TEKST NR 185 1990

EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE

Et matematik projekt af:

Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde
EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE
af Steen Grode og Thomas Jessen

IMFUFA tekst nr. 185/90, 147 sider, ISSN 0106-6242

Abstract:

Projektet gennemgår den elementære teori om kontinuerte periodiske funktioner og næsten periodiske funktioner. Fremstillingsformen er historisk-teoretisk. Periodiske funktioner præsenteres hovedsaligt som en introduktion til næsten periodicitet. Den teoretiske kerne udgøres af en gennemgang af Harald Bohr's oprindelige teori om næsten periodiske funktioner $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$, hvor alle væsentlige sætninger opnås. Historisk søger vi at afdække de spor der førte til teoriens formulering. Der lægges vægt på at eftervise en forbindelse mellem på den ene side Bohr's arbejde med zeta funktionen og Dirichlet rækker, og på den anden side næsten periodiske funktioner. Projektet afsluttes med en skitse over generaliseringer af begrebet næsten periodicitet.

Indhold

Kapitel 1

Indledning

1.1 Hvordan det hele startede

Da vi i efteråret 89 skulle starte arbejdet med et nyt projekt, havde vi begge et ønske om at arbejde med emner fra den matematiske analyse. Professor Dorte Olesen havde på et tidligere tidspunkt foreslået et projekt om Harald Bohr's teori om næsten periodiske funktioner; et begreb vi var fuldstændig ubekendt med. Måske var det netop vores manglende viden der gjorde emnet fascinerende, for vi kastede os frejdigt ud i arbejdet. På sin vis var det således ret tilfældigt at det netop blev de næsten periodiske funktioner, vi koncentrerede os om, men emnet viste sig hurtigt at være både spændende og vidtrækkende. Dels er teorien matematisk udfordrende og dels så vi muligheder for at beskæftige os med teoriens historie; hvilket er spændende da en stor del af den er udviklet i Danmark.

1.2 Rapportens opbygning og formål

Rapporten kan i grove træk siges at have to 'flader': Dels en teoretisk med vægt på matematikken, og dels en mere historisk hvor baggrunden for den matematiske udvikling søges afdækket. Teorien er igen opdelt i to dele. Først teorien om periodiske funktioner, og dernæst om de næsten periodiske funktioner. Teorien om de periodiske funktioner tjener hovedsageligt som optakt til teorien om næsten periodicitet, idet periodicitet er et bekvemt særtilfælde af næsten periodicitet, og derfor kan tjene pædagogisk til at introducere nogle grundbegreber. De to teorier er iøvrigt kun svagt historisk forbundet, men ganske stærkt matematisk. Vi har valgt at præsentere teorien i en kompakt form, da den er forholdsvis omfattende. Der benyttes en lang række begreber fra forskellige matematiske discipliner, og en forhåndsviden om periodiske funktioner er ønskelig, men ikke nødvendig. Appendix B indeholder en lille liste over nogle (velkendte?) sætninger fra analysen, som vi ofte benytter.

Projektets historiske dele kan forhåbentlig læses med ringere forudsætninger; det har i hvert fald været målet. Den læser der således ikke er interesseret i at fordybe sig specielt i teorien, men blot søger et overblik over betydende faktorer for udviklingen, anbefales at overspringe de to teoretiske kapitler (omend et kendskab til teoriens historie i en vis udstrækning kræver en forståelse af den). Det skal dog ikke skjules at vores eget kendskab til teorien gør det svært at sikre der ikke slipper indforståede ting med i teksten.

Projektet har flere formål: For det første søger vi at præsentere et stykke gedigen matematisk teori. Men vi nøjes ikke med det. Vi vil tillige forsøge at fokusere på hvilke spørgsmål, der ledte til teoriens formulering og forsøge at belyse i hvor høj grad disse spørgsmål er blevet afklaret. Samtidig prøver vi at se på de historiske træk der er gået forud. Vi prøver at afdække hvilke følger teorien om de næsten periodiske funktioner i øvrigt fik inden for matematikken og ser på hvilke muligheder man har set eller stadig ser i teorien.

Et par ord om teorien kan måske tjene som en appetitvækker: Vi koncentrerer os her blot om periodiske funktioner. Det næsten periodiske tilfælde er helt analogt, og læseren kan midlertidigt blot tænke på disse funktioner som nogen der vitterlig er 'næsten' periodiske. De periodiske funktioner er i besiddelse af forskydningsegenskaber, for forskyder vi funktionen et passende stykke, fremkommer den samme funktion. Sigtet med teorien er at vise at periodiske funktioner tillige besidder andre egenskaber, særligt visse karakteristiske egenskaber, d.v.s. egenskaber som alle periodiske, og netop kun periodiske, funktioner besidder. Helt specielt vil vi vise at der er tale om svingningsegenskaber, ved at en periodisk funktion kan skrives som summen af en endelig eller uendelig trigonometrisk række (hvormed der blot menes en række med cosinus og sinus led). Problemet med at knytte en trigonometrisk række til en funktion eller, som det også kaldes, at udvikle funktionen i en trigonometrisk række, har historiske rødder tilbage til det 18. århundrede. Spørgsmålet om hvorvidt det overhovedet kunne gøres, og i så fald hvorledes man burde gøre, har indtaget en central plads i matematikken, og er et af dens mest spændende kapitler.

Vores oprindelige idé var at lægge langt den overvejende del af vægten på næsten periodiske funktioner og deres historie. Vi erhvervede os dog først overblikket løbende, i takt med arbejdet, og kunne derfor først sent i forløbet vurdere om idéen var holdbar. I hovedtræk er rapporten som tiltænkt, men enkelte problemer bør påpeges. Mens de periodiske funktioners historie er både lang og (næsten for) rig på kilder, er det straks vanskeligere med næsten periodiske funktioner. Dels fandt vi kun få bøger om emnet og dels forløber udviklingen over et meget kort tidsrum. Bohr lancerer teorien i starten af 20'erne, og i slutningen af 30'erne er næsten alle væsentlige problemer løst. Som en konsekvens forskød vi det historiske tyngdepunkt over til perioden før Bohr publicerede sin teori. De teoretiske afsnit er vokset i skriveprocessen. Den oprindelige idé var her at præsentere den elementære teori, og kun benytte periodiske funktioner som en 'blød' optakt. Teorien baseres imidlertid i vid udstrækning på teorien for periodiske funktioner, og vi inkluderede derfor denne. Vi har dog holdt fast i (hovedsaligt) kun at behandle kontinuerte funktioner. Den næsten periodiske teori truede en overgang med vokse helt urimeligt, for i takt med at vi lærte mere og mere, ønskede vi at inkludere det hele. Resultatet er blevet at den elementære teori, udviklet af Harald Bohr, er gennemgået grundigt, men p.g.a. sit omfang temmelig kompakt. Af den videre udvikling af teorien har vi været nød til at 'barbere' lidt, og kun referere de vigtigste resultater.

Selv mener vi at der er kommet en læseværdig rapport ud af vores anstrengelser, og vi håber at læseren deler opfattelsen. Er det tilfældet skyldes det måske den vejledning vi har modtaget fra professor Hans Tornehave, der velvilligt har stillet tid og viden til rådighed. Vi har desuden modtaget hjælp og gode råd fra vores vejleder Jacob Jacobsen. En tak til begge.

Roskilde, januar 90
Steen Grode Thomas Jessen

Kapitel 2

Baggrunden for Fourier rækker

2.1 Det 18. århundrede

Op til 1700-tallet var matematisk forskning især præget af at være støttevidenskab for andre videnskaber, primært indenfor fysik. Det gav sig blandt andet til kende ved at man havde et anvendelses orienteret syn på matematiske resultater, og at man i høj grad overbeviste sig om korrektheden af et opnået resultat ved at kontrollere dette i en konfrontation med virkeligheden. Tillige mente man dengang overvejende, at matematikken ikke i sig selv var noget virkeligt, men at den kun havde værdi i det omfang dens resultater kunne afspejles i den virkelige verden. Tilsammen betød disse forhold, at matematikere var mindre stringente med hensyn til begreber og bevisførelse end i dag, hvilket muliggjorde vedvarende uenighed om diverse emner. Havde man været mere beviseksakt, ville man osse have haft udviklet værktøjer til udryddelse af megen skepsis blandt matematikere. Hvis vi for eksempel med 1700-tals briller ser på rækken:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

havde man adskillige måder til at argumentere for, at den var lig med $\frac{1}{2}$, men osse at den var lig mange andre værdier, eller at man slet ikke kunne tale om at den havde en værdi. Her i ligger der allerede en usikkerhed omkring, hvad det vil sige at være lig med(!); men rækken kan blandt andet dannes ud fra en udvikling af brøken $\frac{1}{1+x}$, eller man kan metafysisk argumentere som følger:

> *"To brødre arver en pragtfuld ædelsten, som ikke må deles, men testamentet bestemmer, at de og deres familie i al evighed og på skift skal have diamanten et år af gangen. De har da hver det halve ejerskab."*

hvor begge argumentationer kan lede til værdien $\frac{1}{2}$. Set i dag handler denne argumentation vel om at man finder middelværdien af følgen

$$1, 0, 1, 0, 1, 0 \cdots$$

som ved argumentet får tillagt værdien $\frac{1}{2}$. Mange af tidens indlæg havde tillige religiøs karakter, i den forstand at nogle mente, matematikken skulle bekræfte guds eksistens; for eksempel bærer en stor del af Newtons arbejder præg af dette. Med denne række og lidt god fantasi suppleret med et par hurtige parenteser, kan man få rækken til at blive beviset for, at alt kan skabes udfra intet eller modsat.

Væsentlig for vores opgave er det 18. århundredes gryende behandling af differentialligninger, som var knyttet til periodiske problemstillinger inden for fysik. Adskillige matematikere kom med konstruktive bidrag, men diskussionen udspillede sig i det væsentlige mellem Euler, d'Alembert og D. Bernoulli. Man søgte at beskrive en svingende strengs bevægelse, planetbevægelser og siden andre fænomener som gav anledning til de samme differentialligninger. Indtil midten af århundredet var disse ligninger således kun anskuet som modeller, der forekom knyttet til bestemte fysiske betingelser, og løsninger var kun søgt til de betingelser. Man prøvede derfor ikke at løse differentialligninger generelt, men blandt de løsninger man fandt til forskellige fysiske problemstillinger, dukkede der omkring år 1750 trigonometriske rækker frem, altså for eksempel en række af formen:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \in \mathcal{N}} \left[a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)\right]$$

Euler og d'Alembert holdt dog hele deres liv fast i, at en vilkårlig funktion ikke kunne udtrykkes i en trigonometrisk række, mens Bernoulli mente det var muligt. De tre kunne hver især partielt tilslutte sig en del af hinandens løsninger, uden at de nogen sinde nåede til en endelig enighed; faktisk blev diskussionen mere og mere tilspidset, hvilket der kan være mange årsager til. En af de grunde, der ligger i ovennævnte, var tilknytningen til et eller flere fysiske problemer, og der var yderligere uklarheder omkring funktionsbegrebet, for eksempel om en funktion havde samme algebraiske udtryk overalt (siden dog blødt op til forskellige definitions intervaller). En af Eulers væsentligste grunde til modstanden mod at udtrykke en funktion som trigonometrisk række var, at en streng måtte kunne have alle mulige begyndelses former, osse former der ikke kunne beskrives trigonometrisk. Arbejdet og diskussionen var dog ikke ufrugtbar, blandt andet fandt Euler sent i debatten i et arbejde vedrørende planetbevægelser, hvor han ganske naturligt var befriet for spekulative mulige begyndelsestilstande, en formel til beregning af koefficienterne til de enkelte led i rækken; faktisk den formel som senere blev genfundet. Inden for beslægtede områder førtes man osse til mere afklarede begreber, og man fik løst specifikke problemer i fysikken. Men til trods for at man således fandt disse specielle løsninger, stod det mere overordnede matematiske problem, en generel løsning på et periodisk gentaget fænomen, uløst hen.

En helt anden side af matematikken i det 18. århundrede (og vel til alle tider) var den mere legeprægede, formodentlig drevet af menneskelig nysgerrighed. I matematikkens skift fra støttevidenskab til at vakle en selvstændighed i møde legede barnet meget. Rammerne var ikke så snævre. Matematikken var ved at frigøre sig fra at skulle efterprøves på baggrund af virkeligheden og de interne krav til præcision, som er nødvendige hvis man ønsker en tilstrækkelig entydighed, var endnu ikke blevet strammet. Under denne leg blev mange ting udviklet for eksempel lancerede Euler zeta-funktionen, som vi senere vender tilbage til.

2.2 Det 19. århundrede

De matematiske problemer, der havde været tidligere i forbindelse med at udtrykke en vilkårlig funktion som en trigonometrisk række, dukkede op igen ved begyndelsen af det 19. århundrede. Denne gang ikke ud fra svingende strenge og planetbevægelser, men ud fra et nyere fysisk problem - varmeledning. Den industrielle revolution havde medført en øget mekanisering og havde betydet at dampmaskinen og dermed forbundne problemer var blevet væsentlige. Ved at undersøge varmeledning og opstille forskellige antagelser for fænomenet nåede man frem til en modelbeskrivelse, der byggede på de samme 1. og 2. ordens differentialligninger, som ved de fysiske problemer man havde undersøgt i det foregående århundrede. Idet de tidligere bud på løsninger i en vis forstand havde været korrekte, er det klart, at de ville dukke op igen. I følge vores kilder blev de dog nyudviklet af personer, der var uden kendskab til tidligere resultater. Der kan rejses tvivl om, hvorvidt de historiske kilder er korrekte med hensyn til dette, idet for eksempel Fourier i sine originale tekster ikke alene citerer Euler, men osse henter en del eksempler fra ham.

Afgørende for den videre udvikling blev imidlertid, at man nu turde tro på dem. Matematikken var i højere grad blevet frigjort fra fysikken, således at man nu i videre udstrækning tillod sig at komme med løsningsforslag, som ganske vist stadig udsprang af virkeligheden, men som kunne have abstrakt realitet. Til gengæld skabte det i sig selv nye problemer af matematisk karakter. Man måtte enes om et funktionsbegreb, få en bedre karakteristik af funktioner, man måtte på ny overveje integraler, man ønskede at finde en nærmere afgrænsning af hvilke krav der måtte stilles til en funktion for at den kunne udvikles i en trigonometrisk række, man måtte afklare kontinuitet og konvergens; man blev i det hele taget nærmest tvunget ind i en situation, hvor meget gerne skulle afklares hurtigt, mens man samtidig blev nødt til at være yderst rigoristisk i processen. Fourier var måske en af de sidste matematikere, der slap afsted uden stringente beviser.

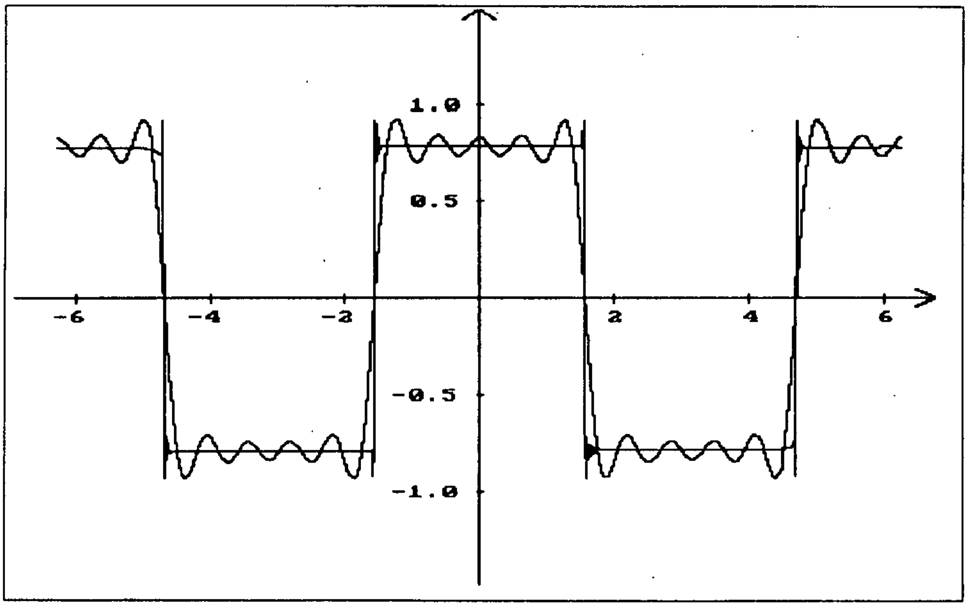
Fourier tog i begyndelsen af århundredet fat i bedste Eulerske stil med en stribe diskutable regninger på divergente række og uendelige ligningssystemer. Han nåede frem til at en 'vilkårlig' funktion defineret på $]-\pi,\pi]$ kunne skrives som en trigonometrisk række med koefficienterne

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

uden dog at komme længere end til et overbevis.

Dette viser sig at indeholde nogle oplagte problemfelter. Det havde ikke generet Euler at arbejde med divergente række, men han var klar over og havde påpeget farerne ved at gøre det. Som eksempel havde han benyttet divergente rækker til beregning af π. Man kendte værdien af π med en del decimaler (vist omkring 100) på det tidspunkt, og Euler demonstrerede på den baggrund, at man med en divergent række med aftagende led indtil et vist punkt i rækken kunne bestemme π med en vis nøjagtighed ved at afbryde summationen på et (intuitivt) passende tidspunkt. I det tilfælde er det nemt at finde et passende tidspunkt, nemlig hvor rækkens led begynder at vokse. Euler arbejde dog med andre metoder blandt andet lignende Abels (se side 33ff), andre mere intuitive. Han mente alligevel, at han ikke af den grund nogen sinde var kommet til at drage fejlagtige slutninger, men set med andres øjne er det jo ikke tilstrækkeligt. I løbet af perioden (1807-24), hvori det lykkedes Fourier at få publiceret sine ideer, var der tilmed sket det, at brugen af divergente rækker var blevet bandlyst, især måske fordi Cauchy havde erklæret, at en divergent række har ingen sum. Man kunne med Abel fristes til at sige, at divergente rækker er en djævelsk skabning, og det er nedværdigende at basere en argumentation på dem. Han mente, at man kunne slutte hvad som helst man havde lyst til. De divergente rækker var skyld i mange fejl og paradokser og han slog fast, at man ikke kunne arbejde med uendelige rækker på samme måde som med endelige.Der var således fra det tidspunkt Fourier fik sine ideer, til at det endelig lykkedes at få dem kommunikeret videre, opstået et behov for at få bevist disse ting uden anvendelse af tvivlsom matematik.



Figur 2.1:

Et andet problem var, at mens rækkens led alle var kontinuerte funktioner, var det ikke sikkert at sumfunktionen var kontinuert. Eksempelvis rækken

$$f(x) = \sum_{n \in N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)$$

som springer mellem $\pi/4$ og $-\pi/4$, som vist på figur 2.1

For at opretholde sin forestilling om at sumfunktionen af en række kontinuerte funktioner er kontinuert, vælger Fourier faktisk at bryde med den sædvanlige opfattelse af en funktion, idet han medregner lodrette liniestykker til funktionen. Dette diskontinuitets problem var forøvrigt tungt at arbejde med for den tids matematikere. Cauchy bemærker i en af sine lærebøger til trods for kendskab til dette eksempel, at hvis leddene i en række er kontinuerte funktioner og rækken er konvergent, så er sumfunktionen kontinuert. Om han osse har regnet de lodrette liniestykker med til funktionen, eller om han direkte har begået en fejl er mindre væsentligt; det er tydeligt man befinder sig på sumpet grund. Endelig er det osse et problem, hvilke betingelser en funktion skal opfylde, for at man kan lave en trigonometrisk række der er konvergent mod funktionen.

Omvendt fik man en hel del ud af disse problemer blandt andet en teori for interval begrænsede funktioner, som uden for intervallet er bundet til at gentage sig selv - teorien for periodiske funktioner.

Kapitel 3

Periodiske funktioner

3.1 Indledende betragtninger

En funktion $f(x)$ siges at være periodisk hvis der eksisterer et $p \neq 0$ således at $f(x+p) = f(x)$ for alle $x \in \mathcal{R}$. Det mindste $p > 0$ der opfylder ovenstående kaldes funktionens minimalperiode, og et vilkårligt helt multiplum af p kaldes funktionens periode. I det følgende menes der med en 'periodisk funktion' en funktion $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, der er *kontinuert* og periodisk, med periode 2π, med mindre andet specificeres. Mængden af periodiske funktioner betegnes $\mathcal{P}$. Valget af 2π som periode er vilkårligt, men ganske naturligt, og medfører ingen indskrænkninger i resultaternes gyldighed. Vi vil senere generalisere resultaterne til at omfatte funktioner med vilkårlig periode. *Derimod har vi på forhånd frasorteret de diskontinuerte periodiske funktioner.* Vi vil i slutningen af dette kapitel behandle en særlig type stykkevist kontinuerte funktioner, men opretholder ellers kontinuitets-kravet.

Teoriens mål er: *At beskrive hvad der netop karakteriserer de periodiske funktioner, det vil sige finde de egenskaber der besiddes af alle periodiske funktioner, og kun af disse funktioner.*

Vi kan umiddelbart slutte os til nogle simple egenskaber ved periodiske funktioner. Er $f(x)$ og $g(x)$ periodiske og er c en vilkårlig kompleks konstant, da er $f(x) + g(x)$ og $cf(x)$ indlysende periodiske. Mængden af periodiske funktioner udgør dermed et *vektorrum* over $\mathcal{C}$. Det er lige så oplagt at enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ er *begrænset*, da f er begrænset i det kompakte (afsluttede og begrænsede) interval $[0, 2\pi]$ og gentager sig selv uden for dette, og ligeledes at enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ er *uniformt kontinuert*, da f er uniformt kontinuert i $[0, 2\pi]$. Desuden er produktet af to periodiske funktioner også periodisk, og hvis $f \in \mathcal{P}$ da vil $\frac{1}{f} \in \mathcal{P}$ hvis blot $f(x) \neq 0$ for alle x. Alle disse egenskaber er åbenlyse, men ganske vitale for teorien. Når vi senere skal behandle det mere generelle næsten periodiske tilfælde, vil vi finde de samme simple egenskaber, men det vil da være langt vanskeligere at bevise dem.

3.2 Grundlæggende definitioner

Definition 3.1 *Ved middelværdien af en funktion $f \in \mathcal{P}$ forstås det komplekse tal:*

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Middelværdien kan tages over et vilkårligt interval af længde 2π, det vil sige for alle a gælder:

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = M\{f(x)\}$$

Definition 3.2 *Ved det indre produkt af to funktioner $f, g \in \mathcal{P}$ forstås tallet:*

$$(f, g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

To periodiske funktioner siges at være *ortogonale*, hvis deres indre produkt er 0. Nulfunktionen, der er periodisk, er ortogonal på alle periodiske funktioner, og dermed, som den eneste periodiske funktion, ortogonal med sig selv.

Definition 3.3 *Ved normen af en funktion $f \in \mathcal{P}$ forstås tallet:*

$$\| f(x) \| = \sqrt{M\{| f(x) |^2\}} = \sqrt{(f, f)}$$

Nulfunktionen er den eneste periodiske funktion med norm 0. Hvis en periodisk funktion har norm 1 siges den at være *normal* eller *normeret*. Enhver funktion $f \in \mathcal{P}$, forskellig fra nulfunktionen, kan normeres ved at betragte funktionen $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$. En mængde eller et system af funktioner kaldes *ortonormalt*, hvis alle funktionerne er normerede og parvis ortogonale. Vi er interesserede i et at finde et ortonormalt system af funktioner i $\mathcal{P}$. Til dette introducerer vi funktionerne $f(x) = e^{inx}$, hvor i er den imaginære enhed og n et vilkårligt heltal. Disse funktioner kaldes for *rene* eller *harmoniske svingninger*, og kaldes under et for det *trigonometriske system*, og betegnes $\{e^{inx}\}$. Da $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ er rene svingninger periodiske og $\{e^{inx}\}$ er dermed beliggende i $\mathcal{P}$. Fortolkes x som tiden kan en harmonisk svingning e^{inx} opfattes som en jævn bevægelse langs enhedscirklen, med vinkelhastighed n og minimalperioden $\frac{2\pi}{n}$. n kaldes desuden for svingningens frekvens, omend den er forskellig fra den 'fysiske' frekvens, der jo er $\frac{n}{2\pi}$. Endelig er tilfældet $n = 0$ specielt, idet e^{i0x} er en konstant funktion med værdi 1, og altså ikke et udtryk for en cirkelbevægelse.

Sætning 3.1 *Det trigonometriske system er ortonormalt i* $\mathcal{P}$

Bevis :

e^{inx} er normal for alle $n \in \mathcal{Z}$ da:

$$\| e^{inx} \| = \sqrt{M\{| e^{inx} |^2\}} = \sqrt{M\{1\}} = 1$$

e^{inx} og e^{ipx} er ortogonale for alle $n \neq p$ da:

$$(e^{inx}, e^{ipx}) = M\{e^{inx}e^{-ipx}\} = M\{e^{i(n-p)x}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-p)x}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

□

Resultatet i sætning 3.1 rejser øjeblikkeligt spørgsmålet om det trigonometriske system er *fuldstændigt*. Det trigonometriske systems er fuldstændigt hvis der ikke eksisterer en funktion $f \in \mathcal{P}$, forskellig fra nulfunktionen, der er ortogonal på alle funktioner i det trigonometriske system. Vi vil ikke gøre holdt for at bevise at dette faktisk er tilfældet, idet det er indeholdt i den næste sætning. Men vi bemærker at resultatet er uhyre væsentligt og etableringen af en tilsvarende sætning for næsten periodiske funktioner udgør et hovedproblem.

3.3 Summabilitet og Fejér's sætning

Det ultimative mål med teorien, er at demonstrere at enhver periodisk funktion f kan skrives som en trigonometrisk række:

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$$

således at f er rækkens sumfunktion. Med det sigte for øje defineres begrebet Fourier række:

Definition 3.4 *For en funktion $f \in \mathcal{P}$ kaldes*

$$a_n = \left(f(x), e^{inx}\right) = M\{f(x)e^{-inx}\}$$

den n'te Fourier koefficient (eller Fourier konstant) for f, og såfremt $a_n \neq 0$ for et $n \in \mathcal{Z}$, siges n at være Fourier frekvens (Fourier eksponent) for f. Rækken:

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$$

kaldes Fourier rækken for f og vi skriver

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$$

Eventuel konvergens af Fourier rækker er et vigtigt problem, der er studeret indgående. Hvis vi vil identificere en funktion f med sin Fourier række, det vil sige konkludere at $f(x) \sim \sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx} \Rightarrow f(x) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$, må vi klarlægge hvad der forstås ved summen af en uendelig række. Det simpleste er at betragte den ved konvergens fremkomne sum, men denne er ikke nødvendigvis defineret. For mens det er muligt at opstille kriterier således at periodiske funktioner, der opfylder disse, har konvergente Fourier rækker, kan det omvendt vises at:

der eksisterer divergente Fourier rækker d.v.s. en Fourier række der er divergent[1] for et passende $x_0 \in \mathcal{R}$ (og dermed for $x_0 + n2\pi, n \in \mathcal{Z}$). For at opnå en altid defineret sum, benyttes summabilitet fremfor konvergens. Helt præcist Cesaro summabilitet af første orden:

Betragt Fourier rækken $\sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$. Ved det n'te afsnit af rækken forstår vi summen

$$s_n(x) = \sum_{v=-n}^{n} a_v e^{ivx}$$

Udfra afsnittene dannes middelværdien:

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} = \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) a_v e^{ivx}$$

Fourier rækken siges at være summabel med sumfunktion $U(x)$, hvis:

$$S_n(x) \to U(x) \quad \text{for} \quad n \to \infty \quad \text{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Summabilitet er et mere generelt begreb end konvergens. En række der konvergerer mod en given sum, vil således være summabel med samme sum[2]. Omvendt findes der rækker der ikke er konvergente, men summable (f.eks. rækken $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; se iøvrigt side 33)

Sætning 3.2 (Fejér's sætning) *For enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ er den tilhørende Fourier række $\sum_{n \in \mathcal{Z}} a_n e^{inx}$ uniformt summabel, med sumfunktion $f(x)$; d.v.s. til et givet $\varepsilon > 0$ findes der et N, således at for alle $n \geq N$ gælder:*

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \qquad \textit{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Før vi beviser sætningen vil vi demonstrere hvorledes det trigonometriske systems fuldstændighed følger af den: Antag at en funktion $f(x)$ er ortogonal på $\{e^{inx}\}$, det vil sige f's Fourierkonstanter er alle 0, altså $f(x) \sim \sum 0e^{inx}$. Da gælder tydeligvis $S_n(x) = 0$ for alle n og x, og dermed $|f(x) - S_n| = |f(x)| \leq \varepsilon$ for alle x, og følgeligt er f nulfunktionen, og dermed er det trigonometriske system fuldstændigt i $\mathcal{P}$.

[1] Et eksempel på en divergent Fourier række er givet i Appendix E

[2] Dette er bevist i Appendix C

3.4 Bevis for Fejér's sætning

Vi indfører først Dirichlet og Fejér kernen. Lad $f \sim \sum_{n\in Z} a_n e^{inx}$, og betragt den n'te afsnitssum:

$$s_n(x) = \sum_{v=-n}^{n} a_v e^{ivx} = \sum_{v=-n}^{n} e^{ivx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) e^{-iv(x+t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{v=-n}^{n} e^{-ivt}\, dt = M_t\{f(x+t) D_n(t)\}$$

hvor $D_n(t)$ kaldes Dirichlet kernen og er givet ved:

$$D_n(t) = \sum_{v=-n}^{n} e^{-ivt} = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1}$$

Hvis man forkorter denne brøk med $e^{i\frac{t}{2}}$ fås

$$\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

Ved herefter at forlænge med $2\sin\frac{t}{2}$ og omskrive $\sin\frac{t}{2}\sin(n+\frac{1}{2})t$ i tælleren får vi

$$D_n(t) = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2(\sin\frac{t}{2})^2}$$

Gennemsnittet af afsnitssummerne er:

$$S_n(x) = \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) a_v e^{ivx}$$

$$= \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{ivx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) e^{-iv(x+t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{-ivt}\, dt$$

$$= M_t\{f(x+t) K_n(t)\}$$

hvor $K_n(t)$ kaldes Fejér kernen, og er givet ved:

$$K_n(t) = \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{-ivt} = \frac{1}{n} \sum_{v=-n}^{n} (n - |v|) e^{-ivt}.$$

$$= \frac{1}{n}(D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_{n-1}(t))$$

$$= \frac{1}{n 2 \sin^2 \frac{t}{2}}((1 - \cos t) + (\cos t - \cos 2t) + \cdots + (\cos(n-1)t - \cos nt))$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1 - \cos nt}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

Vi bemærker at:

$$K_n(t) \geq 0 \qquad \text{for alle } t \in \mathcal{R}$$

For middelværdien af Fejér kernen gælder:

$$M\{K_n(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{-ivt}\, dt$$

$$= \sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ivt}\, dt = 1$$

Vi er nu klar til selve beviset. Vi har fundet at:

$$S_n(x) = M_t\{f(x+t)K_n(t)\} \quad \text{og} \quad M_t\{K_n(t)\} = 1$$

Dermed opnås:

$$S_n(x) - f(x) = M_t\{f(x+t)K_n(t)\} - f(x)M\{K_n(t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)K_n(t)\, dt - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+t) - f(x))K_n(t)\, dt$$

Vælg C så $| f(x) | \leq C$, for alle x, og lad:

$$\omega(\delta) = \sup\left\{ |f(x_1) - f(x_2)| \;\middle|\; | x_1 - x_2 \leq \delta \right\}$$

Lad $0 < \delta < \pi$. Vi har dermed:

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| \, K_n(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] |f(x+t) - f(x)| \, K_n(t)\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\omega(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\, dt + 2(\pi - \delta) 2C \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right)$$

$$< \frac{1}{2\pi} \left(\omega(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt + 2\pi \frac{1}{n} \frac{2C}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right)$$

$$= \omega(\delta) + \frac{1}{n} \frac{2C}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Da f er uniformt kontinuert gælder $\omega(\delta) \to$ for $\delta \to 0$ så vi kan vælge et fast δ så $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ og dernæst vælge et N så stor at $\frac{2C}{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$. Dermed gælder for alle x og alle $n \geq N$:

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

og beviset er fuldent.

3.5 Hovedsætningen

En funktion af typen:

$$t(x) = \sum_n^{\star} a_n e^{i\lambda_n x}$$

($\star$ betyder at rækken er endelig) hvor koefficienterne a_n er komplekse, og eksponenterne λ_n er reelle, kaldes et *trigonometrisk polynomium.* Mængden af trigonometriske polynomier betegnes $\mathcal{T}$. Med $\mathcal{T}^*$ betegnes den delmængde af $\mathcal{T}$, der består af alle trigonometriske polynomier med heltallige frekvenser.

Ethvert $t \in \mathcal{T}^\star$ er en superposition af endelig mange harmoniske svingninger, og dermed indeholdt i $\mathcal{P}$; altså $\mathcal{T}^\star \subseteq \mathcal{P}$. Af Fejér's sætning kan uddrages følgende sætning:

Sætning 3.3 (Weierstrass' sætning) *Enhver periodisk funktion kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier $t \in \mathcal{T}^\star$; d.v.s. til en funktion $f \in \mathcal{P}$ og et givet $\varepsilon > 0$ kan vælges et $t \in \mathcal{T}^\star$ således at*

$$|f(x) - t(x)| \leq \varepsilon \qquad \textit{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Weierstrass' sætning følger af Fejér's sætning på følgende vis: Enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ har, ifølge Fejér's sætning, en uniformt summabel Fourier række $\sum_{n \in Z} a_n e^{inx}$. Det vil sige vi kan danne en følge $(t_n(x))$ i $\mathcal{T}^\star$, der fremkommer ved at betragte middelværdier af afsnittene i Fourier rækken, der konvergerer uniformt mod funktionen. En periodisk funktion kan derfor approksimeres uniformt af funktioner i $\mathcal{T}^\star$. Bemærk af Fejér's sætning er et langt stærkere udsagn end Weierstrass'.

De approksimerende trigonometriske polynomier er af formen:

$$\sum_{v=-n}^{n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) a_v e^{ivx}$$

og dermed identiske med afsnit af Fourier rækken, bortset fra at koefficienterne er skaleret med en faktor $\left(1 - \frac{|v|}{n}\right)$. For senere at kunne fastholde en analogi mellem periodiske og næsten periodiske funktioner, vil vi formulere det fundne resultat på en mere hensigtsmæssig måde: Lad $H(\mathcal{T}^\star)$ betegne afslutningen af $\mathcal{T}^\star$ i den uniforme metrik, altså mængden af funktioner der kan approksimeres uniformt, med vilkårlig præcision, af trigonometriske polynomier i $\mathcal{T}^\star$. Da er denne mængde netop identisk med mængden $\mathcal{P}$ af periodiske funktioner, eller i symboler:

$$\boxed{\mathcal{P} = H(\mathcal{T}^\star)}$$

For Weierstrass' sætning siger nemlig $\mathcal{P} \subseteq H(\mathcal{T}^\star)$, og $\mathcal{P} \supseteq H(\mathcal{T}^\star)$ kan indses på følgende vis: Hvis (t_n) er en uniformt konvergent følge af trigonometriske polynomier i $\mathcal{T}^\star$, da er grænsefunktionen kontinuert og periodisk, med periode 2π, da $\lim_{n\to\infty} t_n(x + 2\pi) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)$.

Relationen $\mathcal{P} = H(\mathcal{T}^\star)$ er den egentlige hovedsætning om periodiske funktioner og svaret på vores indledende spørgsmål: En karakteristisk egenskab ved periodiske funktioner 2π er at de kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier $t \in \mathcal{T}^\star$. Etableringen af hovedsætningen hviler på bevis for Weierstrass' sætning. Vi har vist Weierstrass' sætning som en umiddelbar konsekvens af Fejér's sætning, hvilket involverer brugen af Fourier rækker, men beviset kan føres anderledes. Det er en bemærkelsesværdig kendsgerning at sætningen kan bevises uden at gøre brug af Fourier rækker. Når vi alligevel har gjort det skyldes det at første spørgsmål teorien bør besvare, efter hovedsætningens etablering, er hvorledes man, givet en periodisk funktion, kan konstruere trigonometriske polynomier der approksimerer funktionen. Her kommer Fourier række teori til sin fulde ret, og problemet løses fuldstændigt af Fejér's sætning.

3.6 Entydighedssætningen og Parseval's formel

Vi har nu bevist hovedsætningen og dermed fuldendt vor behandling af periodiske funktioner. Vi vil imidlertid udlede nogle yderligere sætninger, dels for senere at kunne fastholde en analogi mellem periodiske og næsten periodiske funktioner, og dels fordi vi senere skal benytte nogle særlige resultater om periodiske funktioner.

Entydighedssætningen siger at enhver periodisk funktion er fuldstændig bestemt ved sin Fourier række, det vil sige at der ikke eksisterer to forskellige periodiske funktioner med identiske Fourier rækker. Dette er en umiddelbar følge af Fejér's sætning. For lad $f(x)$ og $g(x)$ være to periodiske funktioner med identiske Fourier rækker. I følge Fejér's sætning er Fourier rækken summabel, lad os sige med sum $s(x)$, og der gælder at $f(x) = s(x) = g(x)$, d.v.s. $f(x)$ og $g(x)$ er identiske.

Parseval's formel siger at for en vilkårlig periodisk funktion $f(x)$ med Fourier række $\sum_{n\in Z} a_n e^{inx}$, gælder:

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{n\in Z} |a_n|^2$$

For at bevise denne sætning får vi brug for nogle hjælpesætninger.

Lemma 3.1 (Bessel's ulighed) *For en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{P}$, med Fourier række $\sum_{n\in Z} a_n e^{inx}$, gælder:*

$$M\{|f(x)|^2\} \geq \sum_{n\in Z} |a_n|^2$$

Bevis :

Vi har $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og betragter et trigonometrisk polynomium $t_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$. Der gælder:

$$M\{|f(x) - t_N(x)|^2\} = M\left\{(f(x) - t_N(x))(\overline{f(x)} - \overline{t_N(x)})\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right)\left(\overline{f(x)} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_n} e^{-inx}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\, dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_n} e^{-inx}\, dx$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n_1=-N}^{N} a_{n_1} e^{in_1 x} \sum_{n_2=-N}^{N} \overline{a_{n_2}} e^{-in_2 x} dx$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_n} M\{f(x)e^{-inx}\} - \sum_{n=-N}^{N} a_n \overline{M\{f(x)e^{-inx}\}}$$

$$+ \sum_{n_1=-N}^{N} \sum_{n_2=-N}^{N} a_{n_1} \overline{a_{n_2}} M\{e^{in_1 x} e^{-in_2 x}\}$$

Men da:

$$M\{e^{in_1 x} e^{-in_2 x}\} = \begin{cases} 0 & \text{for } n_1 \neq n_2 \\ 1 & \text{for } n_1 = n_2 \end{cases}$$

opnås:

$$M\{|f(x) - t_N(x)|^2\}$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_n} a_n - \sum_{n=-N}^{N} a_n \overline{a_n} + \sum_{n=-N}^{N} a_n \overline{a_n}$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2$$

Venstresiden i ovenstående er tydeligvis reel og ikke-negativ, og dermed gælder:

$$M\{|f(x)|^2\} \geq \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2$$

Da N kan vælges vilkårlig stor, gælder derfor:

$$M\{|f(x)|^2\} \geq \sum_{n \in Z} |a_n|^2$$

□

Lemma 3.2 *Lad $f(x) \in \mathcal{P}$ være en vilkårlig funktion, med Fourier række $\sum_{n \in Z} a_n e^{inx}$. Da kaldes funktionen*

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt$$

for foldningen af $f(x)$, og er en periodisk funktion med Fourier række

$$g(x) \sim \sum_{n \in Z} |a_n|^2 e^{inx}$$

Bevis :

Det er oplagt at g er periodisk, med periode 2π, men vi bør vise at g tillige er kontinuert.

Da f er begrænset eksisterer der et C så $|f(x)| \leq C$ for alle x. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da f er uniformt kontinuert kan der bestemmes et $\delta > 0$, således at:

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

g er da (uniformt) kontinuert for hvis $|x_1 - x_2| \leq \delta$ er:

$$\begin{aligned} & |g(x_1) - g(x_2)| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1+t)\overline{f(t)}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_2+t)\overline{f(t)}\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1+t) - f(x_2+t)|\left|\overline{f(t)}\right| dt \leq \frac{\varepsilon C}{C} = \varepsilon \end{aligned}$$

Fourierkoefficienterne er givet ved:

$$M\{g(x)e^{-inx}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\overline{f(x)}\,dt\right)e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)e^{-inx}\,dx\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}a_n e^{int}\,dt = a_n M\{\overline{f(t)}e^{int}\}$$

$$= a_n\overline{M\{f(t)e^{-int}\}} = a_n\overline{a_n} = |a_n|^2$$

□

Vi kan nu bevise Parseval's formel på følgende vis: Lad der være givet en vilkårlig periodisk funktion f med Fourier række $\sum_{n\in Z} a_n e^{inx}$. Vi danner foldningen af $f(x)$:

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} \sim \sum_{n\in Z} |a_n|^2 e^{inx}$$

En uendelig række $\sum_{n\in Z}\alpha_n$ med komplekse led, kaldes *absolut konvergent*, såfremt rækken $\sum_{n\in Z}|\alpha_n|$ er konvergent. I så fald er den konvergent med samme sum, uanset i hvilken rækkefølge leddene adderes i. Fourier rækken $\sum_{n\in Z}|a_n|^2 e^{inx}$ for foldningen er absolut konvergent, da

$$\sum_{n\in Z}\left||a_n|^2 e^{inx}\right| = \sum_{n\in Z}|a_n|^2\left|e^{inx}\right| = \sum_{n\in Z}|a_n|^2$$

og rækken $\sum_{n\in Z}|a_n|^2$ er konvergent i følge Bessel's ulighed. Sæt $s(x) = \sum_{n\in Z}|a_n|^2 e^{inx}$. Rækken $\sum_{n\in Z}|a_n|^2 e^{inx}$ er desuden summabel med sum $s(x)$, og ifølge Fejér's sætning gælder:

$$g(x) = s(x) = \sum_{n\in Z}|a_n|^2 e^{inx}$$

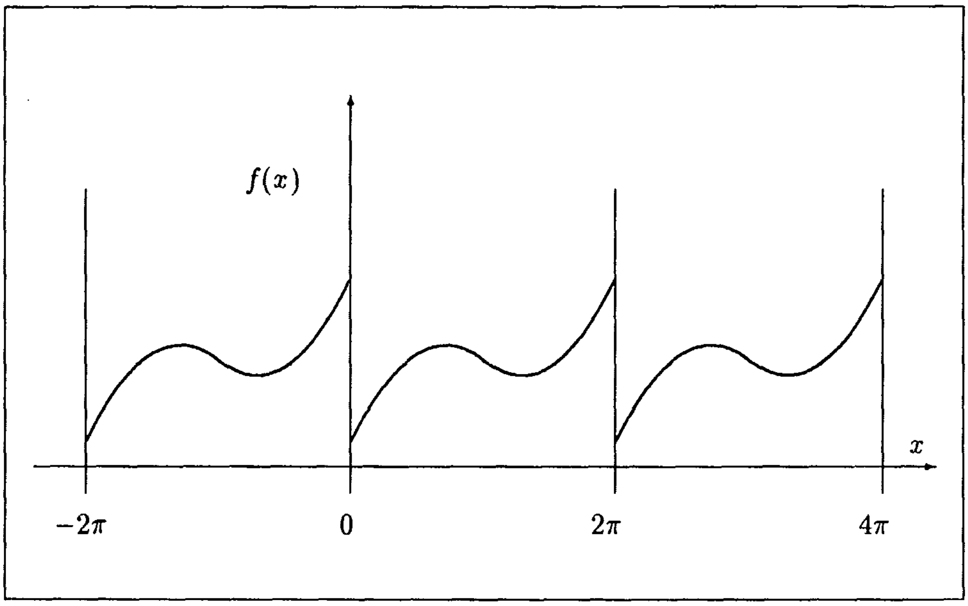
Sættes $x = 0$ opnås:

$$g(0) = M\{f(t)\overline{f(t)}\} = M\{|f(x)|^2\} = \sum_{n\in Z}|a_n|^2$$

hvilket netop er Parseval's formel.

3.7 Stykkevis kontinuerte funktioner og vilkårlige perioder

Vi har indtil nu kun behandlet kontinuerte periodiske funktioner, men de opnåede resultater har gyldighed for en langt bredere klasse af funktioner. Vi skal senere benytte et særligt resultat om stykkevis kontinuerte periodiske funktioner. Lad f betegne en begrænset periodisk funktion, med periode 2π, der er kontinuert undtagen i punkterne $\{n2\pi \mid n \in \mathcal{Z}\}$, hvor funktionen "springer".



Vi danner Fourier rækken på normal vis, det vil sige at

$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} a_n e^{inx} \quad \text{hvor} \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

er Fourier rækken for $f(x)$. Ved fuldstændigt at følge beviset for Bessel's ulighed (lemma 3.2), kan vi konkludere at $M\{|f(x)|^2\} \geq \sum_{n\in\mathcal{Z}} |a_n|^2$, d.v.s. rækken $\sum_{n\in\mathcal{Z}} |a_n|^2$, og dermed rækken $\sum_{n\in\mathcal{Z}} |a_n|^2 e^{inx}$, er konvergent.

Foldningen af f er givet ved:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt$$

og har Fourier række $\sum_{n\in Z} |a_n|^2 e^{inx}$. Beviset for dette er identisk med beviset for lemma 3.3, undtagen på et punkt. Vi må på ny argumentere for at foldningen g er kontinuert, da vi ikke kan benytte det tidligere bevis, der byggede på at f er uniformt kontinuert. Vores redning er at for ethvert $0 < \delta < 2\pi$ er f uniformt kontinuert på $[0, 2\pi - \delta]$. Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet og vælg C så $| f(x) | \leq C$ for alle x. Vi vælger et positivt

$$\delta \leq \min\{2\pi, \frac{\pi\varepsilon}{2C^2}\}$$

således at hvis $x_1, x_2 \in [0, 2\pi - \delta]$ og $| x_1 - x_2 | \leq \delta$ da gælder:

$$| f(x_1) - f(x_2) | \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

For vilkårlige x_1 og x_2, med $| x_1 - x_2 | \leq \delta$ gælder nu:

$$| g(x_1) - g(x_2) |$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1 + t) - f(x_2 + t)| \left|\overline{f(t)}\right| dt$$

$$\leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1 + t) - f(x_2 + t)| \, dt \leq \frac{C}{2\pi} \left((2\pi - \delta)\frac{\varepsilon}{2C} + \delta 2\pi \right)$$

$$\leq \frac{C}{2\pi} \left(\frac{\pi}{C}\varepsilon + \frac{\pi}{C}\varepsilon \right) = \varepsilon$$

Foldningen er således kontinuert, og dermed underkastet Fejér's sætning. Således er den sumfunktion for sin konvergente Fourier række; d.v.s.

$$g(x) = M_t\{f(x + t)\overline{f(t)}\} = \sum_{n\in Z} |a_n|^2 e^{inx}$$

Sættes $x = 0$ i ovenstående opnås Parseval's formel, og vi har dermed vist at den stykkevis kontinuerte funktion f opfylder Parseval's formel. Vi skal senere benytte denne kendsgerning i beviset for entydighedssætningen for næsten periodiske funktioner.

Alle funktioner vi har betragtet indtil videre har været periodiske med periode 2π. Et simpelt variabelskift $x\frac{2\pi}{T} = x'$ gør det muligt umiddelbart at generalisere de opnåede resultater, til kontinuerte periodiske funktioner med vilkårlig periode T. Er $f(x)$ således periodisk med periode T, er Fourier rækken givet ved:

$$f(x) \sim \sum a_n e^{in(\frac{2\pi}{T})x}$$

hvor Fourier konstanterne er

$$a_n = M\{f(x)e^{-in(\frac{2\pi}{T})x}\} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-in(\frac{2\pi}{T})x} \, dx$$

Kapitel 4

Udviklingen i det 19. århundrede

I afsnittet om periodiske funktioner har vi indirekte vist, at konvergens næppe er det smarteste begreb at anvende i forbindelse med trigonometrisk række repræsentation af en funktion, men derimod at summabilitet er fikst. I det følgende skal udviklingen henimod summabilitet skildres.

Efter at Fourier havde fået sine ideer fremført, kom næste konstruktive bidrag fra Dirichlet. Han formulerede og beviste i 1829, at hvis han antog at funktionen der skulle skrives som en trigonometrisk række opfyldte visse betingelser, så ville rækken være konvergent mod funktionen. Betingelserne fremgår af nedenstående oversatte uddrag af Dirichlets tekst[1]:

4.1 Dirichlet om Fourierrækker.

> *Vi er nu klar til bevise at rækken der repræsenterer en arbitrær funktion mellem givne grænser er konvergent. Den linie vi vil følge i beviset, vil bevise at rækken er konvergent og på samme tid bestemme rækkens værdi. Lad $f(x)$ være en funktion af x med en finit bestemt værdi for ethvert x mellem $-\pi$ og π, og lad os antage vi ønsker at udvikle denne funktion i en trigonometrisk*

[1] uddraget er hentet og oversat fra Garrett Birkhoff's 'A Source Book in Classical Analysis'

række af hele multipla af x. Som bekendt ser den række således ud:

$$(\star)\ \frac{1}{2\pi}\int f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\begin{cases}\cos x\int f(\alpha)\cos\alpha d\alpha + \cos 2x\int f(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha + \cdots \\ \sin x\int f(\alpha)\sin\alpha d\alpha + \sin 2x\int f(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha + \cdots\end{cases}$$

De integraler som bestemmer de konstante koefficienter har grænserne $\alpha = -\pi$ til $\alpha = \pi$ og x varierer mellem $-\pi$ og π.

Se på de første $2n+1$ led og undersøg hvilken sum dette udtryk går mod for voksende n. Denne sum kan skrives som:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x)\right]$$

eller

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}d\alpha$$

Det hele er nu reduceret til en bestemmelse af den grænseværdi som dette integrale går imod for n gående mod uendelig. Med dette for øje dekomponeres udtrykket i to med grænserne hhv. $-\pi$ til x og x til π. Hvis vi substituerer α med $x - 2\beta$ i det første og med $x + 2\beta$ i det andet og ser bort fra faktoren $\frac{1}{\pi}$ser udtrykkene ud som følger [2]:

$$\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(x - 2\beta)d\beta \text{ og } \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(x + 2\beta)d\beta$$

Betragt det andet af disse udtryk. Idet $x \leq \pi$, så er $0 \leq |\frac{\pi-x}{2}| \leq \pi$. Hvis $\frac{\pi-x}{2} = 0$, hvilket sker når $x = \pi$, så forsvinder integralet for alle n; i alle andre situationer vil det konvergere, når n vokser, mod en grænseværdi som vi vil bestemme. Antag derfor at $\frac{\pi-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ og bemærk at funktionen $f(x + 2\beta)$ kan have diskontinuiteter[3] mellem $\beta = 0$ og $\beta = \frac{(\pi-x)}{2}$, og at den osse kan have adskillige maxima og minima i dette interval. Lad os med $l \leq l' \leq l'' \leq l^{(r)}$ angive de værdier for β hvor disse betingelser holder, og lad os igen dekomponere vores integrale i andre med

[2] I kilden mangler f i det andet integrale

[3] solutions of continuity

grænserne 0 til l, l til l' osv. op til $\frac{\pi-x}{2}$. Alle disse integraler vil gå mod nul for voksende n med undtagelse af det første, som går mod $\frac{\pi f(x^+)}{2}$.

Her følger nogle overvejelser dels omkring $x < 0$ og dels for det andet integrale af samme art som ovenstående, som ikke er signifikate for denne opgave. Bevisuddraget viser hvorledes Dirichlet argumenterer. Han har tidligere i sin tekst vist at

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^c f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \to \frac{\pi}{2}f(0) \\ \int_b^c f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \to 0 \end{array}\right\} \text{for } n \to \infty$$

under forudsætning af $0 < b < c \leq \frac{\pi}{2}$ og at $f(x)$ er monoton i intervallet $[b, c]$; og det er disse forhold, han baserer sin efterfølgende konklusion på. Vi kan nævne at r må være endelig, om end det ikke er nævnt i teksten.

Resultatet er at:

> *Ovenstående bevis dækker alle situationer; mest simpelt når værdien for x ikke er et diskontinuitetspunkt. Ganske enkelt fordi $f(x^+)$ og $f(x^-)$ er lig med $f(x)$ i det tilfælde, og det er da, klart at rækkens værdi er $f(x)$. Ovenstående betragtninger beviser rigoristisk, at hvis en funktion $f(x)$ som er antaget at være begrænset*[4] *kun har et endeligt antal diskontinuiteter mellem grænserne $-\pi$ og π og derudover har et endeligt antal maxima og minima imellem disse grænser, så er rækken $(\star)$ med koefficienter bestemt af definitte integraler af funktionen $f(x)$ konvergent og har værdien $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.*

Så langt holder beviset, men Dirichlet har vel ikke været helt tilfreds med ikke at få dækket alle funktioner, og han fortsætter:

> *Herefter resterer betragtninger over de situationer, hvor de antagelser, vi har gjort om antallet af diskontinuiteter, maxima og minima, ikke længere holder. Disse undtagelser kan reduceres til dem vi netop har betragtet.*

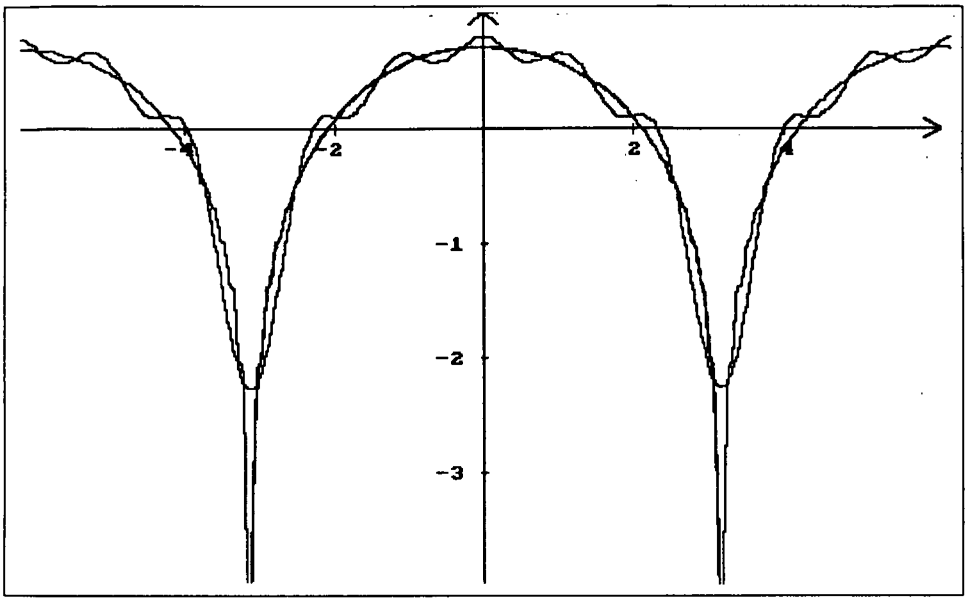
[4] bounded and single-valued ("finite and determined")

Her ved vi i dag, at Dirichlet ikke havde ret. Omkring betingelserne for rækkens konvergens mod funktionen sammenfatter Riemann senere Dirichlets betingelser i[5]:

> *Det følger fra dette at en trigonometrisk række kan benyttes til at repræsentere enhver periodisk funktion med perioden 2π som*
>
> 1. *er integrabel*
> 2. *har endeligt antal maxima og minima*[6]
> 3. *i ethvert springpunkt antager middelværdien mellem grænseværdierne*
>
> *En funktion der opfylder de to første betingelser, men ikke den 3. kan tydeligvis ikke repræsenteres af en trigonometrisk række fordi rækken der repræsenterer funktionen netop vil afvige i diskontinuitetspunktet. Om en funktion, der ikke tilfredstiller de to første betingelser, kan repræsenteres af en trigonometrisk række, er endnu ikke afklaret.*

Riemann drejer af her for at undersøge integralbegrebet. Både han og Dirichlet menes at have troet, at en tilstrækkelig betingelse for konvergens af den trigonometriske række var, at funktionen var kontinuert. Om disse funktionsbetingelser skal det i øvrigt bemærkes, at de er for generelle. Der findes for eksempel funktioner, der er ubegrænsede i intervallet eksempelvis $\frac{1}{2}\ln(2\cos\frac{1}{2}x)$, som har en konvergent række med undtagelse af intervalgrænserne, hvor rækken kan siges at 'divergere mod funktionen'. Men kontinuitet alene er ikke en tilstrækkelig betingelse og P. Du Bois -Reymond[7] var den første, der udviklede en kontinuert funktion med divergent Fourier række. Dels dette funktionseksempel og dels en fornyet interesse for de 'forbudte' divergente rækker gjorde, at man udviklede nye metoder til at summere sådanne rækker. Man ønskede at kunne tillægge rækken en sum, og man ville søge at få afklaret, hvad man i givet fald ville forstå ved et sådant tal, som rækken jo givet ikke konvergerer mod. Opblomstringen på dette felt skal måske osse ses i lyset af andre tidligere tabu områders successer, fx. indenfor geometri.

[5] uddrag fra samme kilde
[6] her må menes i et endeligt interval
[7] Se Appendix E



Figur 4.1: $\frac{1}{2}\ln(2\cos\frac{1}{2}x)$ og rækken $\sum\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\cos nx$ med de hhv. 5 og 50 første led

4.2 Summabilitet

Euler havde tidligere tillagt divergente rækker en sum udfra den brøk rækken var udviklet fra. For eksempel fik han at

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

hvorfor $\frac{1}{1+x}$ er summen af $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$. Et af problemerne ved denne definition er, at den anvendt sløset kan give forskellige resultater (alt kan vel det hvis man sløser grundigt nok). Sæt eksempelvis $x = 1$ i ovenstående; det giver rækken $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ med den kendte sum $\frac{1}{2}$. Men samme række kan fremtrylles udfra brøkerne $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ og $\frac{1-x^m}{1-x^n}$. I det første tilfælde får rækken, stadig for $x = 1$, værdien $\frac{2}{3}$; men det kan diskuteres, om den udviklede rækken er helt identisk med den fra $\frac{1}{1+x}$, idet der 'mangler' nogle led. Vedrørende den anden brøk kan vi konstatere, at vi er helt på den med hensyn til værdien for $x = 1$, iøvrigt uafhængigt af n og m. Dens udvikling indeholder omvendt muligvis for mange led, men da os bekendt ingen har slået fast, hvilke led man skal tage hensyn til, er man kort sagt på herrens mark ved anvendelse af denne metode. Det er som et spil, hvor fantasien er et 'prøv lykken' kort. Som tidligere nævnt havde Euler dog en utrolig fornemmelse for dette spil, og det skal osse fastslås, at ovennævnte absolut ikke var den eneste metode, han anvendte.

I slutningen af det 19.århundrede så man på en divergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og definerede afsnitssummen

$$s_n = \sum_{v=0}^{n} a_v$$

og tillagde rækken summen

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

Altså faktisk middelværdien af afsnitssummerne. Hvis vi atter ser på rækken $1-1+1-1+1-1+\cdots$ får vi at $s_l = 1, s_u = 0$ (l er et lige tal, u et ulige) og dermed $S_0 = 1, S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_4 = \frac{1}{2}$ osv. hvoraf det fremgår at

$$S_n \to \frac{1}{2} \text{ for } n \to \infty$$

og rækkens sum er derfor $\frac{1}{2}$.

Det er til gengæld nemt at vise at måden at summere på ikke er generel nok. Hvis vi ser på følgende divergente række for $x = 1$

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots$$

har vi at

$$s_0 = -1, s_1 = 1, s_2 = -2, s_3 = 2, s_4 = -3 \text{ osv.}$$

og dermed vil S_n svinge mellem ydergrænserne -1 og 0. De første par stykker er

$$S_0 = -1, S_1 = 0, S_2 = -\tfrac{2}{3}, S_3 = 0, S_4 = -\tfrac{3}{5}$$

og det ses at $S_u = 0$ mens $S_l \to -\frac{1}{2}$, således eksisterer $\lim_{n\to\infty} S_n$ ikke. Man indførte derfor summabilitet af orden r ved ikke kun at tage middelværdien af afsnitssummerne, men middelværdien af middelværdien af ... indtil den r'te middelværdi. Det var egentlig Hölder der lavede der generalisering, men den er blevet navngivet efter Cesaro, formodentlig fordi hans metode dels er ækvivalent med ovenstående samtidig med at den skulle være lettere at regne med (vi har ikke prøvet). Mere formelt ser Hölders definition således ud:

$$\begin{aligned}
s_n^{(0)} &= s_n \\
S_n = s_n^{(1)} &= \frac{1}{n+1}\left(s_0^{(0)} + s_1^{(0)} + s_2^{(0)} + \cdots + s_n^{(0)}\right) \\
s_n^{(2)} &= \frac{1}{n+1}\left(s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)}\right) \\
&\vdots \\
s_n^{(r)} &= \frac{1}{n+1}\left(s_0^{(r)} + s_1^{(r)} + s_2^{(r)} + \cdots + s_n^{(r)}\right)
\end{aligned}$$

og rækken siges at være h'te ordens summabel såfremt $\lim_{n\to\infty} s_n^{(h)}$ eksisterer. Hvis vi ser på eksemplet fra før $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots$ stadig med $x = 1$ får vi

$$s_0^{(2)} = -1, s_1^{(2)} = -\frac{1}{2}, s_2^{(2)} = -\frac{5}{9}, s_3^{(2)} = -\frac{5}{12}$$

med det tilfredsstillende resultat at $\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = -\frac{1}{4}$. Tilfredsstillende, fordi vi ved, at rækken er udviklet fra brøken $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

Der findes andre måder at summere på, Cesaros viste sig at være den samme som ovenstående, men tidligere havde i hvert fald Abel arbejdet med en metode som har visse fælles træk med en af Eulers metoder. Abel så på divergente rækker

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

og bemærkede, at det var meget almindeligt, man fandt summen ved at opskrive polynomiet (potensrækken)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

og for eksempel derefter finde en brøk som polynomiet kunne udvikles fra. Summen ville så være værdien af denne brøk for $x = 1$. Dette giver lidt af forklaringen på, at man kunne tale om for mange og for få led i brøkudviklinger, da x i polynomiet optræder netop en gang i hver naturlig eksponent. Han påpegede så, at hvis polynomiet var konvergent for $x < 1$, at man istedet kunne arbejde med polynomiet for $x \to 1^-$.

4.3 Zeta-funktionen

Riemann gav, som vi tidligere har nævnt, nogle bidrag der fandt anvendelse inden for de periodiske funktioner. Det vi imidlertid vil se på nu, er hans arbejde vedrørende Eulers funktion:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

som Riemann gav navnet: Zetafunktionen

Allerede Euler havde vist at der gælder at

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^z (p_k^z - 1)^{-1}$$

hvor p_k er det k'te primtal

Bevis :

For $Re(z) > 1$ er $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konvergent. Da primfaktoropløsning er entydig[8], har vi

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \qquad \Leftrightarrow$$

$$a = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^z} a = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} \cdots \qquad \Leftrightarrow$$

$$(1 - \frac{1}{2^z}) a = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} \cdots \qquad \Leftrightarrow$$

$$(1 - \frac{1}{2^z}) \frac{1}{3^z} a = \frac{1}{3^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{15^z} + \frac{1}{21^z} \cdots \qquad \Leftrightarrow$$

$$(1 - \frac{1}{2^z})(1 - \frac{1}{3^z}) a = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \frac{1}{13^z} \cdots \qquad \Leftrightarrow$$

[8] Se Appendix C.2

$$(1-\frac{1}{2^z})(1-\frac{1}{3^z})\frac{1}{5^z}a = \frac{1}{5^z}+\frac{1}{25^z}+\frac{1}{35^z}+\frac{1}{55^z}\cdots \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-\frac{1}{2^z})(1-\frac{1}{3^z})(1-\frac{1}{5^z})a = 1+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{11^z}+\frac{1}{13^z}+\frac{1}{17^z}\cdots \quad \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

$$(1-\frac{1}{2^z})(1-\frac{1}{3^z})(1-\frac{1}{5^z})(1-\frac{1}{7^z})(1-\frac{1}{11^z})\cdots(1-\frac{1}{p_k^z})\cdots a = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-z})^{-1}$$

□

Således kan det altså ses, at der er en sammenhæng mellem denne funktion og primtallene, og det viser sig at man udfra funktionen kan konkludere om primtallenes fordeling.

Ved en Dirichlet række forstås en række af formen

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

hvor a_n er en følge af komplekse tal, λ_n er en følge af reelle tal og z er en kompleks variabel. I 1880'erne viste den danske telefoningeniør Jensen udfra studiet af disse rækker, at der eksisterer en vertikal skillelinie $x_0 + iy$ i den komplekse plan, således at rækken $D(x+iy)$ er konvergent såfremt $x > x_0$ og divergent når $x < x_0$

Zetafunktionen er en Dirichlet række

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\log n}$$

altså med $a_n = 1$ og $\lambda_n = -\log n$. Hvis vi ser på funktionens konvergensforhold for en reel variabel, er det klart at den vertikale skillelinie er $v_\zeta = 1+iy$, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

netop er konvergent for $x > 1$, og divergent for $x \leq 1$.

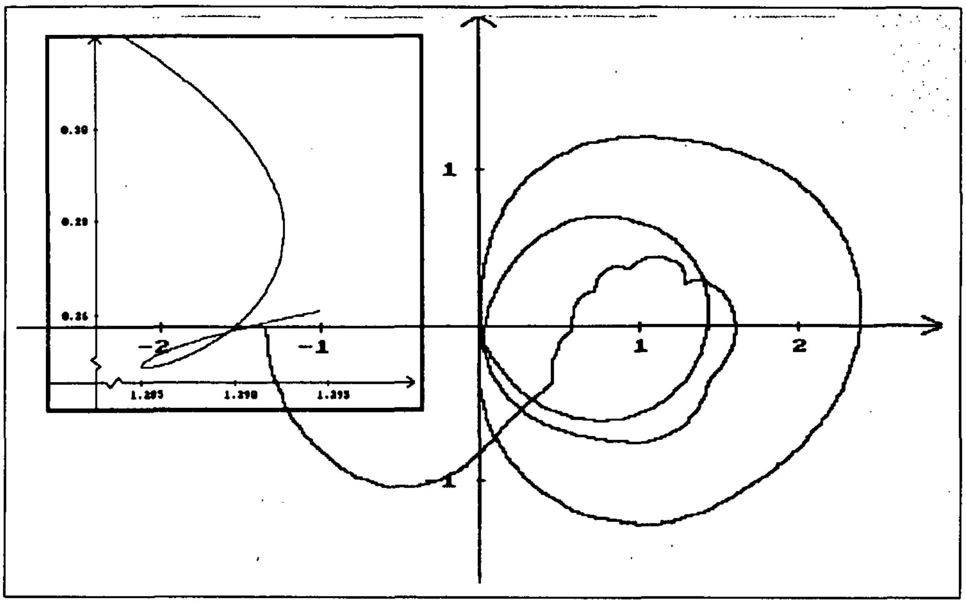
Det område som er specielt interessant i forbindelse med zetafunktionen er beklageligvis det område hvor $0 < Re(z) < 1$. For at kunne arbejde med funktionen der, må den udvides analytisk (gøres differentiabel, med en kontinuert afledet funktion) til at gælde i hvert fald i området $Re(z) > 0$ dog forskellig fra 1. Dette kan for eksempel gøres således:
Vi ser på rækken

$$\begin{aligned}
\varpi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-z}, \text{ hvorved vi kan få} \\
\varpi(z) + \zeta(z) &= 2^{1-z}\zeta(z) \text{ som for } 2^{1-z} \neq 1 \text{ giver} \\
\zeta(z) &= \frac{1}{2^{1-z}-1}\varpi(z) \Leftrightarrow \\
\zeta(z) &= \frac{1}{2^{1-z}-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-z}
\end{aligned}$$

Når interessen samler sig om dette område, skyldes det den endnu ubeviste Riemannhypotese om, at zetafunktionens eventuelle nulpunkter alle har $Re(z) = \frac{1}{2}$. Når funktionen er, udvidet er det i dag let at søge nulpunkter via computer, og man har beregnet, at indenfor de første par millioner imaginære enheder holder hypotesen. Det er tillige bevist i begyndelsen af dette århundrede, at zetafunktionen har uendelig mange nulpunkter på linien $\frac{1}{2} + iy$, men det er jo ikke det samme som, at de allesammen ligger på linien.

4.4 Harald Bohrs udgangspunkt

Harald Bohr blev født i 1887. Han var søn af professor i fysiologi, Christian Bohr og Ellen Bohr, datter af den fremtrædende forretningsmand David Adler, der oprettede såvel Handels- som Privatbanken og desuden var folketingsmand. Lige fra barnsben var Harald, som sin to år ældre bror Niels, intenst interesseret i videnskab, og allerede som 17-årig begyndte han på matematikstudiet ved Københavns Universitet. Han må have været en flittig og talentfuld student, for i en alder af blot 23 år, forsvarede han med held sin doktordisputas: *Bidrag til de Dirichlet'ske rækkers teori.* I denne afhandling indskrænkede Bohr sig til at betragte de oprindelige Dirichlet rækkere hvor



Figur 4.2: $\zeta(\frac{1}{2}x + iy)$ for $y \in [0, 25]$ med et forstørret udsnit

$\lambda_n = -\log(n)$, det vil sige rækkerne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\log n)z}$$

Bohr styrkede resultatet om konvergens til højre for en lodret skillelinie ved at benytte summabilitet fremfor konvergens. Han viste blandt andet, at der eksisterer en uendelighed af skillelinier $x_0 + iy, x_1 + iy, x_2 + iy, \ldots$, således at rækken er summabel af r'te orden hvis $x > x_r$, men ikke hvis $x < x_r$ Disse linier er ikke nødvendigvis forskellige, og Bohr viste tillige at deres indbyrdes afstand dels er aftagende og dels maksimalt er 1.

Efter sit indledende arbejde med Dirichlet rækker, vendte Bohr en overgang sin interesse mod Riemanns zetafunktion, hvor han sammen med Landau udforskede funktionens opførsel i den kritiske strimmel $0 < Re(z) < 1$. Det første de viste sammen var at funktionen begynder at opføre sig mærkeligt allerede i den yderste kant af strimlen og ikke som man da troede først inde omkring $Re(z) = \frac{1}{2}$. Det lykkedes at bevise, at funktionen enten antog alle værdier overhovedet eller osse alle værdier med undtagelse af netop en nær strimlens kant. Det viste sig at være det sidste der var tilfældet, hvor undtagelsen netop var tallet 0. I det videre arbejde fik de udfra den beslægtede funktion $(1 - 2^{1-z})\zeta(z)$ vist, at de fleste rødder ligger tæt på $Re(z) = \frac{1}{2}$. Omtrent samtidig godtgjorde Hardy, at der var uendelig mange nulpunkter for $Re(z) = \frac{1}{2}$, og disse to resultater var i hvert fald stadig op til 1970'erne de stærkeste bidrag til en afklaring af Riemanns hypotese. Harald Bohr skrev faktisk på den tid sammen med Littlewood en tekst om zetafunktionen og dens anvendelse overfor primtallene, som dog aldrig blev udgivet. Senere, efter at have været medforfatter på en lærebog om matematisk analyse, vendte han sig igen imod Dirichlet rækker. Han skriver selv, at det lykkedes ham at bryde igennem et alment problem, som havde optaget ham i længere tid. Han ville gerne finde ud af hvad der var karakteristisk for de komplekse funktioner, der kan repræsenteres som en Dirichlet række. Problemet minder om 1800-tallets arbejde med Fourier rækker, og ligesåvel som datidens resultater var delvise, kan det diskuteres i hvor høj grad det lykkedes ham, for problemet er utrolig komplekst og efter vores mening endnu ikke afklaret tilfredsstillende. Han undersøgte nogle særtilfælde og et uventet resultat af dette blev til en helt ny teori: Teorien om næsten periodiske funktioner. Hvilke problemer Bohr oprindelig havde stillet sig helt præcist er uvist. Hvis vi ser på hans beslægtede arbejder, kan man dog tænke sig, at han enten blot ville videre i sin viden om Dirichlet rækker, eller mere sandsynligt er det dog, at han forsøgte at nå længere i gåden om zetafunktionens nulpunkter. Det er blandt andet muligt, at han søgte at få Fourier rækker til at gå op i en højere enhed med de forskellige udviklinger af zetafunktionen. Uanset hvilke mål han oprindelige har udset sig, nåede han dem formodentlig ikke, men han fandt til gengæld på vejen grundstenene til den teori, der skulle blive hans store bidrag til matematikken.

Bohr betragtede Dirichlet rækker på en vertikal linie, det vil sige lad $z = x_0 + iy$ hvor x_0 er vilkårlig men fastholdt. Hvilke funktioner $f(x_0 + iy)$ kan da repræsenteres ved rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n(x_0+iy)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda_n y}\ , \text{hvor}\ \ b_n = a_n e^{\lambda_n x_0}$$

Bemærk at Dirichlet rækkens konvergens er sikret hvis rækken $\sum |b_n|$ er konvergent. I undersøgelsen er det nu tilstrækkeligt at se på komplekse funktioner af reel variabel, da z er bundet til en linie fremfor at kunne løbe frit i den komplekse plan. Spørgsmålet kan nu reformuleres til hvad der karakteriserer de funktioner, der kan skrives som:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda_n y}$$

og approksimeres uniformt af et endeligt udsnit af rækken, dvs. et trigonometrisk polynomium. Man kendte svaret i et specielt tilfælde på forhånd: Hvis den reelle følge (λ_n) vælges så alle led er hele multipla af en vilkårlig konstant (f.eks. $\lambda_n = \frac{n2\pi}{p}$ for et passende p), opnås netop alle de kontinuerte periodiske funktioner med en periode, der afhænger af det tal λ_n er hele multipla af (i eksemplet perioden p). Denne binding på λ_n er restriktiv, og det var Bohrs ønske at karakterisere funktioner for en vilkårlig reel talfølge (λ_n). Herved ledtes han netop til studiet af de næsten periodiske funktioner.

Dette er ganske interessant, for det viser at teorien for næsten periodiske funktioner ikke blev udviklet udfra et ønske om at generalisere teorien for periodiske funktioner, men derimod udfra studiet af Dirichlet rækker; og selv i studiet af disse rækker er teorien et biprodukt. Bohr ønskede jo generelt at beskrive de komplekse funktioner, der kan repræsenteres ved en Dirichlet række, men udviklede teorien ved blot at betragte de af rækkerne, der er bundet til en vertikal linie.

Inden han nåede til vejs ende, havde stien været hullet og stenet. Han havde oprindelig forsøgt at arbejde med andre definitioner på næsten periodicitet, end den han sluttede med, men disse havde på forskellige måder vist sig at være blindgyder. Hans originale tekster indeholder ligeledes en del 'tunge' beviser, og det var kun lykkedes for Bohr at opnå en del af det han ville, om end hans udvikling af selve teorien var særdeles succesrig. Disse forhold kan have været medvirkende til at anspore andre matematikere til at arbejde med teorien.

Bohr's resultater blev publiceret i 3 artikler i *Acta Mathematica* i årene 1924-26. I de 2 første artikler, der begge var temmelig omfangsrige, formuleres teoriens problem, og hovedsætningen bevises. I den 3. noget kortere artikel behandlede Bohr næsten periodicitet for komplekse funktioner af kompleks variabel, hvor han når til at se på analytiske næsten periodiske funktioner og deres korresponderende Dirichlet rækker. Når vi senere referer til Bohr's artikler menes disse tre, især de første to.

Kapitel 5

Næsten periodiske funktioner

5.1 Indledning

Vi har tidligere bevist den fundamentale identitet

$$\mathcal{P} = H(\mathcal{T}^\star)$$

mellem mængden af periodiske funktioner, og afslutningen af mængden af trigonometriske polynomier med heltallige frekvenser. Vi skal nu arbejde med den større mængde $\mathcal{T}$ af trigonometriske polynomier. Vi erindrer at ethvert $t \in \mathcal{T}$ kan skrives som:

$$t(x) = \sum_n^{\star} a_n e^{i\lambda_n x}$$

hvor koefficienterne a_n er komplekse og eksponenterne λ_n er reelle. Vi afslutter $\mathcal{T}$, d.v.s. betragter mængden $H(\mathcal{T})$ af funktioner der approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier.

Vores sigte er nu at beskrive de egenskaber der kendetegner funktionerne i $H(\mathcal{T})$, eller anderledes formuleret: Beskrive hvad der karakteriserer de bevægelser i planen, der kan opløses i rene svingninger af typen $e^{i\lambda x}$. Dette er en reel udvidelse af det periodiske tilfælde, for der tillod vi kun de rene svingninger at antage heltallige frekvenser. Dermed blev de 'indbyrdes harmoniske', i den forstand at de alle har perioden 2π til fælles. Det er ikke længere tilfældet, for da frekvenserne nu kan antage alle reelle værdier, kan forholdet mellem to harmoniske svingningers periode være irrationelt, og de vil da ikke have nogen fælles periode. Generelt er funktionerne i $H(\mathcal{T})$ derfor ikke periodiske, men $H(\mathcal{T})$ indeholder alle (kontinuerte) periodiske funktioner, d.v.s. $\mathcal{P} = H(\mathcal{T}^\star) \subset H(\mathcal{T})$ da $\mathcal{T}^\star \subset \mathcal{T}$.

Den karakteristiske egenskab ved funktionerne i $H(\mathcal{T})$ er næsten periodicitet. Hovedsætningen om næsten periodiske funktioner er derfor relationen

$$\boxed{\mathcal{F} = H(\mathcal{T})}$$

hvor $\mathcal{F}$ betegner mængden af næsten periodiske funktioner.

I udviklingen af hovedsætningen vil det måske være mest naturligt at tage udgangspunkt i mængden $H(\mathcal{T})$, og forsøge at finde de egenskaber der besiddes af alle funktioner i $H(\mathcal{T})$, og kun af funktioner i $H(\mathcal{T})$. Disse egenskaber kan da indgå i en definition af næsten periodicitet. Det må have været den vej Bohr oprindeligt arbejdede. I bagklogskabens navn vil vi dog gå frem i modsat retning. Først defineres næsten periodicitet, og med udgangspunkt i mængden $\mathcal{F}$, viser vi at denne er identisk med $H(\mathcal{T})$. Fremgangsmåden er stort set den samme som for periodiske funktioner, men teorien er langt mere kompliceret, og vi får brug for en lang række resultater. Først vises nogle simple egenskaber ved næsten periodiske funktioner (uniform kontinuitet, $\mathcal{F}$ er et vektorrum etc.). Dernæst opbygges en Fourier række teori, og efter bevis for entydighedssætningen og Parsevals formel, er hovedsætningen indenfor rækkevidde.

Indholdet i dette kapitel svarer nogenlunde til den teori Bohr præsenterede i sine første to artikler, men formen er anderledes. Først og fremmest er de vigtigste beviser gengivet i senere, og stærkt simplificerede, versioner.

Da vi diskuterede hovedsætningen $\mathcal{P} = H(\mathcal{T}^\star)$ for periodiske funktioner, så vi hvor simpelt det er at vise $\mathcal{P} \supseteq H(\mathcal{T}^\star)$. Det egentlige problem er at vise Weierstrass' sætning $\mathcal{P} \subseteq H(\mathcal{T}^\star)$. Tilsvarende er det forholdsvis enkelt at vise $\mathcal{F} \supseteq H(\mathcal{T})$, men langt vanskeligere at bevise udsagnet $\mathcal{F} \subseteq H(\mathcal{T})$ (der kaldes approksimationssætningen). Approksimationssætningen kan, ligesom Weierstrass' sætning, bevises uden brug af Fourier rækker. Men som i det periodiske tilfælde bør teorien tillige besvare spørgsmålet: *Hvorledes kan man bestemme trigonometriske polynomier, der approksimerer en given næsten periodisk funktion?* Igen er det her Fourier rækker opnår deres betydning. Som for periodiske funktioner er der en dyb forbindelse mellem en næsten periodisk funktion, og den tilhørende Fourier række. Spørgsmålet besvares ikke i Bohr's oprindelige teori, men vi vil diskutere det i slutningen af kapitlet, og løse problemet ved at bevise Bochner's summationssætning, der er analog til Fejér's sætning for periodiske funktioner.

5.2 Definition af næsten periodicitet

Definition 5.1 *En mængde af reelle tal siges at være relativ tæt, hvis der eksisterer et positivt tal L (inkluderingslængden), så ethvert interval af længde L indeholder mindst et element fra mængden.*

Eksempelvis er $\{np \mid n \in \mathcal{Z}\}$ for et reelt $p \neq 0$ en relativ tæt mængde, mens det ikke er tilfældet for $\{n^3 \mid n \in \mathcal{Z}\}$.

Definition 5.2 *Tallet τ siges at være et forskydningstal (eller en næsten periode) for funktionen f hørende til ε, hvis der gælder:*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \textit{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Vi betegner forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ eller $\tau_f(\varepsilon)$, og mængden af alle forskydningstal hørende til et givet ε betegnes $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ eller blot $\{\tau(\varepsilon)\}$.

Definition 5.3 *En kontinuert funktion $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ for hvilken der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en relativ tæt mængde af forskydningstal, kaldes næsten periodisk.*

Enhver (kontinuert) periodisk funktion er dermed næsten periodisk. For har funktionen periode p, da er $\{np \mid n \in \mathcal{Z}\}$ en relativ tæt mængde af forskydningstal, hørende til ethvert $\varepsilon > 0$.

Da vi behandlede periodiske funktioner kunne vi indskrænke vore betragtninger til et begrænset og afsluttet interval (f.eks. $[0, 2\pi]$), der er repræsentativt for funktionerne. Således kunne vi problemfrit definere middelværdi og slutte at enhver periodisk funktion er uniformt kontinuert og begrænset. Desuden er det oplagt at summen og produktet af to periodiske funktioner, i sig selv er periodisk med samme periode. *Intet af dette er oplagt for næsten periodiske funktioner.* I det følgende vil det være nødvendigt at bevise bl.a. disse simple egenskaber, før vi kan introducere Fourier rækker.

5.3 Simple egenskaber

Sætning 5.1 *Enhver næsten periodisk funktion er begrænset, d.v.s. der eksisterer et reelt tal C så $|f(x)| \leq C$ for alle x.*

Bevis :

Da f er næsten periodisk eksisterer der et tal $L(1)$ så ethvert interval $[a, a + L(1)]$ indeholder et forskydningstal $\tau(1)$ for f hørende til $\varepsilon = 1$. Der eksisterer et C så $|f(x)| \leq C$ for alle x i det kompakte (afsluttede og begrænsede) interval $[0, L(1)]$. For et vilkårligt x findes der et forskydningstal $\tau(1)$ så $(x + \tau(1)) \in [0, L(1)]$, og dermed fås:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x + \tau(1))| + |f(x + \tau(1))| \leq C + 1$$

d.v.s. f er begrænset. □

Sætning 5.2 *Enhver næsten periodisk funktion er uniformt kontinuert.*

Bevis :

Betragt en vilkårlig næsten periodisk funktion f og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg inkluderingslængden $L = L(\frac{\varepsilon}{3})$ således at ethvert interval af længde L indeholder et forskydningstal for f hørende til $\frac{\varepsilon}{3}$.

f er uniformt kontinuert på det kompakte interval $[-1, L + 1]$, d.v.s. vi kan bestemme et positivt δ (< 1), således at for vilkårlige punkter $y_1, y_2 \in [-1, L + 1]$ med $|y_1 - y_2| \leq \delta$ gælder: $|f(y_1 - y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Lad nu x_1 og x_2 være vilkårlige punkter med $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Et forskydningstal $\tau = \tau(\frac{\varepsilon}{3})$ kan bestemmes således at $y_1 = x_1 + \tau$ ligger i $[0, L]$ og $y_2 = x_2 + \tau$ ligger dermed i $[-1, L + 1]$. Da gælder:

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - f(x_2)| \\ \leq\ &|f(x_1) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(y_2)| + |f(y_2) - f(x_2)| \\ \leq\ &\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Korollar 5.1 *Givet en vilkårlig næsten periodisk funktion f og et $\varepsilon > 0$, eksisterer der en inkluderingslængde $L_f(\varepsilon)$ og et $\delta > 0$ således at ethvert interval af længde $L_f(\varepsilon)$ indeholder ikke blot éet forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$, men et helt interval af længde δ bestående af forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$.*

Bevis :

Lad $L = L_f(\frac{\varepsilon}{2})$ betegne en inkluderingslængde for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$ og $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ være valgt i henhold til den uniforme kontinuitet, d.v.s. således at:

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

I et vilkårligt interval $[a, a + L]$ af længde L, vil der kunne findes et forskydningstal $\tau = \tau_f(\frac{\varepsilon}{2})$ for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Vi bemærker nu at ethvert tal $\tau + r$, hvor $|r| \leq \delta$, er et forskydningstal for f hørende til ε, og intervallet $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ er indeholdt i $[a - \delta, a + \delta + L]$; d.v.s. ethvert interval af længde $L + 2\delta$, indeholder et interval af længde 2δ, der består af lutter forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$. □

Sætning 5.3 *Hvis f er en næsten periodisk funktion og $\Psi : \mathcal{A} \to C$ er en kontinuert funktion, defineret på en mængde $\mathcal{A} \subseteq C$ der indeholder afslutningen $\overline{f(\mathcal{R})}$ af værdimængden for f; da er $\Psi(f(x))$ en næsten periodisk funktion.*

Bevis :

Det er indlysende at $\Psi(f(x))$ er kontinuert. Da f er begrænset er $\overline{f(\mathcal{R})}$ kompakt. En kontinuert funktion er uniformt kontinuert på en kompakt mængde, d.v.s. Ψ er uniformt kontinuert på $\overline{f(\mathcal{R})}$, og specielt på $f(\mathcal{R})$. Altså findes til ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, så:

$$|\Psi(c_1) - \Psi(c_2)| \leq \varepsilon \qquad \text{for} \quad |c_1 - c_2| \leq \delta$$

og dermed gælder:

$$|\Psi(f(x + \tau)) - \Psi(f(x))| \leq \varepsilon \qquad \text{for} \quad |f(x + \tau) - f(x)| \leq \delta$$

Ethvert forskydningstal $\tau(\delta)$ for f er altså et forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for $\Psi(f(x))$, der således er næsten periodisk. □

Korollar 5.2 *Hvis $f(x)$ er en næsten periodisk funktion, da er $-f(x)$, $|f(x)|$, $\overline{f(x)}$, $Re(f(x))$, $Im(f(x))$ og $cf(x)$ for vilkårlige $c \in \mathcal{C}$, næsten periodiske funktioner.*

Bevis :

En umiddelbar konsekvens af sætning 5.3. □

For enhver næsten periodiske funktion $f(x)$, og et vilkårligt $k \in \mathcal{R}$ er funktionerne $f(kx)$ og $f(x+k)$ næsten periodiske. Tilfældene er ikke inkluderet i sætning 5.3, men er ganske indlysende. Vi bemærker desuden at $\frac{1}{f(x)}$ er næsten periodisk hvis og kun hvis afslutningen af værdimængden for f ikke indeholder 0, d.v.s. hvis der eksisterer et $\alpha > 0$ så $| f(x) | \geq \alpha$ for alle x.

Løst formuleret siger korollar 5.2 at simple operationer med en funktion, bevarer næsten periodicitet. Vi ønsker at vise at 'simple operationer' med et endeligt antal næsten periodiske funktioner ligeledes bevarer næsten periodiciteten. Eksempelvis at summen og produktet af to (eller flere) næsten periodiske funktioner, er en næsten periodisk funktion. Til dette skal vi bruge følgende lemma:

Lemma 5.1 *Lad f og g være næsten periodiske funktioner. Givet et $\varepsilon > 0$ vil mængden af fælles forskydningstal for f og g hørende til ε være relativ tæt. D.v.s. for alle $\varepsilon > 0$ er mængden:*

$$\{\tau_f(\varepsilon)\} \bigcap \{\tau_g(\varepsilon)\}$$

relativ tæt.

Bevis :

For f vælger vi et positivt $L_f = L_f(\frac{\varepsilon}{2})$ og et $\delta_f > 0$, således at ethvert interval af længde L_f indeholder et interval af længde δ_f bestående af lutter forskydningstal $\tau_f(\frac{\varepsilon}{2})$ for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Dette kan gøres ifølge korollar 5.1. Tilsvarende vælges L_g og δ_g for g. Sæt:

$$L = \max\{L_f, L_g\} \quad \text{og} \quad \Delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$$

For både f og g gælder nu at ethvert interval af længde L, indeholder et interval $[a, a + \Delta]$ bestående af forskydningstal hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Specielt kan vi vælge forskydningstal der er hele multipla af Δ; d.v.s. i et vilkårligt interval $[a, a + L]$ kan vi vælge forskydningstal τ_f og τ_g, for hhv. f og g hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$, således at: $(\tau_f, \tau_g) = (n\Delta, m\Delta)$, hvor $n, m \in \mathcal{Z}$. Et sådant par af forskydningstal kaldes intervallets *konfiguration*. Ethvert interval af længde L har en eller flere konfigurationer. Har et givet interval flere konfigurationer, udvælger vi blot en af dem og omtaler den som intervallets konfiguration. Hermed opnås at hvert interval, af længde L har en og kun en konfiguration. To konfigurationer (τ_f, τ_g) og (τ_f', τ_g') siges at være *kongruente* hvis $\tau_f - \tau_f' = \tau_g - \tau_g'$ eller tilsvarende hvis $\tau_f - \tau_g = \tau_f' - \tau_g'$.

For et vilkårligt interval $[a, a + L]$ med konfiguration (τ_f, τ_g) gælder $| \tau_f - \tau_g | \leq L$. Desuden er såvel τ_f som τ_g et helt multiplum af Δ, og dermed er differensen $\tau_f - \tau_g$ ligeledes et helt multiplum af Δ. Differensen kan således kun antage endeligt mange værdier, da $\tau_f - \tau_g = n\Delta$, $n \in \mathcal{Z}$ og $| n\Delta | \leq L$. Dermed kan vi udvælge et endeligt antal intervaller:

$$[a^1, a^1 + L], [a^2, a^2 + L], \ldots, [a^N, a^N + L]$$

med tilhørende konfigurationer:

$$(\tau_f^1, \tau_g^1), (\tau_f^2, \tau_g^2), \ldots, (\tau_f^N, \tau_g^N)$$

således at for et vilkårligt interval af længde L vil den tilhørende konfiguration, være kongruent med en af konfigurationerne (τ_f^n, τ_g^n), $n = 1, 2, \ldots, N$.

Sæt nu $M = \max\{| \tau_f^1 |, | \tau_f^2 |, \ldots, | \tau_f^N |\}$. Vi vil vise at ethvert interval $[a, a + L + 2M]$ indeholder et fælles forskydningstal τ for f og g, hørende til ε.

Lad (τ_f, τ_g) være konfigurationen for et vilkårligt interval $[a + M, a + M + L]$. Der findes et $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ så (τ_f, τ_g) er kongruent med

(τ_f^n, τ_g^n). Tallet $\tau = \tau_f - \tau_f^n = \tau_g - \tau_g^n$ vil da tilhøre intervallet $[a, a + L + 2M]$, da $\tau_f \in [a + M, a + M + L]$ og $|\tau_f^n| \leq M$. Desuden vil τ være et forskydningstal for f og g hørende til ε, da det er differensen af to forskydningstal hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. □

Sætning 5.4 *Hvis f og g er næsten periodiske funktioner, og $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ er en kontinuert funktion defineret på en mængde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^2$ der indeholder afslutningen af mængden $\{(f(x), g(x)) \mid x \in \mathcal{R}\}$, da er $\Psi(f(x), g(x))$ en næsten periodisk funktion.*

Bevis :

Bemærk først at $\Psi(f(x), g(x))$ er kontinuert. Afslutningen $\overline{\mathcal{A}}$ af mængden $\mathcal{A} = \{(f(x), g(x)) \mid x \in \mathcal{R}\}$ er kompakt, og Ψ er dermed uniformt kontinuert på $\overline{\mathcal{A}}$, og specielt på $\mathcal{A}$. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes dermed et $\delta > 0$ så:

$$|\Psi(c_1, c_2) - \Psi(c_1', c_2')| \leq \varepsilon$$

for $|c_1 - c_1'| \leq \delta$ og $|c_2 - c_2'| \leq \delta$. Ethvert fælles forskydningstal $\tau(\delta)$ for f og g er derfor et forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for $\Psi(f(x), g(x))$, og der eksisterer en relativ tæt mængde af sådanne forskydningstal ifølge lemma 5.1. □

Korollar 5.3 *Lad f og g være næsten periodiske funktioner. Da er $f(x) + g(x)$ og $f(x)g(x)$ næsten periodiske funktioner.*

Bevis :

En umiddelbar konsekvens af sætning 5.4. □

Af de foregående sætninger følger at for vilkårlig $c \in \mathcal{C}$ og næsten periodiske funktioner f og g, gælder at $cf(x)$ og $f(x) + g(x)$ er næsten periodiske funktioner. Dermed udgør mængden af næsten periodiske funktioner et *vektorrum* over $\mathcal{C}$.

Sætning 5.5 *Enhver funktion der kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier, er en næsten periodisk funktion. Anderledes udtrykt: $H\{\mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{F}$.*

Bevis :

Vi bemærker først at ethvert trigonometrisk polynomium

$$t(x) = \sum_{n}^{\star} a_n e^{i\lambda_n x}$$

er næsten periodisk, da det er summen af endeligt mange periodiske funktioner.

Lad $f \in H(\mathcal{T})$. Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi vælge et trigonometrisk polynomium t, så:

$$|f(x) - t(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Lad $\tau = \tau_t(\frac{\varepsilon}{3})$ være et forskydningstal for t hørende til $\frac{\varepsilon}{3}$. Da gælder:

$$\begin{aligned} & |f(x+\tau) - f(x)| \\ \leq\ & |f(x+\tau) - t(x+\tau)| + |t(x+\tau) - t(x)| + |t(x) - f(x)| \\ \leq\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Vi har hermed bevist den ene halvdel af hovedsætningen.

5.4 Middelværdisætningen

Middelværdien af en funktion er et centralt begreb. I teorien for periodiske funktioner benyttede vi middelværdibegrebet til at definere norm, indre produkt og Fourier rækker. Vi skal nu definere de tilsvarende begreber for næsten periodiske funktioner. Da mængden af periodiske funktioner er indeholdt i mængden af næsten periodiske funktioner, vil det være hensigtsmæssigt at definere begreberne på en sådan måde at der, for periodiske funktioner, er overensstemmelse med de tidligere benyttede definitioner. For periodiske funktioner kan vi bestemme middelværdien ved at betragte et vilkårligt interval, af længde 2π. Dette gælder imidlertid ikke generelt for næsten periodiske funktioner, og følgeligt defineres middelværdien som en grænseværdi over et uendeligt interval.

Sætning 5.6 (Middelværdisætningen) *For enhver næsten periodisk funktion f eksisterer grænseværdien*

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx$$

og vi kalder den *<u>middelværdien</u>* *af f.*

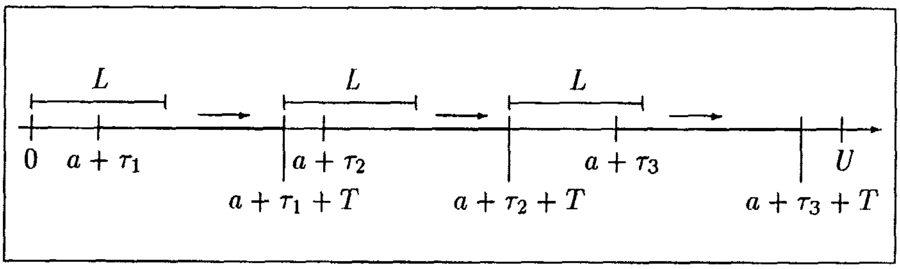
Bevis :

Vi vurderer indledningsvis differensen:

$$\frac{1}{U}\int_0^U f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

for vilkårlige $a \in \mathcal{R}$, og $U, T \in \mathcal{R}_+$.

Givet et $\varepsilon > 0$ vælger vi inkluderingslængden $L = L(\frac{\varepsilon}{2})$ således at ethvert interval af længde L, indeholder et forskydningstal for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Vi vælger et forskydningstal $\tau_1 = \tau(\frac{\varepsilon}{2})$ så $(a+\tau_1) \in [0, L]$ og definerer intervallet $[a+\tau_1, a+\tau_1+T]$. Dernæst vælges et $\tau_2 = \tau(\frac{\varepsilon}{2})$ så $(a+\tau_2) \in [a+\tau_1+T, a+\tau_1+T+L]$, og vi definerer intervallet $[a+\tau_2, a+\tau_2+T]$. Dernæst vælges et $\tau_3 = \tau(\frac{\varepsilon}{2})$ så $(a+\tau_3) \in [a+\tau_2+T, a+\tau_2+T+L]$ o.s.v. Processen er søgt illustreret i figuren.



Lad $n \in \mathcal{N}_0$ være antallet af intervaller $[a+\tau_m, a+\tau_m+T]$ der således er indeholdt i $[0, U]$. Vi har:

$$nT \le U \le (n+1)(L+T) = nT + nL + L + T$$

Der gælder:

$$\left| \int_{a+\tau_m}^{a+\tau_m+T} f(x)\,dx - \int_a^{a+T} f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_a^{a+T} (f(x+\tau_m) - f(x))\, dx \right| \leq T\frac{\varepsilon}{2}$$

Når der i det følgende skrives $\int_a^b$ menes der $\int_a^b f(x)\,dx$.

Lad C betegne et reelt tal, så $| f(x) | \leq C$ for alle $x \in \mathcal{R}$. Der gælder da:

$$\left| \int_0^U - n \int_a^{a+T} \right|$$

$$= \left| \int_{a+\tau_1}^{a+\tau_1+T} - \int_a^{a+T} + \cdots + \int_{a+\tau_n}^{a+\tau_n+T} - \int_a^{a+T} + (U-nT)C \right|$$

$$\leq nT\frac{\varepsilon}{2} + (U-nT)C$$

og dermed:

$$\left| \int_0^U - \frac{U}{T}\int_a^{a+T} \right| = \left| \int_0^U - n\int_a^{a+T} - \left(\frac{U}{T} - n\right)\int_a^{a+T} \right|$$

$$\leq \frac{nT\varepsilon}{2} + (U-nT)C + \left| \frac{U-nT}{T}\int_a^{a+T} \right|$$

$$\leq \frac{nT\varepsilon}{2} + 2(U-nT)C$$

Heraf følger:

$$\left| \frac{1}{U}\int_0^U - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \right| \leq \frac{nT\varepsilon}{2U} + \frac{2(U-nT)C}{U}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2(nL+L+T)C}{U} \tag{5.1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nLC}{U} + \frac{2(L+T)C}{U} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2LC}{T} + \frac{2(L+T)C}{U}$$

Ved at sætte $a = 0$ i (5.1) fås:

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{U}\int_0^U - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} - \left(\frac{1}{U}\int_0^U - \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \right) \right|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2LC}{T_1} + \frac{2LC}{T_2} + \frac{2(L+T_1)C}{U} + \frac{2(L+T_2)C}{U}$$

I ovenstående er venstresiden uafhængig af U, og ved at lade $U \to \infty$ opnås:

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} \right| \leq \varepsilon + \frac{2LC}{T_1} + \frac{2LC}{T_2}$$

Defineres tallet T_0 som $T_0 = \frac{4LC}{\varepsilon}$ gælder altså:

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} \right| \leq 2\varepsilon \qquad \text{for } T_1, T_2 \geq T_0$$

og af det almindelige konvergensprincip følger at grænseværdien:

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

eksisterer. Hermed er middelværdisætningen bevist, men vi kan vise endnu mere: Ved at lade $U \to \infty$ i (5.1) fås:

$$\left| M\{f(x)\} - \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2LC}{T}$$

og dermed:

$$\left| M\{f(x)\} - \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon \tag{5.2}$$

for alle $a \in \mathcal{R}$ når $T \geq T_0$.

Dette viser at $\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, dx$ konvergerer uniformt i a mod middelværdien, når $T \to \infty$. Dette faktum vil vi ofte udnytte, og vi refererer til det som den *styrkede middelværdisætning.* □

Vi bemærker at der for periodiske funktioner er overensstemmelse mellem det 'gamle' og det 'nye' middelværdibegreb. For hvis f er periodisk og $m \in \mathcal{N}$ fås:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi m} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

og overensstemmelsen er vist.

Sætning 5.7 *For vilkårlige $f, g \in \mathcal{F}$ gælder følgende regneregler:*

(i) $M\{f(x+k)\} = M\{f(x)\}$ *for alle* $k \in \mathcal{R}$

(ii) $M\{cf(x)\} = cM\{f(x)\}$ *for alle* $c \in \mathcal{C}$

(iii) $M\{f(x)+g(x)\} = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}$

(iv) $M\{\overline{f(x)}\} = \overline{M\{f(x)\}}$

Bevis :

(i):

$$M\{f(x+k)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+k)\, dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_k^{T+k} f(x)\, dx = M\{f(x)\}$$

(ii):

$$M\{cf(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T cf(x)\, dx$$

$$= c \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx = cM\{f(x)\}$$

(iii):

$$M\{f(x)+g(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x)+g(x))\, dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(x)\, dx = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}$$

(iv):

$$M\{\overline{f(x)}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (Re(f(x)) - iIm(f(x)))\, dx$$

$$= M\{Re(f(x))\} - iM\{Im(f(x))\} = \overline{M\{f(x)\}}$$

□

5.5 Det trigonometriske system

Vi definerer norm og indre produkt som tidligere:

Definition 5.4 *Ved det indre produkt af to næsten periodiske funktioner f og g, forstås det komplekse tal:*

$$(f,g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

Bemærk at nulfunktionen er ortogonal på alle funktioner i $\mathcal{F}$.

Sætning 5.8 *For vilkårlige $f, g, h \in \mathcal{F}$ gælder følgende regneregler:*

(i) $(f,g) = \overline{(g,f)}$

(ii) $(cf,g) = c(f,g)$ *for alle* $c \in C$

(iii) $(f,cg) = \bar{c}(f,g)$ *for alle* $c \in C$

(iv) $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$

(v) $(f,g+h) = (f,g) + (f,h)$

Bevis :

(i):

$$M\{f(x)\overline{g(x)}\} = M\{\overline{g(x)}f(x)\} = M\{\overline{g(x)\overline{f(x)}}\} = \overline{M\{g(x)\overline{f(x)}\}}$$

(ii):

$$M\{cf(x)\overline{g(x)}\} = cM\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

(iii):

$$M\{f(x)\overline{cg(x)}\} = \bar{c}M\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

(iv):

$$M\{(f(x)+g(x))\overline{h(x)}\} = M\{f(x)\overline{h(x)}\} + M\{g(x)\overline{h(x)}\}$$

(v):

$$M\{f(x)(\overline{g(x)+h(x)})\} = M\{f(x)\overline{g(x)}\} + M\{f(x)\overline{h(x)}\}$$

□

Definition 5.5 *Ved* <u>*normen*</u> *af en næsten periodisk funktion f forstås det reelle tal:*

$$\| f(x) \| = \sqrt{M\{| f(x) |^2\}} = \sqrt{(f,f)}$$

Vi betragter nu mængden af funktioner $f(x) = e^{i\lambda x}$, hvor λ er et vilkårligt reelt tal. Denne mængde kaldes for *det trigonometriske system*, og den betegnes $\{e^{i\lambda x}\}$. Funktionerne i det trigonometriske system kaldes *rene* eller *harmoniske svingninger*. Det trigonometriske system og rene svingninger har således fået en bredere betydning, da vi nu inkluderer ikke-heltallige frekvenser.

Sætning 5.9 *Det trigonometriske system er ortonormalt i $\mathcal{F}$.*

Bevis :

$e^{i\lambda x}$ er normal for alle $\lambda \in \mathcal{R}$ da:

$$\| f(x) \| = \sqrt{M\{| e^{i\lambda x} |^2\}} = \sqrt{M\{1\}} = 1$$

$e^{i\lambda_1 x}$ og $e^{i\lambda_2 x}$ er ortogonale for $\lambda_1 \neq \lambda_2$ da:

$$(e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}) = M\{e^{i\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x}\} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda_1-\lambda_2)x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \frac{e^{i(\lambda_1-\lambda_2)x}}{i(\lambda_1-\lambda_2)} \right|_0^T = 0$$

□

Fuldstændig analogt med vores behandling af periodiske funktioner, kan vi nu rejse spørgsmålet om det trigonometriske system er *fuldstændigt* i vektorrummet af næsten periodiske funktioner. Vi skal senere se at dette er tilfældet og benytte den kendsgerning som et fundament for et bevis for hovedsætningen. Det trigonometriske systems fuldstændighed er imidlertid et dybt resultat, og for at bevise det skal vi benytte Fourier rækker.

5.6 Fourier rækker

Lad f betegne en næsten periodisk funktion. Da er $f(x)e^{-i\lambda x}$ produktet af en periodisk og en næsten periodisk, og dermed en næsten periodisk funktion, og dermed er middelværdien $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ defineret. Lad i det følgende $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ være vilkårlige, men indbyrdes forskellige, reelle tal.

Sætning 5.10 *For alle $f \in \mathcal{F}$ gælder Bessel's ulighed:*

$$\sum_{n=1}^{N} | a_n |^2 \leq M\{| f(x) |^2\}$$

hvor $a_n = M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}$.

Bevis :

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}$$

$$= M\left\{\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}\right)\left(\overline{f(x)} - \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} e^{-i\lambda_n x}\right)\right\}$$

$$= M\{f(x)\overline{f(x)}\} - \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\} - \sum_{n=1}^{N} a_n M\left\{\overline{f(x)}e^{i\lambda_n x}\right\}$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} a_{n_1}\overline{a_{n_2}} M\left\{e^{i\lambda_n x} e^{-i\lambda_n x}\right\}$$

$$= M\{| f(x) |^2 - \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n \overline{a_n} + \sum_{n=1}^{N} a_n \overline{a_n}$$

$$= M\{| f(x) |^2\} - \sum_{n=1}^{N} | a_n |^2$$

Vi har nu opnået udtrykket:

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\} = M\{| f(x) |^2\} - \sum_{n=1}^{N} | a_n |^2$$

Venstresiden i ovenstående er tydeligvis reel og ikke negativ. Derfor må der gælde:

$$M\{| f(x) |^2\} \geq \sum_{n=1}^{N} | a_n |^2$$

□

Vi husker at for periodiske funktioner var den n'te Fourier koefficient for f givet ved: $a_n = M\{f(x)e^{-inx}\} = (f, e^{inx})$. Vi indfører en lignende definition for næsten periodiske funktioner, men møder straks et problem: Vi arbejder nu med det udvidede trigonometriske system $\{e^{i\lambda x}\}$, så en næsten periodisk funktion f har en Fourier koefficient $a_\lambda = (f, e^{i\lambda x}) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ hørende til ethvert reelt tal λ. For at Fourier rækker skal være meningsfyldte må vi kræve at de kun indeholder tælleligt mange led, d.v.s. vi må sikre at koefficienterne a_λ kun er forskellige fra 0 for tælleligt mange λ.

Sætning 5.11 *For enhver næsten periodisk funktion f er der kun et tælleligt antal værdier af λ, for hvilke den tilhørende Fourier koefficient $a_\lambda = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ er forskellig fra 0.*

Bevis :

Givet et $\alpha > 0$, kan der kun være endeligt mange λ, for hvilke $| a_\lambda |> \alpha$. For ellers kan vi danne en følge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ af de λ for hvilke $| a_\lambda |> \alpha$, og ved at vælge $N = \frac{M\{|f(x)|^2\}}{\alpha^2}$ fås:

$$\sum_{n=1}^{N} | a_n |^2 > N\alpha^2 = M\{| f(x) |^2\}$$

i modstrid med Bessel's ulighed.

Vi udvælger de λ for hvilke $| a_\lambda |> 1$ og nummererer dem:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

Dernæst udvælges de λ for hvilke $1 \geq | a_\lambda |> \frac{1}{2}$, og de nummereres:

$$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_m$$

Dernæst udvælger vi og nummererer de λ for hvilke $\frac{1}{2} \geq | a_\lambda |> \frac{1}{3}$, og dernæst dem for hvilke $\frac{1}{3} \geq | a_\lambda |> \frac{1}{4}$ o.s.v. Ved at fortsætte processen nummereres alle λ, for hvilke $a_\lambda \neq 0$; d.v.s. der er højst tælleligt mange. □

De værdier af λ for hvilke $a_\lambda \neq 0$ nummereres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, og vi kalder dem *Fourier frekvenser* for f. De tilhørende Fourier koefficienter $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots$ indiceres $a_1, a_2, \ldots$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ kaldes *Fourier rækken* for f, og vi skriver:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

Undertiden skriver vi Fourier rækken mere symbolsk som $\sum_{\lambda \in \mathcal{R}} a_\lambda e^{i\lambda x}$. Omend der af udtrykket fremgår at der summereres over alle $\lambda \in \mathcal{R}$, underforstår vi at rækken kun indeholder tælleligt mange led, da vi kun betragter de λ for hvilke $a_\lambda \neq 0$. Ligeledes vil vi fremover udtrykke Bessel's ulighed: $\sum_{\lambda \in \mathcal{R}} |a_\lambda|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}$. For at forenkle notationen mest muligt vil vi undertiden ligefrem udelade indices for summationer, f.eks. ved at skrive en Fourier række som $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. Dette er kun gjort når summationen optræder i et tekststykke, og kun hvor det er tydeligt hvad der summeres over. Husk at n altid betegner et helt tal, mens λ altid betegner et reelt tal.

Vi vil vise at hvis f er en periodisk funktion er Fourier rækken den samme, uanset om vi udregner den med metoden i dette kapitel, eller som for periodiske funktioner. Hvis λ er et heltal er der overenstemmelse mellem koefficienterne, for $a_\lambda = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ og middelværdien er den samme uanset om vi benytter den nye eller gamle metode. Vi skal da blot vise at hvis λ ikke er heltallig da gælder $a_\lambda = 0$. Vi benytter at til et givet $\varepsilon > 0$ kan f skrives som:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathcal{Z}}^{\star} b_n e^{inx} + r(x)$$

hvor $| r(x) | \leq \varepsilon$ for alle x. Vi finder da:

$$\begin{aligned} | a_\lambda | &= \left| M\left\{ \left(\sum_{n \in \mathcal{Z}}^{\star} b_n e^{inx} + r(x) \right) e^{-i\lambda x} \right\} \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathcal{Z}}^{\star} b_n M\{e^{i(n-\lambda)x}\} + M\{r(x)e^{-i\lambda x}\} \right| \\ &= \left| M\{r(x)e^{-i\lambda x}\} \right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Da dette holder for alle $\varepsilon < 0$ fås $a_\lambda = 0$.

Sætning 5.12 *Hvis* $f \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ *og* $g \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ *gælder følgende regneregler:*

(i) $cf(x) \sim \sum ca_\lambda e^{i\lambda x}$ *for alle* $c \in \mathcal{C}$

(ii) $f(x+k) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda(x+k)}$ *for alle* $k \in \mathcal{R}$

(iii) $f(x) + g(x) \sim \sum (a_\lambda + b_\lambda) e^{i\lambda x}$

(iv) $e^{i\Lambda x} f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i(\Lambda+\lambda)x}$ *for alle* $\Lambda \in \mathcal{R}$

(v) $\overline{f(x)} \sim \sum \overline{a_\lambda} e^{-i\lambda x}$

(vi) $f(x)g(x) \sim \sum c_\lambda e^{i\lambda x}$ *hvor* $c_\lambda = \sum_{u+v=\lambda} a_u b_v = \sum_{v \in \mathcal{R}} a_{\lambda-v} b_v$

Bevis :

(i):

$$M\{cf(x)e^{-i\lambda x}\} = cM\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$$

(ii):

$$M\{f(x+k)e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x+k)e^{i\lambda k}e^{-i\lambda(x+k)}\}$$

$$e^{i\lambda k} M\{f(x+k)e^{-i\lambda(x+k)}\} = e^{i\lambda k} M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$$

(iii):

$$M\{(f(x)+g(x))e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} + M\{g(x)e^{-i\lambda x}\}$$

(iv):

$$M\{e^{i\Lambda x} f(x) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)e^{-i(\lambda-\Lambda)x}\}$$

(v):

$$M\{\overline{f(x)}e^{-i\lambda x}\} = M\{\overline{f(x)e^{i\lambda x}}\}$$

(vi): Mens alle de øvrige regneregler er ret elementære, er denne multiplikationssætning forbløffende dyb. Vi kan ikke føre bevis for den på nuværende tidspunkt, men vil senere vise at den er ækvivalent med entydighedssætningen, og der i gennem bevise den. □

Vi er naturligvis meget ivrige efter at summere Fourier rækker, men vi ved allerede fra det periodiske tilfælde at de ikke nødvendigvis er konvergente. Vi vil derfor i første omgang kun betragte Fourier rækker der *giver mening.* En Fourier række $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ siges at give mening hvis rækken $\sum a_n$ af Fourier koefficienter er absolut konvergent, d.v.s. hvis $\sum \mid a_n \mid$ er konvergent. En Fourier række der giver mening er absolut konvergent, da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n e^{i\lambda_n x} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid \left| e^{i\lambda_n x} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$$

Dette er en vigtig egenskab, da en absolut konvergent række er ubetinget konvergent, d.v.s. dens sum er uafhængig af rækkefølgen hvori leddene adderes. En Fourier række der giver mening, er tillige uniformt konvergent. For lad $s(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$. Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N så stort at $\sum_{N+1}^{\infty} \mid a_n \mid \leq \varepsilon$, hvoraf følger at $\left| \sum_{N+1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \right| \leq \varepsilon$ og dermed:

$$\left| s(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x} \right| \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } x \in \mathcal{R}$$

d.v.s. Fourier rækken er uniformt konvergent.

Generelt ved vi ikke om Fourier rækker giver mening; altså om $\sum \mid a_n \mid$ er konvergent, men fra Bessel's ulighed ved vi at $\sum \mid a_n \mid^2$ altid er konvergent. Den egenskab vil vi ofte benytte.

Sætning 5.13 *Hvis en række $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ giver mening, da er den netop Fourier række for sin sumfunktion $s(x) = \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$.*

Bevis :

Antag at Fourier rækken $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ giver mening, og sæt $s(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$. Funktionen s er næsten periodisk, da den kan approksimeres uniformt af udsnit af rækken; d.v.s. af trigonometriske polynomier. Derfor er middelværdien $M\{s(x)e^{-i\lambda x}\}$ defineret. Vi skal vise at:

$$M\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} e^{-i\lambda x}\right\} = \begin{cases} a_n & \text{for} \quad \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{for} \quad \lambda \neq \lambda_n \end{cases}$$

Dette følger umiddelbart, for da $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ er *uniformt* konvergent, gælder:

$$M\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} e^{-i\lambda x}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} M\left\{a_n e^{i\lambda_n x} e^{-i\lambda x}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n M\left\{e^{i\lambda_n x} e^{-i\lambda x}\right\} = \begin{cases} a_n & \text{for } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{for } \lambda \neq \lambda_n \end{cases}$$

□

Vi vil senere få brug for følgende sætning:

Sætning 5.14 *Hvis $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er en næsten periodisk funktion, kaldes funktionen g givet ved:*

$$g(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}\,dt = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}$$

for foldningen af f, og den er en næsten periodisk funktion hvis Fourier række er givet ved:

$$g(x) \sim \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$$

Bevis :

Vi beviser først at g er kontinuert. Beviset for dette er som for foldningen af en periodisk funktion, men vi gentager argumentet. Vi vælger et C således at $|\overline{f(t)}| \leq C$ for alle t. Da f er uniformt kontinuert kan vi, givet et $\varepsilon > 0$, bestemme et $\delta > 0$ således at:

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

g er da kontinuert, for hvis $|x_1 - x_2| \leq \delta$ er:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left|M_t\{f(x_1+t)\overline{f(t)}\} - M_t\{f(x_2+t)\overline{f(t)}\}\right|$$

$$= \left|M_t\left\{(f(x_1+t) - f(x_2+t))\overline{f(t)}\right\}\right| \leq \frac{\varepsilon C}{C} = \varepsilon$$

Tilsvarende ser vi at ethvert forskydningstal $\tau = \tau_f(\frac{\varepsilon}{C})$, for f hørende til $\frac{\varepsilon}{C}$, er et forskydningstal for g hørende til ε, da:

$$\begin{aligned} &| g(x+\tau) - g(x) | \\ &= \left| M_t \left\{ (f(x+t+\tau) - f(x+t)) \overline{f(t)} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon \end{aligned}$$

Hermed er vist at g er næsten periodisk.

Vi betragter nu funktionen:

$$g_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}dx$$

Det er indlysende at g_T konvergerer (punktvist) mod g, for $T \to \infty$. Vi ønsker at vise at g_T konvergerer *uniformt* mod g. Til det formål introduceres funktionen $F_x(t) = f(x+t)\overline{f(t)}$ for et vilkårligt, men fast, x. Vi ved at givet et $\varepsilon > 0$ kan vi vælge et T_0, således at:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T F_x(t)\, dt - M\{F_x(t)\} \right| \leq \varepsilon \qquad \text{for } T \geq T_0$$

Vi skal vise at T_0 kan vælges uafhængigt af x. For da følger at for alle x gælder:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{T} \int_0^T F_x(t)dt - M\{F_x(t)\} \right| \\ = &\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}dt - M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} \right| \\ &= | g_T(x) - g(x) | \leq \varepsilon \qquad \text{for } T \geq T_0 \end{aligned}$$

d.v.s. g_T konvergerer uniformt mod g.

Fra beviset for middelværdisætningen ved vi at man som T_0 kan bruge tallet:

$$T_0 = \frac{4C_x L_x(\frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon}$$

hvor C_x er et tal der opfylder $| F_x(t) | \leq C_x$ for alle $t \in \mathcal{R}$, og $L_x(\frac{\varepsilon}{2})$ er en inkluderingslængde for F_x hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$; d.v.s. ethvert interval af længde $L_x(\frac{\varepsilon}{2})$ indeholder et forskydningstal for F_x hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Vi bemærker at C_x kan erstattes af C^2, da der for alle t gælder:

$$| F_x(t) | = | f(x+t)\overline{f(t)} | \leq C^2$$

Desuden er ethvert forskydningstal $\tau = \tau_f(\frac{\varepsilon}{4C})$ for f hørende til $\frac{\varepsilon}{4C}$, et forskydningstal for F_x, uafhængigt af x, hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$, da:

$$|F_x(t+\tau) - F_x(t)| = \left|f(x+t+\tau)\overline{f(t+\tau)} - f(x+t)\overline{f(t)}\right|$$

$$= \left|(f(x+t+\tau) - f(x+t))\overline{f(t+\tau)} + \left(\overline{f(t+\tau)} - \overline{f(t)}\right) f(x+t)\right|$$

$$\leq C\frac{\varepsilon}{4C} + C\frac{\varepsilon}{4C} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dermed kan $L_x(\frac{\varepsilon}{2})$ erstattes med $L_f(\frac{\varepsilon}{4C})$, og g_T konvergerer således uniformt mod g, da:

$$|\, g_T(x) - g(x) \,| \leq \varepsilon \qquad \text{for } T \geq \frac{4C^2 L_f(\frac{\varepsilon}{4C})}{\varepsilon} \text{ og alle } x \in \mathcal{R}$$

For fastholdt T har vi:

$$M\{g_T(x)\} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X g_T(x)\,dx$$

$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\right) dx$$

$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{X}\int_0^X f(x+t)\overline{f(t)}\,dx\right) dt$$

$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{X}\int_0^X f(x+t)\,dx\right) \overline{f(t)}\,dt$$

Ifølge den styrkede middelværdisætning konvergerer

$$\frac{1}{X}\int_0^X f(x+t)dx$$

uniformt i t mod $M_x\{f(x+t)\} = M\{f(x)\}$ for $X \to \infty$. Dette tillader omskrivningen:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{X}\int_0^X f(x+t)\,dx\right) \overline{f(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f(x+t)\,dx\right) \overline{f(t)}\,dt$$

$$= M\{f(x)\}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\,dt$$

Vi har dermed fundet:

$$M\{g_T(x)\} = M\{f(x)\}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\,dt$$

og dermed at:

$$\lim_{T\to\infty} M\{g_T(x)\} = M\{f(x)\}M\{\overline{f(t)}\} = |M\{f(x)\}|^2$$

Vi har:

$$|M\{g(x)\} - M\{g_T(x)\}| \leq M\,\{|g(x) - g_T(x)|\}$$
$$\leq \sup\{|\,g(x) - g_T(x)\,|\;\big|\,x \in \mathcal{R}\} \to 0 \quad \text{for} \quad T \to \infty$$

Hvoraf vi slutter at:

$$M\{g(x)\} = \lim_{T\to\infty} M\{g_T(x)\}$$

Af de foregående udtryk følger:

$$M\{g(x)\} = |M\{f(x)\}|^2$$

Hvis vi erstatter f med funktionen $f'(x) = f(x)e^{-i\lambda x}$, har vi:

$$g'(x) = M_t\left\{f(x+t)e^{-i\lambda(x+t)}\overline{f(t)}e^{i\lambda t}\right\}$$

$$= M_t\left\{f(x+t)e^{-i\lambda x}\overline{f(t)}\right\} = e^{-i\lambda x}M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}$$
$$= e^{-i\lambda x}g(x)$$

Af $M\{g'(x)\} =|\, M\{f'(x)\}\,|^2$ følger da:

$$M\left\{g(x)e^{-i\lambda x}\right\} = \left|M\left\{f(x)e^{-i\lambda x}\right\}\right|^2$$

hvilket afslutter beviset. □

Foldning af en funktion er overordentlig bekvem, for det tillader os at danne en næsten periodisk funktion hvis Fourier række giver mening. Dette gør foldninger til et stærkt værktøj, som vi ofte benytter.

5.7 Entydighedssætningen og Parseval's formel

Entydighedssætningen og Parseval's formel udgør det fundament hvorfra vi senere skal bevise hovedsætningen. Indholdet af entydighedssætningen er at en næsten periodisk funktion er entydigt bestemt ved sin Fourier række, d.v.s. der ikke eksisterer to forskellige funktioner i $\mathcal{F}$ der har samme Fourier række. Parseval's formel siger at der altid gælder lighedstegn i Bessel's ulighed. Vi præsenterer sætningerne i en samlet form, for at understrege deres centrale betydning:

Sætning 5.15 *Følgende udsagn er gældende:*

(i) Entydighed: *Enhver funktion i $\mathcal{F}$ er entydigt bestemt ved sin Fourier række.*

(ii) Fuldstændighed: *Det trigonometriske system $\{e^{i\lambda x}\}$ er fuldstændigt i $\mathcal{F}$.*

(iii) Parseval's formel:

$$M\{|\, f(x)\,|^2\} = \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} |\, a_\lambda\,|^2$$

hvor $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$.

(iv) Multiplikationssætningen:

$$f(x)g(x) \sim \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} c_\lambda e^{i\lambda x}$$

hvor $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$, $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ *og* $c_\lambda = \sum_{v\in\mathcal{R}} a_{\lambda-v} b_v$.

5.8 Bevis for entydighedssætningen

Beviset for den foregående sætning er omfangsrigt, og falder i to dele. Først bevises at udsagnene (i)-(iv) er ækvivalente og dernæst af et af dem er sandt (vi beviser (ii)), hvoraf følger at de alle er sande. Ved entydighedssætningen forstår man (i) og/eller (ii), mens (iii) er Parseval's formel og (iv) er multiplikationssætningen (fra sætning 5.12), som vi tidligere undlod at bevise.

5.8.1 Bevis for ækvivalens:

Vi beviser $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$, men kunne f.eks. også bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

$\underline{(i) \Leftrightarrow (ii)}$:

$(ii) \Rightarrow (i)$ for hvis nulfunktionen er den eneste funktion i $\mathcal{F}$ der er ortogonal på $\{e^{i\lambda x}\}$, da kan der ikke eksisterer to forskellige næsten periodiske funktioner $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ med identiske Fourier rækker. For da vil $h(x) = f(x) - g(x)$ være forskellig fra nulfunktionen, men have Fourier række $\sum(a_\lambda - a_\lambda)e^{i\lambda x} = \sum 0e^{i\lambda x}$, d.v.s. være ortogonal på $\{e^{i\lambda x}\}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ for antag at enhver næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er entydigt bestemt ved sin Fourier række. Da kan der ikke eksisterer en næsten periodisk funktion g, forskellig fra nulfunktionen, der er ortogonal på $\{e^{i\lambda x}\}$, d.v.s. har Fourier række $\sum 0e^{i\lambda x}$. For da vil $h(x) = f(x) + g(x)$ være forskellig fra f, men have samme Fourier række da $h(x) \sim \sum(a_\lambda + 0)e^{i\lambda x} = \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$.

$\underline{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$:

$(iii) \Rightarrow (ii)$ for antag at Parseval's formel $M\{\mid f(x) \mid^2\} = \sum |a_\lambda|^2$ er gældende for en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum 0e^{i\lambda x}$, der er ortogonal på $\{e^{i\lambda x}\}$. Da er $M\{\mid f(x) \mid^2\} = 0$ hvoraf følger at f er nulfunktionen. Denne konklusion er imidlertid ikke oplagt og vi bør argumentere for den: Antag derfor at $M\{\mid f(x) \mid^2\} = 0$ og at f *ikke* er nulfunktionen. Der eksisterer da et x_0 og et $\alpha > 0$, således at $\mid f(x_0) \mid \geq \alpha$. Vi kan bestemme $L = L(\frac{\alpha}{2})$ og $\delta > 0$, således at ethvert interval af længde L indeholder et interval af længde δ, der består af lutter forskydningstal $\tau(\frac{\alpha}{2})$ for f hørende til $\frac{\alpha}{2}$. Et sådan forskydningstal τ opfylder uligheden:

$$|f(x_0 + \tau)| \geq \mid f(x_0) \mid - \mid f(x_0 + \tau) - f(x_0) \mid \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Integralet af $\mid f(x) \mid^2$ over et vilkårligt interval af længde L er derfor mindst $\delta(\frac{\alpha}{2})^2$, og middelværdien er:

$$M\{\mid f(x) \mid^2\} \geq \frac{\delta(\frac{\alpha}{2})^2}{L} \tag{5.3}$$

d.v.s. den er positiv, i modstrid med antagelsen om at den er 0.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ for lad $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ være en vilkårlig næsten periodisk funktion, og dan foldningen $g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$ der er en næsten periodisk funktion hvis Fourier række giver mening. Rækken $\sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$ er derfor Fourier række for sin sumfunktion $s(x) = \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$. Således har s og g sammen Fourier række, og er derfor identiske (her benytter vi (i) snarere end (ii) men de to udsagn er jo ækvivalente). Vi har altså $g(x) = s(x)$ eller:

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}} |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$$

Sættes $x = 0$ opnås:

$$g(0) = M\{f(t)\overline{f(t)}\} = M\{| f(t) |^2\} = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}} |a_\lambda|^2$$

hvilket netop er Parseval's formel (iii).

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$:

$(iv) \Rightarrow (iii)$ for lad $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ være vilkårlige funktioner i $\mathcal{F}$. Ifølge multiplikationssætningen (iv) gælder:

$$M\{f(x)g(x)e^{-i\lambda x}\} = \sum_{v \in \mathcal{R}} a_{\lambda - v} b_v$$

(vi bemærker at højresiden er absolut konvergent da $a_{\lambda-v}b_v$ kun er forskellig fra 0 for tællelig mange værdier af v, og

$$\sum_{v \in \mathcal{R}} | a_{\lambda-v} b_v | \le \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathcal{R}} | a_{\lambda-v} |^2 + \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathcal{R}} | b_v |^2$$

og højresiden er konvergent ifølge Bessel's ulighed). Ved at sætte $\lambda = 0$ fås:

$$M\{f(x)g(x)\} = \sum_{v \in \mathcal{R}} a_{-v} b_v \tag{5.4}$$

og ved at sætte $g(x) = \overline{f(x)}$:

$$M\{f(x)\overline{f(x)}\} = M\{| f(x) |^2\} = \sum_{v \in \mathcal{R}} a_{-v}\overline{a_{-v}} = \sum_{v \in \mathcal{R}} | a_v |^2$$

hvilket netop er Parseval's formel (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ for for vilkårlige $u, v \in C$ gælder:

$$uv = \frac{1}{4}\left(| u + \overline{v} |^2 - | u - \overline{v} |^2 + i| u + i\overline{v} |^2 - i| u - i\overline{v} |^2\right)$$

For vilkårlige næsten periodiske funktioner $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ gælder dermed:

$$M\{f(x)g(x)\} =$$
$$\frac{1}{4}\left(M\left\{\left|f(x)+\overline{g(x)}\right|^2\right\} - M\left\{\left|f(x)-\overline{g(x)}\right|^2\right\} +\right.$$
$$\left. iM\left\{\left|f(x)+i\overline{g(x)}\right|^2\right\} - iM\left\{\left|f(x)-i\overline{g(x)}\right|^2\right\}\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(\sum_{\lambda\in\mathcal{R}} | a_\lambda + \overline{b_{-\lambda}} |^2 - \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} | a_\lambda - \overline{b_{-\lambda}} |^2 + \right.$$
$$\left. i\sum_{\lambda\in\mathcal{R}} | a_\lambda + i\overline{b_{-\lambda}} |^2 - i\sum_{\lambda\in\mathcal{R}} | a_\lambda - i\overline{b_{-\lambda}} |^2\right) = \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} a_\lambda b_{-\lambda}$$

hvilket er (5.4). Erstattes $g(x)$ med $g(x)e^{-i\lambda x}$ opnås:

$$M\left\{f(x)g(x)e^{-i\lambda x}\right\} = \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} a_\lambda b_{\lambda+v} = \sum_{\lambda\in\mathcal{R}} a_{\lambda-v} b_\lambda$$

som er multiplikationssætningen (iv).

5.8.2 Bevis for (ii):

Beviset for det trigonometriske systems fuldstændighed i $\mathcal{F}$ er forholdsvis kompliceret, og vi får brug for nogle lemma'er. I det følgende betegner f en næsten periodisk funktion, der er ortogonal på $\{e^{i\lambda x}\}$; altså $f(x) \sim \sum 0e^{i\lambda x}$, og vi sætter:

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

Det ultimative mål er at vise at f nødvendivis må være nulfunktionen.

Lemma 5.2 *Til et givet $\varepsilon > 0$ findes et $\Lambda > 0$ så:*

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \qquad \textit{for } |\lambda| > \Lambda \textit{ og } T \geq 1$$

Bevis :

Vælg C så $| f(x) | \leq C$ for alle x og lad

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \mid |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

Tallet eksisterer da f er begrænset. I det følgende benytter vi at, for $\lambda \neq 0$, er integralet af $e^{-i\lambda x}$ over et vilkårligt interval af længde $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ lig med 0. For et vilkårligt $a \in \mathcal{R}$ gælder:

$$\left|\int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|$$

$$= \left|\int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} (f(x) - f(a))\,e^{-i\lambda x}\,dx + \int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} f(a)e^{-i\lambda x}\,dx\right|$$

$$= \left|\int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} (f(x) - f(a))\,e^{-i\lambda x}\,dx\right| \leq \int_a^{a+\frac{2\pi}{\lambda}} |f(x) - f(a)|\left|e^{-i\lambda x}\right|\,dx$$

$$= \int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} | f(x) - f(a) |\,dx \leq \frac{2\pi}{|\lambda|}\,\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)$$

Givet et $T > 0$ eksisterer der et $n \in \mathcal{N}_0$ således at $T = n\frac{2\pi}{|\lambda|} + \alpha$ hvor $0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{|\lambda|}$.

$$\left|\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right| = \left|\int_0^{\frac{2\pi}{|\lambda|}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \int_{(n-1)\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{n\frac{2\pi}{|\lambda|}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx + \int_{n\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{T} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|$$

$$\leq n\frac{2\pi}{|\lambda|}\,\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\alpha < T\,\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\frac{2\pi}{|\lambda|}$$

For $T \geq 1$ fås dermed:

$$| a_T(\lambda) | = \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right| < \omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\frac{2\pi}{|\lambda|}$$

Da f er uniformt kontinuert gælder $\omega(\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$ og vi kan dermed, givet et $\varepsilon > 0$, vælge et $\lambda_1 > 0$ således at $\omega(\frac{2\pi}{\lambda}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for

$\lambda > \lambda_1$. Vi kan ligeledes vælge et $\lambda_2 > 0$ så $C\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $\lambda > \lambda_2$. Lad $\Lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Da gælder for alle λ med $|\lambda| \geq \Lambda$:

$$|a_T(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Lemma 5.3 *Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi til ethvert λ_0 der ikke er Fourier frekvens for f (d.v.s. $a_{\lambda_0} = 0$) vælge positive tal δ og T_0 så:*

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \qquad \textit{for } |\lambda - \lambda_0| < \delta \textit{ og } T \geq T_0$$

Bevis :

Vi kan uden indskrænkninger antage at $\lambda_0 = 0$, for er dette ikke tilfældet betragter vi funktionen $f'(x) = f(x)e^{-i\lambda_0 x}$ istedet for f. Vi skal således blot vise at der til et givet $\varepsilon > 0$, kan vælges positive δ og T_0 således at:

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \qquad \text{for } |\lambda| < \delta \text{ og } T \geq T_0$$

Da $M\{f(x)e^{-i\lambda_0 x}\} = M\{f(x)\} = 0$ kan vi ifølge den styrkede middelværdisætning vælge et T_0 således at for alle $H \geq T_0$ og for vilkårlige a, gælder:

$$\left|\frac{1}{H}\int_a^{a+H} f(x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Lad endnu engang C være valgt så $|f(x)| \leq C$ for alle x og bemærk at:

$$\left|e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda a}\right| \leq |\lambda||x - a|$$

For $T_0 \leq H \leq 2T_0$ og vilkårlige a gælder da:

$$\left|\frac{1}{H}\int_a^{a+H} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|$$

$$= \left| \frac{1}{H} \int_a^{a+H} f(x) e^{-i\lambda a} \, dx + \frac{1}{H} \int_a^{a+H} f(x) \left(e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda a} \right) dx \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{H} \int_a^{a+H} f(x) \, dx \right| + \frac{1}{H} \int_a^{a+H} | f(x) || \lambda || x - a | \; dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + C \mid \lambda \mid 2T_0$$

Hvis vi sætter $\delta = \frac{\varepsilon}{4T_0 C}$ fås altså:

$$\left| \frac{1}{H} \int_a^{a+H} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx \right| \leq \varepsilon \qquad \text{for } T_0 \leq H \leq 2T_0 \text{ og } \mid \lambda \mid < \delta$$

Til et vilkårligt $T \geq T_0$ findes der et $n \in \mathcal{N}$ således at $H = \frac{T}{n}$ tilhører intervallet $[T_0, 2T_0]$, og dermed gælder:

$$\mid a_T(\lambda) \mid = \left| \frac{1}{Hn} \int_0^{Hn} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n} \left(\frac{1}{H} \int_0^H f(x) e^{-i\lambda x} \, dx + \cdots + \frac{1}{H} \int_{(n-1)H}^{nH} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx \right) \right|$$

$$\leq \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

□

V.h.a. lemma 5.2 og 5.3 kan vi bevise følgende lemma, som vi direkte skal anvende:

Lemma 5.4 *For en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum 0 e^{i\lambda x}$ gælder at $a_T(\lambda)$ konvergerer uniformt i λ mod 0 for $T \to \infty$; d.v.s. til et givet $\varepsilon > 0$ findes et $T_0 > 0$ så:*

$$\mid a_T(\lambda) \mid \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } \lambda \in \mathcal{R} \text{ og } T > T_0$$

Bevis :

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Ifølge lemma 5.2 kan vi vælge et $\Lambda > 0$ så $| a_T(\lambda) | \leq \varepsilon$ for $| \lambda | > \Lambda$, når $T \geq 1$. Ifølge lemma 5.3 kan vi til de resterende $\lambda_0 \in [-\Lambda, \Lambda]$ vælge et $\delta_{\lambda_0} > 0$ og et $T_{\lambda_0} > 0$ så $| a_T(\lambda) | \leq \varepsilon$ for alle $\lambda \in]\lambda_0 - \delta_{\lambda_0}, \lambda_0 + \delta_{\lambda_0}[$, når $T \geq T_{\lambda_0}$.

Vi kan udvælge et endeligt antal intervaller $I_1, I_2, \ldots, I_N$, af typen $I_n =]\lambda_n - \delta_{\lambda_n}, \lambda_n + \delta_{\lambda_n}[$, således at de overdækker intervallet $[-\Lambda, \Lambda]$; d.v.s. så $[-\Lambda, \Lambda] \subseteq I_1 \bigcup I_2 \bigcup \ldots \bigcup I_N$. Ved første øjekast kan dette synes ganske oplagt, men ved nærmere eftertanke er det knap så indlysende. Faktisk benytter vi her *Heine-Borel overdækningssætningen*, der netop fortæller at dette er muligt.

Lad nu $T_0 = \max\{1, T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \ldots, T_{\lambda_N}\}$. For et vilkårligt $\lambda \in \mathcal{R}$ gælder enten $| \lambda | > \Lambda$ eller λ tilhører et (eller flere) af intervallerne $I_1, I_2, \ldots, I_N$, og i begge tilfælde fås $| a_T(\lambda) | \leq \varepsilon$ for $T \geq T_0$. □

Lad os kort skitsere situationen før vi fører det egentlige bevis. Vi skal vise at den næsten periodiske funktion f, der er ortogonal på alle rene svingninger, nødvendigvis må være nulfunktionen. Vi har sat:

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

og bemærker at $\lim_{T \to \infty} a_T(\lambda) = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = a_\lambda$, hvor a_λ er den λ'te Fourier koefficient for f. Men $a_\lambda = 0$ for alle λ, betyder at $a_T(\lambda)$ konvergerer mod 0 for $T \to \infty$. Lemma 5.4 har styrket dette til at $a_T(\lambda)$ konvegerer *uniformt.*

Tricket ved beviset er, for et givet $T > 0$, at betragte den periodiske funktion $F_T(x)$, der er identisk med f i intervallet $[0, T[$ og har periode T. Funktionen F_T vil (generelt) have diskontinuiteter i nT, $n \in \mathcal{Z}$, men er en stykkevis kontinuert periodisk funktion, der opfylder Parseval's formel og har Fourier række:

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} \alpha_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

hvor

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T F_T(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\, dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\, dx$$

Vi har vist dette i slutningen af kapitlet om periodiske funktioner; netop for at kunne anvende det nu.

Da α_n konvergerer uniformt mod 0, kan vi konkludere at:

$$\lim_{T\to\infty} \sup\{|\, \alpha_n \,| \;\big|\, n \in \mathcal{Z}\} = 0$$

og dermed at:

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n\in\mathcal{Z}} |\, \alpha_n \,|^4 \leq \lim_{T\to\infty} \sup\{|\, \alpha_n \,|^2 \;\big|\, n \in \mathcal{Z}\} \times \sum_{n\in\mathcal{Z}} |\, \alpha_n \,|^2 = 0$$

For et givet $T > 0$ danner vi foldningen G_T af F_T:

$$G_T = M_t\{F_T(x+t)\overline{F_T(t)}\} = \frac{1}{T}\int_0^T F_T(x+t)\overline{F_T(t)}\, dt$$

og sammenligner den i intervallet $[0, T[$ med funktionen:

$$g_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}\, dt$$

De to funktioner er ikke identiske, for omend der i hele intervallet $[0, T[$ gælder $\overline{F_T(t)} = \overline{f(t)}$, da vil $x + t$, når t gennemløber integrationsintervallet, delvist ligge i $[T, 2T[$, og der gælder derfor ikke generelt at $F_T(x + t) = f(x + t)$.

Vi vælger nu $T = \tau_f(\varepsilon)$ således at det er et forskydningstal for f, hørende til et givet ε. Da gælder for ethvert fastholdt $x \in [0, T[$, og for alle $t \in [0, T[$:

$$|f(x+t) - F_T(x+t)| \leq \varepsilon$$

for hvis $x + t \in [0, T[$ gælder pr. definition $f(x + t) = F_T(x + t)$, og hvis $x + t \in [T, 2T[$ gælder:

$$|f(x+t) + F_T(x+t)| = |f(x+t) - F_T(x+t-T)|$$

$$= |f(x+t) - f(x+t-T)| \leq \varepsilon$$

Dermed opnås for alle $x \in [0, T[$:

$$|g_T(x) - G_T(x)| = \left|\frac{1}{T}\int_0^T \left(f(x+t)\overline{f(t)} - F_T(x+t)\overline{F_T(t)}\right) dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{T}\int_0^T (f(x+t) - F_T(x+t))\,\overline{f(t)}\, dt\right| \leq \varepsilon C$$

hvor C (som sædvanligt) betegner et tal så $| f(x) | \leq C$ for alle x.

Vi vælger nu en følge (ε_n) af positive tal, således at $\varepsilon_n \to 0$ for $n \to \infty$. Lad (T_n) være en tilhørende følge af forskydningstal, d.v.s. $T_n = \tau_f(\varepsilon_n)$ er et forskydningstal for f hørende til ε_n, valgt således at $T_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

For ethvert $n \in \mathcal{N}$ og ethvert $x \in [0, T_n]$ gælder dermed:

$$|g_{T_n}(x) - G_{T_n}(x)| \leq \varepsilon_n C$$

og dermed:

$$\sup\{|g_{T_n}(x) - G_{T_n}(x)| \mid x \in [0, T_n[\} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Foldningen g af f er givet ved:

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}$$

Vi erindrer fra beviset for sætning 5.14, at g_T konvergerer uniformt mod g. Da G_{T_n} konvergerer uniformt mod g_{T_n} i $[0, T_n[$, og g_{T_n} konvergerer uniformt mod g på hele den reelle akse, må der gælde at G_{T_n} konvergerer uniformt mod g i $[0, T_n[$, for $n \to \infty$. Dermed gælder specielt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} |G_{T_n}(x)|^2 \, dx = M\{| g(x) |^2\}$$

og da G_{T_n} opfylder Parseval's formel:

$$M\{| g(x) |^2\} = \lim_{T\to\infty} \sum_{n\in Z} | \alpha_n |^4 = 0$$

Vi har tidligere vist at man at dette kan slutte at g nødvendigvis må være nulfunktionen. Da gælder:

$$g(0) = M\{f(t)\overline{f(t)}\} = M\{| f(t) |^2\} = 0$$

hvoraf vi igen kan slutte at f er nulfunktionen.

5.9 Hovedsætningen

Vi formulerer hovedsætningen formelt:

Sætning 5.16 (Hovedsætningen) *Mængden af funktioner der kan approksimeres uniformt, med vilkårlig præcision, af trigonometriske polynomier, er netop mængden $\mathcal{F}$ af næsten periodiske funktioner. Symbolsk:*

$$\boxed{\mathcal{F} = H\{\mathcal{T}\}}$$

Vi har allerede i sætning 5.5 bevist at enhver funktion i $H\{\mathcal{T}\}$, er næsten periodisk, og skal således blot bevise $\mathcal{F} \subseteq H\{\mathcal{T}\}$. Hovedsætningen er derfor bevist når følgende approksimationssætning er bevist:

Sætning 5.17 (Approksimationssætningen) *Enhver næsten periodisk funktion kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier.*

Istedet for et direkte bevis for approksimationssætningen, vil vi bevise en anden sætning der indeholder approksimationssætningen som et korollar; nemlig *Bochner's summationssætning*. Summationssætningen er analog til Fejér's sætning. Således fortæller den ikke blot at det er muligt at danne en følge af trigonometriske polynomier der konvergerer uniformt mod en given næsten periodisk funktion (hvilket jo er indholdet af approksimationssætningen), men viser tillige hvordan disse polynomier kan konstrueres udfra kendskab til Fourier rækken.

Vi har allerede indirekte bevist at en lang række næsten periodiske funktioner, kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier, og tilmed hvilke polynomier der skal anvendes. For hvis en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ har en Fourier række der giver mening (og det er jo tilfældet for alle foldninger), da er rækken Fourier række for sin sumfunktion $s(x) = \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. Af entydighedssætningen følger at rækken *kun* er Fourier række for sin sumfunktion, d.v.s.:

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}} a_\lambda e^{i\lambda x}$$

og da rækken $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er uniformt konvergent, kan f approksimeres uniformt af et udsnit af sin Fourier række. Dette er naturligvis det 'pæneste' af alle tilfælde; at kunne identificere en næsten periodisk funktion med (sumfunktionen af) dens Fourier række. Men generelt er vi ikke så heldige. Omend det i praksis er næsten umuligt at støde på nogen af slagsen, kan der gives eksempler på divergente Fourier rækker (Se Appendix E).

Vi betragter en vilkårlig næsten periodisk funktion f, med Fourier række $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$. Af bekvemmelighedsgrunde betegnes Fourier frekvenserne $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Det v'te afsnit af Fourier rækken er givet ved:

$$s_v(x) = \sum_{n=0}^{v-1} a_n e^{i\lambda_n x}$$

Middelværdien af de første v afsnit er:

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) a_n e^{i\lambda_n x}$$

Fejér's sætning vil direkte kunne overføres til næsten periodiske funktioner, såfremt følgen $(S_v(x))$ konvergerer uniformt mod f, for $v \to \infty$. Desværre kan vi ikke vise at dette er tilfældet, men en undersøgelse er nyttig, da den kan påpege hvor problemet ligger.

Vi kan skrive:

$$S_v(x) = \sum_{n=0}^{v} r_{n,v} a_n e^{i\lambda_n x}$$

hvor $r_{n,v} = (1 - \frac{n}{v})$ for $n = 0, 1, \ldots, v$ og $r_{n,v} = 0$ for $n > v$. Det er tydeligt at, for fastholdt n, $r_{n,v} \to 1$ for $v \to \infty$, hvilket viser at følgen $(S_v(x))$ *formelt* konvergerer mod Fourier rækken. Funktionen $g_v(x) = f(x) - S_v(x)$ er næsten periodisk for alle $v \in \mathcal{N}_0$, og opfylder dermed Parseval's formel, d.v.s.:

$$M\{| f(x) - S_v(x) |^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n - r_{n,v} a_n |^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - r_{n,v})^2 | a_n |^2$$

Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N så stort at:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} | a_n |^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

og tilsvarende kan vælges et V så:

$$\sum_{n=0}^{N}(1 - r_{n,v})^2 \mid a_n \mid^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{for } v \geq V$$

hvormed opnås:

$$M\{\mid f(x) - S_v(x) \mid^2\} \leq \varepsilon \qquad \text{for } v \geq V$$

d.v.s. følgen $(S_v(x))$ konvergerer i *middelkvadrat* mod f. Dette er et vigtigt resultat, hvis betydning fremgår af en sætning, vi præsenterer efter følgende definition:

Definition 5.6 *En mængde $\mathcal{A}$ af næsten periodiske funktioner siges at være majorisérbar med majorant f, såfremt ethvert forskydningstal τ for f hørende til ε, er forskydningstal for alle funktioner i $\mathcal{A}$ hørende til ε.*

Sætning 5.18 *En majorisérbar følge af næsten periodiske funktioner (d.v.s. mængden af følgens elementer er majorisérbar), med majorant f, der konvergerer i middelkvadrat mod f, konvergerer uniformt mod f.*

Bevis :

Antag at mængden $\{s_n(x) \mid n \in \mathcal{N}\}$ har majorant f, og at

$$M\{\mid f(x) - s_n(x) \mid^2\} \to 0 \qquad \text{for} \qquad n \to \infty$$

Betragt følgen $(\varphi_n(x))$, hvor $\varphi_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Vi skal vise at $(\varphi_n(x))$ konvergerer uniformt mod 0. d.v.s. at:

$$\sup\{\mid \varphi_n(x) \mid \;\big|\; x \in \mathcal{R}\} \to 0 \qquad \text{for} \qquad n \to \infty$$

$\{\varphi_n(x) \mid n \in \mathcal{N}\}$ har majorant $2f$, for ethvert forskydningstal τ for $2f$ hørende til ε, er et forskydningstal for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$, og dermed et forskydningstal for $\varphi_n(x)$ hørende til ε, da:

$$|\varphi_n(x+\tau) - \varphi_n(x)| = |f(x+\tau) - s_n(x+\tau) - f(x) + s_n(x)|$$

$$\leq |f(x+\tau) - f(x)| + |s_n(x+\tau) - s_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og antag at der eksisterer et x_0 så $|\varphi_n(x_0)| \geq \varepsilon$. I så fald gælder ifølge (5.3):

$$M\{|\varphi_n(x)|^2\} \geq \frac{\delta_n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{L_n(\frac{\varepsilon}{2})} = \beta\ (>0)$$

hvor $L_n(\frac{\varepsilon}{2})$ er valgt således at ethvert interval af længde $L_n(\frac{\varepsilon}{2})$ indeholder et interval af længde δ_n, bestående af lutter forskydningstal for φ_n hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Da $2f$ majoriserer φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, kan vi som inkluderingslængde $L_n(\frac{\varepsilon}{2})$ vælge det samme tal for alle funktioner φ_n; nemlig $L_{2f}(\frac{\varepsilon}{2})$, der er et tal således at ethvert interval af længde $L_{2f}(\frac{\varepsilon}{2})$ indeholder et interval af længde δ, bestående af forskydningstal for $2f$ hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Og da

$$M\{|\varphi_n(x)|^2\} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

kan vælges et N, således at $M\{|\varphi_n(x)|^2\} < \beta$ for $n \geq N$, og dermed fås:

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{for } n \geq N$$

□

Betragt endnu engang følgen $(S_v(x))$. Vi skal blot vise at følgen majoriseres af f. Af regnereglerne for Fourier rækker, fremgår det at hvis $f(x)$ har Fourier række $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, da har $f(x+t)$, for fastholdt x, Fourier række $\sum a_n' e^{i\lambda t}$, hvor $a_n' = a_n e^{i\lambda_n x}$. Vi kan nu omskrive følgens led:

$$\begin{aligned}
S_v(x) &= \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) a_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) a_n' \\
&= \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) e^{-i\lambda_n t}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) e^{-i\lambda_n t}\, dt \\
&= M_t\{f(x+t) k_v(t)\} \qquad \text{hvor } k_v(t) = \sum_{n=0}^{v} \left(1 - \frac{n}{v}\right) e^{-i\lambda_n t}
\end{aligned}$$

k_v er et trigonometrisk polynomium, der minder om Fejér kernen der optrådte i det tilsvarende problem for periodiske funktioner. Der er dog en afgørende forskel: I Fejér kernen optræder kun heltallige frekvenser hvilket betyder, som vist i beviset for Fejér's sætning, at Fejér kernen altid er reel og ikke-negativ. Hvis det samme er tilfældet for k_v vil beviset hurtigt kunne afsluttes med følgende betragtninger:

Hvis 0 er Fourier frekvens for f, sættes $\lambda_0 = 0$ og vi har $M\{k_v(t)\} = 1$. Er 0 ikke Fourier frekvens for f fås $M\{k_v(t)\} = 0$, men vi betragter da istedet funktionen $g(x) = f(x)+1$, der har $\lambda_0 = 0$ og $a_0 = 1$. Kan vi approksimere g kan vi jo approksimere f, og igen fås $M\{k_v(t)\} = 1$. Antager vi at $k_v(t) > 0$ for alle t, er ethvert forskydningstal τ for f hørende til ε, et forskydningstal for alle funktionerne i følgen $(S_v(x))$ hørende til ε, da der for alle x gælder:

$$\begin{aligned}
&|S_v(x+\tau) - S_v(x)| \\
&= |M_t\{f(x+\tau+t)k_v(t)\} - M_t\{f(x+t)k_v(t)\}| \\
&= |M_t\{(f(x+\tau+t) - f(x+t))\,k_v(t)\}| \\
&\leq M_t\{|f(x+\tau+t) - f(x+t)|\,k_v(t)\} \\
&\leq M\{\varepsilon k_v(t)\} = \varepsilon M\{k_v(t)\} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Det eneste der hindrer os i at konkludere at Fourier rækken for en næsten periodisk funktion f, er uniformt summabel med sumfunktion f, er altså at der ikke generelt gælder $k_v(t) \geq 0$ for alle $t \in \mathcal{R}$. Dette bunder i det problem vi igen og igen har mødt i udvidelsen fra det periodiske, til det næsten periodiske tilfælde: At Fourier frekvenserne kan antage vilkårlige reelle, fremfor blot heltallige, værdier.

Vi kan derfor ikke direkte generalisere Fejér's sætning, men vi kan opnå et tilsvarende resultat v.h.a. Bochner's summationssætning. Vi skal vise at der til en givet næsten periodisk funktion f, kan dannes en følge af trigonometriske polynomier, hvis frekvenser alle er Fourier frekvenser for f, der konvergerer uniformt mod f. Vores foreløbige betragtninger vil understøtte os i beviset for dette.

Det første problem vi bør behandle er spørgsmålet om hvilken rækkefølge man skal betragte Fourier frekvenserne i. Vi har hidtil undgået dette problem, ved hovedsaligt at arbejde med Fourier række der giver mening, og hvis sum derfor er uafhængig af summationsrækkefølgen. For periodiske funktioner overvejede vi ikke engang problemet, for da er der en 'kanonisk' rækkefølge af Fourier frekvenser (nemlig $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Problemet løses ved at indføre en *basis*.

Definition 5.7 *Ved en basis for en tællelig mængde $\{\lambda_n \mid n \in \mathcal{N}\}$ af reelle tal, forstås en tællelig mængde $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ af reelle tal, med egenskaber:*

1. *$\beta_1, \beta_2, \ldots$ er lineært uafhængige, d.v.s. enhver linearkombination af typen $q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \cdots + q_n\beta_n$, med rationelle koefficienter $q_1, q_2, \ldots, q_n$, er forskellig fra 0, med mindre alle koefficienter er 0.*

2. *Ethvert λ_m kan udtrykkes ved en linearkombination $\lambda_m = q_1\beta_1 + \cdots + q_n\beta_n$, hvor koefficienterne er rationelle. Denne fremstilling er entydig.*

En mængde af Fourier frekvenser kan altid tildeles en basis. For Fourier frekvenserne kan nummereres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Som β_1 vælges det første λ der er forskelligt fra 0 (λ_1 eller λ_2). Som β_2 vælges det første efterfølgende λ der ikke kan skrives som $q_1\beta_1$, $q_1 \in \mathcal{Q}$. Som β_3 vælges det første efterfølgende λ, der ikke kan skrives som $q_1\beta_1 + q_2\beta_2$, $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ o.s.v. Hermed opnås en endelig eller uendelig basis.

Vi kan nu formulere summationssætningen:

Sætning 5.19 (Summationssætningen) *Enhver næsten periodisk funktion f er grænsefunktion for en uniformt konvergent følge af trigonometriske polynomier, hvis frekvenser alle er Fourier frekvenser for funktioner. Det fremgår af beviset hvorledes man, med kendskab til f's Fourier række kan danne en sådan følge.*

Bevis :

Der indgår ganske kompakte og komplicerede udtryk i dette bevis, og det er tvivlsomt at overskueligheden ville øges ved at skrive dem helt ud. Selve beviset er dog ikke særligt kompliceret, men kræver at man ser 'hårdt' på det.

Fejér kernen er givet ved:

$$K_v(t) = \frac{1}{v}\left(\frac{\sin\left(\frac{vt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 = \sum_{n=-v}^{v}\left(1 - \frac{|n|}{v}\right)e^{-int}$$

Vi erindrer at:

$$M\{K_v(t)\} = 1 \quad \text{og} \quad K_v(t) \geq 0 \text{ for alle } t \in \mathcal{R}$$

Vi betragter en vilkårlig næsten periodisk funktion:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

og antager at vi kender en basis $\beta_1, \beta_2, \ldots$ for Fourier frekvenserne. Vi definerer følgen $(\sigma_v(x))$ ved:

$$\sigma_v(x) = M_t \left\{ f(x+t) K_{(v!)^2}\left(\frac{\beta_1 t}{v!}\right) \ldots K_{(v!)^2}\left(\frac{\beta_v t}{v!}\right) \right\}$$

$$= \sum_{n_1=-(v!)^2}^{(v!)^2} \ldots \sum_{n_v=-(v!)^2}^{(v!)^2} \left(1 - \frac{|n_1|}{(v!)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{|n_v|}{(v!)^2}\right) \ldots$$

$$\ldots a\left(\frac{n_1\beta_1}{v!} + \cdots + \frac{n_v\beta_v}{v!}\right) \exp\left(i\left(\frac{n_1\beta_1}{n!} + \cdots + \frac{n_v\beta_v}{v!}\right)t\right)$$

hvor $a(\lambda_n) = a_n = M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}$.
Udtrykket kan omskrives til:

$$\sigma_v(x) = \sum_{n=1}^{k(v)} r_{n,v} a_n e^{i\lambda_n x}$$

hvor:

$$r_{n,v} = \left(1 - \frac{|n_1|}{(v!)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{|n_v|}{(v!)^2}\right)$$

og tallene $n_1, n_2, \ldots, n_v$ er bestemt ved:

$$\lambda_n = \frac{n_1\beta_1}{v!} + \cdots + \frac{n_v\beta_v}{v!}, \qquad n_1, \ldots, n_v \in \{-(v!)^2, \ldots, (v!)^2\}$$

Enhver Fourier frekvens kan skrives på denne form, for et tilstrækkeligt stort v. For en Fourier frekvens λ_n kan skrives som:

$$\lambda_n = q_1\beta_2 + q_2\beta_2 + \cdots + q_v\beta_v$$

for et tilstrækkeligt stort v; og de rationelle koefficienter $q_1, q_2, \ldots, q_v$ kan skrives som:

$$q_i = \frac{n_i}{v!}, \qquad n_i \in \{-(v!)^2, \ldots, (v!)^2\}$$

for et tilstrækkeligt stort v. Bemærk at hvis en Fourier frekvens λ_i er frekvens i σ_m, da er den tillige frekvens i σ_k, for alle $k \geq m$. Således inkluderes flere og flere af f's Fourier frekvenser.

For fastholdt n fås $r_{n,v} \to 1$ for $v \to \infty$, og af diskussionen inden beviset følger umiddelbart:

$$M\left\{|f(x) - \sigma_v(x)|^2\right\} \to 0 \quad \text{for} \quad v \to \infty$$

og dermed:

$$\sup\left\{|f(x) - \sigma_v(x)| \;\middle|\; x \in \mathcal{R}\right\} \to 0 \quad \text{for} \quad v \to \infty$$

da den sammensatte kerne:

$$K_v^*(t) = K_{(v!)^2}\left(\frac{\beta_1 t}{v!}\right) \dots K_{(v!)^2}\left(\frac{\beta_v t}{v!}\right)$$

har egenskaber:

$$M\{K_v^*(t)\} = 1 \quad \text{og} \quad K_v^*(t) \geq 0 \text{ for alle } t \in \mathcal{R}$$

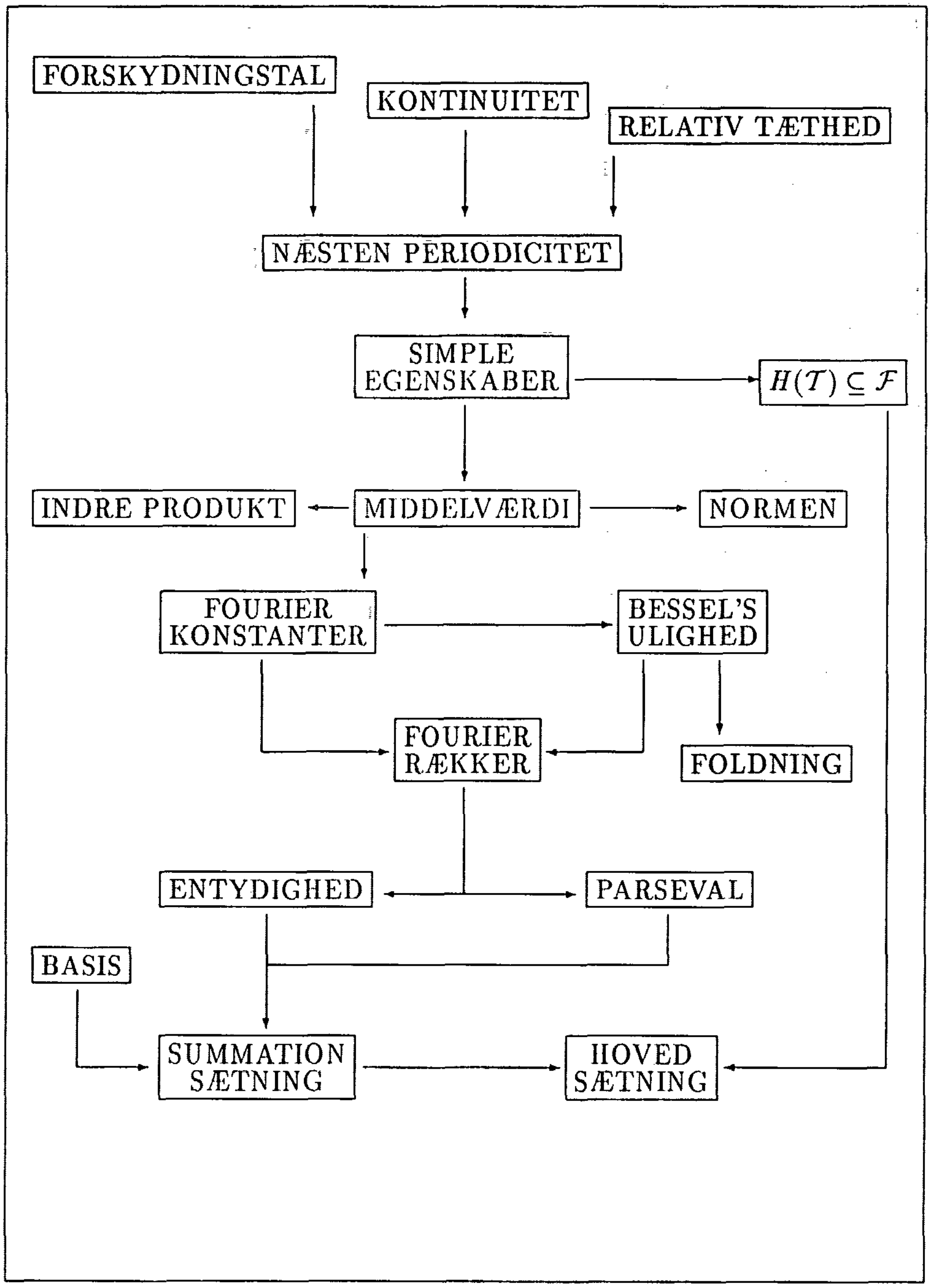
da K_v^* er produktet af reelle ikke-negative Fejér kerner, og K_v^* er et trigonometrisk polynomium med konstant led 1. □

5.10 Resumé

Vi vil i det følgende på en uformel måde skitsere hovedtrækkene i vores gennemgang af teorien for næsten periodiske funktioner. Dette skal bidrage til en belysning af teoriens struktur, bibringe læseren et overblik, påpege de endnu uafklarede punkter samt vise i hvilke retninger teorien naturligt kan udvides. Vores udgangspunkt var spørgsmålet om hvilke karakteristika der netop kendetegner de funktioner, der kan approksimeres uniformt, med vilkårlig præcision, af trigonometriske polynomier $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. Allerede her indskrænker vi os til kun at betragte komplekse funktioner, af en reel variabel. Vi minder om den tidligere geometriske fortolkning af et trigonometrisk polynomium. Spørgsmålet kan altså omformuleres til: Hvad kendetegner de bevægelser i planen, der kan opløses i jævne cirkelbevægelser? Herefter har vi fulgt i Bohr's fodspor, ved først at definere næsten periodicitet, og dernæst bevist at de næsten periodiske funktioner netop er de funktioner der kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier. Men vores udgangspunkt taget i betragtning havde det været ligeså naturligt om vi var gået den anden vej. Det vil sige om vi havde defineret næsten periodiske funktioner som de funktioner der kan approximeres uniformt af trigonometriske polynomier, for dernæst af opnå definitionen som hovedsætning.

Efter definitionen beviste vi nogle simple egenskaber ved næsten periodiske funktioner (begrænsethed, uniform kontinuitet etc.). Disse egenskaber er naturligvis essentielle for at teorien kan opbygges, men repræsenterer ikke i sig selv 'interessante' resultater. De er blot et springbrædt for vores videre søgen. Middelværdisætningen er i og for sig heller ikke interessant, men den er af central betydning. Udsagnet om at middelværdien er defineret er så oplagt for periodiske funktioner, at det kan synes generende at skulle stoppe op, og levere et langt og forholdsvist kompliceret bevis for det samme i det næsten periodiske tilfælde. Men det er prisen for at vi kan arbejde med en bredere klasse af funktioner, og i sidste ende kan vi fryde os over at de opnåede resultater er mere generelle. Med en kølig tilfredshed konstaterer vi at middelværdisætningen er gældende, for uden den er det meningsløst at definere Fourier rækker for næsten periodiske funktioner. De følgende sætninger frem til entydighedssætningen er vigtige forberedelser. For med det gennembrud der sker med entydighedssætningen, kan vi uddrage en lang række interessante konklusioner. Et bekvemt 'mellemresultat' er Bessel's ulighed $\sum \mid a_\lambda \mid^2 \leq M\{\mid f(x) \mid^2\}$. Senere står den helt i skyggen af Parseval's formel, der viser at lighedstegnet altid er gældende, men den er et stort skridt på vejen. Dels medfører den at en Fourier række kun indeholder tælleligt mange led, hvilket er essentielt da vi gerne vil opfatte disse som egentlige rækker og undersøge eventuel konvergens, og dels fortæller den at uanset om en givet Fourirrække $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ konvergerer eller ej, så konvergerer rækken $\sum \mid a_\lambda \mid^2$ altid. Hernæst defineres Fourier rækker, og det vises hvorledes simple operationer med næsten periodiske funktioner, afspejles i deres Fourier rækker. Et ekstraordinært tilfælde er multiplikation af to næsten periodiske funktioner. Omend vi opskriver formlen for hvorledes multiplikation afspejles i Fourier rækken, er vi på det tidspunkt ude af stand til at bevise den. Det skyldes at denne multiplikationssætning er et dybt resultat, på linie med entydighedssætningen. Dette er ganske overraksende, for de øvrige regneregler er ret elementære. Herefter introduceres foldninger. Foldningen er et stærkt værktøj, for dens Fourier række er altid konvergent, ifølge Bessel's ulighed. Dette er den virkelige ide bag foldningen af en funktion. På nuværende tidspunkt ved vi dermed at ihvertfald visse næsten periodiske funktioner, har konvergente Fourier rækker. Nu følger en diskussion af ækvivalensen mellem Parseval's formel, multiplikations- og entydighedssætningen. Forholdet mellem disse sætninger er vitalt for teoriens struktur, og læseren opfordres til grundigt at studere diskussionen og beviset for ækvivalens. Da Bohr offentliggjorde sine artikler, var han ikke bekendt med ækvivalensen mellem entydighedssætningen og Parseval's formel. Han beviste derfor Parseval's formel, hvorefter entydighedssætningen fulgte som korollar. Dette førte til et næsten umenneskeligt kompliceret bevis. Da ækvivalensen mellem disse udsagn kort efter blev opdaget, beviste flere matematikere sætningerne udfra entydighedssætningen, hvilket er mere bekvemt. Det i teksten anvendte bevis er udviklet af de Vallée Poussin, og er et glimrende eksempel på de simplifikationer der er foregået. Beviset er dog stadig temmelg langt og kompliceret, men resultatet er tilsvarende frugtbart. Entydighedssætningen er et virkeligt gennembrud, og hovedsætningen er pludselig indenfor rækkevidde. Faktisk er hovedsætningen bevist for en lang række næsten periodiske funktioner; nemlig alle dem hvis Fourier rækker giver mening. For hvis en række $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ giver mening er den netop Fourier række for sin sumfunktion, og kun for sin sumfunktion. Det betyder at næsten periodiske funktioner hvis Fourier række giver mening, for eksempel foldninger, kan approximeres uniformt, med vilkårlig præcision, af et endeligt udsnit af sin Fourier række, som jo er et trigonometrisk polynomium. Dette er ovenikøbet stærkere end hovedsætningen, for vi finder samtidig hvilket trigonometrisk polynomium, vi kan approksimere funktionen med. I et sådant tilfælde kan vi identificere funktionen med sin Fourier række. Problemet er imidlertid at vi ikke generelt ved hvilke næsten periodiske funktioner der har konvergente Fourier rækker, og hvilke der har divergente. Vi ved blot at begge muligeheder er tilstede. Dette er et dybt problem, der endnu ikke er fuldt afklaret. Men det betyder ikke at der ikke er opnået resultater på området: Det er muligt at opstille enkelte kriterier der sikre konvergens af en næsten periodisk funktions Fourier række. Konvergensforholdene er dog underordnede for selve hovedsætningens bevis. Vi beviser hovedsætningen gennem Bochner's summationssætning. I Bohr's oprindelige teori bevistes hovedsætningen ved et kompliceret argument, der byggede på periodiske funktioner af endelig og uendelig mange variable. Der findes andre beviser for hovedsætningen, men vi har foretrukket Bochner's summationssætning da vi således også løser et andet problem: Til en given næsten periodisk funktion at konstruere en uniformt konvergent følge af trigonometriske polynomier, der konvergerer mod funktionen.

Den efterfølgende figur illustrerer teoriens opbygning og struktur. Elementerne i boksene er begreber, definitioner eller sætninger, der har betydning for teorien. Et diagram der fuldstændig angiver de indbyrdes afhængighedsforhold, kan hurtigt blive uoverskueligt, så vi har forsøgt at skitsere de vigtigste sammenhænge. Systemet er enkelt: Det som en pil peger på er afhængigt af det som pilen kommer fra.



Figur 5.1: Diagram over teoriens struktur

Kapitel 6

Mere om næsten periodicitet

6.1 Indledning

Vi har på nuværende tidspunkt præsenteret den elementære teori, stort set som udviklet af Bohr i hans første to artikler, og vil nu se på nogen af de resultater der siden er fundet. I årene efter at Bohr havde fremlagt sin teori, var der en næsten eksplosionsagtig interesse omkring næsten periodiske funktioner, og flere matematikere bidrog afgørende til teorien. Den videre udvikling af teorien kan groft siges at gå i to retninger:

1. Teorien blev betragtet fra nye indfaldsvinkler med tilhørende reformuleringer af dens resultater og simplificering af beviserne. Desuden arbejdedes der med at opnå nye sætninger, men alt sammen indenfor rammerne af den elementære teori.

2. Man søgte at generalisere begrebet næsten periodicitet til langt bredere klasser af funktioner.

I det følgende tiår skete der store landvindinger på begge områder. Den matematiske teori er så omfattende, at vi vil indskrænke os til at skitsere hovedtrækkene i udviklingen, og supplere med enkelte eksempler.

Arbejdet med den oprindelige teori fik to konsekvenser. Dels blev teorien i vid udstrækning simplificeret, og dels blev enkelte nye resultater opnået. En af de første og mest væsentlige simplifikationer blev opnået da ækvivalensen mellem Parseval's formel og entydighedssætningen blev bevist. Som tidligere nævnt udviklede Bohr et særdeles kompliceret bevis for Parseval's formel, og beviste dernæst entydighedssætningen som et korollar, men det er langt enklere at basere beviset på entydighedssætningen. Det af os benyttede bevis er udviklet af de la Valée Poussin, og repræsenterer en typisk forenkling. Af andre beviser for entydighedssætninger er der grund til at nævne Weyl's. Weyl indfaldsvinkel var ny, men frugtbar. Han betjente sig af teknikker fra lineær algebra kombineret med gruppe teoretiske argumenter, og kunne dermed ikke blot bevise entydighedssætningen, men samtidig konstruere Fourier rækker. Weyl's benyttelse af gruppe teori medvirkede desuden til at teorien senere blev udviklet til at omfatte grupper. En anden type beviser der fremkom var de elementære beviser for hovedsætningen. Mens vi kun har bevist hovedsætningen efter at have opbygget en hel teori at trække på, viste flere matematikere at det er muligt at opnå et direkte bevis, der (næsten) kun bygger på at næsten periodiske funktioner har de i definitionen fastlagte egenskaber. Særligt Bogoljubov's bevis er blevet kendt, og vi vil senere gennemgå det.

En ting er at simplificere allerede eksisterende beviser, en anden at udvikle nye! Bohr's teori var næsten fuldent fra fødslen, men enkelte resultater er siden opnået. Vi har allerede præsenteret Bochner's summationssætning, der besvarer et af de få åbne spørgsmål i Bohr's teori: Hvorledes approksimeres en næsten periodisk funktion? Ellers er det sparsomt hvad der siden er opnået af væsentlige sætninger, for de figurerer allerede i Bohr's teori. Der er dog en væsentlig undtagelse: Bochner fandt en karakteristisk egenskab ved næsten periodiske funktioner. Som definition af næsten periodicitet er Bochner's karakteristik elegant, og blev senere benyttet til at generalisere begrebet. Bochner's karakteristik diskuteres i næste afsnit. Et problem der endnu ikke er løst, og som stadig påkalder sig opmærksomhed, er Fourier rækkers konvergensforhold. En karakteristik af de funktioner hvis Fourier rækker konvergerer vil være et uhyre væsenligt resultat, og er idag den eneste større mangel ved teorien.

Generaliseringerne var forsøg på at udvide teoriens gyldighed til bredere funktions klasser. I første omgang synes kravet om kontinuitet at være den mest snærende ramme, og Stepanov fik hurtigt generaliseret begrebet næsten periodicitet, til at omfatte diskontinuerte funktioner. Videre generaliseringer blev udviklet af Weyl og af Besicovitch (der er overgang arbejdede sammen med Bohr). Med Besicovitch' vidtfavnende generalisering bliver teorien afrundet og videre generaliseringer overflødige. Dette gælder dog kun for den 'klassiske' teori, der behandler funktioner $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$. (I sin 3. artikler behandlede Bohr funktioner $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, men denne teori fremstår idag stort set uændret.) I midten af 30'erne udvidede von Neumann begrebet næsten periodicitet til at omfatte komplekse funktioner, defineret på grupper. I første omgang betragtedes kun kommutative grupper, men teorien er siden videreudviklet. Mens næsten al videre udvikling indenfor næsten periodiske funktioner udslukkedes sidst i 30'erne, forblev næsten periodiske funktioner på grupper et område hvor der til stadighed var nye resultater at finde og hvor teorien levede videre; i hvert fald en tid endnu. Idag er det (meget) sparsomt hvad der publiceres af nye resultater, men netop det kan jo være et tegn på en veludviklet og solidt funderet teori.

I det følgende vil vi se på nogle 'udpluk' af udviklingen. Som eksempler på udviklingen af den elementære teori, vil vi se nærmere på Bochner's karakteristik og Bogoljubov's bevis. Herefter vil vi kort gennemgå generaliseringerne, afsluttende med en 'skitse' af hvorledes von Neumann udvidede teorien til at omfatte grupper.

6.2 Bochner's karakteristik

Allerede i 1927 karakteriserede Bochner de næsten periodiske funktioner, fuldstændig uden at gøre brug af begreberne forskydningstal og relative tætte mængder. Karakteristikken er et glimrende eksempel på de alternative indfaldsvinkler til teorien, der fremkom efter Bohr's artikler.

Vi indfører første nogle generelle begreber. Lad $(\mathcal{M}, d)$ betegne et vilkårligt *metrisk rum*, d.v.s. et mængde $\mathcal{M}$ med en tilhørende afstandsfunktion $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$. Ved $K(f, r)$ forstår vi kuglen med centrum i f og radius r, d.v.s. mængden $\{x \in \mathcal{M} \mid d(x, f) \leq r\}$. Vi siger at en delmængde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ af et merisk rum er *totalt begrænset* hvis vi til ethvert givet $\varepsilon > 0$ kan vælge et endeligt antal elementer $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i $\mathcal{A}$, således at ethvert element i $\mathcal{A}$ er indeholdt i en (eller flere) af kuglerne $K(f_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi kalder da $f_1, f_2, \ldots f_n$ for en mængde af *ε-approksimanter*, da ethvert element i $\mathcal{A}$ kan approksimeres med afstand $\leq \varepsilon$, ved et (eller flere) af elementerne f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. En delmængde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ af et metrisk rum kaldes desuden *betinget kompakt*, hvis enhver følge i $\mathcal{A}$ indeholder en delfølge der er en fundamentalfølge. En følge (f_n) kaldes en fundamentalfølge hvis der, til ethvert $\varepsilon > 0$, kan vælges et N så: $d(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ for alle $n, m \geq N$. En reel eller kompleks fundamentalfølge er altid konvergent.

Vi ønsker at vise at totalt begrænsethed og betinget kompakthed er ækvivalente begreber; altså at $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ er betinget kompakt, hvis og kun hvis den er totalt begrænset. Beviset er simpelt og kan føres i ord:

Totalt begrænsethed $\Rightarrow$ betinget kompakthed, for antag at $\mathcal{A}$ er totalt begrænset og betragt en følge $f_1, f_2, \ldots$ i $\mathcal{A}$. Vi kan dække $\mathcal{A}$ med et endeligt antal kugler med radius 1. I hvert fald en af kuglerne indeholder uendelig mange af følgens elementer; d.v.s. der eksisterer en delfølge af $f_1, f_2, \ldots$, som vi betegner $f_{11}, f_{12}, \ldots$, hvis elementer højst har afstand 2 til hverandre. Vi overdækker nu $\mathcal{A}$ med et endeligt antal kugler med radius $\frac{1}{2}$. Følgen $f_{11}, f_{12}, \ldots$ vil da indeholde en delfølge $f_{21}, f_{22}, \ldots$, hvis elementer alle falder i samme kugle og derfor har afstand ≤ 1 til hverandre. Dernæst overdækker vi $\mathcal{A}$ med kugler af med radius $\frac{1}{3}$, og udvælger en delfølge $f_{31}, f_{32}, \ldots$ af $f_{21}, f_{22}, \ldots$, hvis elementer højst har afstand $\frac{2}{3}$ til hverandre. Vi fortsætter med kugler med radius $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Diagonalfølgen $f_{11}, f_{22}, \ldots$ vil da være en fundamentalfølge, for fra det n'te element at regne har følgens elementer afstand $\leq \frac{2}{n}$ til hverandre.

Betinget kompakthed $\Rightarrow$ totalt begrænsethed for antag at $\mathcal{A}$ *ikke* er betinget kompakt, d.v.s. der eksisterer et $\varepsilon > 0$ så $\mathcal{A}$ ikke kan dækkes med et eneligt antal kugler med radius ε. Vi kan da danne en følge i $\mathcal{A}$ ved at udvælge et tilfældigt $f_1 \in \mathcal{A}$ og dernæst vælge et $f_2 \in \mathcal{A}$ der ikke tilhører $K(f_1, \varepsilon)$, og dernæst vælge et $f_3 \in \mathcal{A}$ der hverken er indeholdt i $K(f_1, \varepsilon)$ eller $K(f_2, \varepsilon)$ o.s.v. Ved at fortsætte processen får vi defineret følgen $f_1, f_2, \ldots$, der ikke indeholder en delfølge der er en fundamentalfølge, da alle følgens elementer jo har afstand større end ε til hverandre. $\mathcal{A}$ er altså ikke betinget kompakt.

For at kunne benytte begreberne totalt begrænsthed og betinget kompakthed på mængden af næsten periodiske funktioner, er det nødvendigt at definere en afstandsfunktion således at vi kan tale om afstanden mellem to funktioner. Til dette anvendes den *uniforme metrik*, d.v.s. den funktion der til to funktioner f og g knytter afstanden:

$$d(f, g) = \sup \left\{ |f(x) - g(x)| \;\middle|\; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Vi har implicit benyttet den uniforme metrik utallige gange, typisk i udtryk som:

$$| f(x) - t(x) | \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } x \in \mathcal{R}$$

der lige så vel kunne udtrykkes $d(f, t) \leq \varepsilon$. Vi kan nu præsentere *Bochner's karakteristik:*

Sætning 6.1 (Bochner's karakteristik) *En kontinuert funktion $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ er næsten periodisk hvis og kun hvis mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathcal{R}\}$, som vi kalder mængden af f's forskudte funktioner, er totalt begrænset/betinget kompakt.*

Bevis :

Næsten periodicitet $\Rightarrow$ totalt begrænsethed:

Antag at f er næsten periodisk og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi vælger inkluderingslængde $L = L(\frac{\varepsilon}{2})$, således at ethvert interval af længde L indeholder et forskydningstal for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$. Desuden kan vi, da f er uniformt kontinuert, vælge et $\delta > 0$ således at:

$$| x_1, x_2 | \leq \delta \quad \Rightarrow \quad | f(x_1) - f(x_2) | \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

I intervallet $[0, L]$ kan vi tydeligvis udvælge en mængde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ af δ-approksimanter, således at et vilkårligt $b \in [0, L]$ har afstand $\leq \delta$ til et passende b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Til et vilkårligt $a \in \mathcal{R}$ kan vi finde et forskydningstal $\tau = \tau(\frac{\varepsilon}{2})$, for f hørende til $\frac{\varepsilon}{2}$, således at $a + \tau \in [0, L]$. Ligeledes kan vi finde et passende b_i, således at:

$$d(f(x+a), f(x+b_i)) \leq$$
$$d(f(x+a), f(x+a+\tau)) + d(f(x+a+\tau), f(x+b_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dermed er $f(x+b_1), f(x+b_2), \ldots, f(x+b_n)$ en endelig mængde af ε-approksimanter for mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathcal{R}\}$ af forskudte funktioner, der således er totalt begrænset.

Total begrænsethed $\Rightarrow$ næsten periodicitet:

Antag at funktionen $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ er kontinuert og mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathcal{R}\}$ er totalt begrænset. For et givet $\varepsilon > 0$ udvælger vi endelig mange ε- approksimanter $f(x+a_1), f(x+a_2), \ldots, f(x+a_n)$, og ordner dem således at $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Til ethvert $a \in \mathcal{R}$ kan vi finde et passende a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, således at $d(f(x+a), f(x+a_i)) \leq \varepsilon$, og dermed $d(f(x+a-a_i), f(x)) \leq \varepsilon$, d.v.s. et af tallene $a - a_1, a - a_2, \ldots, a - a_n$ er et forskydningstal for f hørende til ε, og ethvert interval af længde $a_n - a_1$ indeholder et sådan forskydningstal, d.v.s. f er næsten periodisk. □

6.3 Bogoljubov's bevis

Vi skal nu følge Bogoljubov's elementære bevis for approksimationssætningen: $\mathcal{F} \subseteq H(\mathcal{T})$. Vi ved at den omvendte sætning $\mathcal{F} \supseteq H(\mathcal{T})$ er enkel at vise, så beviset er næsten et bevis for hovedsætningen. Beviset blev publiceret i 1935, men først kendt af kredsen omkring Bohr i 49, om end der længe havde været en mistanke om dets eksistens. Børge Jessen og Erling Fölner havde under krigen studeret en artikel af Bogoljubov om forskydningstal, og undrede sig over at der ikke var leveret et bevis for hovedsætningen, da det var tydeligt at det kunne baseres på artiklens resultater. Hans Tornehave opdagede senere at Bogoljubov allerede havde gjort dette, da han fandt referencer til en russisk lærebog om svingningskredse i elektronrør, hvor det original bevis var anført. I mellemtiden havde Børge Jessen forøvrigt indgående studeret teorien, og fundet et bevis der var næsten identisk med Bogoljubov's. Bogoljubov's bevis er siden blevet kendt for sin simpelhed. Det leverer et direkte bevis for approksimationssætningen, uden at trække på et kompleks af hjælpesætninger.

Vi tager udgangspunkt i ulighederne:

$$\left.\begin{array}{ccc} |\lambda_1\tau| & \leq & \delta \\ |\lambda_2\tau| & \leq & \delta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\lambda_m\tau| & \leq & \delta \end{array}\right\} \mod 2\pi$$

hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathcal{R}$ og $\delta > 0$. Ved en løsning forstår vi et reelt tal τ, hvortil der kan vælges heltal $n_1, n_2, \ldots, n_m$ således at $|\lambda_i\tau + n_i 2\pi| \leq \delta$, for $i = 1, 2, \ldots, m$. Mængden af løsninger betegnes $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \delta]$.

Allerede Bohl (den klassiske trykfejl i litteraturen er at forveksle Bohl og Bohr) havde, ca. 10 år før Bohr offentliggjorde sin teori, studeret løsningsmængderne og indført begrebet relative tætte mængder. Han fandt nemlig at løsningsmængderne altid er relativt tætte. Hans arbejde fik dog ingen indflydelse på Bohr's opbygning af teorien, da Bohr simpelthen ikke var bekendt med det.

Beviset er inddelt i to sætninger:

Sætning 6.2 *Såfremt det for en næsten periodisk funktion f og et givet $\varepsilon > 0$ gælder at mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ indeholder en mængde $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \delta]$, da eksisterer der et trigonometrisk polynomium t så:*

$$| f(x) - t(x) | \leq 2\varepsilon \qquad \textit{for alle } x \in \mathcal{R}$$

Bevis :

Vi trækker på teorien for periodiske funktioner af flere variable[1].

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_m t)$$

eller blot $x = \lambda t$ betegner en linie i $\mathcal{R}^m$.

Vi vil søge at konstruere en kontinuert periodisk funktion $F : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{C}$, med periode 2π efter hver af de m variable, der opfylder:

$$| f(t) - F(\lambda t) | \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } t \in \mathcal{R}$$

Når dette er gjort er beviset næsten fuldendt for vi kan da, ifølge Weierstrass' sætning for periodiske funktioner af flere variable, konstruere et trigonometrisk polynomium af flere variable:

$$T(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m \in \mathcal{Z}}^{\star} a_{n_1,\ldots,n_m} e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)}$$

således at $| F(x) - T(x) | \leq \varepsilon$ for alle $x \in \mathcal{R}^m$. For det trigonometriske polynomium

$$s(t) = T(\lambda t) = \sum_{n_1,\ldots,n_m \in \mathcal{Z}}^{\star} a_{n_1,\ldots,n_m} e^{i(n_1 \lambda_1 + \cdots + n_m \lambda_m)t}$$

vil da gælde $| f(t) - s(t) | \leq 2\varepsilon$ for alle $t \in \mathcal{R}$.

Vi vælger først et $N \in \mathcal{N}$ så stort at $\frac{4\pi}{N} \leq \delta$. Vi inddeler da $\mathcal{R}^m$ i afsluttede terninger med kantlængde $\frac{2\pi}{N}$, v.h.a. planerne $x_i = n_i \frac{2\pi}{N}$, $n_i \in \mathcal{Z}$. Hver terning har 2^m hjørnepunkter, og mængden af hjørnepunkter udgøres af gitteret $\{n\frac{2\pi}{N} \mid n \in \mathcal{Z}^m\}$. Hvert gitterpunkt er

[1] For en gennemgang af denne: Se Appendix D

hjørnepunkt i 2^m terninger, som tilsammen udgør en 'storterning', med kantlængde $\frac{4\pi}{N}$ og gitterpunktet som centrum. Hvert gitterpunkt har en tilhørende storterning.

Vi definerer indledningsvis funktionen F på gitteret: Hvis linien $x = \lambda t$ indeholder et punkt i den til gitterpunktet x_0 hørende storterning, vælger vi et sådan punkt λt_0 og sætter $F(x_0) = f(t_0)$. For alle gitterpunkter der er ækvivalente modulo 2π med x_0 (d.v.s. alle punkter $x = x_0 + n2\pi$, $n \in \mathcal{Z}^m$) benyttes samme t_0. I de gitterpunkter x_0 hvor F ikke således er defineret sættes $F(x_0) = 0$. F er dermed periodisk, med periode 2π efter hver af de m variable.

F udvides nu til at være en kontinuert funktion defineret på $\mathcal{R}^m$ på følgende vis: Først interpoleres lineært efter x_1, for faste $x_2 = n_2\frac{2\pi}{N}, \ldots, x_m = n_m\frac{2\pi}{N}$; $n_2, \ldots n_m \in \mathcal{Z}$. Dernæst interpoleres linært efter efter x_2, for faste $x_1, x_3 = n_3\frac{2\pi}{N}, \ldots, x_m = n_m\frac{2\pi}{N}$; $n_3, \ldots, n_m \in \mathcal{Z}$. Dernæst interpoleres lineært efter x_3 for faste $x_1, x_2, x_4 = n_4\frac{2\pi}{N}, \ldots x_m = n_m\frac{2\pi}{N}$; $n_4, \ldots, n_m \in \mathcal{Z}$ o.s.v.

For et vilkårligt t ligger λt i (mindst) en terning A. For hver af A's hjørner x_0 gælder $F(x_0) = f(t_0)$, for et t_0 for hvilket λt_0 mod 2π tilhører den til x_0 knyttede storterning. Enhver af disse storterninger indeholder A, og dermed gælder $\mid \lambda_i t - \lambda_i t_0 \mid \leq \frac{4\pi}{N} \leq \delta$ mod 2π, for alle $i = 1, 2, \ldots, m$. Differensen $t - t_0$ tilhører derfor mængden $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \delta]$ og er dermed et forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$ for f hørende til ε. Dermed gælder for hjørnerne x_0 af A: $\mid f(t) - F(x_0) \mid \leq \varepsilon$. Af metoden til konstruktion af F følger da at ethvert punkt x i A opfylder $\mid f(t) - F(x) \mid \leq \varepsilon$ og specielt gælder $\mid f(t) - F(\lambda t) \mid \leq \varepsilon$. □

Efter den foregående sætning er approksimationssætningen bevist når følgende sætning er bevist:

Sætning 6.3 *Lad $f \in \mathcal{F}$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da indeholder mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ en mængde $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \delta]$.*

Bevis :

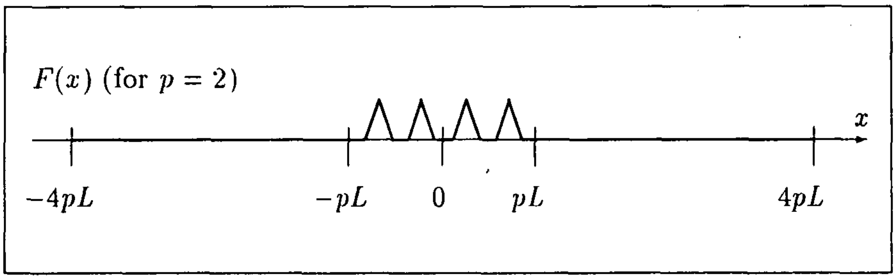
Vi bestemmer først et $\eta \in]0, \frac{1}{8}[$, således at ethvert $\tau \in [-\eta, \eta]$ er et forskydningstal $\tau_f(\frac{\varepsilon}{9})$ for f hørende til $\frac{\varepsilon}{9}$. Dette kan gøres da f er uniformt kontinuert. Ønsker man at benytte Bogoljubov's bevis som et direkte bevis for approksimationssætningen, må man altså først godtgøre at enhver næsten periodisk funktion er uniformt kontinuert. Vi ved dog at dette let kan vises, og det er den eneste gang vi benytter en egenskab ved næsten periodiske funktioner, der ikke direkte fremgår af definitionen.

Sæt $L = L_f(\frac{\varepsilon}{9}) + 2\eta$. I et vilkårligt interval $[a, a+L]$ af længde L findes et interval af længde 2η, bestående af lutter forskydningstal $\tau_f(\frac{2\varepsilon}{9})$; for der findes et $\tau = \tau_f(\frac{\varepsilon}{9})$ i $[a+\eta, a+\eta+L_f(\frac{\varepsilon}{9})]$, og intervallet $[\tau-\eta, \tau+\eta]$ vil ligge i $[a, a+L]$, og ethvert tal i $[\tau-\eta, \tau+\eta]$ er et forskydningstal $\tau_f(\frac{2\varepsilon}{9})$ da det er summen af to forskydningstal $\tau_f(\frac{\varepsilon}{9})$.

Givet et $p \in \mathcal{N}$ kan vi konstruere en periodisk funktion F, med periode $8pL$, ved at definere den i $[-4pL, 4pL]$ på følgende vis: Intervallet $[-pL, pL]$ kan inddeles i $2p$ delintervaller af længde L. I hvert delinterval udvælges et interval $]a-\eta, a+\eta[$ bestående af forskydningstal $\tau_f(\frac{2\varepsilon}{9})$, og i dette sættes:

$$F(x) = \frac{4L}{\eta} - \frac{4L}{\eta^2} \mid x - a \mid$$

Overalt hvor F ikke er defineret sættes $F(x) = 0$.



F er en reel og ikke-negativ funktion. Arealet under en 'top' er:

$$\int_{-\eta}^{\eta} \left(\frac{4L}{\eta} - \frac{4L}{\eta^2} \mid x \mid \right) dx = 4L$$

og da intervallet $[-4pL, 4pL]$ af længde $8pL$ indeholder $2p$ toppe, er middelværdien:

$$M\{F(x)\} = \frac{2p}{8pL} 4L = 1$$

Ligeledes er:

$$M\{F(x)^2\} = \frac{2p}{8pL} \int_{-\eta}^{\eta} \left(\frac{4L}{\eta} - \frac{4L}{\eta^2} \mid x \mid \right)^2 dx = \frac{8L}{3\eta}$$

For Fourier konstanterne gælder:

$$| a_n |= \left|M\left\{F(x)e^{-in\frac{2\pi}{8pL}x}\right\}\right|$$

$$\leq M\left\{F(x)\left|e^{-in\frac{2\pi}{8pL}x}\right|\right\} = M\{F(x)\} = 1$$

og:

$$\sum | a_n |^2 = M\{F(x)^2\} = \frac{8L}{3\eta}$$

Vi folder F:

$$G(x) = M_t\{F(x+t)F(t)\} = \sum_{n\in\mathcal{Z}} | a_n |^2 e^{in\frac{2\pi}{8pL}x}$$

og folder foldningen:

$$H(x) = M_t\{G(x+t)G(t)\} = \sum_{n\in\mathcal{Z}} | a_n |^4 e^{in\frac{2\pi}{8pL}x}$$

Såvel G som H er reelle ikke-negative periodiske funktioner, med periode $8pL$ (og derfor er konjugering undladt i ovenstående).

For et vilkårligt $x \in [-4pL, 4pL]$ er $G(x) > 0$ hvis og kun hvis der eksisterer et $t \in \mathcal{R}$ så $F(x+t) > 0$ og $F(t) > 0$. P.g.a. periodiciteten af F behøver vi kun at søge efter et passende t i intervallet $[-4pL, 4pL]$. I dette interval gælder $F(t) > 0$ hvis og kun hvis $t \in \mathcal{A} = \{x \in]-pL, pL[\mid F(x) > 0\}$. Dermed fås $x+t \in]-5pL, 5pL[$, men vi behøver tydeligvis kun at søge efter et passende t så $x+t \in]-4pL, 4pL[$. Således fås at $G(x) > 0$ hvis og kun hvis $t \in \mathcal{A}$ og $x+t \in \mathcal{A}$; d.v.s. hvis og kun hvis der eksisterer $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{A}$ så $x = \tau_1 - \tau_2$. Specielt ses at $G(x) = 0$ for $x \in [-4pL, -2pL]$ og for $x \in [2pL, 4pL]$.

Vi søger nu de $x \in [-4pL, 4pL]$ for hvilke $H(x) > 0$, d.v.s. de x for hvilke der findes et passende t så $G(x+t) > 0$ og $G(t) > 0$. Igen behøver vi kun at betragte $t \in [-4pL, 4pL]$. $G(t) > 0$ indebærer at $t \in]-2pL, 2pL[$ og $t = \tau_1 - \tau_2$, og dermed fås $x + t \in]-6pL, 6pL[$. Men da $G(x) = 0$ for $x \in]-6pL, -4pL[$ og for $x \in]4pL, 6pL[$, fås $x + t \in [-4pL, 4pL]$, og dermed $G(x+t) > 0$ hvis og kun hvis der eksisterer $\tau_3, \tau_4 \in \mathcal{A}$ så $x + t = \tau_3 - \tau_4$. Vi har dermed at $H(x) > 0$ hvis og kun hvis $x = \tau_3 - \tau_4 - (\tau_1 - \tau_2)$, hvor $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in \mathcal{A}$. Da ethvert $\tau \in \mathcal{A}$ er et forskydningstal $\tau_f(\frac{2\varepsilon}{9})$, kan vi slutte:

Ethvert $x \in [-4pL, 4pL]$ for hvilket $H(x) > 0$ er et forskydningstal $\tau_f(\frac{8\varepsilon}{9})$ for f hørende til $\frac{8\varepsilon}{9}$.

Lad nu $n_1, n_2, \ldots$ være $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$ ordnet således at:

$$1 = a_0 \geq | a_{n_1} | \geq | a_{n_2} | \geq \ldots$$

For ethvert $k \in \mathcal{N}$ gælder:

$$k \mid a_{n_k} |^2 < \sum_{n \in \mathcal{Z}} | a_n |^2 = \frac{8p}{3\eta}$$

Hvis m er et fast heltal der opfylder $m \geq \left(\frac{8L}{3\eta}\right)^2$ gælder da:

$$| a_{n_k} |^4 < \left(\frac{8L}{3\eta}\right)^2 \frac{1}{k^2} \leq m \frac{1}{k^2} < m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Da H er en reel funktion gælder:

$$H(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} | a_{n_k} |^4 \cos\left(n_k \frac{2\pi}{8pL} x\right)$$

Hvis der for et givet x gælder $\cos\left(n_k \frac{2\pi}{8pL} x\right) \geq 0$ for ethvert $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, da gælder dermed:

$$H(x) > 1 + 0 - \sum_{k=m+1}^{\infty} m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - m\frac{1}{m} = 0$$

og hvis $x \in [-4pL, 4pL]$ er x tillige et forskydningstal $\tau_f(\frac{8\epsilon}{9})$.

Vi har dermed vist at *for ethvert* $p \in \mathcal{N}$ *findes der* m *reelle tal* $\mu_1^{(p)}, \mu_2^{(p)}, \ldots, \mu_m^{(p)}$, *således at ethvert* $x \in [-4pL, 4pL]$ *der opfylder* $\cos \mu_k^{(p)} x \geq 0$ *for alle* $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *er et forskydningstal* $\tau_f(\frac{8\epsilon}{9})$ *for* f *hørende til* $\frac{8\epsilon}{9}$.

For heltallige x er uligheden $\cos \mu x \geq 0$ identisk med $\cos x(\mu + n2\pi) \geq 0$, for $n \in \mathcal{Z}$. Hvis vi erstatter tallene $\mu_1^{(p)}, \mu_2^{(p)}, \ldots, \mu_m^{(p)}$ med de modulo 2π kongruente tal $\lambda_1^{(p)}, \lambda_2^{(p)}, \ldots, \lambda_m^{(p)}$ i intervallet $[0, 2\pi[$ (d.v.s. istedet for $\mu_i^{(p)}$ betragtes $\lambda_i^{(p)} \in [0, 2\pi[$ der fremkommer ved at vælge et passende heltal $n_i^{(p)}$, således at $\mu_i^{(p)} + n_i^{(p)} 2\pi = \lambda_i^{(p)}$) gælder:

For ethvert $p \in \mathcal{N}$ *findes der* m *reelle tal* $\lambda_1^{(p)}, \lambda_2^{(p)}, \ldots, \lambda_m^{(p)}$ *i* $[0, 2\pi[$, *således at ethvert heltalligt* $x \in [-4pL, 4pL]$ *der opfylder* $\cos \lambda_i^{(p)} \geq 0$ *for alle* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *er et forskydningstal* $\tau_f(\frac{8\epsilon}{9})$ *for* f *hørende til* $\frac{8\epsilon}{9}$.

Følgen $\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots$ indeholder en delfølge, der er en fundamentalfølge. Denne betegnes $\lambda_1^{(l_1^1)}, \lambda_1^{(l_2^1)}, \dots$. Følgen $\lambda_2^{(l_1^1)}, \lambda_2^{(l_2^1)}, \dots$ vil ligeledes indeholde en fundamentalfølge som delfølge, og denne betegnes $\lambda_2^{(l_1^2)}, \lambda_2^{(l_2^2)}, \dots$. Følgen $\lambda_3^{(l_1^2)}, \lambda_3^{(l_2^2)}, \dots$ vil da indeholde en fundamentalfølge o.s.v. Ved at fortsætte argumentationen ses at der kan dannes en følge $p_1 < p_2 < \dots$, hvor $p_i = l_i^m$, således at hver af følgerne $\lambda_i^{(p_1)}, \lambda_i^{(p_2)}, \dots$, for $i = 1, 2, \dots, m$, er fundamentalfølger og dermed konvergente. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ betegne deres grænseværdier. De er alle beliggende i $[0, 2\pi]$.

Således vil ethvert helt x der opfylder $\cos \lambda_i x \geq 0$, for $i = 1, 2, \dots, m$, være et forskydningstal $\tau_f(\frac{8\varepsilon}{9})$ for f hørende til $\frac{8\varepsilon}{9}$, idet x for et tilstrækkeligt stort p er beliggende i $[-4pL, 4pL]$ og vil opfylde $\cos \lambda_i^{(p)} x \geq 0$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

$[\lambda_1, \dots, \lambda_m, 2\pi; 2\pi\eta]$ betegner løsningsmængden til ulighederne:

$$\left.\begin{array}{ccc} |\lambda_1 \tau| & \leq & 2\pi\eta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\lambda_m \tau| & \leq & 2\pi\eta \\ |2\pi\tau| & \leq & 2\pi\eta \end{array}\right\} \quad \text{mod } 2\pi$$

Af den sidste ulighed følger at enhver løsnings τ kan skrives på formen $\tau = t + \rho$, hvor $t \in \mathcal{Z}$ og $\rho \in [-\eta, \eta]$. For at tillige at opfylde de øvrigt uligheder må der eksistere heltal n_i, så:

$$|\lambda_i \tau - n_i 2\pi| = |\lambda_i (t + \rho) + n_i 2\pi|$$

$$= |\lambda_i t + \lambda_i \rho + n_i 2\pi| \leq 2\pi\eta \qquad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

Da $|\lambda_i \rho| \leq 2\pi\eta$ er det nødvendigt (men generelt ikke tilstrækkeligt) at t opfylder:

$$\left.\begin{array}{ccc} |\lambda_1 t| & \leq & 4\pi\eta \\ |\lambda_2 t| & \leq & 4\pi\eta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\lambda_m t| & \leq & 4\pi\eta \end{array}\right\} \quad \text{mod } 2\pi$$

Da $4\pi\eta \leq 4\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$ vil heltallet t opfylde $\cos \lambda_i t \geq 0$ for $i = 1, 2, \dots, m$, og dermed være et forskydningstal $\tau_f(\frac{8\varepsilon}{9})$ for f hørende til $\frac{8\varepsilon}{9}$. Da $\rho \in [-\eta, \eta]$ er ρ et forskydningstal $\tau_f(\frac{\varepsilon}{9})$ for f hørende til $\frac{\varepsilon}{9}$, og dermed er $\tau = t + \rho$ et forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$ for f hørende til ε.
Vi har dermed vist at løsningsmængden $[\lambda_1, \dots, \lambda_m, 2\pi; 2\pi\eta]$ er indeholdt i $\{\tau_f(\varepsilon)\}$. □

Et alternativt bevis: Det foregående bevis er langt og kompliceret, så vi vil vise hvor simpelt det bliver hvis vi antager approksimationssætningen for gældende.

Vi benytter at den næsten periodiske funktion f tilhører $H(\mathcal{T})$. Der findes altså et trigonometrisk polynomium:

$$t(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n e^{i\lambda_n x}$$

således at $| f(x) - t(x) | \leq \frac{\varepsilon}{3}$ for alle x. Fra sætning (5.5) ved vi at ethvert forskydningstal $\tau_t(\frac{\varepsilon}{3})$ er et forskydningstal $\tau_f(\varepsilon)$. Vi behøver derfor blot at vise at $\{\tau_t(\frac{\varepsilon}{3})\}$ indeholder en mængde $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \delta]$.

τ er et forskydningstal $\tau_t(\frac{\varepsilon}{3})$ for t hørende til $\frac{\varepsilon}{3}$ hvis:

$$| t(x+\tau) - t(x) | = \left| \sum_{n=1}^{m} \left(a_n e^{i\lambda_n (x+\tau)} - a_n e^{i\lambda_n x} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{m} a_n e^{i\lambda_n x} \left(e^{i\lambda_n \tau} - 1 \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{m} | a_n | \left| e^{i\lambda_n \tau} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Sættes $a = \max\{| a_1 |, | a_2 |, \ldots, | a_m |\}$ er ovenstående opfyldt hvis:

$$\left| e^{i\lambda_n \tau} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{3ma} \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots, m$$

d.v.s. hvis $e^{i\lambda_n \tau}$ er 'tæt på' 1, eller tilsvarende hvis $\lambda_n \tau$ er tæt på et af tallene $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Specielt må der eksistere et $\delta > 0$ således at τ er et forskydningstal $\tau_t(\frac{\varepsilon}{3})$ hvis:

$$| \lambda_n \tau | \leq \delta \mod 2\pi$$

for $n = 1, 2, \ldots, m$. Mængden $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \delta]$ er således inkluderet i $\{\tau_t(\frac{\varepsilon}{3})\}$.

Vi har vist at $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \delta]$ er inkluderet i $\{\tau_f(\frac{\varepsilon}{3})\}$, for et tilstrækkeligt lille δ og hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ er valgt således at de er Fourier frekvenser i et trigonometrisk polynomium der approksimerer f uniformt, med usikkerhed $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Fra Bochner's summationssætning ved vi at frekvenserne i det approksimerende polynomium kan (og bør) vælges så der er Fourier frekvenser for f. Vi har derfor vist følgende sætning, der er ganske interessant da det er den eneste sætning vi har opnået der direkte fortæller om forholdet mellem Fourier frekvenser og forskydningstal.

Sætning 6.4 *Givet en næsten periodisk funktion f og et $\varepsilon > 0$, indeholder $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ en mængde $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ alle er Fourier frekvenser for f.*

6.4 Generaliseringer af teorien

Nogle af de første reaktioner på Bohr's artikler, var forsøg på at generalisere teoriens resultater. Stepanov, Weyl og Besicovitch generaliserede hver for sig teorien til at omfatte langt bredere klasser af funktioner. For at forstå i hvilken retning generaliseringerne går, er det nødvendigt at tage udgangspunkt i teoriens fundament. Teorien søger at karakterisere de funktioner der kan opløses i harmoniske svingninger. Vi må præcisere hvad der forstås ved at en funktion kan 'opløses'. En fortolkning af begrebet kunne være at sige at en funktion kan opløses i rene svingninger, hvis den er en superposition af et endeligt antal rene svingninger. Hermed opnås mængden $\mathcal{T}$ af trigonometriske polynomier. Det er imidlertid en for restriktiv definition af 'opløsning', for mængden $\mathcal{T}$ er ikke lukket overfor grænseværdier, d.v.s. en konvergent følge af funktioner i $\mathcal{T}$ kan have en grænsefunktion der ikke tilhører $\mathcal{T}$.

For at udvikle teorien er det nødvendigt at afslutte $\mathcal{T}$, således at mængden er lukket overfor grænseovergange. Dette kan gøre ved at tilføje de funktioner der er grænsefunktioner for konvergente følger af trigonometriske polynomier. Dette kræver igen en fortolkning af begrebet 'grænsefunktion'. Den naturlige fortolkning er at betragte (punktvis) konvergens, d.v.s. f er grænsefunktion for følgen $(f_n(x))$ hvis der for alle $x \in \mathcal{R}$ gælder: $f_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$. Mængden af funktioner der kan approksimeres punktvist af trigonometriske polynomier er imidlertid al for bred, for den indeholder, som vist af Besicovitch, alle kontinuerte funktioner. I stedet for at afslutte $\mathcal{T}$ v.h.a. punktvis konvergens benyttede Bohr *uniform konvergens*, d.v.s. han studerede mængden $H(\mathcal{T})$ af funktioner der kan approksimeres uniformt af trigonometriske funktioner. Det er denne mængde vi har kaldt de næsten periodiske funktioner. Vi kan naturligvis også opfatte $H(\mathcal{T})$ som den mængde der fremkommer ved at afslutte mængden $\mathcal{T}$ ved brug af den uniforme metrik.

Generaliseringerne tager udgangspunkt i følgende problem: *Hvilke klasser af funktioner opnås såfremt der anvendes en anden metrik end den uniforme til at afslutte $\mathcal{T}$?*

Vi definerer hhv. det Stepanov'ske, det Weyl'ske og det Besicovitch'ske afstandsmål som:

$$d_S(f,g) = \sup\left\{\int_x^{x+1} | f(t) - g(t) | \, dt \,\Big|\, x \in \mathcal{R}\right\}$$

$$d_W(f,g) = \lim_{T\to\infty} \sup\left\{\frac{1}{T}\int_x^{x+T} | f(t) - g(t) | \, dt \,\Big|\, x \in \mathcal{R}\right\}$$

$$d_B(f,g) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} | f(x) - g(x) | \, dx$$

Lad $H_S(\mathcal{T})$, $H_W(\mathcal{T})$ og $H_B(\mathcal{T})$ betegne mængden af trigonometriske polynomier afsluttet med hver af de ovenstående afstandsmål. Da gælder:

$$H(\mathcal{T}) \subseteq H_S(\mathcal{T}) \subseteq H_W(\mathcal{T}) \subseteq H_B(\mathcal{T})$$

Lad d_G betegne et af ovenstående afstandsmål. Vi definerer de G-næsten periodiske funktioner som de komplekse funktioner f, af en reel variabel, hvor der til ethvert $\varepsilon > 0$ hører en relativ tæt mængde af G-forskydningstal τ, d.v.s. τ der opfylder:

$$d_G(f(x+\tau), f(x)) \leq \varepsilon$$

Mængden af G-næsten periodiske funktioner betegnes $\mathcal{F}_G$. Af afstandsmålenes natur følger:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_W \subseteq \mathcal{F}_B$$

d.v.s. funktionsklasserne $\mathcal{F}_G$ indeholder alle de næsten periodiske funktioner. De S-næsten periodiske funktioner er den snævreste generalisering, mens de B-næsten periodiske funktioner er den bredeste.

I forsøget på at generalisere teoriens resultater, er der to hovedproblemer der bør behandles:

1. I analogi med hovedsætningen $\mathcal{F} = H(\mathcal{T})$ for næsten periodiske funktioner, vil man søge at etablere den tilsvarende sætning $\mathcal{F}_G = H_G(\mathcal{T})$.

2. Når sætningen er vist vil man søge trigonometriske polynomier der approksimerer en given G-næsten periodiske funktion f. F.eks. ved at danne en følge $(t_n(x))$ af trigonometriske polynomier der konvergerer mod funktionen, i den forstand at $d_G(f, t_n) \to 0$ for $n \to \infty$. Dette problem løses bedst ved at introducere Fourier rækker, og for næsten periodiske funktioner specielt af Bochner's summationssætning.

Alle generaliseringer hviler på en vidunderlig simpel observation:

Sætning 6.5 *At afslutte $\mathcal{T}$ v.h.a. metrikken d_G er identisk med at afslutte $\mathcal{F}$ v.h.a. d_G, eller i symboler:*

$$H_G(\mathcal{T}) = H_G(\mathcal{F})$$

Bevis :

Det er oplagt at $H_G(\mathcal{T}) \subseteq H_G(\mathcal{F})$, da $H_G(\mathcal{T}) \subseteq H_G(H(\mathcal{T})) = H_G(\mathcal{F})$. Vi skal derfor blot vise at $H_G(\mathcal{F}) \subseteq H_G(\mathcal{T})$.

Lad $f \in H_G(\mathcal{F})$. Hvis $f \in \mathcal{F}$ da gælder $f \in H(\mathcal{T}) \subseteq H_G(\mathcal{T})$. Antag derfor at $f \notin \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ indeholder en følge $(\varphi_n(x))$ så:

$$d_G(f, \varphi_n) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Da φ_n er næsten periodisk eksisterer der et $t_n \in \mathcal{T}$ således at:

$$d(\varphi_n, t_n) \leq \frac{1}{n}$$

og dermed:

$$d_G(\varphi_n, t_n) \leq \frac{1}{n}$$

Af trekantsuligheden følger nu:

$$d_G(f, t_n) \leq d_G(f, \varphi_n) + d_G(\varphi_n, t_n)$$

og da højresiden konvergerer mod 0 for $n \to \infty$ fås:

$$d_G(f, t_n) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

d.v.s. der gælder nødvendigvis $f \in H_G(\mathcal{T})$ □

Ved at anvende identiteten er det muligt at bevise hovedsætningen for hhv. S-,W- og B-næsten periodiske funktioner. Idéen er at trække på de fundne resultater om næsten periodiske funktioner, og dermed undgå igen at skulle rejse det teoretiske kompleks, der en gang er skabt af Bohr's teori. Således kan man direkte og forholdsvis enkelt bevise hovedsætningen for S-næsten periodiske funktioner. Beviserne for hovedsætningen for W-næsten periodiske og især B-næsten periodiske funktoner, er langt vanskeligere.

For at løse det andet problem: Til en given funktion $f \in \mathcal{F}_G$ at konstruere en følge af trigonometriske polynomier, der konvergerer mod f ved brug af d_G; er det dog nødvendigt at 'genfinde' nogle af teoriens resultater. Middelværdisætningen gælder generelt, d.v.s. $M\{f(x)\}$ er defineret for alle $f \in \mathcal{F}_G$, og dermed kan G-næsten periodiske funktioner tildeles en Fourier række $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. Med Fourier rækker til rådighed, kan Bochner's summationssætning direkte generaliseres, d.v.s. enhver funktion $f \in \mathcal{F}_G$ kan approksimeres, ved brug af d_S, af trigonometriske polynomier hvis frekvenser alle er Fourier frekvenser for f. Dermed løses det andet problem. Udover dette er der resultater der minder meget om den elementære teoris. F.eks. er G-næsten periodiske funktioner G-uniformt kontinuerte, d.v.s. til et givet $\varepsilon > 0$ kan findes et $\delta > 0$ således at $d_G(f(x_1) - f(x_2)) \leq \varepsilon$ for $| x_1 - x_2 | \leq \delta$, og G-begrænsede, d.v.s. der eksisterer et reelt tal C så $d_g(f, 0) \leq C$ hvor 0 betegner nulfunktionen; uden at de dog behøver at være hverken begrænsede eller kontinuerte i 'normal' forstand.

Besicovitch' generalisering afrunder i en hvis forstand teorien. Vi betragter de funktioner f der, tillige med deres kvadrat $| f |^2$, er Lesbesque integrable i ethvert endeligt interval (L^2). Blandt disse defineres de B-næsten periodiske funktioner. En tilstrækkelig (og nødvendig) betingelse for at en vilkårlig trigonometrisk række $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er Fourier række for en B-næsten periodisk funktion, er at rækken $\sum | a_\lambda |^2$ konvergerer. Teorien er da fuldendt for forsøger man at opnå en videre generalisering, vil analogien til næsten periodiske funktioner gå tabt, da betydningsfulde sætninger ej længere er gældende.

6.5 Næsten periodicitet og grupper

Definition 6.1 *Ved en gruppe forstår vi en ikke-tom mængde med en tilhørende komposition der kaldes addition (multiplikation), og betegnes $+$ $(\cdot)$, der til to elementer A og B i gruppen knytter et element $A+B$ $(A \cdot B)$ i gruppen. For vilkårlige elementer A, B og C i gruppen opfylder kompositionen:*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$

2. *Der eksister et neutralt element 0 så:* $A + 0 = A$

3. Der eksisterer et inverst element $-A$ så: $A + (-A) = 0$

Hvis tillige $A + B = B + A$ siges gruppen at være kommutativ eller abelsk.

I det følgende vil vi kun behandle kommutative grupper, og omtale gruppens komposition som 'addition'. Addition kan naturligvis være forskellig fra normal addition, da gruppens elementer ikke nødvendigvis er tal eller vektorer.

Et eksempel på en gruppe er $(\mathcal{R}, +)$, d.v.s. gruppens elementer er de reelle tal og kompositionen er normal addition.

Når vi opererer med gruppens elementer er det ønskeligt at afspejle dette i operationer med tal. Vi betragter derfor de komplekse funktioner, der er defineret på gruppens elementer. De funktioner der, for alle A og B i gruppen, opfylder:

$$\xi(A + B) = \xi(A)\xi(B)$$

kaldes gruppens *karakterer*. En karakter afspejler således addition af gruppens elementer, i multiplikation af de tilknyttede funktionsværdier.

Lad os betragte karaktererne til gruppen $(\mathcal{R}, +)$, d.v.s. de funktioner der opfylder $\xi(x + y) = \xi(x)\xi(y)$, hvor x og y er reelle og $+$ er normal addition. Gruppen $(\mathcal{R}, +)$ er speciel i den forstand at vi kan måle afstande mellem gruppens elementer (reelle tal). Vi kan derfor tale om kontinuerte og diskontinuerte karakterer. De kontinuerte karakterer er eksponentialfunktioner $\xi(x) = e^{cx}$ hvor c er en kompleks konstant. Vi betragter kun de begrænsede karakter, d.v.s. hvor $c = i\lambda$ er rent imaginært. Dermed opnås netop de rene svingninger $e^{i\lambda x}$.

Af hovedsætningen følger: *De (kontinuerte) næsten periodiske funktioner (på gruppen $(\mathcal{R}, +)$) er netop de funktioner der kan approksimeres uniformt af linear kombinationer af $e^{i\lambda x}$ (gruppens kontinuerte begrænsede karakterer).* Vi vil prøve at følge denne observation i retning af en definition af næsten periodicitet på grupper. Først og fremmest må vi opgive kun at betragte de kontinuerte karakterer, for generelt vil vi ikke kunne definere kontinuitet uden et afstandsmål mellem gruppens elementer. Desuden er det umuligt at generalisere Bohr's oprindelige definition, for hvad skulle vi forstå ved en relativ tæt mængde af elementer i gruppen. Derimod kan Bochner's karakteristik passende benyttes.

Vi ønsker at opbygge en definition af næsten periodicitet på grupper, hvor de begrænsede karakterer spiller samme rolle som det trigonometriske system $\{e^{i\lambda x}\}$ gør i den oprindelige teori. En næsten periodisk funktion på en gruppe bør således kunne approksimeres uniformt af linearkombinationer af begrænsede karakterer. For en begrænset karakter ξ gælder $|\ \xi(A)\ | = 1$ for alle A, for ellers er karakteren ikke begrænset. Det er ikke svært at se at mængden $\{\xi(A+H)\}$, hvor H gennemløber gruppens elementer, er *kompakt* i den forstand at enhver følge $\xi(A+H_1), \xi(A+H_2), \ldots$ indeholder en delfølge der konvergerer uniformt på gruppen mod en grænsefunktion. Ved at følge Bochner's karakteristik benyttes dette til definition:

Definition 6.2 *En kompleks funktion f defineret på en kommutativ gruppe kaldes næsten periodisk, såfremt mængden $\{f(A+H)\}$ er kompakt (i ovenstående betydning).*

Med denne definition i bagagen er det muligt at opbygge en ny teori for næsten periodiske funktioner. Det første store problem er at definere en middelværdi. Det er tydeligt at det ikke kan gøres ved den 'gamle' metode, men, uden at vi vil komme nærmere ind på hvordan, det lykkedes von Neumann at definere begrebet på hensigtmæssig vis. Som et resultat af dette udgør de begrænsede karakterer altid et ortonormalt system, d.v.s.

$$M\left\{\xi_1(A)\overline{\xi_2(A)}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \xi_1 \neq \xi_2 \\ 1 & \text{for} \quad \xi_1 = \xi_2 \end{cases}$$

Herefter kan man definere Fourier rækker således at der til en næsten periodiske funktion f kan knyttes en række:

$$f(A) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n(A)$$

hvor koefficienterne a_n er komplekse, og $\{\xi_n(A)\}$ er en tællelig mængde begrænsede karakterer, karakteristiske for funktionen f. Entydighedssætningen er generelt gældende, d.v.s. forskellige funktioner har forskellige Fourier rækker, og hovedsætningen ligeså: Mængden af næsten periodiske funktioner på en kommutativ gruppe, er netop mængden af funktioner der kan approksimeres uniformt af linearkombinationer $\sum^* a_n \xi_n(A)$ af de begrænsede karakterer ('trigonometriske polynomier').

Vi afslutter denne korte skitsering med at vende tilbage til gruppen $(\mathcal{R}, +)$. Umiddelbart kunne man forvente at de næsten periodiske funktioner på gruppen, netop er de oprindelige næsten periodiske funktioner, men det er ikke tilfældet. Som tidligere nævnt er der bl.a. begrænsede karakterer for gruppen der er diskontinuerte, og følgeligt næsten periodiske funktioner på gruppen der er diskontinuerte. Indskrænker vi os kun at betragte de begrænsede og kontinuerte karakterer er der igen overensstemmelse, og vi opnår netop mængden $\mathcal{F}$. Når vi betragter næsten periodiske funktioner i gruppe teoretisk lys, fremstår de oprindelige næsten periodiske funktioner (som denne rapport hovedsaligt har handlet om) altså blot som et specialtilfælde af et specialtilfælde (omend et uhyre vigtigt et). Snarere end at degradere Bohr's teori, fortæller det om en vellykket generalisering.

Kapitel 7

Trådene samles

7.1 Den tidlige historie

I dette kapitel vil vi forsøge at samle nogle af de mange tråde, og se på de overordnede træk ved udviklingen. De periodiske funktioners historie startede med forsøget på at løse differentialligninger, knyttet til fysiske problemstillinger. Der var på det tidspunkt tale om væsentlige og påtrængende problemer, hvortil der hurtigt måtte findes en løsning. Datidens matematikere opererede derfor på hvad der idag nok vil betegnes som et usikkert grundlag, men i vid udstrækning fungerede deres løsninger. Et eksempel er Fourier's 'beviser' for at en periodisk funktion kan udvikles i trigonometriske rækker. Hvad der forstås ved en rækkes sum var på det tidspunkt endnu ikke fuldt afklaret, hvilket bl.a. resulterede i direkte uenighed om konkrete rækkers sum. Om end hverken Fourier eller hans samtidige formåede at overbevise alle skeptikere, viste det sig snart at rækker, i hvert fald i mange tilfælde, er et uhyre nyttigt redskab til at analysere og udtrykke funktioner. Parallelt med at denne indsigt blev opnået, opstod der i højere grad en interesse for matematik for matematikkens skyld. Successen indenfor f.eks. ikke-euklidsk geometri, hvor det lykkedes at opbygge en geometri, der ikke synes intuitiv rigtig men dog er logisk uangribelig, ansporede til den opfattelse at matematikken er et abstrakt system, løsrevet fra omgivelserne, der ubetinget afhænger af de antagelser vi gør os om matematikkens virkemåder. Formalismen udvikledes, og et arguments gyldighed kom til at hvile på om det er matematisk stringent. Der opstod en øget interesse for matematikkens grundlag. Fourier rækker og beslægtede problemer fremstår som en central trækkraft i denne udvikling. Det 19. århundrede var på mange måder analysens århundrede; det århundrede hvor væsentlige begreber blev defineret. Periodiske funktioner og de tilhørende rækker tvang matematikere til at fastlægge betydningen af begreber som konvergens, funktion, integral o.s.v.

Arbejdet med at bringe fundamentet i orden var på mange områder så succesrigt, at der hen imod slutningen af århundredet var en øget tendens til at betragte matematikken som næsten totalt udviklet, en opfattelse man iøvrigt også havde haft tidligere. Den samme tendens kan spores i fysikken, hvor det mekaniske verdensbillede blev alt dominerende. Der var naturligvis meget 'oprydningsarbejde' der skulle klares, men når det var overstået kunne man formodentlig udtrykke matematikken i nogle få love. Det mekaniske verdensbillede blev rystet af de korrektioner af grundlæggende naturlove, som relativitetsteorien og kvantemekanikken medførte. Det logiske grundlag for matematikken har ikke på samme måde lidt sammenbrud, men tilgengæld er abstraktionsniveauet hævet ganske betydeligt.

7.2 Vejen til næsten periodicitet og videre

Hilbert havde i år 1900 fremlagt et program over nogle væsentlige spørgsmål matematikken burde besvare hurtigst muligt. En af de ting Hilbert mente skulle afklares, var spørgsmålet om Riemann hypoteses gyldighed. Altså spørgsmålet om zetafunktionens nulpunkter alle er beliggende på linien $\frac{1}{2}+it$. Det er et uhyre kompliceret problem, der endnu ikke er afklaret (flere har annonceret beviser for hypotesen, men har senere måtte trække dem tilbage). Spørger man matematikere vil 9 ud af 10 formodenligt mene at hypotesen er gældende, men selvom det med 'stor sandsynlighed' er tilfældet, vil et (mod)bevis være af stor værdi da det sandsynligvis vil medføre en helt ny indsigt. Nogle kalder det for det væsentligste problem i matematikken.

Det var med baggrund i Dirichlet rækker og zetafunktionen at Bohr udviklede sin teori. En overgang synes han at have troet på muligheden af at kunne løse problemet med zetafunktionen v.h.a. næsten periodiske funktioner, men snart udslukkedes håbet. En fjende må have spillet ham et puds, han ikke kunne afparere. For andre matematikere må udsigterne også have synes gode, for nogle af datidens kendteste matematikere arbejdede med teorien. Teorien tjente således ikke det formål den var tilsigtet, men voksede frem og fik så at sige sit eget liv. I den forbindelse var Bohr's indsats enestående:

Kun meget sjældent sker det at en matematisk teori (stort set) udvikles af éen person. Bohr's oprindelige teori indeholder næsten alle de væsentlige sætninger, og til omverdenen var således kun overladt at finpudse den og at generalisere begrebet. I de første år efter teoriens fremkomst må der have været en hektisk aktivitet, for med forbløffende hast lanceres de første generaliseringer og i løbet af blot 10 år når teorien noget nær sin endelige form. En 'sidegren' på udviklingen er næsten periodicitet på grupper. Denne teori igangsatte en ny udvikling indenfor gruppeteori, men blev nærmest opslugt af samme.

Hvad er så idag tilbage af teorien? Umiddelbart fristes man til at sige: "ikke meget!" Den er ikke en 'levende' del af matematikken i den forstand at der kun er få matematikere der beskæftiger sig specielt med denne teori og at der knap publiceres nye resultater. Efter 2. verdenskrig er der således ikke sket meget inden for teorien og den har derfor ringe effekt på aktuel matematisk forskning. En tråd fra et sidespring i 30'ernes arbejde med teorien, hvor man løste et gammelt problem om planet bevægelser, leder i dag frem til et enkelt område, hvor teorien i hvert fald har betydning for teoretiske overvejelser, nemlig dynamiske systemer. Det er tillige svært at pege på anvendelser af teorien. Den har udvidet og beriget teorien om periodicitet, og er teoretisk interessant, men i praksis kan vi som regel benytte periodicitet. Man har i russisk litteratur eksempler på at teorien optræder inden for svingningsteori, men udover dette er det sparsomt med eksempler af både praktisk og teoretisk art. Men hvem ved? Det er før set at en teori ligger i dvale, før den pludselig opnår ny relevans, og igen kan blomstre. Næsten periodiske funktioner kan stadig have en overraskelse eller to til gode til os.

7.3 Vores udbytte

Vi afslutter med en kort kommentar om vores eget udbytte ved at arbejde med teorien. Vores forudsætninger taget i betragtning, synes vi at det lykkedes at trænge forholdsvist dybt ned i teorien, og i hovedsagen fremdrage det væsentlige. Sideløbende med skrivningen af rapporten har vi fulgt et kursus i matematisk analyse, og har der kunne hente hjælp til rejsen gennem den teoretiske jungle. Omvendt har teorien vist os hvordan de på kurset definerede begreber kan anvendes. Desuden er vores fornemmelse for matematisk argumentation blevet styrket, ved at skulle overskue det hierarki af sætninger og indbyrdes afhængighedsforhold, der netop udgør teorien.

Appendiks A

Liste over anvendte symboler

A.1 Mængder

$\mathcal{N}$	Mængden af naturlige tal
$\mathcal{N}_0$	Mængden af naturlige tal inklusiv 0
$\mathcal{R}$	Mængden af reelle tal
$\mathcal{Q}$	Mængden af rationelle tal
$\mathcal{C}$	Mængden af komplekse tal
$\mathcal{Z}$	Mængden af hele tal
$\mathcal{P}$	Mængden af kontinuerte periodiske funktioner $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$ med periode 2π
$\mathcal{F}$	Mængden af næsten periodiske funktioner
$\mathcal{T}$	Mængden af trigonometriske polynomier
$\mathcal{T}^*$	Mængden af trigonometriske polynomier med heltallige frekvenser

A.2 Konstanter og variable

a_n, b_n, c_n	Fourierkoefficienter
n	Heltal (Fourier frekvens)
λ_n	Reelt tal (Fourier frekvens)
k	Reel konstant
c, z	Komplekse tal (variable og konstante)
x, y	Reelle variable
p	(minimal) periode
$L_f(\varepsilon)$	Inkluderingslængde for f hørende til ε
$\tau_f(\varepsilon)$	Forskydningstal for f hørende til ε
q	Rationelt tal
l	Lige tal
u	Ulige tal
$\overline{a}$	a komplekst konjugeret

A.3 Diverse

$s_n(x)$	Afsnitssum
$S_n(x)$	Middelværdi af afsnitssum
$K_n(t)$	Fejér kerne
$D_n(t)$	Dirichlet kerne
$\sum^*$	Endelig summation
$M\{f(x)\}$	Middelværdi af $f(x)$
$M_t\{f(x)\}$	Middelværdi af $f(x)$ med hensyn til t
$\| f(x) \|$	Normen af $f(x)$

(f,g)	Indre produkt
$d(f,g)$	Afstand mellem f og g (i den uniforme metrik)
$H(\mathcal{T})$	Afslutningen af $\mathcal{T}$ (i den uniforme metrik)
$(a)_b$	restklasse a modolus b

Appendiks B

Anvendte sætninger

Det følgende er et udpluk af nogle sætninger fra analysen, som vi (implicit) har benyttet. Beviser kan findes i lærebøger.

Sætning B.1 *Lad $f : \mathcal{R}^m \to \mathcal{C}$ være en kontinuert funktion, og lad $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^m$ betegne en kompakt (afsluttet og begrænset) mængde. Da gælder:*

1. *f er uniformt kontinuert på $\mathcal{A}$.*

2. *Værdimængden $f(\mathcal{A})$ er kompakt.*

Sætning B.2 *Lad $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{C}$ betegne en kontninuert funktion, og lad $a, b, c, d \in \mathcal{R}$. Da gælder:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dy\, dx$$

Sætning B.3 *Om den komplekse eksponentialfunktion gælder for vilkårligt $x \in \mathcal{R}$:*

1. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

2. $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$

Sætning B.4 *Lad $f_n : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ betegne en kontinuert funktion for alle $n \in \mathcal{N}$, og antag at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent. Da gælder:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right).$$

Sætning B.5 Heine-Borel overdækningssætning *Hvis $\mathcal{A}$ betegner en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathcal{R}^m$, og $\mathcal{B}$ er en mængde af åbne delmængder af $\mathcal{R}^m$ der overdækker $\mathcal{A}$; da kan der udvælges en endelig delmængde af $\mathcal{B}$ der overdækker $\mathcal{A}$.*

Appendiks C

Supplerende beviser

De følgende sætninger er alle benyttet i rapporten. Den interesserede læser kan her finde bevis for dem.

C.1 Konvergens og summabilitet

Sætning C.1 *Såfremt en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med komplekse led er konvergent, da er den tillige summabel med samme sum. Mere generelt: Er en række af komplekse led n'te ordens summabel, da er den tillige (n+1)'te ordens summabel med samme sum.*

Bevis :

Vi antager at den komplekse række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum S. Vi sætter:

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{og} \quad S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_n$$

Vi skal vise at $\lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan vælge et $N_0 \in \mathcal{N}$ så der for alle $n \geq N_0$ gælder:

$$| S - A_n | \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Lad nu $n \geq N_0$:

$$| S - S_n | = \left| S - \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \right|$$

$$= \left| S - \frac{A_1 + \cdots + A_{N_0}}{n} - \frac{A_{N_0+1} + \cdots + A_n}{n} \right|$$

$$\leq \left| \frac{A_1 + \cdots + A_{N_0}}{n} \right| + \left| \frac{nS - A_{N_0+1} - \cdots - A_n}{n} \right|$$

$$= \left| \frac{A_1 + \cdots + A_{N_0}}{n} \right| + \left| \frac{S - A_{N_0+1} + \cdots + S - A_n}{n} + \frac{N_0 S}{n} \right|$$

$$\leq \left| \frac{A_1 + \cdots + A_{N_0}}{n} \right| + \frac{(n - N_0)\frac{\varepsilon}{3}}{n} + \left| \frac{N_0 S}{n} \right|$$

Sætter vi:

$$M_0 = \max \left\{ N_0, \left| \frac{3(A_1 + \cdots + A_{N_0})}{\varepsilon} \right|, \left| \frac{3 N_0 S}{\varepsilon} \right| \right\}$$

gælder dermed:

$$| S - S_n | \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq M_0$$

□

C.2 Om primfaktoropløsningens entydighed

Beviset for ligheden mellem ζ-funktionens sum- og produktudtryk hviler, som nævnt i teksten, på at et givet heltal kan skrives som netop et produkt af primfaktorer.

Primtalsbegrebet knytter sig specielt til hele tal, men ikke nødvendigvis til *de* hele tal $\mathcal{Z}$. Et primtal i en given mængde er et tal, der i mængden har netop to divisorer. Tal med flere end to divisorer kaldes sammensatte tal; mens tallet 1 (neutral elementet) indtager en særstatus, da det kun har sig selv som divisor. I det følgende arbejder vi i de naturlige tal $\mathcal{N} \setminus \{1\}$.

Definition C.1 *Et tal p er divisor (går op i) et andet tal q, når q er et helt multiplum af p; altså*

$$\exists n \in \mathcal{N} : \; q = n \cdot p \Leftrightarrow p \mid q$$

Først er det værd at bemærke sig, at

Lemma C.1 *en ikke-tom delmængde af de naturlige tal har et mindste element.*

Lemma C.2 *Såfremt et tal p er divisor i to andre tal q og r, er p tillige divisor i summen af q og r.*

$$p \mid q \wedge p \mid r \Rightarrow p \mid (q + r)$$

Sætning C.2 *Et tal kan altid skrives som et produkt af primtal.*

Bevis :

Se på det *mindste* tal s_1 der ikke kan skrives som et produkt af primtal. Det kan kun være et produkt af sammensatte tal (ellers ville det selv være et primtal, og det ville derfor kunne skrives som et produkt af sig selv og evt. 1). Altså

$$s_1 = s_2 \cdot s_3$$

Men $s_2 < s_1$, så s_1 er ikke mindste element. Mængden af tal, der ikke kan skrives som et produkt af primtal, har altså intet mindste element, og den er derfor tom. □

Vi bemærker nu, at det er let at konstruere en mængde, hvor primfaktoropløsningen ikke er entydig. Se på $(1)_3$ (restklasse 1 modolo 3), altså $\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$. Denne mængde er stabil overfor multiplikation, idet

$$(3n + 1)(3m + 1) = 3(3nm + m + n) + 1$$

Det er væsentligt at gøre sig klart, at for eksempel både 4, 10 og 25 er primtal i denne mængde.

Hvis vi nu ser på tallet 100, kan det skrives som

$$100 = 4 \cdot 25 = 10 \cdot 10$$

og tallet har således mere end en primfaktor opløsning.

I øvrigt kan det bemærkes, at $(1)_3$ ikke er stabil overfor addition.

Sætning C.3 *I de naturlige tal er primfaktoropløsningen entydig.*

Bevis :

Vi opsøger igen det *mindste* tal denne gang i mængden af tal med mere end en primfaktoropløsning. Tallet t kan derfor skrives som

$$t = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$$

hvor $p_x \neq q_y \;\; \forall\, x, y$.

Det er væsentligt, at gøre sig klart at $p_x \mid q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$, men at p_x ikke selv findes i nogen produkt kombination af q_y'erne, og at q_y ej heller er et helt multiplum af et p_x.

Vi danner nu tallet

$$t_1 = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_m$$

under forudsætning af at $q_y > p_1$, og har dermed at

$$t - t_1 = \begin{cases} p_1 \cdot p_2 \cdots p_n - p_1 \cdot q_2 \cdots q_m = p_1(p_2 \cdots p_n - q_2 \cdots q_m) & (1) \\ \\ q_1 \cdot q_2 \cdots q_m - p_1 \cdot q_2 \cdots q_m = (q_1 - p_1)(q_2 \cdots q_m) & (2) \end{cases}$$

Af højre siden i udtrykket for $(t - t_1)$ fremgår det, at $(t - t_1)$ har to forskellige primfaktoropløsninger. (1) udtrykker $(t - t_1)$ med p_1 i opløsningen. I (2) indgår p_1 ikke, fordi p_1 i følge vores forudsætninger ikke kan forekomme blandt $q_2 \cdots q_m$. Tallet p_1 forekommer heller ikke i $(q_1 - p_1)$'s primfaktoropløsning, for gør den det så vil

$$p_1 \mid (q_1 - p_1) \wedge p_1 \mid p_1 \Rightarrow p_1 \mid (q_1 - p_1) + p_1 \text{ altså } p_1 \mid q_1$$

og det er jo netop ikke tilfældet.

$(t - t_1)$ har således to forskellige primfaktoropløsninger og er mindre end t, så t er ikke mindste element. Mængden af tal der kan skrives som flere produkter af primtal har altså intet mindste element, og den er derfor tom. □

Vi har ikke set dette bevist strigent ad denne vej i en eneste kilde! Den mest almindelige fejl i 'gymnasie' beviser er at glemme, at p_1 godt kan gå op i et tal uden selv at forekomme i primfaktoropløsningen, indtil andet er bevist. Det førte bevis hviler i virkeligheden på at $(t - t_1) \in \mathcal{N}$, fordi mængden er stabil overfor addition. Det eneste sted vi er stødt på en gennemført argumentation, er i Kristensen og Rindung (den gamle udgave), hvor beviset følger delvist andre veje over divisorbegrebet og gruppeteori. Pudsigt er det, at Kristensen og Rindungs gennemgang skyldes en professor Harald Bohr, der mellem 1934 og 1936 lavede en lille artikel om emnet for at henlede gymnasielæreres opmærksomhed på disse forhold, for det tilfælde at man lejlighedsvis havde så flinke elever, at de kunne glæde sig over disse betragtninger.

Appendiks D

Periodiske funktioner af flere variable

Med $\mathcal{P}_m$ betegner vi mængden af kontinuerte funktioner $f : \mathcal{R}^m \to \mathcal{C}$, der er periodiske med periode 2π efter hver af de m variable. For enhver funktion $f \in \mathcal{P}_m$ gælder således:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 2\pi, x_{i+1}, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$$

for alle $i = 1, 2, \ldots, m$. Vi skriver kort $f(x)$ for $f(x_1, \ldots, x_m)$. Alle funktioner i $\mathcal{P}_m$ er begrænsede og uniformt kontinuerte, og hvis $c \in \mathcal{C}$ og $f, g \in \mathcal{P}_m$, så vil fg, $f + g$ og cf alle tilhøre $\mathcal{P}_m$.

Middelværdien defineres som:

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x)\, dx_1 \ldots dx_m$$

Hvis $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_m(x_m)$, hvor $f_i \in \mathcal{P}$ for $i = 1, 2, \ldots, m$ gælder:

$$M\{f(x)\} = M\{f_1(x_1)\} M\{f_2(x_2)\} \ldots M\{f_m(x_m)\}$$

Det *indre produkt* defineres som:

$$(f, g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

og *normen* som:

$$\| f(x) \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{M\{| f(x) |^2\}}$$

Det *indre produkt af vektorer* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ og $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ er givet ved:

$$(x, n) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_m n_m$$

En funktion af typen:

$$f(x) = e^{i(n,x)} = e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)}$$

hvor $n \in \mathcal{Z}^m$ kaldes en *ren svingning*. Mængden af rene svingninger kaldes *det trigonometriske system*, og er en ortonormal mængde i $\mathcal{P}_m$. En endelig linearkombination, med komplekse koefficienter, af rene svingninger kaldes et *trigonometrisk polynomium*. Mængden af trigonometriske polynomier betegnes $\mathcal{T}_m^\star$.

Fourier koefficienterne for en funktion $f \in \mathcal{P}_m$ er givet ved:

$$a_n = a_{n_1,\ldots,n_m} = M\left\{f(x)e^{-i(n,x)}\right\}$$

hvor $n \in \mathcal{Z}^m$. *Fourier rækken* er:

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathcal{Z}^m} a_n e^{i(n,x)}$$

Lad $n \in \mathcal{N}_0^m$. Ved det n'te afsnit af Fourier rækken forstås:

$$s_n(x) = \sum_{v_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{v_m=-n_m}^{n_m} a_v e^{i(v,x)}$$

Gennemsnittet af de første n afsnit er:

$$S_n(x) = \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_m} \sum_{v_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{v_m=0}^{n_m} s_v(x)$$

$$= \sum_{v_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{v_m=-n_m}^{n_m} \left(1 - \frac{|v_1|}{n_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|v_m|}{n_m}\right) a_v e^{i(v,x)} \tag{D.1}$$

Sætning D.1 (Fejér's sætning) *For enhver funktion* $f \in \mathcal{P}_m$ *konvergerer det trigonometriske polynomium* $S_n(x)$ *uniformt mod* $f(x)$, *for* $n_1, n_2, \ldots, n_m \to \infty$.

Bevis :

Lad

$$f(x) \sim \sum_{n \in Z^m} a_n e^{i(n,x)} \quad \text{og} \quad g(x) = \sum_{n \in Z^m}^{\star} b_n e^{i(n,x)}$$

Da gælder:

$$M_t\{f(x-t)g(t)\} = M_t\left\{f(x-t)\sum_{n \in Z^m}^{\star} b_n e^{i(n,t)}\right\}$$

$$= \sum_{n \in Z^m}^{\star} b_n e^{i(n,x)} M_t\left\{f(x-t)e^{-i(n,x-t)}\right\} = \sum_{n \in Z^m}^{\star} a_n b_n e^{i(n,x)}$$

Af ovenstående og (D.1) følger:

$$S_n(x) = M_t\left\{f(x-t)\sum_{v_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{v_m=-n_m}^{n_m}\left(1-\frac{|v_1|}{n_1}\right)\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\left(1-\frac{|v_m|}{n_m}\right)e^{i(v,x)}\right\}$$

$$= M_t\left\{f(x-t)\sum_{v_1=-n_1}^{n_1}\left(1-\frac{|v_1|}{n_1}\right)e^{iv_1t_1}\cdots\sum_{v_m=-n_m}^{n_m}\left(1-\frac{|v_m|}{n_m}\right)e^{iv_mt_m}\right\}$$

$$= M_t\{f(x-t)K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)\ldots K_{n_m}(t_m)\}$$

$$= M_t\{f(x-t)K_n(t)\}$$

hvor $K_n(t) = K_{n_1}(t_1)\ldots K_{n_m}(t_m)$ er et produkt af Fejér kerner. Fejér er reelle og ikke-negative og har middelværdi 1. Dermed gælder:

$$K_n(t) \geq 0 \quad \text{for alle } t \in \mathcal{R}^m$$

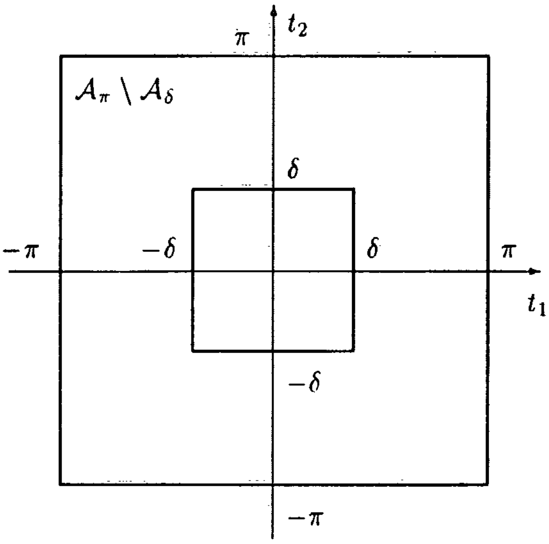
og

$$M\{K_n(t)\} = M\{K_{n_1}(t_1)\ldots K_{n_m}(t_m)\}$$

$$= M\{K_{n_1}(t_1)\}\ldots M\{K_{n_m}(t_m)\} = 1$$

Lad $\mathcal{A}_k$ betegne mængden $[-k,k]^m$, og sæt $0 < \delta < \pi$. Vi betragter funktionen:

$$\xi_n(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathcal{A}_\pi \setminus \mathcal{A}_\delta} K_n(t)\,dt_1\ldots dt_m$$



For ethvert $t \in \mathcal{A}_\pi \setminus \mathcal{A}_\delta$ må der gælde $\delta <\mid t_l \mid\leq \pi$ for i hvert fald éet $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$. For et sådan l gælder:

$$K_{n_l}(t_l) = \frac{1}{n_l}\left(\frac{\sin\frac{n_l t_l}{2}}{\sin\frac{t_l}{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{n_l}\frac{1}{\sin^2\frac{t_l}{2}} < \frac{1}{n_l}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

og dermed:

$$K_n(t) < K_{n_1}(t_1)\ldots\frac{1}{n_l}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\ldots K_{n_m}(t_m)$$

Dermed har vi:

$$\begin{aligned}
K_n(t) &< \frac{1}{n_1}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}K_{n_2}(t_2)\ldots K_{n_m}(t_m) \\
&+ K_{n_1}(t_1)\frac{1}{n_2}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}K_{n_3}(t_3)\ldots K_{n_m}(t_m) \\
&\vdots \\
&+ k_{n_1}(t_1)\ldots K_{n_{m-1}}(t_{m-1})\frac{1}{n_m}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}
\end{aligned}$$

$\xi_n(\delta)$ er derfor mindre end $\frac{1}{(2\pi)^2}$ gange integralet over $\mathcal{A}_\pi \setminus \mathcal{A}_\delta$ af udtrykket på højresiden i ovenstående, og specielt mindre end $\frac{1}{(2\pi)^m}$ gange integralet over $\mathcal{A}_\pi$ af højresiden. Dermed opnås:

$$\xi_n(x) < \left(\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_m}\right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

For fastholdt δ gælder altså:

$$\xi_n(\delta) \to 0 \quad \text{for} \quad n_1, \ldots, n_m \to \infty$$

Vi har nu:

$$\begin{aligned}
&\mid f(x) - S_n(x) \mid \\
&= |f(x) M\{K_n(t)\} - M_t\{f(x-t)K_n(t)\}| \\
&= |M_t\{(f(x) - f(x-t))K_n(t)\}| \\
&\leq M_t\{\mid f(x) - f(x-t) \mid K_n(t)\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{A}_\pi} \mid f(x) - f(x-t) \mid K_n(t)\, dt_1 \ldots dt_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{A}_\delta} \mid f(x) - f(x-t) \mid K_n(t)\, dt_1 \ldots dt_m \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{A}_\pi \setminus \mathcal{A}_\delta} \mid f(x) - f(x-t) \mid K_n(t)\, dt_1 \ldots dt_m
\end{aligned}$$

Sættes:

$$C = \sup\left\{\mid f(x) \mid \,\middle|\, x \in \mathcal{R}^m\right\}$$

og

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\mid f(x) - f(y) \mid \,\middle|\, \mid x_1 - y_1 \mid, \ldots, \mid x_m - y_m \mid \leq \delta\right\}$$

fås dermed:

$$\begin{aligned}
\mid f(x) - S_n(x) \mid &\leq \frac{\omega(\delta)}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{A}_\delta} K_n(t)\, dt_1 \ldots dt_m + 2C\xi_n(\delta) \\
&\leq \omega(\delta) + 2C\xi_n(\delta)
\end{aligned}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da f er uniformt kontinuert kan δ vælges så $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, og tilsvarende kan $N_1, \ldots, N_m \in \mathcal{N}$ vælges så $2C\xi_n(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $n_1 \geq N_1, \ldots n_m \geq N_m$. Hermed opnås:

$$\mid f(x) - S_n(x) \mid \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathcal{R}^m, n_1 \geq N_1, \ldots, n_m \geq N_m$$

og beviset er afsluttet. □

Fejér's sætning indeholder følgende sætning:

Sætning D.2 (Weierstrass' sætning) *Enhver funktion $f \in \mathcal{P}_m$ kan approksimeres uniformt af trigonometriske funktioner $t \in \mathcal{T}_m^\star$. I symboler: $\mathcal{P}_m \subseteq H(\mathcal{T}_m^\star)$.*

Den omvendte sætning: $H(\mathcal{T}_m^\star) \subseteq \mathcal{P}_m$ er indlysende, og dermed opnås hovedsætningen:

Sætning D.3 (Hovedsætning) *Mængden af funktioner der kan approksimeres uniformt af trigonometriske polynomier i $\mathcal{T}_m^\star$, er netop mængden af komplekse kontinuerte periodiske funktioner af m variable med periode 2π; d.v.s:*

$$\boxed{\mathcal{P}_m = H(\mathcal{T}_m^\star)}$$

Appendiks E

En divergent Fourier række

P. Du Bois-Reymond[1] betingelser for at en funktion har en divergent Fourier række i et punkt kan sammenfattes i to punkter:

1. $f(0) = 0$
2. $f(x) = \rho(x) \sin \varsigma(x)$ for $x \neq 0$ hvor det gælder at for $x \to 0$, så skal $\varsigma(x)$ blive uendelig med uendelig mange[2] maxima og minima, mens $\rho(x) \to 0$

Det eksempel vi vil give opfylder ikke helt ovenstående betingelser, idet funktionen $\varsigma(x)$ vokser eksplosivt men monotont for $x \to 0$. Det gør det en smule nemmere at tegne og måske osse at forstå. Bemærkelsesværdigt nok støder vi netop her på grænsen for vores graftegningsprograms ydeevne og må nøjes med at vise en periode.

Den på figuren gengivne funktion er bygget op som følger:

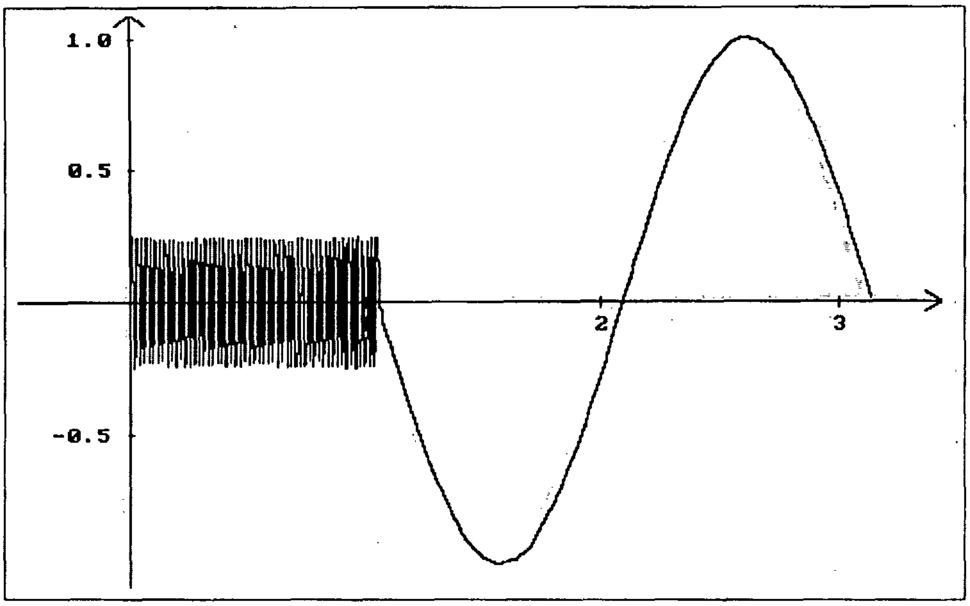
$n_0 = 1$, $n_r = 3^{r^4}$ og $a_r = r^{-2}$ hvor r er et naturligt tal. Vi definerer $f(x)$ for $x \in [0, \pi]$ som

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{n_r}, \frac{\pi}{n_{r-1}}\right], \ f(x) = a_r \sin n_r x \qquad f(0) = 0$$

og med periodisk lighed udenfor $[0, \pi]$.

[1] kilden er en note i ...from Euler to Weirstrass

[2] ordet mangler i kilden, men uden det giver fortsættelsen af sætningen dårligt mening



Figur E.1: Skitse af funktion med divergent Fourier række

Princippet i denne konstruktion er at med $a_r > 0\ \forall r$ så skal $a_r \log n_r \to \infty$ mens $\sum a_r < \infty$

Funktionens Fourier række er divergent i 0. Vi vil ikke føre bevis for påstanden. Følgende strategi, der skyldes den engelske matematiker Hardy, kan gøre det. Man viser at

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\sin n_k x}{x}\, dx \to \infty \text{ for } k \to \infty$$

hvor man ved fornuftig opsplitning af integralet kan nå frem til at det eneste betydende led er $\frac{1}{2} a_r \log n_k$ som netop går mod ∞ for $k \to \infty$. Hermed følger det, at funktionens Fourier række er divergent.

I A. Zygmund's bog 'Trigonometrical series' kan man finde andre eksempler.

Appendiks F

Graftegning

Til at fremstille en del af vores illustrationer har vi benyttet de faciliteter LaTeX stiller til rådighed. Den resterende del af graferne er tegnet ved hjælp af programmet Multimat, hvorefter skærmbilledet er fanget (grab'et) og redigeret i WordPerfect.

Selvom vi har presset programmellet til det yderste har vi alligevel kunne få rimelige resultater frem. Ved graftegning er opløsningen altid et problem (også med hånd og papir), og i digitaliseret form ses det muligvis lettere. Antallet af led i summationerne, der jo må gøres endelige, skal derfor både afstemmes efter udtrykket for funktionen og i forhold til både computerens og printerens opløsning. Summationerne er iøvrigt udført som rekursive processer.

Den graf der gav det største besvær med hensyn til omskrivning af det algebraiske udtryk til et for computeren bearbejdeligt udtryk var zetafunktionen.

Udgangspunktet var følgende udtryk:

$$\frac{1}{2^{1-z}-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-z} \quad ; z = x + iy$$

Selve summationen omskrives let til en real- og en imaginærdel:

$$\sum(-1)^n n^{-z} = \sum(-1)^n e^{-z\log n}$$

$$= \sum (-1)^n e^{-x \log n} \left[\cos(y \log n) - i \sin(y \log n)\right] =$$

$$\underbrace{\sum (-1)^n n^{-x} \cos(y \log n)}_{\text{SumRealDel}} - i \underbrace{\sum (-1)^n n^{-x} \sin(y \log n)}_{\text{SumImaginærDel}}$$

Faktoren foran summationen er mere besværlig og for at formlerne bliver lidt enklere indføres følgende størrelser:

$$\begin{aligned} a &= e^{(1-x)\log 2} \\ b &= y \log 2 \end{aligned}$$

Vi har altså:

$$\frac{1}{2^{1-z} - 1} = \frac{1}{a(\cos b - i \sin b) - 1} = \frac{1}{(-1 + a\cos b) - (i \sin b)} =$$

$$\frac{(-1 + a\cos b) + i \sin b}{(-1 + a\cos b)^2 - (i \sin b)^2} = \frac{(-1 + a\cos b) + i \sin b}{1 + a^2 - 2ab\cos b}$$

og endelig udskrives det færdige udtryk i real- og imaginærdel:

$$\underbrace{\frac{2^{1-x}\cos(y \log 2) - 1}{2^{2(1-x)} + 1 - 2^{2-x}\cos(y \log 2)}}_{\text{FaktorRealDel}} + i \underbrace{\frac{2^{1-x}\sin(y \log 2)}{2^{2(1-x)} + 1 - 2^{2-x}\cos(y \log 2)}}_{\text{FaktorImaginærDel}}$$

Herefter mangler vi kun at regne funktionens real- og imaginærdel ud hver for sig, og de bliver således:

$$Re_\zeta(z) = FRD(z) \cdot SRD(z) - FID(z) \cdot SID(z)$$

$$Im_\zeta(z) = FID(z) \cdot SRD(z) + FRD(z) \cdot SID(z)$$

Det er derved muligt at kode og tegne grafen, for eksempel for et fastholdt x. Ved tegning af zetafunktionen skal man være opmærksom på, at det endelige udsnit af rækken skal være relativt stort, da udsnittet konvergere langsomt mod funktionen.

Appendiks G

Litteratur liste

G.1 Historiske kilder

Birkhoff, Garrett	*A source book in classical analysis* Harvard university press, 1973
Bottazzini, Umberto	*The higher calculus: A history of real and complexs analysis from Euler to Weirstrass* oversat af Warren Van Egmond Springer-Verlag, 1986
Grattan-Guiness, I.	*Joseph Fourier 1768-1830* MIT, 1972
Jørgensen og Klintorp	*Der er langt fra Q til R* RUC, 1985
Kline, Morris	*Mathematical thought from ancient to modern times* Oxford university press, 1972
Stetkær, Henrik	*Fourier-rækker* Århus Universitet, 1983
Tornehave, Hans	*Mine læreår* Kbh. universitet, 1985

G.2 Matematiske kilder

Berg og Fuglede (red.)
The Harald Bohr centenary
Matematiske-fysiske Meddelelser 42:3, 1989

Besicovitch, A. S.
Almost periodic functions
Cambridge University Press, 1932

Bohr, Harald
Almost periodic functions
oversat af Harvey Cohn og F. Steinhardt
Chelsea publising company, 1947

Bohr, Harald †
Collected mathematical works I-III
redigeret af E. Følner og B. Jessen
Dansk matematisk forening, 1952

Bohr, Harald
Matematiske arbejder med pædagogisk sigte
Dansk matematisk forening, 1987

Corduneanu, C.
Almost periodic functions
oversat af G. Berstein og E. Tomer
Interscience publishers, 1968

Edwards, H.M.
Riemann's zeta function
Academic Press, 1974

Jessen, Børge
Næsten periodiske funktioner
noter HCØ, 1977

Maak, Wilhelm
Fastperiodische funktionen
Springer-Verlag, 1950

G.3 Programmel

Bach, Jens Ole
Multimat
Matematiklærerforeningen, 1989

Lamport, Leslie
LaTeX- *a document preparation system*
Addison-Wesley, 1986

† : Der er flere kommentarer at knytte til Bohr's arbejder. De tre 'klassiske' artikler er publiceret under titlen: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I-III* i Acta Mathematica 45,46 og 47 i årene 1924-26. Artiklerne har hovedsaligt historisk interesse, da mere tilgængelige og overskuelige fremstillinger findes. Den eneste egentlige lærebog vi har kunne finde om næsten periodiske funktioner er Bohr's *Almost periodic functions*, der er glimrende som en introduktion til såvel periodiske som næsten periodiske funktioner. Af artikler fra Bohr's samlede værker der særligt har haft betydnings for denne rapport bør nævnes: C18, C27, C51 og C53.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom". Projektrapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity". Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS". Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller". Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER". Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.

Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."

Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach

Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"

- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"

redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:
Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden
1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og
Peder Voetmann Christiansen

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer