og ret affinitet)

rumgeometri (analytisk):

- retvinklede koordinatsystemer, afstande
- vektorer og deres koordinater, regning med vektorer, skalarprodukt.
- ret linies parameterfremstilling, planens analytiske fremstillinger
- vinkler, kuglens ligning, sfæriske koordinater og afstande
- polyedre, Eulers sætning, regulære polyedre
- areal af omdrejningslegeme, -kegle, og kugleoverflader samt sfærisk trekant
- rumfang af prisme, pyramide, omdrejningslegeme, -kegle
- kongruens og symmetri

trigonometri.(en del af funktionslæren)

- trekantsberegninger



1968. (5 juli, bekendtgørelse)

Bortfalder valgfrit emne i matematik.

1971. (16 juni, bekendtgørelse)

I denne bekendtgørelse er følgende ændringer af pensumet beskrevet:

De sproglige linier.

Som i 1961, fortsat ingen undervisning i geometri.

Matematisk-naturvidenskabelig retning.

Mat/fys linie.

- plangeometri som i 61
- rumgeometri bortfalder
- trigonometri som i 61
- svingninger og kun retvinklede trekantsberegninger.

Mat/nat og mat/sam.

- plangeometri , som for mat/fys, indføres
- retvinklede koordinatsystemer, afstand, vektorer og deres koordinater, regning med vektorer, skalarprodukt, ret linie og cirkel i analytisk fremstilling.

- areal af trekant og parallelogram.
- trigonometri, som i 61
- svingninger og kun retvinklede trekantsberegninger.

Prøver: skriftlig 1 sæt og 2 mundtlige spørgsmål.

Konklusion og udviklingsmæssige hovedtræk, på baggrund af afsnit 3.3 " Hvilken geometri har man undervist i ".

I det følgende vil nogle afgørende hovedtræk i forbindelse med de forskellige ordninger blive fremhævet.
Under den Madvigske ordning er geometrien overvejende syntetisk og en endog meget stor del af det matematiske pensum.
I forbindelse med den Hallske ordning, nævnes for første gang de analytiske metoders anvendelse (se s.20), men det er begrænset til den 2-årige matematisk-naturvidenskabelige retning. De første 4 år adskiller sig næppe på nogen måde afgørende fra det man, i samme tidsrum, havde under den Madvigske ordning.
I 1903 har man indført matematik på de sproglige linier og i den forbindelse introduceres analytisk geometri, men langt den overvejende del af geometrien er syntetisk. På mat-nat linien er den analytiske geometri tilsyneladende udvidet en smule i forhold til 1871.
I bekendtgørelsen fra den 4.12.1906 om undervisningen i gymnasiet fremgår det, at formålet med matematik på de sproglige linier er " at skole elevernes tænkeevne ", men af et cirkulære fra 1924 fremgår det, at man er begyndt at tvivle på nytten i den retning, for man giver heri tilladelse til, at undervisningen i stedet rettes mod en mere praktisk anvendelig matematik.

I 1935 er der sket en opløsning af de sædvanlige matematiske kategorier, idet funktionsbegrebet og enhedsgørelsen af matematikken er trådt i forgrunden. På de sproglige linier er den syntetiske geometri praktisk taget forsvundet til fordel for den analytiske og de praktiske anvendelser har fået en central placering. På den matematisk-naturvidenskabelige linie er der i forbindelse med funktionsbegrebets centrale placering og den begyndende enhedsgørelse, sket en "afgeometrisering" idet plangeometri, trigonometri og analytisk geometri, som i 1903 var selvstændige grupper, er blevet en del af gruppen " aritmetik og plangeometri ", som klart er centreret om funktionsbegrebet. Det er kun stereometri, der i matematikpensum er udskilt som en selvstændig gruppe.
Der er endnu syntetisk geometri på mat-nat linien, men den overvejende del er nu analytisk.

I 1953 fremtræder matematikken som en enhed med funktionsbegrebet som det fremtrædende (der er under denne ordning kun matematik på mat-nat linien). Det er klart, at geometrien i forbindelse med enhedsgørelsen er blevet rangeret ud på et sidespor, bl.a. med en svækkelse af rumgeometri og med vektorer strøget af emnelisten.
Den analytiske geometri er nu så langt den overvejende.

I forbindelse med 1958/61 ordningen glider den sidste rest syntetisk geometri ud af pensumsopgivelserne.
Der indføres igen matematik på de sproglige linier, men uden geometri.
Der sker en afgørende udvikling af det matematiske pensum, idet man udover det stadigt centrale funktionsbegreb indfører en række almene hjælpebegreber fra mængdelæren. Dette går ud over konstruktionslæren, logaritmiske trekantsberegninger, keglesnitslæren, stereometriens indledende sætninger og sfærisk geometri, som alle udgår.
På de nyoprettede mat/nat og mat/sam linier er der hverken plan- eller rum-

geometri (analytisk).

I 1971 fjernes den analytiske rumgeometri på mat/fys linien, mens den analytiske plangeometri, som man allerede har på mat/fys, indføres på mat/nat og mat/sam linierne.

Af de opstillede hovedtræk i udviklingen kan man se, at der er sket en udvikling fra en klassisk geometri a la Euklid først, til en momentvis mere praktisk orienteret og sidenhen analytisk geometri indtil idag hvor en egentlig undervisning i geometri efterhånden er blevet fjernet; således at der kun er geometri med, som spiller en rolle for introduktionen af andre matematiske discipliner. Sagt på en lidt anden måde kan man sige, at geometri som en klump, med tiden, er blevet mere og mere opløst, idet den er blevet indvævet i den "matematiske sammenhæng" alt mens den er blevet mere og mere analytisk.

3.4 Hvorfor har man undervist i geometri.

Geometriundervisningen i gymnasiet har gennem historien undergået en række skift ved de forskellige anordninger og bekendtgørelser. Disse skift afspejler dog kun til en vis grad geometridebatten, som ofte har været meget mere nuanceret, med meget forskellige meninger om geometriundervisningens indhold og formål. Derfor vil en del af de citerede personer ikke altid have en direkte indflydelse på de nye bekendtgørelser etc., men har måske alligevel mere indirekte påvirket udviklingen.

Hovedsynspunkterne med hensyn til formålet med geometriundervisning kan med rimelighed inddeles i følgende fem hovedsynspunkter:

1. Omverdens rumbevidsthed/orientering.
Hermed menes, at eleverne skal få en forståelse af planen og rummet, samt erhverve simple videnselementer om deres egenskaber.

2. Omverdens rumbeherskelse.
Undervisningen kan sigte på at opbygge en mere sammenhængende indsigt, der tillader eleverne at handle ved hjælp af denne indsigt. At kunne fælde domme om hvilke geometriske argumenter der er rigtige og hvilke der er forkerte, samt at kunne strukturere problemsituationer og gennemføre beregninger, hører også med til dette punkt.

3. Illustrere matematiske processer.
Hermed menes, at geometri kan behandles som et system, der er et skoleeksempel på matematisk tankegang og metode i bredere almindelighed.

4. Træne den logiske sans.
Aksiomatisk-deduktiv geometri som hos Euklid har i mange århundreder været betragtet som skoleeksemplet på logisk og stringent tænkning, og mange andre videnskabsgrene har søgt at kopiere Euklids metoder og måder at deducere på. Man har ment at en sådan aksiomatisk-deduktiv geometri skærpede elevernes tænkeevne.

5. Æstetiske kvaliteter.
Udover disse fire punkter kan man sige, at geometri har nogle æstetiske kvaliteter (opbygning og bevisførelse), som nogle forfattere bruger som argument for at undervise i geometri.

Generelle kommentarer til alle fem punkter:

Det er klart, at der må være en flydende overgang mellem pkt. 1 og 2. Det omhandler forhold som kun kan udøves af geometrien fordi det er noget, som vedrører rummet (planen) som en genstand.
Punkt 3 kunne i princippet godt opnås af anden matematik, generelt som matematisk tankegang og metode.
Endelig kunne punkterne 4 og 5 være noget helt andet end matematik.

Hvorfor har man undervist i geometri i tiden før 185o.

Geometri kom som tidligere omtalt første gang med på skemaet i 16o4, og på dette tidspunkt blev Euklids elementer betragtet som skoleeksemplet på logisk og stringent tænkning, og der er næppe tvivl om, at geometriundervisningen netop havde til formål at skærpe elevernes tænkeevne (se bl.a. Gertz og Julius Petersen's udtaelser herom i 1889,omtalt side 31). I de næste 250 år skete der en rivende udvikling af geometrien, men i skolen var det fortsat Euklids geometri, som indeholdt de endegyldige sandheder om geometri. Perioden før 185o er altså centreret om pkt. 4, at træne den logiske sans.

Tiden 185o-71.

Det nærmere indhold af geometriundervisningen specificeres først ved bekendtgørelsen i 1858, og det er værd at bemærke at der er en forskel mellem formålet i 185o og bekendtgørelsen i 58. I det omfang matematikken overhovedet har en plads på skemaet, var geometrien en central del af denne. En simpel optælling af lærebøgerne der udkom i denne periode, og af hvor mange der i titlen refererer til geometri giver således følgende resultat:

lærebøger i matematik: 36, heraf i geometri : 21.

reference:1.
I samfundet blev geometrien anvendt på astronomi og geografi (navigation). Det er derfor ikke urimeligt at antage, at netop disse to områder har været inspirationskilde for en del af geometriundervisningen. I denne periode får geometrien et dobbelt formål, det tankeskærpende samt et praktisk, som skyldes at man påbegynder en mere praktisk anvendelse af geometrien.

1871.

Her kan vi se, at omverdensbevidstheden spiller en rolle for de første fire klasser. I videreudviklingen for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium har projektionslæren, der er orienteret mod praktiske resultater, tjent til at opnå en vis omverdensbevisthed og beherskelse i de første fire klasser. Som det bl.a. fremgår af Gertz og Petersens udtalelser fra 1889 (Gertz var professor i klassisk filogi og formand for undervisningsinspektionen ligesom Julius Petersen, matematiker og skolebogsforfatter) har matematikken dog, i det matematiske gymnasium, stadigvæk fortrinsvis været betragtet som et fag til skærpelsen af den logiske tænkning eller indøvelsen af den formelle logik (dette er dog ikke Gertz og Petersens egne meninger).

Tiden fra 1871-19o6.

som det allerede tidligere er blevet omtalt, er denne periode, på det formelle plan, en meget spændende tid for hele det såkaldte højere skolevæsen. Perioden er for den matematisk-naturvidenskabelige linie kendetegnet ved at man forlader det åndsskærpende til fordel for det praktisk anvendelige, mens det for den sproglige linier stadigvæk centrerer sig om det åndsdannende. I 1889 udsendte Gertz sammen med Julius Petersen således følgende udtalelse vedrørende reform af undervisningen i de lærde skoler (3):

> " Ved matematikundervisningen er der her i landet i de senere år foretaget en frontforandring, som kort må omtales. Matematikken betragtedes tidligere nærmest som et materiale for indøvelsen af den formelle logik. Man lagde hovedvægten på, at disciplen lærte at gengive et bevis i en logisk uangribelig form, samt at han lærte visse bestemte metoder....Men man mener nu at kunne opnå meget mere, man mener, at matematikundervisningen kan drives således, at den i høj grad bidrager til at udvide elevernes selvstændighed.
> ...Tidligere var det aritmetikken , med dens bestemte metoder, der var hovedsagen. Nu lægges vægten på geometrien, hvis opgaver er så forskelligartede, at løsningen ikke kan blive mekanisk, medens de dog med små skridt kan føre fra det lette til det vanskelige, og derved efterhånden udvikle elevernes evne til selvstændig bevægelse."

Gertz følger dette indlæg op, idet han i en beretning om og forslag for undervisningen i mellemskolenfra 19o3 siger:

> "De positive kundskaber, som mellemskolens elever kunne få ved matematikundervisning, er et nødvendigt grundlag for en solid og frugtbringende undervisning i naturfagende. Men ellers havde de ikke synderlig værdi for andre elever end dem, der skulle fortsætte deres skolegang i realklassen eller gymnasiet....Men af desto større værd er den udvikling, som elevernes evner kunne få ved den matematiske undervisning....Først og fremmest skal da undervisningen i dette fag lære eleverne at tænke logisk og selvstændigt, samt at give deres tanker et kort og klart udtryk. Dernæst skal den bidrage til at fremkalde elevernes selvvirksomhed. Endvidere skal den vænne eleverne til nøjagtighed, og endelig skal den klargøre for dem forskellen mellem almengyldige sætninger og specielle regler."

I disse synspunkter er professor Bonnesen uenig. Han siger i en artikel: Matematikken i gymnasiet i Nyt Tidskrift for Matematik, 19o5:

" Man finder således i de af Professor Gertz udgivne metodisk forslag til mellemskoleundervisningen en bemærkning om, at matematikken kun har ringe praktisk betydning for dem, der afslutter deres skolegang med mellemskoleeksamen, og at der derfor må lægges så meget større vægt på den formelle, logiske træning som matematikundervisningen kan give. Det vil ikke være vanskeligt at finde repræsentanter for det stik modsatte synspunkt: Matematikundervisningen har kun værdi, men da også en ganske overordentlig stor værdi, ved den rolle, matematikken spiller i det praktiske liv, og kun ved at fremdrage anvendelserne som det væsentlige, vil det være muligt at udvikle den rette forståelse og interesse hos eleverne..." og senere:
"Det gælder fremfor alt, at give eleverne lejlighed til at løse opgaver, som rent praktisk frembyder sig for dem, og ikke blot for tilfældet indrettede opgaver. Vore studenter har, når de forlader skolen, vel nok følelser af at have lært et og andet men følelse af, at de med deres viden virkelig kan udrette noget, der ikke lige er afpasset efter rammen, det har de aldrig."

Den daværende kultusminister, I.C.Christensen siger i sin forelæggelsestale til loven for de højere almenskoler af 24 april 19o3 bl.a. om matematikundervisningen, og matematikken selv:

" Matematikken har en så ejendommelig (særegen) og stor betydning for ungdommens åndsudvikling i visse retninger, at alle ungdomsskolens elever bør nyde undervisning i dette fag lige til skolens afslutning."

Dette er en politikers udtalelser om matematik. Et karakteristisk træk ved debatten er, at folk uden for den profesionelle matematikergerning, fremhæver matematikkens formål som værende af ren formel karakter: Det udvikler eleverne åndeligt. Matematikerne har et langt mere nuanceret syn på tingene, som også Bonnesens indlæg viser.

<u>19o6.</u>

Formålet med matematikundervisningen ved denne Kgl. anordning af 1. december var, for de sproglige, at skole elevernes tænkeevne ved hjælp af matematikkens stringente betragtningsmåder. På de sproglige linier undervistes i plangeometri. På matematisk-naturvidenskabelig linie var der tillige undervisning i stereometri og analytisk plangeometri.
Den praktisk anvendelige geometri styrkes, selvom det åndsskærpende endnu ikke er forladt. (Dette peger alt i alt i retning af en vis omverdensrumbevidsthed, og -beherskelse, men pkt. 4, at træne den logiske sans er stadigvæk helt central.

Geometridebatten 19o6-35.

Perioden 1890-19o6 havde været en enestående reformperiode for latinskolen. De næste tre årtier var ikke på tilsvarende måde præget af gennemgribende ændringer af skolen, men til gengæld kom der fart i den interne debat, og særligt blev matematikken på de sproglige linier diskuteret. På de højere Almenskolers lærerforenings årsmøde i oktober 1913, diskuteres hvilke erfaringer der var gjort med loven af 24 april 19o3.

Om matematikundervisningen siger rektor S.A.Christensen, Nykøbing F. Katedralskole:

> " Jeg kunne fristes til at sammenligne matematik med gymnastik og sige, at matematikken skal for ånden være, hvad gymnastikken er for legemet."

S.A. Christensen mente videre, at der burde lægges mere vægt på opgaveregningen. Iøvrigt var debattørerne enige om, at matematikken burde bevares på de sproglige linier, men med hensyn til mål og midler var der stor uenighed. Det blev dog fremhævet af alle debattørerne, at matematikken var et glimrende middel til træning af formel logisk tænkning og behandling af stoffet.

I 1914 udkommer en beretning om undervisningen i gymnasieskolen (4), udarbejdet af den daværende undervisningsinspektør S.L.Tuxen. Her siges det, at den nye skoles opgave (efter 19o[illegible]) er at sætte det konkrete i højsædet i modsætning til det formelle. Om selve matematikken udtaler hans faglige medhjælper professor T. Bonnesen:

Om mellemskolen: "Når det kommer til at glippe med forståelsen for mange elevers vedkommende, turde det ligge i, at man har misforstået den psykiske proces, hvorved man indlever sig i et stof som geometrien. Man har da også ved enkelte skoler gjort forsøg på at ændre undervisningen i overensstemmelse med disse synspunkter. Geometrien former sig da til en begyndelse som en erfaringsvidenskab ligesom fysikken....
den skitserede fremgangsmåde, som også har sat sig spor i lærebogslitteraturen, har den fordel bestandigt at sætte eleverne i virksomhed, og det viser sig, at de derved vinder betydelig interesse for arbejdet. Den udvikling som deres tænkeevne på denne måde undergår, gør begynderundervisningen i geometri til en af de mest lønnende opgaver indenfor matematikkens pædagogik."

Gymnasiet,de sproglige linier : "En af de største vanskeligheder fremkommer derved, at eleverne glemmer de enkelte teorier i tidens løb, så meget mere som de ikke kan vedligeholdes ved opgaveregning. Man må da søge i så høj grad som muligt at gøre stoffet til en enhed ved at bygge de enkelte teorier op på et fælles grundlag, og dette grundlag må være så anskueligt, og derved så let forståeligt og let at huske som muligt....et middel hertil har man i den grafiske fremstilling."

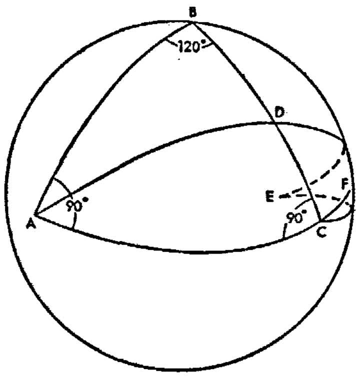
<u>Den matematisk-naturvidenskabelige linie:</u> "Den elementære geometri er under den nye ordning trådt noget i baggrunden, og særligt gælder det om de geometriske konstruktionsopgaver. Hvor udviklende disse opgaver end er for den matematiske opfindsomhed, vil det ikke være på sin plads længere at lade dem optage så megen tid inden for undervisningen som tidligere, og det synes ikke rimeligt at anvende Julius Petersens "metoder og teorier" i gymnasiet. <u>Det bliver da navnlig i stereometrien at den egentlige geometriske udvikling må foregå.</u> (vores fremhævelse)

Imidlertid er det ikke kun ved disse beretninger vi kan få et indblik i, at undervisningens indhold diskuteres meget i denne periode. Professor Hjelmslev udgiver i 1916-26 5 geometribøger (5) der virkelig sætter geometriundervisningen til debat. Hjelmslevs bøger introducerer begrebet virkelighedsgeometri, der handler om virkeligt forekommende geometriske størrelser (kanter på borde, virkelig rette vinkler etc.) .Fabricius-Bjerre (1) sammenfatter sit syn på virkelighedsgeometrien ved at sige:

" Virkelighedsgeometrien er en realvidenskab, og har den for realvidenskaber karakteristiske ejendommeligheder. Dens resultater findes bl.a. ved forsøg, og de gælder kun i et bestemt erkendelsesområde. Forsåvidt sætningerne formuleres matematisk skarpt, gælder de kun med tilnærmelse i virkeligheden."

Det er indlysende, at virkelighedsgeometrien har store pædagogiske fordele ved undervisningen, og vi vil senere i kapitel 5 afsnit 4 nærmere beskrive professor Hjelmslev bøger.

Hvis vi ser på de faktiske ændringer der indtræder ved 1935-ordningen, er det dog ikke noget der får betydning for selve undervisningsindholdet og metoderne i geometriundervisningen.



<u>1935.</u>

Den 13 oktober 1928 nedsatte Undervisningsministeren et udvalg til drøftelse af reformer vedrørende det højere skolevæsen.

I et udkast til en bekendtgørelse for bl.a. undervisningen i matematik siges det:

" Formålet for undervisningen er at bibringe eleverne de forestillin-

ger, som ligger til grund for vores opfattelse af tal og rum, at gøre dem fortrolige med matematiske betragtningsmåder og at give dem midler til at uddybe deres forestillinger på områder, hvor matematikken kommer til anvendelse.
Endvidere skal eleverne lære at arbejde med det matematiske formelapparat og opnå sikkerhed og færdighed i numeriske beregninger, alt inden for de rammer, som fastsættes ved nedenstående krav."

Udkastet bliver aldrig realiseret, men kommer dog til at præge en anden betænkning-der udkommer 14/09-33-stærkt. Denne betænkning giver et forslag til en anordning for gymnasiets linier, der er næsten identisk med den faktisk realiserede anordning af 9. marts 1935. I denne siges det om matematikkens formål:

Sproglige linier.

" Formålet med undervisningen er at give eleverne kendskab til vigtige anvendelser af matematikken. Af de teoretiske afsnit medtages så metages så meget, at dette formål opfyldes."

Dette er en meget vigitg ændring siden 19o6-ordningen, hvor professer Gertz netop siger det stik modsatte: Argumentet for at de sproglige skal have matematik er ikke at de skal kunne anvende dette, men at de skal træne tanken, og derfor skal der lægges vægt på de teoretiske aspekter.

Matematisk-naturvidenskabelig linie.

"Formålet med undervisningen er at give eleverne kendskab til de reelle tal og disses anvendelser til beskrivelse af funktioner, samt kendskab til simple figurer såvel i planen som i rummet.
Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske formelapparat, og opnå sikkerhed og færdighed i numeriske beregninger."

Ser vi på den konkrete undervisning, indgår geometrien nu som en noget mindre del af matematikundervisningen. For de sprogliges vedkommende undervises i analytisk geometri,for mat-nat linien udbygges dette tillige med stereometri. Undervisningen har været præget af omverdensbevidsthed og i noget mindre grad af omverdens rumbeherskelse.

Tiden 1935-53.

Den 14. maj 1948 nedsatte undervisningsministeriet et udvalg, der skulle afgive en betænkning angående begrænsning af læse-og eksamenspensa til studentereksamen. Heri hedder det om de sproglige linier:

" Det er udvalgets opfattelse, at skal der hidføres en ændring i den ulige tilgang til gymnasiets linier, må man tilstræbe en koncentration af de sproglige linier omkring de humanistiske hovedfag og samtidig søge at skabe en lettelse i arbejdsvilkårene. Under udvalgets drøftelser om liniens fremtid har de sprogliges

matematikundervisning tidligt været fremdraget. Ved 1935-ordningen blev matematikundervisningen på de sproglige linier afgørende ændret.Fagets timetal blev nedskåret med to timer, og der afsluttes nu med en prøve i anden gymnasieklasse. Denne reduktion af timetallet var fremkaldt af hensynet til at give eleverne på de sproglige linier et bedre fysisk-kemisk grundlag for undervisningen i naturfag, og omlægningen af matematikundervisningen efter det mindre timetal betød, at man i nogen grad måtte renoncere på fagets almenpædagogiske side og mere lægge vægt på visse vigtige anvendelser af matematikken i det praktiske liv. Uden at underkende matematikundervisningen, som den siden har været praktiseret, er det den overvejende opfattelse i udvalget, at den føles utilfredsstillende blandt eleverne, og man stiller sig tvivlende overfor den praktiske værdi af det udbytte, eleverne får af den.
Idet udvalget således har beskæftiget sig indgående med muligheden for en stabilisering af de sproglige linier og har set et middel hertil i et forsøg på en koncentration af de humanistiske hovedfag, er den tanke derfor naturligt opstået helt at lade matematikken på de sproglige linier bortfalde."

Betænkningen får faktisk den indflydelse, at matematikken bortfalder på de sproglige linier fra og med 53-ordningen. For selve matematikken sker en opsplitning i punkter, hvoraf en del kan henføres til den tidligere geometri, men der gives efter 53-ordningen ingen samlet fremstilling af geometriske emner.

Tiden 1958-79.

I forbindelse med 58/61-ordningen indføres der igen matematik på de sproglige linier,men uden undervisning i geometri. Genindførelsen skyldes bl.a. medicin, var nødt til at tage et matematikkursus for at kunne komme til at studere.
I 58/61 ordningen indføres mængdelæren. Denne nye enhedsmatematik stødte geometrien det sidste stykke ud i mørket.

Fra 1971 og frem til i dag findes analytisk plangeometri kun på de matematiske grene. Læren om rummets egenskaber er forsvundet.

Konklusion.

I perioden før 185o har man undervist i geometri for at skærpe elevernes tænkeevne, det vi klader punkt. 4.
I perioden fra 185o-1935 kan man samlet sige, at de formaldannende aspekter trænges tilbage til fordel for at give eleverne nogle redskaber, altså inddragelse af mere praktiske emner. Specielt i den sidste del af perioden (19o6-1935) bliver udviklingen af rumsansen mere afgørende uden at det dog ligefrem bliver undervisningens hovedformål.
I 1935 siges, at det for matematikerne er vigtigt at styrke rumsansen, mens det for de sproglige drejer sig om at vise vigtige anvendelser af matematikken.
I 1953 nævnes det på samme måde at undervisningen skal styrke elevernes rumsans (49-betænkningen), men det siges også, at arbejdet med matematikken skal udvikle og skole elevernes evne til stringent og prægnant udtryksform.
I 58/61 hedder det i 6o-betænkningen om formålet med matematikundervisningen at eleverne skal indleve sig i karakteristiske sider af matematisk metode, samt vække elevernes sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelsen. Desuden skal den søge fantasi og opfindsomhed udviklet.
Udviklingen af rumsansen eller for den sags skyld skærpelsen af elevernes tænkeevne er således ikke mere explicit et mål med undervisningen i geometri, og det på trods af at der dog stadivæk er rumgeometri på mat/fys-linien.
I 1971 indføres også på mat/nat og mat/sam-linierne den analytiske geometri som mat/fys hele tiden har haft, men som de to andre linier ikke fik med ved oprettelsen i 58/61. Ved samme lejlighed fjerner man imidlertid rumgeometrien fra mat/fys, så udviklingen af elevernes rumsans kan næppe siges, at være et formål med matematikundervisningen mere

Sammenfattende må det således siges, at formålet med undervisningen i geometri i begyndelsen helt klart var at skærpe elevernes tænkeevne, senere skærpelsen af tænkeevnen og praktiske anvendelser, og senere igen var det udviklingen af elevernes rumsans som blev det centrale inden undervisningen i geometri blev skåret kraftigt ned og begrænset til de dele af geometrien, som har betydning for andre dele af matematikken.

4. GEOMETRIDEBATTEN.

Hovedsynspunkterne for at indføre geometriundervisning i skolen, er følgende fem argumenter, som vi nærmere omtalte i kapitel 3.4:

1 : Omverdens- rumbevidsthed/orientering.
2 : Omverdens- rumbeherskelse.
3 : Illustrering af matematiske processer.
4 : Træne logisk sans
5 : Æstetiske kvaliteter.

Vi vil i det følgende gennemgå en række matematikeres synspunkter på geometriundervisning, særligt i forhold til ovenstående fem hovedpunkter.

Karl Schmidt, Danmark 189o :

Karl Schmidt (15) hævder i 189o, at den væsentlige mening med matematikken (som på det tidspunkt i høj grad var synonymt med geometrien) er at give eleverne logisk dannelse, idet han siger:

> " Jeg nærer den anskuelse, at det først og fornemmelig er den logiske dannelse det gælder om at bibringe eleverne."

Herudover beskæftiger Karl Schmidt sig ikke i artiklen med noget, der med rimelighed kan siges at være meninger specifikt om geometriundervisningen.

Johannes Mollerup, Danmark 19o3 :

Johannes Mollerup (13) plæderer i 19o3 primært og utvetydig for pkt. 4, den logiske evne. Han siger bl.a.,at

> " den+, omtrent alene, varetager en uundværlig udvikling af elevernes logiske evne, idet den forbereder dem til ræsonnementer, der dagligt forefalder i livet."

Mollerup fremhæver i den forbindelse, at man skal søge at forøge fagets logiske sammenhæng, han siger bl.a. om geometriundervisningen...

> "..der altfor meget lider under, at man ikke opstiller det system af grundsætninger, hvoraf man ved et endeligt antal slutninger når til sætningerne.."

Senere siger han:

> "Altfor ofte træder en fysisk sansning til hjælp."

Her underforstået hjælp til at forstå geometriske sætninger. Mollerup nævner selv længere fremme i artiklen hvor højt han prioriterer evnen til logiske ræsonnementer, idet han siger:

> " De (studerende) skal blot lære at ræsonnere så skarpt og nøjagtigt som muligt, medens det deriomd er ligegyldigt, om de når så eller så vidt, og om de kender den eller den sætning."

Disse citater, og artiklen iøvrigt gør det klart, at Mollerup også er fortaler for pkt. 3 Han afslutter blandt andet med en kritik af de på markedet værende geometribøgers ufuldstændighed, med at foreslå, at man grundigt studerer Euklids elmenter.

+matematikken, men senere i artiklen pointerer han, at han i denne sammenhæng især tænker på undervisningen i geometri.

T. Bonnesen, Danmark 19o5 :

T. Bonnesen (11) er i sin udtalelse "om matematikundervisningen i fremtidens gymnasium" meget indholds/pensumrettet, men alligevel er det både muligt og rimeligt, at tillægge Bonnesen de i det følgende omtalte synspunkter angående geometriundervisningen. Der er således intet som tyder på, at Bonnesen lægger vægt illustrering af matematiske processer, logisk sans eller æstetiske kvaliteter ved hjælp af Euklidisk geometri eller anden geometri. Stereometri og projektionstegning anser Bonnesen imidlertid for væsentlige emner, og han siger bl.a. et sted, at

" man ikke helt kan forbigå rumsansen"

altså pkt. 1. Egentlig rumbeherskel[illegible]omtales ikke. Bonnesens hovedsynspunkter går mest på en prakti[illegible]vendelig matemati[illegible], f.eks. siger han, som tidligere citeret:

" Matematikundervisningen har kun værdi, men da også en ganske overordentlig stor værdi, ved den rolle, matematikken spiller i det praktiske liv, og kun ved at fremdrage anvendelserne som det væsentlige, vil det være muligt at udvikle den rette forståelse og interesse hos eleverne."

Bonnesen mener iøvrigt at denne forståelse for en praktisk anvendelse, bedst indføres ved anvendelsen af funktionsbegrebet og grafiske afbildninger.

C. Godfrey, Storbritanien 191o :

C. Godfrey har forelæst over et af det engelske undervisningsministerium udsendt cirkulære om undervisningen i geometri fra omkring 191o (19), og artiklen er et referat af denne forelæsning. Godfrey er tilsyneladende i meget høj grad enig med de tanker, som udtrykkes i cirkulæret, og enigheden manifesterer sig bl.a. i enighed om betydningen af pkt. 3,4 og delvis 5. Det er den euklidiske geometri, som der tænkes undervist i, men de af Euklid opstillede axiomer (postulater) forkastes, og istedet sættes nogle andre, som nok bedst kan beskrives med flg. citat:

"..and the essential thing in regard to them is not to analyse them and reduce themto the minimum number of axioms, but to present them in such a way that their truth is as obvious and real to the pupil as the difference between white and black."

På dette nye grundlag skal den, på den tid, sædvanlige række af theoremer fra den euklidiske geometri bevises, som de siges i cirkulæret:

"..rigid deductive proof on the basis of the fundamental propositions defined above must be insisted upon."

Godfreys mening om geometriens evne til at træne den logiske sans, fremgår af følgende citat:

"One man who has no geometry may reason correctly. But a course of geometry would have trained him in the use of a particular logical form."

At Godfrey anser de æstetiske kvaliteter for væsentlige fremgår af følgende citat:

"One Euclidean ideal has been sacrificed, and we may regret it: The aesthetic ideal of developing the great structure of geometry by pure logic from the minute germ of Euclid's axioms."

Punkterne 1 og 2 omtales faktisk ikke, bortset fra at Godfrey nævner, at udviklingen af teorien i forbindelse med tegning af geometriske figurer er essentielt.

C.J.L. Wagstaff, Storbritanien 1917 :

Wagstaff (2o) taler skarpt for, at afskaffe den euklidiske geometriundervisning, som stort set var enerådende i England på den tid. Wagstaff ønsker imidlertid ikke at erstatte den euklidiske geometriundervisning med en anden geometriundervisning, han vil bruge den frigjorte ledige kapacitet til at lære eleverne noget nyttigt, og i denne forbindelse foreslår han praktisk mekanik. Han siger bl.a.:

" The ordinary learns nothing from geometry and regards it as pompous rubbish."

Med hensyn til træning af den logiske sans(pkt.4) siger han:

" We tell ourselves that geometry is excellent training in reasoning and logic, but other branches of mathematics give the same training in much more instructive and usefull form. And further, geometrical reasoning is of such a particular kind and based on such restricted premises as to be useless in our dayly life. We have no special confidence in the judgment of a geometrician in questions of practical politics."

J. Dieudonné, Frankrig 1961 :

I sin artikel (6) beskriver Dieudonné hvad han som universitetslærer kunne tænke sig at gymnasiegeometriundervisningen indeholdt. Han argumenterer klart for pkt. 1, og mindre klart for pkt. 2, idet han bl.a. siger (§149):

> "..it is one of the main tasks of secondary schools
> to train and develop the intuition of space in students."

Dieudonné taler også for pkt. 3, for som han siger, bør geometrien fremstilles logisk korrekt og i dens rette logiske ramme. Hans middel er imidlertid ikke den euklidiske geometri, men den analytiske (lineær algebra og vektorregning). Han siger rent ud: "Euklid must go", og som argument herfor nævner han, at den euklidiske geometri er ude af trit med, hvad moderne matematikere arbejder med. Dieudonné mener videre, at udgangspunktet for geometriundervisningen skal være væsentlige grundbegreber som ifølge D. passende kunne være vektorer. De i den euklidiske geometri meget ofte forekommende trekanter har kun interesse for enkelte specialområder. Han underkender imidlertid på ingen måde den betydning, som det euklidiske værktøj har haft, men mener, at vi bør udnytte de "værktøjer", som den moderne matematik har skabt. Disse værktøjer sætter os bl.a. i stand til at fremstille geometrien logisk korrekt inden for rammerne af lineær alegra.

Budden/Wormell, Storbritanien 1964 :

F.J. Budden og C.P. Wormell (16) argumenterer for alle fem hovedsynspunkter med varierende styrke. Med hensyn til punkterne 1 og 2 siger de bl.a.:

> "Geometry develops spatial intuition"

Dette uddyber de et andet sted, hvor de siger:

> "The most important result of good mathematics teaching
> is the incalculation of this mathematical 'way of looking
> at the world' rather than the acquisition of a particular
> set of manipulative skills. Surely the chief way to teach
> this way of looking at the world is to <u>look</u> at the world!
> The primary task of school mathematics is therefore sure-
> ly a thorough study of elementary spatial relationships."

Angående pkt. 3 og (måske knapt så klart) 4, siger Budden og Wormell blandt andet: "Another important part of the case for elementary geometry is, of course, the exercise it provides in elementary rigour. It is just because the pupil can take the intelligibility of the propositions for granted, that he can concentrate on their logical connections. In other words it is precisely because Euclidean logic is a naive that it is so valuable as an initial training in the art of clear thinking." Et andet sted siger de det måske endnu klarere:

> "Geometry provides an unrivalled field for the exercise of
> elementary deductive argument".

Budden og Wormell værdsætter tillige de æstetiske kvaliteter, hvilket fremgår af følgende to citater:

> " Geometry, when properly taught, has great aesthetic appeal. This aesthetic appeal can play a great part in inspiring students with a love of mathematics."

Og lidt mindre bombastisk:

> " There is a very real aesthetic pleasure to be obtained from accurate geometrical drawing."

Budden og Wormell mener, at hele diskussionen angående geometriens placering i læseplanerne for matematik i virkeligheden drejer sig om hvorvidt man ønsker en læseplan baseret på algebra eller ènbaseret på geometri. Som man måske allerede har bemærket af de foregående citater, mener de ikke , at man blot kan udstyre eleverne med et værktøj (algebra) og forvente, at brugen af det lærer dem ret meget om matematik. Budden og Wormell bruger således størstedelen af et kapitel på at imødegå Dieudonné's indlæg ved Rayaumont-konferencen (O.E.C.D. 1959),se (18), hvor han som tidligere nævnt proklamerer: "Euklid must go!". til fordel for lineær algebra.
Den elementære "rene" geometri de forestiller sig er imidlertid ikke Euklids elementer, men som de siger:

> "..the logical processes involved in doing elementary pure geometry by the best modern methods."

<u>Carl B. Allendoerfer, USA 1969 :</u>

Allendoerfer giver (28) i sin artikel nogle forslag, nærmest et beslutningsgrundlag, til lærere, som ønsker at bibeholde geometri som et friskt, levende og interessant fag. Allendoerfer argumenterer for pkt. 1 og 2, idet han bl.a. siger om hovedformålet med geometriundervisningen i skolen:

> " An understanding of the basic facts about geometric figures in the plane, and geometric solids in space."
>
> "An introduction to imaginative thinking."

Allendoerfer argumenterer desuden for pkt. 3, idet han dog siger, at det kun skal med hvis det ikke bliver tilgodeset i forbindelse med andre dele af matematikken, og <u>hvis</u> det skal med, da kun i begrænset omfang, således at det, som han siger, giver: "An appreciation of the deductive method."
Endelig mener Allendoerfer, at geometri skal integreres i resten af matematikken, han siger bl.a. herom:

> "Integration of geometric ideas with other parts of mathematics. Geometry should not be isolated from algebra and anlysis, with its separate content and method, but should become an essential part of the mainstream of modern mathematics."

Bent Christiansen, Danmark 1972:

B. Christiansen (17) argumenterer tilsyneladende nærmest for pkt. 1,2 og 3. Han fremhæver således, at undervisningen i geometri skal bidrage til erkendelse af deduktionens fremtrædende rolle i matematikken, men at den dog ikke bør indtage nogen særstilling. En illustration af hvorledes en axiomatisk opbygning af geometrien ville kunne foretages, kræver ifølge B.C. forudgående støtte og erfaring fra den øvrige undervisning. B.C. fremhæver desuden, at der bør bruges mere tid på begrebstilegnelse og problemløsning, og mindre på reproduktiv indlæringaf beviser i tilknytning til deduktive forløb (men altså nogen tid må man vel antage). Undervisningen bør indledes med en beskrivelse af den "fysiske virkelighed", og først senere bør den blive til genstand for teoretiske overvejelser. Til slut fremhæver B.C., at geometriundervisningen som mål bør have at lade matematikkens øvrige emner komme til erkendelse gennem geometriens iklædninger.

T.J. Willmore, USA 197o :

Willmore (14) beskæftiger sig mere med hvilke typer geometri man bør undervise i på de forskellige stadier af et undervisningsforløb, end med hvorfor man bør undervise i geometrierne. Han mener således, at der i geometriundervisningen i skolen bør lægges væsentlig mere vægt på anvendeligheden af den analytiske geometri.

Der kan dog næppe være tvivl om, at Willmore anser pkt. 1 og delvis pkt. 2 for væsentlige, han siger bl.a.:

> "The main emphasis in this type of training should be on encouraging a geometrical way of thinking"

samt:

> "..helping children to develop geometrical intuition so that they can give full reign to their imagination."

Willmore anser næppe heller pkt. 3 for uvæsentligt for han siger, at man skal søge at opnå følgende ved undervisning i geometri:

> " To give our students some idea of the nature of euclidean geometry, and the nature of the axioms on which it is based."

John C. Egsgard, USA 197o :

Egsgard argumenterer for punkterne 1 og 2, men fremhæver dog eksplicit, at geometriundervisningen ikke skal bruges til studiet i bevisførelse. Undervisningen bør derimod være studiet af rumlige forhold af enhver art.t. Egsgard beskæftiger sig dog primært med undervisningen på de første klassetrin. Det fremgår imidlertid ikke helt klart hvilken type geometri han ønsker undervist i(og hvordan), men han nævner, at geometriundervisningen bør strække sig over hele det øvrige undervisningsforløb. Han siger videre et sted:

> " The proper approach to geometry consists in doing, discovering and building up experience. Inevitably this will lead from the particular to the general finally to proof."

Egsgard uddyber ikke dette, men han fortsætter med at fremhæve, at siden geometri ikke begyndte, og ikke endte med Euklid, må andre typer geometri fremhæves.

RenéThom, Frankrig 1971:

Thom (26) argumenterer for pkt. 1 og 2 og mod axiomatisering, idet han siger :

> " Axiomatization is the work of specialists and has no place in secondary or college teaching except for those professionals specializing in the study of foundations."

Herudover beskriver nedenstående citater vist i hovedtrækkene René Thom's position i debatten:

> "Only those topics which have a quality of 'play' have educational value, and of all such games, Euclidean geometry, with its constant references to underlaying intuitively understood fundamentals, is the least gratuitous and the richest in meaning." (gratuitous = vilkårlige/umotiverede)
>
> " Exaggerating only sligthly, one can say that any question in algebra is either trivial or impossible to solve. By contrast, the classical problems of geometry present a wide range of challenges."
>
> "Geometry is a natural and possibly irreplaceable intermediary between ordinary language and mathematical formalism."

Marshall Stone, USA 1971/72 :

Stone (21) argumenterer lidt underforstået for pkt. 1 og 2, men han foreslår en axiomatisk-deduktiv flytningsgeometri. Stone siger i forbindelse med afvisningen af en axiomatisk geometriundervisning, som i høj grad er baseret på algebra, at

> "..it deprives the child of the personal experience of gradually conceptualizing and formalizing in meaningful mathematical terms his deep intuitions of space."

Ifølge Stone bør ældre elever(16-17 år) kende til anvendelsen og betydningen af en axiomatisk fremgangsmåde, dvs. pkt. 3.Han siger herom:

> "..there is a definite advantage in being able to focus any general discussion a particular way of developing Euclidean geometry from a specific set of axioms."

og senere:

> "..by the 10^{th} grade students should be prepared to understand the strategy and the significance of the axiomatic approach..".

Karl Menger, USA 1971 :

Menger (23) argumenterer for pkt. 3 og 4. Menger's position i debatten kan formodentlig bedst illustreres med følgende tre citater, som meget præcist gør rede for Menger's synspunkter:

> " What I wish to emphasize in this paper, however are applications of a totally different kind, namely applications to reasoning in general."
> "The way to achieve these these aims is to abandon the idea of teaching euclidean geometry in its entirety and to present only a part or a aspect of euclidean geometry,-but that part or aspect with absolute rigor.."
> "I actually believe that such a course will, when competently taught, implant in students more deductive methodology than they could get from a first course in logic."

Som det fremgår, anser Menger den klassiske geometri for at være et særdeles velegnet værktøj til at skærpe elevernes logiske sans. Hans argument for at f.eks. lineær algebra eller analytisk geometri ikke har de samme egenskaber er, at deres aksiomssystem ikke er simpelt nok. Han nævner endvidere, at man i denne undervisning bør lægge vægt på kvaliteten fremfor kvantiteten, men at et fuldstændigt kursus i geometri også skal indeholde elementer af ikke-euklidisk geometri.

Andre Revuz, Frankrig 1971/72 :

Revuz (22) argumenterer implicit for pkt. 1 og 2. Han mener imidlertid ikke, at der skal undervises i geometri som selvstændigt emne. Geometri bør istedet indgå overalt og på alle alderstrin. Han siger herom:

> "Intuitive space must not be neglected at any stage of education."

Undervisningen bør derfor starte på et meget tidligt tidspunkt (børnehave), fordi man skal hjælpe børnene, som på dette tidspunkt har en veludviklet opfattelse af rummet, en opfattelse som ellers ville gå tabt, til den rigeste mulige konkrete opfattelse af rummet. Geometriundervisningen bør i følge Revuz omfatte flere forskellige geometriske modeller. Som følge heraf vil eleverne ikke altid opfatte geometrien som en afspejling af virkeligheden. Revuz mener dog at man i videst mulig omfang bør tage udgangspunkt i det virkelige rums egenskaber.
Revuz argumenterer desuden for pkt. 3, idet han siger:

> "..a totally deductive treatment of geometry can't take place before the age 15-16."

Det betyder dog ikke, at Revuz mener, at en hvilken som helst form for deduktion skal være forbudt inden denne alder.

Seymour Schuster, USA 1971:

Schuster (24) argumenterer for pkt.1 og 2, imod pkt. 3 og 4. Schuster mener bl.a. at centreringen om den formelle struktur i geometrien er en alvorlig fejl, som har givet nogle uheldige resultater, bl.a. følgende:

1) Programmet er ikke blevet opfyldt, dvs. målet med undervisningen i den formelle struktur via geometrien er ikke blevet nået.

2) Der er blevet lagt så meget vægt på aksiomatiseringen, at der ikke har været mulighed for at behandle anvendelserne tilstrækkeligt.

3) Der er ikke blevet lagt vægt på geometri i tre eller flere dimensioner.

I forbindelse med pkt. 3 bemærker Schuster:

" It should be recognized that students are being robbed at a crucial time in their lives of the practice of reasoning about space and developing the intuition necessary for the analysis of higher-dimensional problems of science and mathematics."

Schuster mener, at man skal lade være at undervise i "axiomatik" ved hjælp af geometri og i stedet forsøge at relatere geometrien til naturvidenskaber og den fysiske virkelighed. Desuden bør læseplanerne ændres, således at undervisningen kommer til at bestå af mange forskellige teknikker til løsning af geometriske problemer. Selve problemet med at lære aksiomatik bør spredes ud over hele læseplanen. Schuster mener, at algebra kan være med til at bære byrden. Desuden foreslår Schuster, at eleverne præsenteres for bestemte aksiomatiske områder af matematikken, dvs. aksiomatiserede dele af matematikken. En fuldstændigt aksiomatisk opbygning af den euklidiske geometri inden for rammerne af lineær algebra stiller Schuster sig meget skeptisk over for, specielt fordi det vil kræve en i forvejen opbygget geometrisk forståelse.

J. V. Armitage, Storbritanien 1973 :

Armitage argumenterer hovedsageligt for 3, men også for 1,2 og delvis 4. Han foreslår at undervisningen skal indeholde aksimatisk-deduktivt materiale, og siger bl.a.:

" Mathematics is an attractive subjekt because it is difficult. Obstinacy and the ability to concentrate are a necessary part of the equipment of a mathematician and, in other contexts, they are desirable qualities for life in general. Geometry is a good discipline in which to encounter difficulties for the first time, because its problems lend themselves to pictorial exploration and investigation , and that combination of intuition and logic which is of the essence of mathematics."

Armitage mener desuden, at geometri er af stor indlæringspsykologisk værdi fordi vi søger at lære ved opdagelse, og derfor er det nødvendigt med en spil-lignende aktivitet og i den forbindelse er geometri bedst, da der konstant refereres til vores intuitive opfattelse af rummet, og det er noget af det mindst kunstige/abstrakte i matematikken. Armitage konkludere i sit forsvar for en aksiomatisk-deduktiv geometriundervisning:

-at den geometriske fornemmelse er afgørende i matematik

-at den formelle behandling af de introducerede begreber viser matematikernes matematik for eleverne på en måde, som ingen andre elementære emner kan.

Som argument for at undervisningen skal omfatte pkt. 1 og 2 siger Armitage:

"Geometrien er en deduktiv videnskab om det fysiske rum."

Hermed mener han, at geometrien er velegnet til at give eleverne en rumforståelse og en beherskelse af rummet.

Bruce E. Meserve, USA 1977 :

Merserve (12) passer ikke alt for godt ind i rammerne af hovedsynspunkterne, idet hans artikel i høj grad består af en opremsning af andres citater, hvorved hans egne synspunkter i nogen grad går tabt. Der er dog ingen tvivl om, at Meserve mener, at geometri skal bruges som indgang til matematik på ethvert niveau. Videre finder Meserve, at geometri bør indgå i alle matematiske sammenhænge, således at den ikke optræder isoleret i undervisningen. Han siger bl.a. herom:

" Geometry is an essentiel part of the study of mathematics at any level and a vital catalyst for effective use or study of any branch of mathematics."

Meserve præciserer ikke nøjere hvilke typer geometrier som skal tjene ovenfor anførte mål, men en sådan geometriundervisning skal i hvert fald ifølge Meserve omfatte såvel syntetisk som analytisk geometri. Meserve lægger desuden vægt på et begreb, som han kalder geometrisk intuition. Konkluderende vil vi derfor, med et mindre forbehold, antage at Meserve er fortaler for pkt. 1,2 (mindre klart) og 3.

Sammenfattende og konkluderende bemærkninger

Af den skematiske oversigt på næste side kan man se, hvordan de enkelte forfattere fordeler sig på hovedsynspunkter. Af skemaet kan man se, at der med tiden er blevet lagt stadig større vægt på rumbevidstheden og rumbeherskelsen (pkt. 1 og 2). Et nøjere studium af skemaet eller i hvert fald en gennemlæsning af de omtalte artikler og bøger gør det klart, at der generelt er blevet lagt mere vægt på rumbevidstheden end på rumbeherskelsen, i det omfang det har været muligt at adskille og overhovedet er blevet omtalt.

Forfatter	natio-nalitet	udgi-velses-år	1	2	3	4	5	6	bemærkninger
Karl Schmidt	DK	189o	-	-	-	x	-	-	andre meninger end 4 mulige, se artikel
Johannes Mollerup	DK	19o3	-	-	x	x	-	-	
C. Godfrey	GB	191o	-	-	x	x	x	-	forelæser over et cirkulære
T. Bonnesen	DK	19o5	x	-	-	-	-	-	meget pesumrettet
C.J.L. Wagstaff	GB	1917	-	-	-	÷	-	x	
J. Dieudonné	F	1961	x	(x)	x	-	-	-	lineær algebra
Budden/Wormell	GB	1964	x	x	x	(x)	x	-	imod Dieudonné
C.B.Allendoerfer	USA	1969	x	x	x	-	-	-	geometri integreres i al matematik
B. Christiansen	DK	1972	x	x	x	-	-	-	
T.J.Willmore	USA	197o	x	x	x	-	-	-	
John C. Egsgard	USA	197o	x	x	-	(÷)	-	-	
René Thom	F	1971	x	x	÷	-	-	-	
Marshall Stone	USA	71/72	x	x	x	-	-	x	
Karl Menger	USA	71/72	-	-	x	x	-	-	
Seymour Schuster	USA	71/72	x	x	÷	÷	-	-	
J. V. Armitage	GB	1973	x	x	x	(x)	-	-	
B. Merserve	USA	1977	x	(x)	x	-	-	(x)	

Forklaring til skemaet:
1= rumbevidsthed,2=rumbeherskelse,3=illustration af matematiske processer,4=
logisk sans,5=æstetiske kvaliteter,6=geometri skal ikke være selvstændigt emne.
x = argumenterer klart for
÷ = argumenterer klart imod
(x)= argumentationen er ikke helt klar, men af sammenhængen må det antages,at vedkommende er fortaler for punktet
- = forfatteren beskæftiger sig ikke med punktet.

Det lader til, at geometriens rolle som illustrator af matematiske processer i geometridebatten overraskende nok har holdt sig stort set uændret fra begyndelsen af dette århundrede og til i dag, og det bør desuden bemærkes, at det sammen med punkt. 1 og 2 er det argument, som har været anvendt hyppigst. Det må dog retfærdigvis nævnes, at René Thom og Seymour Schuster i deres artikler fra 1971, har argumenteret imod dette punkt.
Med hensyn til pkt. 4, træningen af den logiske sans, ser man tydeligt, at dette argument, som var så fremtrædende i begyndelsen af dette århundrede, stort set er forsvundet i dag. Det er kun Karl Menger som indtager dette synspunkt. Et blik på skemaet på forrige side lader ane, at det er rumbevidstheden og beherskelsen som er trådt istedet, som det hyppigst anvendte argument for at have geometri med på skemaet.
De æstetiske kvaliteter, som vel især den euklidiske geometri menes at besidde, er enten ikke blevet anset for et særligt vægtigt argument eller også er det simpelthen aldrig blevet sat særligt højt, da kun to af de atten forfattere forfægtier dette synspunkt.
Der er ligeledes kun 2,5 (!) forfattere som mener, at der ikke bør undervises i geometri, som et selvstændigt emne. Wagstaff mente i 1917, at der slet ikke skulle undervises i geometri,men det var den euklidiske geometri, som på det tidspunkt undervistes i England. Revuz mener at geometri bør indgå i undervisningen af andre emner. På den baggrund er det muligt at konkludere, at alle forfattere mener at der skal undervises i en eller anden type geometri under en eller anden form.

Der er et tydeligt tidsmæssigt hul i skemaet mellem 1917 og 61. Uden på nogen måde at ville hævde, at vores liste af debattører er fuldstændig for perioden,er det alligevel rimeligt at tro på, at perioden har været ret død geometridebatmæssigt set, idet der nok er henvisninger til andre bøger/artikler fra denne periode i det hidtil omtalte materiale, men især debatmæssigt set er det tyndt i forhold til hvad der er i perioden før 192o og efter 196o.

5. GEOMETRI SOM PÆDAGOGISK REDSKAB.

5.1 Elevforudsætninger for matematikundervisningen.

Gymnasiets traditionelt finkulturelle orientering på den ene side og den kraftige udvidelse af elevtallet, der er sket i 60'erne og 70'erne på den anden side, har skabt problemer i gymnasiet specielt vedrørende det faglige indhold, opdelingen i fag, timetallet og disciplinære forhold.
Den kraftige udvidelse af elevtallet, svarende til en tredobling fra 20.000 til 60.000 (34), er nemlig først og fremmest sket ved, at flere elever fra middelklassen har søgt gymnasium og HF, og i noget mindre grad er kommet arbejderklassebørn i gymnasiet. Gymnasielærerne har hidtil i det store hele ikke formået, eller haft mulighed for, at tage tilstrækkelig højde for disse ændrede elevforudsætninger, bl.a. ved at inddrage disse nye elevers anderledes erfaringsbaggrund, som styrende for tilegnelsen af kundskaber og færdigheder.
Gymnasiet er desuden i stadigt stigende grad blevet en almenuddannelse fremfor en universitetsforberedende uddannelse, idet procentuelt færre elever søger en universitetsuddannelse efter eksamen. Dette hænger dog tildels sammen med adgangsbegrænsning, frygten for arbejdsløshed efter endt studium og de elendige økonomiske vilkår for studerende. Ved matematikundervisningen gør der sig det særlige forhold gældende, at undervisningen i 60'erne og 70'erne er blevet mere abstrakt og formaliseret, hvorved mange elever forlader gymnasiet med et i forhold til timetallet ringe udbytte, samt med et mysteficeret forhold til matematik generelt.
Disse problemer ved tilegnelsen af den moderne matematik er dog ikke kun begrænset til gymnasiets 16-19 årige, men diskuteres også for folkeskolen, senest eksempelvis i et særnummer af Pædagogisk Orientering nr. 6-7 1978, hvor man i en række artikler behandler en del af de særlige problemer matematikundervisningen giver anledning til.
Kim Foss Hansen siger i en af artiklerne, "Indlæring i matematik":
Som nævnt indledningsvis når eleverne i skolen ikke til problemløsningsfasen i matematikundervisn ingen, idet man stiller dem over for alt for mange begreber, regler, forskrifter som man mener, at de skal kunne, før det er rimeligt og muligt, at de kan beskæftige sig med problemløsning. Et blik i en hvilken som helst lærebog inden for dette fag bekræfter ovenstående."
I det følgende vil vi diskutere hvorledes matematikundervisningen kunne forbedres i gymnasiet, med særligt henblik på de dele af stoffet som kræver intern matematisk behandling, da vi mener at geometri, her i betydningen visualisering og figurbetragtning, har en vigtig mission hvor anvendelsesaspektet er vanskeligt før begreberne er indlært til brug ved problemløsning.
Diskussionen i det næste afsnit er baseret på, at man i folkeskolen fortsat underviser i de mest simple egenskaber ved den euklidiske plan og rum, såsom trekanter, højder, vinkelsum, cirklen, parallelogram samt areal- og rumfangsberegninger.
Det er ikke utænkeligt, at man i forbindelse med denne diskussion burde tage højde for, at pigers rumopfattelse generelt er dårligere end drenges (ifølge Else Høyrup (35)), men det har vi desværre ikke haft mulighed for inden for de givne (især tidsmæssige) rammer. Denne forskel i rumopfattelsesevne antages at være et produkt af de ting man beskæftiger sig med eller udsættes for som barn, hvor drenge u-

tvivlsomt generelt beskæftiger sig mere med ting, som kan tænkes at styrke deres rumsans. Skolen har tilsyneladende ikke haft held med at udligne denne forskel, f.eks er der efter sigende en i forhold til antallet af kvindelige matematikere, markant underrepræsentation af kvindelige "geometre".

5.2 Fagdidaktiske aspekter af geometri som pædagogisk redskab i matematikundervisningen.

Ordet geometri er farligt at anvende , da det kan tillægges mange forskellige betydninger og derfor vil vi her søge at fastlægge de betydninger, som vi bruger ordet i:

G_1 = intuitivt funderet visualisering og figurbetragtning (stort set teoriløst).

G_2 = Euklid eller Hilbert, syntetisk, axiometisk-deduktivt (eget axiomssystem).

G_3 = analytisk geometri.

G_4 = resultater om det sædvanlige euklidiske <u>matematiske</u> plan eller rum (uafhængigt af teoretiske metoder).

G_5 = det <u>fysiske</u> plan eller rums egenskaber.

Der er ofte to (interne) måder at anskue et matematisk problem på, en algebraisk-analytisk og en geometrisk (G_1). Som eksempel kan vi nævne løsningen af to ligninger med to ubekendte, der ved betragtning af en tegning er "det samme som" at finde to rette liniers skæringspunkt i et koordinatsystem. Det bestemte integral af en funktion kan være det samme som arealet under funktionens graf,ect.
De to anskuelsesmåder forholder sig abstrakt-konkret til hinanden; således at den abstrakte, analytiske understøttes af en konkret geometrisk figur (G_1). Selve illustrationen af den matematiske teori er naturligvis ikke i sig selv en anvendelse af teorien, som indebærer en modelbygning over et givet simplificeret virkelighedsområde (28), men fungere helt internt. Det er med andre ord det intuitive contra det formelle. Det betyder imidlertid ikke, at illustrationen ikke kan have væsentlig betydning for forståelsen af teorien, særligt for de mange elever, hvis baggrund for indlæring af matematik er en meget konkret erfaringsverden.
Det er nemt at konstatere, at i hvert fald de mest anvendte matematiske lærebøger for gymnasiet ikke har gjort noget synderligt ud af visualisering og figurbetragtning (G_1), som et pædagogisk redskab, og dette forekommer måske særligt markant eftersom den formelt-abstrakte måde at anskue andre af matematikkens stofområder på, siden 6o'erne er blevet meget mere almindelig. De matematiske teoriers axiomatisk-deduktive opbygning, og den styrke denne kan give, bliver derfor vanskeligere for eleverne at tilegne sig end nødvendigt.

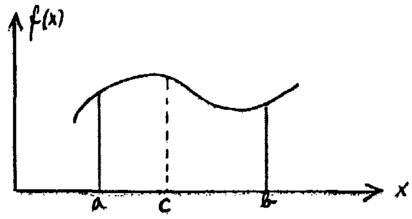
5.3 Geometri som undervisningsobjekt.

Den geometri vi tænker på i denne forbindelse er primært undervisning i egenskaber ved det fysiske plan og rum (G_5) men geometri (G_2) kan også anvendes som illustration af matematiske teorier og metoder, eksempelvis aksiomatiske strukturer i ma-

tematikken, den axiomatiske metode osv.
Geometri i betydningen G_2, G_4 og G_5 er ikke i dag genstand for nogen selvstændig behandling, selvom store dele af stofområdet i matematik kan siges at være analytisk geometri. Men det vigitge i denne forbindelse er imidlertid, at det ikke er planen/rummet der er genstand for betragtning, men de analytiske resultater; således at geometri som G_4 og G_5 på denne måde kun fungerer som en illustration.

Geometriske (G_1) argumenter er primært mere intuitvt forståelige end analytisk-algebraisk, specielt for elever med en meget konkret erfaringsbaggrund. Det kan også nævnes, at undersøgelser har vist (32), at eleverne for en meget stor dels vedkommende kan inddeles i visuelt orienterede og verbalt orienterede i undervisningssituationer,hvilket peger på, at en undervisning der er lagt stærkt an på det verbale forsømmer den ene halvdel af klassen. Foruden den rent visuelle effekt -i retning af at eleverne kan se hvad der se,hvad det er man ønskerat vise eller beregne, er der ofte meget færre begreber involveret i geometri for at forklare det samme, som man forklarer analytisk. Lad os som eksempel nævne beviset for indskudssætningen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



I en almindelig gennemgang af beviset for denne sætning er involveret følgende begreber: interval, integrabel, oversum, undersum, ulighed, delepunkt. Hvis vi ville sige det samme geometrisk (G_1) kan vi argumentere fro (se tegning), at det store areal kan opdeles i summen af de to mindre arealer. Man kan altså ved en umiddelbar betragtning se at sætningen er rigtig, i det tilfælde illustrationen dækker , og dette står i modsætning til den analytiske matematiks meget mindre gennemskuelige kvantificering og beregning.
En undervisning i G_1-geometri vil imidlertid ikke løse problemet om, at vi både vil have eleverne til at forstå hvad vi gør, og sætte dem i stand til at regne på sagerne. Vores overordnede mål med undervisningen er altså G_5. En forskel på en visuel anlagt undervisning (alene) og en verbal algebraisk undervisning (alene) opregnes af Skemp (32) som værende:

Visuel	Verbal-algebraisk
Abstrakte rumlige egenskaber såsom form,position	Abstrakte egenskaber som er uafhængig af en rumlig konfiguration, såsom tal
Sværere at kommunikere	lettere at kommunikere
Kan repræsentere mere individuel tænkning	Kan repræsentere med kollektiv tænkning
Viser struktur	Analytisk, viser detaljer
Samtidig, intuitiv	"Følgeargumentation", logisk

Der er altså fordele og ulemper ved begge ydergrænser, hvorved en undervisning efter Skemps mening bør indeholde en passende balance mellem visuelle og algebraisk-analytiske argumenter.
Vores eget syn på undervisningen i geometri udtrykkes meget godt af Norbert Wiener i følgende citat (3o) om matematikken som helhed:
"Mathematics is an experimental sciense. THe formulation and testting and hypotheses play in mathematics a part not other than chemistry, physics, astronomy or botany. Just as in science of nature, old ways of regarding things are compared, tried against the facts, worn down by mutual attrition, until they take on a new an unfamiliar aspect ".

Geometri kan på det niveau gymnasiets matematikundervisning befinder sig på, blive en disciplin, hvor eleverne kan samle og strukturere de mange matematiske begreber, sætninger og forskrifter på et intuitivt niveau. Samtidigt kan geometrien (G_1,G_4,G_5) være skabende i undervisningen , inspiratoren til nye sætninger og idéer, som senere kan gøres til genstand for logisk analyse. Ved gennemgang af et meget brugt lærebogssystem som Kristensen og Rindung 1-3 (29) får man lyst til at sige som Norbert Wiener:
" Logic is a critic, not a creator, even as regards its own laws of critism. While a man endowed with logic alone would assuredly never do any bad mathematics, he would just as assuredly never do any good mathematics".
Det vi ønsker at sige er, at det ikke tjener noget formål at undervise i euklidisk geometri (G_2) med udgangspunkt i forskellige axiomer, teoremer og sætninger, hvorved man vise diverse kuriøse ting vedrørende geometriske figurer. Hvis geometrien i betydningen læren om egensakber ved det fysiske rum/plan (G_5) skal virke skabende i undervisningen, må vi tage udgangspunkt i elevernes erfaringsverden, og deres opfattelse af rummet/planen.
En dansk matematiker, professor Hjelmslev, har i en række skolebøger(5) søgt at angribe problemerne på en utraditionel måde. Hjelmslev siger i forordet til en af sine bøger:
"Denne elementære lærebog sætter som sit mål, at tilvejebringe et simpelt og naturligt grundlag for al undervisning i geometri i Almenskoler og Fagskoler. Den handler ikke om abstraktioner, men om ting, der hører livets praksis til. Den bygger ikke på postulater, men på <u>erfaringsresultater i deres naturlige form</u>. Og netop derfor søger den at nå den <u>tilknytning til virkeligheden</u>, som både for den geometriske lærebygnings vidensakbelige sikkerhed og for dens praktiske værd er af afgørende betydning". (vores understregninger).
Det karakteristiske ved Hjelmslev's introduktion af matematisk teori og metode er, at han hele tiden forbinder fremkomsten af idéer og sammenhænge ud fra virkeligt forekommende genstande, og tager eksempler fra virkeligheden.
Eksempel, bog 1:
"....flytning af et liniestykke udføres lettest ved hjælp af en målepasser, hvis spidser anbringes i liniestykkets endepunkter, hvorefter man ved flytning af passeren fører liniestykket over i en ny stilling".
Såvidt vi kan bedømme det, er de pædagogiske fordele ved den Hjelmslevske virkelighedsgeometri imidlertid begrænset til G_1 -geometri, da bøgerne ikke bringer eleverne væsentligt udover hvad de allerede kan forestille sig, og det kan efter vores mening ikke stå alene, men er dog et emne der kan fortjene opmærksomhed, især hvis det indføres i et samspil med egentlige geometriske teorier.

5.4 Afsluttende bemærkninger.

Vi har i det foregående forsøgt at belyse forskellige aspekter af geometri (i G_1-G_5 betydning), som igangsætter og redskab ved indlæring af matematik. Det skal her afslutningsvis siges, at der tilsyneladende ikke eksisterer nogen forskning der drager nogle konklusioner vedrørende disse forhold, og der i det hele taget generelt en meget dårlig forbindelse mellem pædagogisk/psykologisk forskning og egentlig fagdidaktik, så dette kapitel er mere eller mindre resultatet af vores såkaldte sunde fornuft. Det må også være klart, at vi ikke har diskuteret om matematikken generelt skal gribes an på en ny anvendelsesorienteret måde, i større sammnhæng med andre fag, men at vi udelukkende har valgt at fokusere på de interne sider af matematikken som undervisningsobjekt. Og på den baggrund er vi nået frem til, at målet med geometriundervisningen skal være at styrke elevernes kendskab til det fysiske rum og planet (G_5), og midlet hertil skal være en kombination af analytisk geometri (G_3) samt øget visualisering og figurbetragtning (G_1) . I det følgende kapitel vil vi nærmere redegøre for og udbygge denne konklusion.

6. Vores standpunkter vedrørende geometriundervisning.

6.1 Standpunkterne.

Et af projektets indledningsvis opstillede problemstillinger var: bør man skifte synspunkt på geometriundervisningen i gymnasiet, og hvilken stategi skal man i givet fald lægge til grund for en sådan undervisning.

Udgangspunktet for denne diskussion må naturligvis være, hvilket mål vi har med matematikundervisningen overhovedet, og på hvilken måde geometrien specielt kan bidrage til at tilgodese disse mål.
I en overordtnet ramme ønsker vi, at matematikundervisningen skal være med til at lære eleverne at forstå den omverden og herunder det samfund, som de lever i. Således at de senere vil kunne handle aktivt, rationelt og kritisk over for såvel praktiske som teoretiske problemer, der kan behandles (eller bliver behandlet) ved hjælp af matematiske metoder og teorier.
For at kunne tage stilling til, hvilken rolle en geometri kan spille i forhold til dette overordnede mål, vil vi i det følgende diskutere vores målsætning med en evt geometriundervisning indenfor rammerne af de 5 pkt., som vi har udkrystalliseret af geometridebatten. Vi vil i denne forbindelse opdele geometrien i to kategorier nemlig i syntetisk og analytisk geometri, hvor vi ved syntetisk geometri forstår geometrier der er opbygget omkring et selvstændigt aksiomssystem, mens analytisk geometri er geometri på koordinatform, med lineær algebra som underliggende teori.

Vores opgave vil således være (tilsvarende de enkelte forfattere som er citeret i afsnittet om geometridebatten), at bekrive vores mening om hvorvidt hver af de fem målsætninger kan/bør anvendes som argumentation for en geometriundervisning, og i bekræftende fald, hvilken af de to typer geometrier der vil være at foretrække, til at opnå dette mål.
Nedenstående skema giver et overblik over vores standpunkter og de vil i det følgende blive uddybet.

midler / mål	syntetisk geometri	analytisk geometri
rumbevidsthed	(-)	+
rumbeherskelse	-	+
illustrere mat.-processer	(-)	(-)
træne logisk sans	-	-
æstetiske kvaliteter	-	-

- imod , + for , () med forbehold i form af senere bemærkninger

Om rumbevidsthed:

Lad det være sagt med det samme, vi mener, at det er af afgørende betydning for eleverne at de har en veludviklet rumsans (en intuitiv opfattelse af rummets struktur).
En detaljeret argumentation for dette er vel næppe påkrævet. Alene den kendsgerning at vi færdes og lever i en verden som vi opfatter som et tre-dimensionelt euklidisk rum og at fysiske begivenheder udspiller sig i rummet, gør det nødvendigt med en bevidsthed om disse forhold.
Spørgsmålet er så, om det først og fremmest er en geometriundervisning der skal bidrage til at give eleverne denne rumbevidsthed.

Det er naturligvis sådan, at eleverne kan opnå en rumbevidsthed uden at beskæftige sig med geometri, ja de kan nærmest ikke undgå det. De har f.eks. allerede gennem de ting som de har beskæftiget sig med under deres opvækst udviklet denne bevidsthed.
På den anden side er det vel rimeligt at antage, at en geometriundervisning vil være et godt værktøj til at styrke elevernes rumbevidsthed. Og da vi senere vil argumentere for at de også bør opnå rumbeherskelse, er det derfor naturligt at anvende samme middel til begge mål, nemlig den analytiske geometri.

Hermed være ikke sagt, at den analytiske geometri er bedre en alle andre metoder, hvis det alene drejer sig om rumbevidsthed isoleret set.

Om rumbeherskelse:

Rumbeherskelse er som tidligere nævnt bl.a. evnen til at kunne gennemføre beregninger og fælde domme om hvad der er gældende for genstande og figurer i rummet (og i planen).

Vi mener, at en veludviklet rumbeherskelse er af stor betydning for langt de fleste gymnasieelever i deres senere funktion. Dette er selvfølgeligt oplagt inden for de tekniske brancher (ingeniører, arkitekter) og i forbindelse med matematik og fysikstudier. Men også for den enkelte elev som senere voksen vil et minimumskendskab til det fysiske rums struktur og også behandlingen af rumlige og plane genstande være betydningsfuld.

Som følge heraf mener vi, at man i gymnasiet, og her ganske specielt på de matematiske grene, må stræbe efter at styrke elevernes rumbeherskelse.
I denne forbindelse er det værd at nævne, at den aktuelle gymnasieundervisning i analytisk geometri, utvivlsomt giver eleverne en "vis" rumbeherskelse (af planen), men at dette ikke er et egentligt krav til undervisningen.

En anden ting man bør være opmærksom på er det faktum at der ikke for tiden gives undervisning i rumgeometri. Det er vores opfattelse, at det er uheldigt at eleverne kun skal arbejde i planen. Dette skyldes ikke kun, at vi mener, at man med en relativ beskeden indsats kunne udvide disse geometriske betragtninger fra 2 til 3 dimensioner, men også at det at kunne arbejde i 3 dimensioner vil give mange fordele i elevernes senere funktioner.

Som det er fremgået, mener vi, at midlet til at give eleverne rumbeherskelse, bør være den analytiske geometri. Vores begrundelse for denne holdning er følgende:

Den syntetiske geometri er efter vores opfattelse ikke anvendelig af følgende grund:

1) Aksiomatisk-deduktive systemer er svære at forstå, fordi forholdet mellem ræsonnementer inden for rammen og udsagn om det virkeligheds-område, der tænkes beskrevet, er så kompliceret.
De fleste elever vil formentlig være afskåret at forstå det så langt, at det har mening at gennemføre en undervisning i det. F.eks. er det svært for mange at forstå rimeligheden i at bevise ting, som man u-middelbart af intuitiv vej kan indse. Dette hænger også sammen med, at ved en aksiomatisk-deduktiv opbygning af geometri lægges mer vægt på teoriens karakter og arkitektur end på de sætninger den frembringer.

2) Den lægger ikke op til beregninger og kan ikke kvantificeres.

3) Analytisk geometri lægger mere end syntetisk op til et samspil med andre dele af matematikken.

Selv om vi finder at måtte afvise syntetisk geometri som middel til at opnå rum-beherskelse, finder vi ikke at en syntetisk geometri er uden værdi til dette formål. Det bidrager naturligvis til erkendelsen af rummets struktur og egenskaber, at det på grundlag af en aksiomatisk-deduktiv teoriopbygning er muligt at fælde sande domme om virkelighedens indretning. Men vanskelighederne og omkostningerne ved at gennemføre en undervisning af den art overskygger efter vores mening gevinsterne.

<u>Om illustration af matematiske processer:</u>

Fra kapitel 4 kendes allerede en række argumenter for og imod anvendelsen af geometri til at illustrere matematiske processer. Det er dog værd at bemærke, at det især er den syntetiske geometri diskussionen er koncentreret om.

Argumentationen <u>for</u>, er af typen:

- et simpelt aksiomssystem, som er let forståeligt
- da geometrien ikke er synderlig abstrakt, vil den deduktive proces kunne følges og forstås
- med meget få operationer i den deduktive proces, kan opnås velkendte og let forståelige sætninger

Argumentationen <u>imod</u>, er af typen:

- da man ikke i forvejen lærer eleverne syntetisk geometri, vil det være urimeligt at lære dem det blot for at illustrere matematiske processer
- tidligere forsøg er mislykkedes
- der skal ikke undervises i deduktive processer i gymnasiet da det er for svært, for tidskrævende og for kedeligt.

Hvis netop en undervisning i syntetisk geometri skal have til opgave at illustrere matematiske processer, må det som man skal tage stilling til være, om eleverne mindst én gang skal se et fuldstændigt aksiomatisk-deduktivt system, hvor grundlaget ikke fortoner sig i andre teorier, som i analytisk geometri (de reelle tal, lineær algebra og vektorregning).

Vi må endvidere forestille os, at denne illustrering ikke finder sted andre steder i matematikundervisningen, for var det tilfældet var der jo ingen grund til at geometri skulle bære byrden.
Imidlertid finder vi det ikke ønskværdigt at geometriundervisningen som den eneste disciplin skal have denne opgave fordi:

1) Det er umuligt, at illustrere rollen og betydningen af aksiomatisk-deduktive strukturer i matematikken, hvis syntetisk geometri er den eneste illustrator, da eleverne så ikke kan se rollen og betydningen. Alt hvad den kan vise er, hvordan man undertiden kan gøre, men ikke hvorfor man gør det.

2) I forbindelse med syntetisk geometri er de aksiomatisk-deduktive metoders evne til at producere resultater, som ikke er indlysende, ringe og resultaterne er primært interessante ved deres indbyrdtes logiske sammenhæng.

Uanset om man mener, at aksiomatisk-deduktive fremgangsmåders rolle og betydning i matematikken skal indgå i undervisningen, må vi anse geometri for at være et dårligt sted at vælge til formålet, hvis det er det eneste sted.
Derimod kan geometri som disciplin i kraft af historie, karakter og rolle i matematikken og dens forhold til virkeligheden tjene som velegnet "case" til at drøfte matematikkens udvikling og forholdet mellem matematisk teori og virkelighed.

Om træning af logisk sans:

Som det er fremgået af geometridebatten, er det hovedsagelig den syntetiske geometri, som har været anset for at kunne skærpe elevernes logiske sans.
Det står imidlertid ikke helt klart hvad de enkelte forfattere mener når de taler om "logisk sans". Mogens Niss siger herom (3):

> "Nu er det vel temmelig uklart, hvad man skal mene med evnen til at tænke logisk og stringent. Der kan være tale om et spektrum af betydninger, fra evnen til at undgå formallogiske fejl såsom omvending af implikation, ombytning af kvantorer osv., til evnen til at tænke systematisk, struktureret og målrettet med sans for væsentligt og uvæsentligt, materielle og formale aspekter, hovedspørgsmål og bispørgsmål m.m. I dagligdags sprogbrug er det vel nok især den sidste betydning, der tænkes på."

I denne tolkning har "logisk sans" altså to betydninger:

1) evnen til at undgå logiske bommerter, og

2) evnen til at kunne skelne væsentligt fra uvæsentligt, at kunne tænke struktureret og systematisk.

Vi mener ikke, at der er grund til at tro, at selv en vellykket syntetisk geometriundervisning eller for den sags skyld matematisk i det hele taget udstyrer folk med "logisk sans" i den sidste betydning.

Derimod er vi overbevist om, at ikke blot en delvist vellykket undervisning i syntetisk geometri, men i (stort set) al matematik vil sætte folk i stand til at drage matetematisk-logisk korrekte slutninger, samt at udstyre folk med opmærksomhed over for formallogiske brist i dagligdags argumentation, altså "logisk sans" i den første betydning.

Om æstetiske kvaliteter:

Vi vil ikke afvise at geometri kan have nogle æstetiske kvaliteter, men vi må afvise, at man anvender det som argument for indførelsen af en egentlig geometriundervisning i gymnasiet.
Argumenter af denne type vil i princippet kunne anvendes til indførelse af et hvilket som helst emne, matematik eller ej.

6.2 Sammenfatning.

Det vi har at sige er skematisk og med mange løse ender. Det er først og fremmest kommet til veje på baggrund af vores snusfornuftige overvejelser over dels geometriens karakter og rolle i matematikken og i den gymnasiale matematikundervisning gennem tiderne og dels geometridebatten sådan som vi har kunnet opspore den og tage stilling til den. Imidlertid ligger det nok ikke bare i tidsbegrænsningerne for dette mangesidede projekt, men også i den fagdidaktiske forsknings stade, at det er nødvendigt at blive stående ved snusfornuftige overvejelser.

Der kan være grund til at sige, at vore konklusioner skal ses i forhold til den eksisterende gymnasiestruktur og de eksisterende rammer for matematikundervisningen. Der er således ikke taget stilling til hvad man kunne ønske sig af reformer i større format.

Vi mener, at man bør ændre synspunkt angående geometriundervisningen, i retning af at der bør undervises i geometri som genstand og ikke bare som hjælpemiddel i den øvrige matematik.
Vi har i den forbindelse følgende 4 synspunkter angående geometriundervisningen:

1) Undervisningen skal producere rumbevidsthed og beherskelse i det fysiske rum (incl. planen) og altså også omfatte rumgeometri (3-dim).
2) Midlet skal være analytisk geometri.
3) Forholdet mellem virkelighed (det fysiske rum/plan) og geometriske teorier ("in casu" analytisk geometri) bør debatteres, dvs. at der er mange geometriske modeller, som man kan bruge til at beskrive det fysiske rum og planen.
4) Geometri som disciplin kan med fordel indføres som emnelæsning idet den benyttes til at sige noget om udviklingen af matematikken og dens forhold til virkeligheden.

7. REFERENCELISTE.

1. Fr. Fabricius Bjerre : Matematikkens stilling i den højere skole, Mat. Tidsskrift. A,nr.3,København 1927
2. V. Skovgård/V. Petersen : Dannelse og Demokrati,Gyldendals pædagogiske bibliotek, 1976
3. Gertz/ J. Petersen : Udtalelse fra Undervisningsinspektionen af 28 september 1889
4. S.L. Tuxen : Beretning om undervisningen i gymnasieskolerne, Købehavn 1914
5. J. Hjelmslev : Den lille geometri, Jul Gjellerup 1926
Elementær geometri, Jul Gjellerup,1916 - 23 bog 1-4.
6. Dieudonné : New Thinking in School Mathematics, OEEC, Paris 1961.
7. Poul La Cour : Historisk matematik, Rosenkilde og Bagger, København 1962.
8. Peter Wolff : Højdepunkter i matematikken, Hasselbach 1967
9. Morris Kline : Mathematical Thought from Ancient to Modern Time, Oxford University Press 1972
1o. Albert Einstein : Perspektiver og Udsyn, Hasselbach 1967
11. T. Bonnesen : Matematikken i gymnasiet, Nyt Tidsskrift for Matematik,Afd, A,16 årgang 19o5
12. Bruce E. Meserve : Geometry as a Gateway to mathematics, A.G. Howson (ed) : Development in Mathematical Education, Cambridge U.P. 1977
13. Johannes Mollerup : Om undervisning i Matematik, Særtryk af Nyt Tidsskrift for Mat,Afd. A,nr. 2, 19o3
14. T.J. Willmore : Whither Geometry ? (an extract),Mat. Gaz.,Vol. 54, 197o
15. Karl Schmidt : Mathematikken til almindelig Forberedelsesexamen og den 4de klasses hovedeksamen, 189o
16. F.J.Budden/C.P.Wormell : Mathematics through geometry, Pergamon Press, 1964.
17. Bent Christiansen : Folkeskolens matematikundervisning, Munksgaard 1973.

18. Anders Mathiesen : Uddannelse og Produktion, Munksgaârd 1976 s. 98

19. C. Godfrey : Forelæsning over The Board of Education Circular on the Teaching of Geometry, MG, bind 5 191o, p. 195-2oo, (MG= Mathematical Gazette)

2o. C.J.L.Wagstaff : Should We Continue to Teach Geometry ?, MG, bind 9, p. 38-4o, 1917 (MG=Mathematical Gazette)

21. Marshall Stone : Learning and Teaching Axiomatic Geometry, Educational Studies in Mathematics, bind 4, 71/72, s. 91-1o3

22. AndréRevuz : The position of Geometry in Mathematical Education, Educational Studies in Mathematics, bind 4, 1971/72, s. 48-52

23. Karl Menger : The Geometry relevant to Modern Education, Educational Studies i Mathematics, 71/72, bind 4, s. 1-17.

24. Seymour Schuster : On the Teaching of Geometry, Educational Studies in Mathematics, 71/72, bind 4, s. 78-86

25. J.V. Armitage : The place of Geometry in a Mathematical Education, Math. Gazette, 1973, bind 57, s.267-78

26. RenéThom : "Modern Mathematics: An Educacational and Philosophic Error ? Am. Scient, bind 59, 1971, s. 695-699.

27. John C. Egsgaard : Som ideas in Geometry That Can be Thaught from K-6, Ed.Studies of Math., 197o, bind 2, s. 478-95

28. Intern RUC-papir : Om anvendelsespræget matematikundervisning og kognitive problemer.

29. Kristensen/Rindung : Matematik for gymnasiet, bind 2.1, Gad 1975, s.147-48

3o. N. Wiener : Om the nature of mathematical thinking, artikel fra P. Masani et al.:Nobert Wiener, Collected Works, MIT press, vol. 1, 1976, s. 268 ff.

31. Peder V. Christiansen : Dynamik og Diagrammer, tekst nr. 8, IMFUFA, 1978, s.12

32. Richard R. Skemp : The psychology of Learning Mathematics, Penguin Books, 1975

33. M.J. Greenberg : Euclidean and Non-euclidean, Academic Press 1977.

34. Mogens Niss, himself : Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser i 199o, marts 1979, endnu ikke udgivet.

ET EVENTYR

Der var en Gang en Trekant og en Firkant. Trekanten havde 3 Vinkelspidser og Firkanten havde 4. Firkanten pralede af, at den havde 1 Vinkelspids mere end Trekanten, og Trekanten var misundelig paa Firkanten. Og saa havde Firkanten noget, som Trekanten slet ikke kendte. Den havde 2 Diagonaler. Trekanten tænkte længe over, hvad der kunde være Grunden til, at den selv ingen Diagonaler havde. Men den kunde ikke opdage det. Den tænkte, om det dog ikke ogsaa skulde være muligt for den at faa i det mindste een Diagonal. Bare een. Maaske den saa senere kunde faa een til. Men det lykkedes ikke at finde nogen Udvej.

En Dag havde Firkanten pralet særlig stærkt af sine Diagonaler, og Trekanten var nærved at blive krum af Misundelse. Da den om Aftenen gik i Seng, kunde den ikke sove. Det hamrede i alle 3 Vinkelspidser, ganske ligesom det kan hamre i Menneskers Hoved. Den lagde sig snart paa den ene, snart paa den anden, og snart paa den tredie Side, men den fandt ingen Hvile. Pludselig fik den en Idé. Den stod op, sneg sig ind i det Værelse, hvor Firkanten laa og sov, og savede alle Firkantens Vinkelspidser af. Derpaa gik den igen i Seng, og nu sov den trygt til den næste Morgen. Da den vaagnede, tænkte den, at nu skulde det rigtig gøre godt at møde Firkanten og se, hvor slukøret den var. Men stor blev dens Forfærdelse, da den saa, at Firkanten havde faaet dobbelt saa mange Vinkelspidser som før. Den var blevet til en Ottekant. Og den havde saadan en Mængde Diagonaler, at Trekanten ikke kunde tælle dem.

Nu var Trekanten kommet rent i Vildrede med Tilværelsen. Den forstod ikke, hvordan det var, det hang sammen. Man kan godt lære noget, selv om man ikke begriber et Ord af det hele, og den havde nu lært, at naar man saver een Vinkelspids af, kommer der 2 i Stedet.

Den overtalte derfor en Ven til at save dens egne Vinkelspidser af. Den blev saa til en Sekskant. Men det var den ikke tilfreds med. Den vilde have endnu flere Vinkelspidser. Vennen skulde save videre. Og stadig videre. Men til sidst var det ganske umuligt for Vennen at komme videre. Trekanten var blevet til en krum Linie. Og nu havde den mistet alle sine Vinkelspidser.

Trekanten sørgede dybt over, at Verden var saa vanskelig at blive klog paa.

En dag kom to Vandringsmænd forbi, hvor Trekanten boede. De kunde mere end deres Fadervor. Den ene sagde, at en krum Linie var en Polygon med uendelig mange Vinkelspidser. Det var noget, han havde lært. I Virkeligheden begreb han ikke et Ord af det hele, men det var der heller ingen andre, der gjorde. Den anden sagde, at en krum Linie er en virkelig Polygon. Man kan bare tage Vinkelspidserne, hvor man vil paa den krumme Linie, blot de vælges tæt sammen. Det var noget, man kunde se, og saa var det rigtigt.

Trekanten syntes til at begynde med, at det var som at ophæve Forskellen paa godt og ondt. Men det varede ikke længe, inden den forstod det. Den indsaa, at krumme Linier er dog de mest fuldkomne. De kan ikke blive misundelige paa hinanden. For man kan give hver af dem saa mange Vinkelspidser, man vil.

Saaledes tænkte den. Men det var nu kun, fordi den en Gang havde været en rigtig Trekant.

Naar man er født krum, tænker man helt anderledes.

Eritis sicut deus, scientes bonum et malum.

(Fra J. Hjelmslev: Den lille Geometri, 1926)