

# TEKST NR 163

# 1988

EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF  
PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN.

AF : Finn Langberg  
Michael Jarden  
Lars Frellesen

Vejleder : Jesper Larsen

## TEKSTER fra

# IMFUFA

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR  
BLOD-NETHINDE-BARIEREN.

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

IMFUFA tekst nr. 163/88

167 sider

ISSN 0106-6242

---

ABSTRACT

Sammenfatning

I forbindelse med visse øjensygdomme, er man fra medicinsk side interesseret i at kunne bestemme permeabiliteten (gennemtrængeligheden) af den barriere (blod-nethinde-barrieren), der adskiller øjets glaslegeme fra blodbanen.

Blod-nethinde-barrieren er et "filter", som under normale omstændigheder sikrer, at kun biologisk værdifulde stoffer trænger ind i øjet, mens alle andre stoffer holdes tilbage. I forbindelse med visse sygdomme f.eks. sukkersyge, nedbrydes barrieren imidlertid i større eller mindre omfang. Det betyder at stoffer, der er skadelige for øjet kan trænge ind i glaslegemet, og således medføre nedsat syn eller blindhed.

Det er af stor medicinsk betydning at kunne bestemme permeabiliteten af blod-nethinde-barrieren eksakt, da det kan give en større forståelse af de ovennævnte sygdomme. Endvidere kan det give et billede af en behandlings virkning, og endelig vil det kunne indikere, om en ellers rask person er bærer af en sygdom, da der i denne forbindelse måske kan måles en lille forøgelse af blod-nethinde-barrierens gennemtrængelighed.

Der beskrives 2 matematiske modeller, med hvilke permeabiliteten af det menneskelige øjes blod-nethinde-barriere søges bestemt.

Den ene af disse modeller (den simpleste) anvendes i dag på Rigshospitalet, og det er i denne model, projektet tager sit udgangspunkt. Den anden model er udarbejdet under selve projektforløbet, og giver en mere virkelighedstro beskrivelse af forholdene i øjet. Denne model bearbejdes med henblik på bestemmelse af permeabiliteten, og modellens brugbarhed vurderes.

## Forord

Nærværende projektrapport er udarbejdet i forbindelse med modelmodulet på RUC's matematik-overbygningsuddannelse. I rapporten beskrives 2 matematiske modeller, med hvilke permeabiliteten (gennemtrængeligheden) af det menneskelige øjes blod-nethinde-barriere søges bestemt.

Den ene af disse modeller (den simpleste) anvendes i dag på Rigshospitalet, og det er i denne model, projektet tager sit udgangspunkt. Den anden model er udarbejdet under selve projektførelsen, og giver en mere virkelighedstro beskrivelse af forholdene i øjet. Denne model bearbejdes med henblik på bestemmelse af permeabiliteten, og modellens brugbarhed vurderes.

### PROJEKTDELTAGERE

FINN LANGBERG  
MICHAEL JARDEN  
LARS FRELLESEN

### VEJLEDER

JESPER LARSEN

IMFUFA, RUC, 1987

## INDHOLDSFORTEGNELSE

<b>Kapitel 0. Indledning</b> .....	1
1. Problemstilling .....	1
2. Rapportens opbygning .....	2
<b>Kapitel 1. Det medicinsk biologiske grundlag</b> .....	4
1.1 Øjets opbygning .....	4
1.2 Transport af stoffer i glaslegemet .....	7
1.3 Måleteknik .....	8
<b>Kapitel 2. Diffusion</b> .....	9
2.1 Diffusion .....	9
2.2 Konveksion .....	10
2.3 Diffusionsligningen .....	10
<b>Kapitel 3. Opstilling af modellen for kuglesymmetri</b> ....	15
<b>Kapitel 4. Koncentrationsbestemmelse</b> .....	17
4.1 Bestemmelse vha. Laplacetransformationen .....	17
4.2 Bestemmelse vha. separation af de variable ....	25
4.3 Sammenligning af koncentrationsberegningerne ..	30
<b>Kapitel 5. Bestemmelse af permeabiliteten</b> .....	33
5.1 En formel til bestemmelse af permeabiliteten ..	33
5.2 Permeabilitetsbestemmelse i praksis .....	37
5.3 Entydighed af den fundne permeabilitet .....	37
<b>Kapitel 6. Vurdering af den kuglesymmetriske model</b> .....	39
<b>Kapitel 7. Den rotationssymmetriske model</b> .....	43
7.1 Baggrund og geometri .....	43
7.2 Opstilling af ligningerne .....	45
7.3 Omformning til integraligninger .....	46
<b>Kapitel 8. En numerisk metode til analyse af en integraligning</b> .....	52
8.1 Rækkeudvikling af kernen efter de singulære værdier (SVE) .....	53
8.2 Moment metoden (MM) og dekomposition efter de singulære værdier (SVD) .....	57

8.3 Sammenhængen mellem SVE og SVD .....	60
8.4 Analyse af integralligningen vha. den approximerede SVE .....	61
<b>Kapitel 9. Numerisk analyse af den opstillede integral- ligning .....</b>	<b>62</b>
9.1 Udledning af de nødvendige formler .....	62
9.2 Fremgangsmåden ved vurdering af uddata .....	71
9.3 Vurdering af uddata .....	72
9.4 Forslag til det videre arbejde med integrallig- ningen .....	74
<b>Kapitel 10. Konklusion .....</b>	<b>76</b>
<b>Kapitel 11. Litteraturliste .....</b>	<b>77</b>
<b>Kapitel 12. Appendix .....</b>	<b>79</b>
1. Beregning af fluoresceinkoncentrationen i blod- banen .....	79
2. Beskrivelse af implementationen af den asymp- tiske løsning .....	81
3. Beskrivelse af implementationen af løsningen ved separation af de variable .....	88
4. Vurdering af en plangeometrisk model .....	93
5. Udviklingssætningens gyldighed i løsningen vha. separation af de variable .....	100
6. Omregning af integralligningen .....	102
<b>Kapitel 13. Bilag .....</b>	<b>105</b>
1. Artiklen .....	105
2. Kørselsresultater fra den kuglesymmetriske model	116
3. Grafer over de beregnede koncentrationer med den kuglesymmetriske model .....	123
4. Kørselsresultater fra analysen af den rotations- symmetriske model .....	126
5. Grafer fra analysen af den rotationssymmetriske model .....	141
6. Kildeteksten til programmet der bruger asymp- tote-løsningen .....	146
7. Kildeteksten til programmet der bruger separa- tionsløsningen .....	152
8. Kildeteksten til programmet der benyttes under analysen af integralligningen .....	158

## Indledning

### 1 Problemstilling.

I forbindelse med visse øjenssygdomme, er man fra medicinsk side interesseret i at kunne bestemme permeabiliteten (gennemtrængeligheden) af den barriere (blod-nethinde-barrieren), der adskiller øjets glaslegeme fra blodbanen.

Blod-nethinde-barrieren er et "filter", som under normale omstændigheder sikrer, at kun biologisk værdifulde stoffer trænger ind i øjet, mens alle andre stoffer holdes tilbage. I forbindelse med visse sygdomme f.eks. sukkersyge, nedbrydes barrieren imidlertid i større eller mindre omfang. Det betyder at stoffer, der er skadelige for øjet kan trænge ind i glaslegemet, og således medføre nedsat syn eller blindhed.

Det er af stor medicinsk betydning at kunne bestemme permeabiliteten af blod-nethinde-barrieren eksakt, da det kan give en større forståelse af de ovennævnte sygdomme. Endvidere kan det give et billede af en behandlings virkning, og endelig vil det kunne indikere, om en ellers rask person er bærer af en sygdom, da der i denne forbindelse måske kan måles en lille forøgelse af blod-nethinde-barrierens gennemtrængelighed.

Permeabiliteten kan ikke måles direkte, men bestemmes v.h.j.a. en matematisk model, og en række koncentrationsmålinger af et stof, kaldet fluorescein, dels i blodbanen, og dels langs øjets akse. Målingerne foregår ved at stoffet fluorescein, som ikke findes naturligt i organismen, injiceres i blodet, hvorefter man måler koncentrationen i blodet og i øjet til forskellige tidspunkter. Målingen af koncentrationen i øjet sker med optiske teknikker.

Den matematiske model, der benyttes, beskriver transporten af stoffer ind i øjet og transport af stoffer inde i selve øjet ved et sæt ligninger, der giver sammenhængen mellem koncentrationsforholdene inde i øjet, og sammenhængen mellem koncentrationsændringen over blod-nethinde-barrieren og permeabiliteten.

Det direkte problem er så, ud fra de opstillede ligninger, at finde et udtryk for koncentrationen af fluorescein i øjet, som funktion af tid, sted, permeabiliteten og koncentrationen i blodbanen. Imidlertid er det, som ovenfor beskrevet, det inverse problem, vi søger at løse, nemlig med modellens hjælp, at bestemme permeabiliteten ud fra målte værdier af koncentrationen af fluorescein i - og udenfor øjet.

I denne rapport arbejder vi med to udgaver af modellen.

Først beskriver vi en simpel model, hvor geometri-, og permeabilitetsforholdene i øjet regnes for kuglesymmetriske, således at koncentrationen kun afhænger af afstanden fra centrum af øjet og af tiden. Vi bestemmer her udtryk for både koncentration og permeabilitet, og vurderer modellen i forhold til de målte værdier for koncentrationen.

Vurderingen munder ud i den konklusion, at den kuglesymmetriske model, i nogle tilfælde, ikke beskriver virkeligheden godt nok. Derfor opstiller vi en udvidet partiel differentialligningsmodel. Her antages øjet at være rotationssymmetrisk omkring øjets akse, dvs. at permeabiliteten antages at være den samme langs den del af blod-nethinde-barrieren, der vil ligge på randen af et snit gennem glaslegemet, foretaget vinkelret på øjets akse. I rapportens sidste kapitler analyserer vi den opstillede model, gennem en omformning af randværdiproblemet til en integralligning.

Projektets formål kan således siges at have været at analysere en konkret problemstilling ved hjælp af en række matematiske værktøjer.

Den kuglesymmetriske model er beskrevet i en artikel (Larsen et al., 1983), skrevet af Jesper Larsen i samarbejde med 2 medicinere. Denne artikel, der er anbragt i bilag, har sammen med inspiration fra Jesper Larsen, udgjort et fundament for vores projektrapport.

## **2 Rapportens opbygning.**

Rapporten falder naturligt i 3 dele. Den første del beskriver baggrunden for problemstillingen. I anden del søges problemet løst vha. den simple matematiske model, og i tredje del søges problemet løst vha. den udvidede og mere komplicerede model.

Vi vil nu give en kort beskrivelse af rapportens enkelte kapitler.

I kapitel 1 giver vi en kort beskrivelse af øjets opbygning, for at læseren skal kende de ydre rammer for modelleringen. Her gøres desuden kort rede for de anvendte måleteknikker i forbindelse med koncentrationsbestemmelser af fluorescein.

Transporten af fluorescein i glaslegemet antages at foregå ved diffusion, og vi beskriver derfor dette begreb i kapitel 2.

I kapitel 3 opstilles den kuglesymmetriske model.

Den kuglesymmetriske model er en differentiaalligningsmodel. Dette ligningssystem løses på 2 forskellige måder i kapitel 4. Den første løsning, som bygger på laplacetransformationen, er den der er anvendt i (Larsen et al., 1983), men vi gennemregner den her i detaljer. Den anden løsning bygger på separation af de variable. Vi har løst ligningssystemet med denne metode, for

at kontrollere den første løsning, da der i denne foretages en del approximationer. Vi har implementeret de 2 løsninger, og kapitel 4 afsluttes med en sammeligning af kørselsresultaterne (værdier for fluoresceinkoncentrationer i glaslegemet) fra disse implementeringer.

De koncentrationer der er beregnet på baggrund af de 2 løsninger i kapitel 4 forudsætter, at permeabiliteten er kendt. Det er imidlertid det inverse problem man ønsker at løse, nemlig at kunne bestemme permeabiliteten, når vi kender nogle koncentrationer af fluorescein. Det inverse problem er behandlet i kapitel 5.

I kapitel 6 sammenlignes de koncentrationer af fluorescein, der beregnes vha. den simple model, med de eksperimentelle koncentrationsmålinger. På baggrund af denne sammenligning vurderes den kuglesymmetriske model.

Vurderingen i kapitel 6 munder ud i den konklusion, at den kuglesymmetriske model ikke i alle tilfælde beskriver virkeligheden godt nok, og vi opstiller derfor en rotationssymmetrisk differentiaalligningsmodel i kapitel 7, og beskriver hvorledes man udfra denne model kan bestemme permeabiliteten v.h.j.a. en Fredholm integralligning af 1.art.

I kapitel 8 beskrives en numerisk metode til analyse af ovennævnte integralligning.

Den beskrevne numeriske metode er implementeret blandt andet v.h.j.a. en rutine fra (Dongarra et al., 1979). I kapitel 9 er det beskrevet hvorledes den nu metode er benyttet på vores problem. I dette kapitel analyserer vi endvidere resultaterne fra de numeriske eksperimenter.

I kapitel 10 afrundes rapporten.



## 1. Det medicinsk biologiske grundlag

I dette kapitel vil vi beskrive det medicinsk-biologiske grundlag for den matematiske model. Det drejer sig dels om øjets opbygning og dels om transporten af stoffer i øjet. Først beskrives øjets opbygning, og herunder øjets geometri. Derefter beskrives de to transportprocesser i øjet, nemlig diffusion og konvektion. Kapitlet afsluttes med en kort beskrivelse af den måleteknik, som anvendes til eksperimentelle målinger.

Vi gør opmærksom på, at beskrivelsen af øjets opbygning er en forenklet fremstilling, der hovedsageligt bygger på (Fatt, 1978).

### 1.1 ØJETS OPBYGNING

Øjets funktion er at se, dvs. at modtage lysmønstre og omdanne dem til elektriske impulser. De elektriske impulser sendes videre til hjernen, hvor de bliver bearbejdet til synsindtryk. Det er på den baggrund, at man bør beskrive øjets opbygning, idet alle øjets bestanddele medvirker i ovenstående proces.

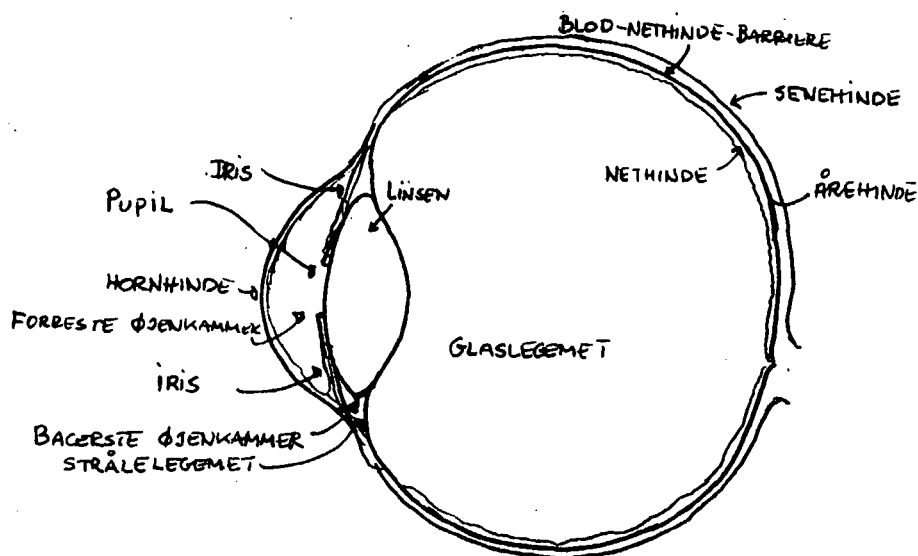
Hvis man sammenligner øjet (se figur 1) med et kamera, kan man trække en række paralleller. Vi har et sæt linser ~ hornhinden og linsen, en blænde ~ iris, en lukker ~ øjenlågene, en lysfølsom overflade ~ nethinden, samt en lystæt kasse, der kan sammenlignes med senehinden.

Øjet ligger indlejret i øjenhulerne, der er pyramideformede fordybninger i kraniet. Øjnene hviler dog ikke direkte på kraniet, men ligger indlejret i blødt fedtvæv. I øjenhulerne findes endvidere bevægelsesmusklerne, der styrer øjets retning. Udover bevægelsesmusklerne findes der muskler, som styrer linsens krumning og dermed fokuseringen. Disse muskler ligger i strålelegemet (Corpus ciliare).

#### **Lysets vej ind i øjet.**

Vi vil i den videre beskrivelse af øjets opbygning, følge lysets vej ind i øjet.

Det første lyset rammer på sin vej gennem øjet er hornhinden. Hornhinden er som tidligere nævnt en del af øjets linsesystem, der styrer fokuseringen ved at styre lysets brydning. Dette sker ved, at øjets linse kan blive tykkere og tyndere.



Figur 1. Skitse af det menneskelige øje.

Hornhinden er i kontakt med luften fortil (bortset fra en tynd film - tårefilmen), og bagtil støder den op til det forreste øjenkammer, der er fyldt med kammervand. Bag det forreste øjenkammer sidder regnbuchinden, iris. Midt i iris er der et rundt hul kaldet pupillen, hvorfra lyset strømmer ind i øjet. Iris er lystæt (bortset fra pupillen), da dens bagside er dækket af et lag celler. Det er disse celler der giver øjet dets farve. Iris er forbundet til en række muskler, der gør at pupillens størrelse kan varieres alt efter lysets styrke. Derved kommer iris til at virke som en blænde.

Efter pupillen passerer lyset gennem linsen. Bag linsen findes glaslegemet, der er den store klare gelemasse, som udfylder det meste af øjets indre.

### Glaslegemet.

Den største enkelt del i øjet er glaslegemet. Glaslegemet har to hovedfunktioner. For det første skal det give en fri og uforstyrret passage for det lys, der fra pupillen strømmer gennem linsen ind i glaslegemet og rammer nethinden. For det andet må det ikke hindre den diffusion og konvektion, der sender næring rundt til det omkringliggende væv.

For at give fri og uforstyrret passage for lyset, må glaslegemet være fuldstændigt klart. Gelestrukturen gør, at væsken ikke frit kan skvulpe rundt i øjet samtidig med, at den ikke forhindrer en vis cirkulation i at finde sted. Endvidere betyder det store vandindhold i glaslegemet (øjet består af 99 procent vand og 1 procent faste stoffer), at der ikke er mere modstand mod diffusion og konvektion end i vand. Af de faste stoffer i glaslegemet, er de vigtigste proteiner og mucopolysaccharider. Resten af de faste stoffer udgøres af forskellige salte. Proteinerne i glaslegemet danner en løs struktur af fibre. Mucopolysacchariderne bindes til denne struktur, og tilsammen danner fibre og mucopolysacchariderne et vandbindende netværk. Derved opnås den geleagtige struktur.

### **Hinder som omgiver glaslegemet.**

Rundt om glaslegemet og linsen er der tre hinder. Det er indefra : nethinden (retina), årehinden (choroidea) og senehinden (sclera). Deres funktion er at omdanne lys til elektriske impulser, samt at tilføre glaslegemet næring fra blodet.

Nethinden der er en kompleks struktur opbygget af nervevæv omdanner lysmønstrene, og den kan næsten betragtes som en del af hjernen.

Årehinden består af blodkar bundet sammen af væv.

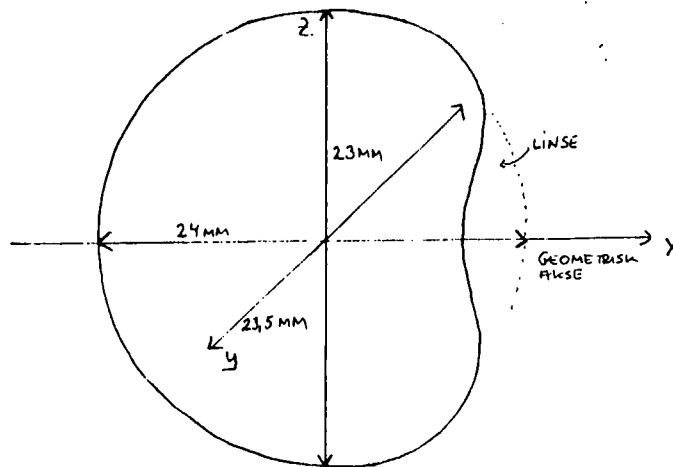
Senehinden består af proteinfibre bundet sammen til lameller for at gøre senehinden stærk og uelastisk. Det er senehinden der, påvirket af væsketrykket indefra giver øjet sin form.

### **Øjets geometri.**

Den grundform som det menneskelige øje har, er en kugle. I den forreste del af øjet gør linsesystemet og det forreste øjenkammer dog, at hverken øjet som helhed eller glaslegemet kan betragtes som en kugle (figur 2.). I øjets bagerste del passer sammenligningen med en kugle langt bedre, omend øjet er en anelse fladtrykt.

Øjets diameter i retningen fra for til bag (målt langs øjets geometriske akse), er med linsesystemet ca. 24 mm, og lodret ca. 23 mm. Horisontalt er den ca. 23.5 mm. Læseren bør bemærke den geometriske aksebeliggenhed, da vi flere steder senere i rapporten refererer til denne.

Glaslegemet følger i den bagerste del selve øjets geometri. Foran sidder imidlertid linsen som gør, at den kugle som glaslegemet ellers udgør, bliver deformeret.



Figur 2. Øjets geometri

Vi ser altså at både øjets og glaslegemets geometri, i den bagerste del af øjet, lader sig modellere med en kugle, men at forholdene i den forreste del afviger herfra.

### 1.2 TRANSPORT AF STOFFER I GLASLEGEMET.

Transporten igennem glaslegemet har som hovedformål at bringe næring til vævet omkring glaslegemet. Der foregår to typer af transport i øjet - konvektion og diffusion.

Væsken i glaslegemet er kammervæsken (aqueus humor) som dannes i det forreste og bagerste øjenkammer. Herfra bevæger den sig ind i glaslegemet og bagud gennem glaslegemet indtil den når til retina. På denne måde transporteres næring frem til retina. Transporten af denne væske foregår jfr. (Fatt, 1975) ved konvektion.

Sideløbende med denne bagudrettede konvektive transport foregår der en diffusion af stoffer opløst i væsken. I (Fatt, 1975) er det påvist, at diffusionen i et rask øje ikke påvirkes af den konvektive transport, og derfor godt kan være fremadrettet, sådan som det er tilfældet med fluoresceinen.

I modellen over diffusionen i øjet behøver vi således ikke at tage hensyn til den konvektive transport. Dog skal man være opmærksom på at dette kun gælder så længe glaslegemet ikke er blevet til en væske. Glaslegemet kan ved visse sygdomme miste sin struktur, så i disse tilfælde bør modellen anvendes med varsomhed. Diffusion og konvektion beskrives nærmere i næste kapitel.

### 1.3 MÅLETEKNIK.

Vi vil afslutte dette kapitel med meget kort at beskrive den måleteknik som anvendes, når man skal bestemme koncentrationen af fluorescein i blodet og i glaslegemet.

Når koncentrationen af fluorescein i glaslegemet skal bestemmes, belyses øjet med en bestemt intensitet og frekvens. Fluoresceinen i glaslegemet reflekterer det indsendte lys med en anden frekvens, og man estimerer så koncentrationen af stoffet omkring øjets geometriske akse, på baggrund af intensiteten af det reflekterede lys med denne frekvens.

Koncentrationen af fluorescein i blodet, skal måles som det frie fluorescein i blodet, da det er den del af stoffet, der kan trænge ind i øjet. Denne måling foretages vha. en metode kaldet ultrafiltration.

## 2. Diffusion.

Vi vil i dette kapitel beskrive hvad diffusion er, og opstille den grundlæggende diffusionsligning, som anvendes i de senere afsnit.

Beskrivelsen i dette kapitel bygger på (Crank, 1975) og (Rubinow, 1975)

### 2.1 DIFFUSION.

Diffusion betyder spredning, og inden for naturvidenskaberne bruges begrebet om stoffers spredning og blanding som følge af molekylernes bevægelse. Diffusion kan finde sted i og mellem luftformige, flydende og faste stoffer.

Eksistensen af diffusion, skyldes at alle molekyler ved temperaturer over det absolutte nulpunkt er i besiddelse af bevægelsesenergi, og derfor vil bevæge sig, såfremt der ikke er noget, der forhindrer det. Denne bevægelses retning er imidlertid tilfældig og uforudsigelig. Ser man på et stof opløst i en væske, vil man derfor iagttage, at de enkelte molekyler til tider vil bevæge sig mod områder med større koncentration af stoffet, og til tider mod områder med en lavere koncentration. På trods af denne iagttagelse vil man, over et tidsinterval se, at de to stoffer vil blandes, indtil koncentrationen er ens overalt.

For at forklare dette tilsyneladende paradoksale fænomen, vil vi se på en vandret snitflade igennem opløsningen. Betragter man opløsningen gennem et vist tidsinterval, vil man se at en bestemt brøkdelen af det opløste stofs molekyler i den øvre halvdel, på grund af molekylernes tilfældige bevægelse, vil passere snitfladen fra oven, og at den samme brøkdelen af molekyler i den nedre halvdel, vil passere snitfladen fra neden. Dette betyder, at såfremt der f.eks. er større koncentration af det opløste stof i den øvre end i den nedre halvdel, så vil der bevæge sig flere molekyler oppe fra og ned gennem snitfladen, end nede fra og op.

Da stoffet totalt set bevæger sig fra områder med en højere koncentration mod områder med en lavere koncentration, vil denne strømning betyde, at koncentrationen med tiden udjævnes (såfremt der ikke sker forstyrrende ting), og at strømningen ikke længere kan iagttages, når koncentrationen er ens overalt. Molekylebevægelserne finder dog stadig sted, men har i denne forbindelse ingen betydning, da koncentrationen ikke ændres derved.

## 2.2 KONVEKTION.

Vi skrev i kapitlet om øjet, at der foregår såvel diffusion som konvektiv transport i øjet, men pointerede også at den konvektive transport ikke havde indflydelse på diffusionsprocessen. De modeller vi senere vil opstille, tager da heller ikke hensyn til den konvektive transport. For fuldstændighedens skyld, vil vi imidlertid kort forklare begrebet konvektion.

Beskrivelsen af diffusion i det foregående afsnit byggede på den antagelse at væsken hvori stoffet var opløst, var i ro. Er dette ikke tilfældet, er det klart at det opløste stof vil bevæges med væsken. Denne type transport kaldes konvektion.

## 2.3 DIFFUSIONSLIGNINGEN.

Vi skal nu udlede diffusionsligningen, som vi vil benytte i vores modelopstilling. Ligningen gælder for diffusion i et isotropt medium, det vil sige et medium, hvor stuktur- og diffusionsegenskaberne i en omegn af et punkt er de samme i alle retninger.

Hvis man betragter en snitflade med enhedsareal, i et sådant medium, så vil fluxen, dvs. transporteret mængde stof pr. tidsenhed, som tidligere beskrevet, være proportional med koncentrationsforskellen over snittet. I en mere eksakt matematisk formulering bliver dette til :

$$(1) \quad F = -D \frac{\partial c(\mathcal{P}, t)}{\partial \mathbf{n}}$$

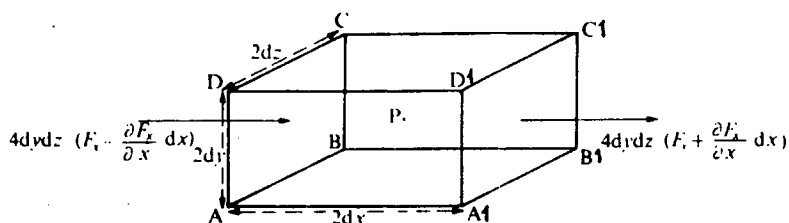
som kaldes Ficks første lov om diffusion.

Her er  $F$  fluxen pr. enhedsareal i snittet, og  $c(\mathcal{P}, t)$  er koncentrationen af det diffunderende stof i punktet  $\mathcal{P}$  til tiden  $t$ .  $D$  er diffusionskoefficienten, der kan være konstant, eller variere med hensyn til sted og koncentration.  $D$  måles i  $\frac{cm^2}{s}$ , og  $\mathbf{n}$  angiver en koordinat vinkelret på snittet.

Det negative fortegn på højresiden af 1) opstår fordi diffusionsprocessen foregår i den modsatte retning, af den hvori koncentrationen vokser.

Vi vil nu på baggrund af 1), udlede den fundamentale differentiaalligning for diffusion i et isotropt medium.

Vi betragter en kasse  $\mathcal{M}$  (fig 1), hvis sider er parallelle med koordinataksene, og hvis længde er henholdsvis  $2dx$ ,  $2dy$ ,  $2dz$ . Centruen for  $\mathcal{M}$  er givet ved punktet  $\mathcal{P}(x, y, z)$ , hvor koncentrationen er  $c(x, y, z, t)$ . Hjørnerne i kassen kaldes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ , og  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{D}_1$  som vist på tegningen (fig 1.).



Figur 1. Kassen  $\mathcal{M}$ 's geometri.

Siderne  $ABCD$  og  $A_1B_1C_1D_1$  står således vinkelret på x-aksen.

Hvis  $F_x$  betegner fluxen igennem et enhedsareal i en plan gennem  $\mathcal{P}$  parallel med siden  $ABCD$ , så kan fluxen gennem et enhedsareal i siden  $ABCD$  tilnærmes med

$$(2) \quad F_x - \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$$

Da arealet af  $ABCD$  er  $4dydz$ , kan mængden af diffusionssubstanser, der kommer ind i  $\mathcal{M}$ , vinkelret på  $ABCD$  pr. tidsenhed skrives som :

$$(3) \quad 4dydz(F_x - \frac{\partial F_x}{\partial x} dx)$$

På samme måde kan hastigheden, hvormed diffusionssubstansen forlader  $\mathcal{M}$  gennem siden  $A_1B_1C_1D_1$  skrives som

$$(4) \quad 4dydz(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx)$$

derfor kan bidraget fra de 2 sider til den hastighed hvormed koncentrationen vokser skrives som :

$$(5a) \quad 4dydz(F_x - \frac{\partial F_x}{\partial x} dx) - 4dydz(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx)$$



$$= -8dx dy dz \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

Bidragene fra de øvrige sider kan på tilsvarende vis beregnes til at være

$$(5b) \quad -8dx dy dz \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

for siderne  $ABB_1A_1$  og  $DCC_1D_1$ , og

$$(5c) \quad -8dx dy dz \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

for siderne  $ADD_1A_1$  og  $BCC_1B_1$

Summerer vi nu bidragene fra de 6 sider fås at den hastighed hvormed mængden af diffusionssubstansen vokser i  $\mathcal{M}$  kan skrives som :

$$(6) \quad -8dx dy dz \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

Dette udtryk angiver, hvor stor en mængde af det diffunderende stof, der netto bliver tilført kassen  $\mathcal{M}$  pr. tidsenhed, og det kan således også beregnes som ændringen i koncentration pr. tidsenhed ganget med volumenet af kassen. Da volumenet er  $8dx dy dz$  bliver udtrykket :

$$(7) \quad 8dx dy dz \cdot \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t}$$

Ved at sammenholde 6) og 7) får man så :

$$(8) \quad \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$$

Fra 1) har vi at  $F = -D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial (x, y, z)}$ , og får heraf at :

$$(9a) \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial x} \right)$$

$$(9b) \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial y} \right)$$

$$(9c) \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial z} \right)$$

Hvilket sammenholdt med (8) giver den grundlæggende diffusionsligning.

$$(10) \quad \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial z} \right)$$

Hvis D er konstant reduceres dette til

$$(11a) \quad \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right)$$

eller

$$(11b) \quad \frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} = D \Delta c(x, y, z, t)$$

hvor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Hvis koncentrationen kun afhænger af  $x$  (det endimensionelle tilfælde) får man :

$$(12) \quad \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

Skifter man nu til kuglekoordinater i (10)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

fås (efter en lang og besværlig udregning) :

$$(13) \quad \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( D \cdot r^2 \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \sin \theta \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} \right) + \frac{D}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right)$$

Med  $D$  konstant fås så (svarende til 11) :

$$(14) \quad \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 c(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right)$$

I det tilfælde hvor der er tale om kuglesymmetri afhænger  $c$  kun af  $r$  og  $t$  og ( 14 ) reduceres til :

$$(15) \quad \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \right)$$

da  $\frac{\partial c}{\partial \theta}$  og  $\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}$  er nul.

### 3. Opstilling af modellen for kuglesymmetri.

I dette kapitel vil vi beskrive de antagelser og forenklinger, der leder til den en-dimensionelle model for diffusion i øjet, og beskrive de opstillede ligninger. Fremstillingen her bygger på (Larsen et al., 1983).

De to vigtigste grundantagelse er for det første at øjet betragtes som kuglesymmetrisk både hvad angår dets geometri, såvel som de fysiske egenskaber, og for det andet, at man ser bort fra den konvektive transport, der forgår i øjet. Som en konsekvens af den ovenstående forenkling, bliver såvel permeabiliteten  $P$ , som diffusionskoefficienten  $D$  betragtet som konstante. Endvidere betyder kuglesymmetrien, at koncentrationen  $c$  kun afhang af  $r$  og  $t$ , og ikke af  $\theta$  og  $\varphi$ .

Det at øjet bliver betragtet som kuglesymmetrisk, dvs. den forenkling at koncentrationen kun antages at afhænge af afstanden fra centrum af øjet, har især betydning for forholdene i og omkring linsen. Der er her især to faktorer, der gør sig gældende. For det første gør linsen, at der er en kraftig afvigelse fra den kuglesymmetriske geometri, og for det andet er gennemtrængeligheden af barrieren anderledes i disse områder, idet linsen sandsynligvis er uigennemtrængelig, mens området omkring linsen forholdsvis let lader sig gennemtrænge.

De ovenstående betragtninger fører til at man i modellen benytter den en-dimensionale diffusionsligning i kuglekoordinater :

$$(1) \quad \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \right) \quad 0 \leq r \leq a$$

Hvor  $r$  måles inde fra øjets centrum, og hvor  $a$  er øjets radius.

Kuglesymmetrien, og det faktum at  $D$  er konstant, betyder at koncentrationen er ens overalt på en kugleskal med radius  $r$ . Hvis vi nu lægger en akse i en tilfældig retning gennem centrum, og for én gangs skyld regner  $r$  med fortegn, kan dette formuleres således :

$$c(-r, t) = c(r, t)$$

hvilket når det differentieres, fører til :

$$-\frac{\partial c(-r, t)}{\partial r} = \frac{\partial c(r, t)}{\partial r}$$

For  $r = 0$  får man da :

$$-\frac{\partial c(0,t)}{\partial r} = \frac{\partial c(0,t)}{\partial r}$$

og vi ser da at man får følgende betingelse :

$$(2) \quad \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

Da fluorescein ikke optræder naturligt i øjet, må koncentrationen af fluorescein i øjet før injektionen, d.v.s. til tiden 0, være nul :

$$(3) \quad c(r,0) = 0$$

De ovenstående 3 ligninger beskriver forholdene inde i glaslegemet. For at komplettere modellen bliver man imidlertid også nødt til at se på forholdene ved barrieren, altså beskrive hvilke ligninger der styrer fluoresceinens indtrængen i glaslegemet.

Biologisk set er dette en kompliceret sag, men under opstillingen af den matematiske model, går man ud fra at der er tale om en ren diffusion-process, og at fluxen derfor er proportional med koncentrationsforskellen over barrieren. Proportionalitetsfaktoren er permeabiliteten  $P$ , der som tidligere nævnt regnes for konstant. Dette giver følgende udtryk :

$$(4) \quad -D \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r=a} = P(c(a,t) - c_0(t))$$

Her er  $c_0(t)$  koncentrationen af fluorescein i blodet. Denne koncentration regnes for konstant overalt i blodet til tiden  $t$ .

Sammenfattende har vi altså de følgende fire ligninger til at beskrive problemet i en dimension :

$$(L1) \quad \frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right) \quad 0 \leq r \leq a$$

$$(L2) \quad \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$(L3) \quad c(r,t)|_{t=0} = 0 \quad 0 \leq r \leq a$$

$$(L4) \quad -D \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r=a} = P(c(a,t) - c_0(t))$$

Der vil i resten af rapporten blive refereret til disse fire ligninger, der tilsammen udgør det matematiske grundlag for modellen.

#### 4. Koncentrationsbestemmelse

I dette kapitel vil vi bestemme koncentrationen af fluorescein i øjet ud fra to metoder. Den første metode benytter laplacetransformation, og den anden separation af de variable. I slutningen af kapitlet sammenlignes uddata fra implementeringer af de to metoder.

##### 4.1 BESTEMMELSE V.H.J.A. LAPLACETRANSFORMATION.

Vi vil i dette afsnit benytte laplacetransformation til at bestemme et udtryk for koncentrationen  $c(r, t)$ , udfra differentialligningssystemet opstillet i forrige kapitel.

Ved at anvende laplacetransformationen på vores problem, opnår vi at få ændret vores problem, fra at skulle løse en partiel differentiaalligning, til at skulle løse en sædvanlig differentiaalligning med konstante koefficienter. Fremgangsmåden er, at man først laplacetransformerer de udtryk, der indgår i differentiaalligningen, løser problemet i den laplacetransformerede plan, og dernæst transformerer løsningen tilbage.

Laplacetransformationen af en funktion  $f(t)$ , hvor  $t$  er en reel variabel, er givet ved :

$$(1) \quad \tilde{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

hvor  $s$  er en kompleks variabel.  $f(t)$  kaldes objektfunktionen, og dens laplacetransformerede  $\tilde{f}(s)$  eller  $L\{f(t)\}$  kaldes billedfunktionen. Det er dog ikke nødvendigt at benytte (1) hver gang man vil laplacetransformere et udtryk, da disse transformationer er tabellerede, se f.eks. (Spiegel, 1968).

For at den laplacetransformerede af en funktion eksisterer, kræves det at lapacintegralet (2) for denne funktion eksisterer.

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

En klasse af funktioner, der opfylder dette krav, er de eksponentielt begrænsede funktioner. En funktion  $f(t)$  siges at være eksponentielt begrænset hvis :

1.  $f$  er defineret og stykkevis glat for  $t \geq 0$ .
2. Der eksisterer reelle konstanter  $k, c$  så  $|f(t)| \leq k e^{ct}$  for  $t \geq 0$ .

Er  $f$  en eksponentielt begrænset funktion eksisterer  $L\{f(t)\}$  i halvplanen  $\text{Re } s > c$ .

Vi vender os nu mod vores problem.

For at de Laplacetransformationer vi foretager i det følgende har nogen mening, må vi forlange, at den funktion  $c(r, t)$ , der beskriver koncentrationen af fluorescein inde i øjet er eksponentielt begrænset. Vi kan ikke eksplicit gøre rede for at  $c(r, t)$  er eksponentielt begrænset, da vi endnu ikke har et funktionsudtryk for  $c(r, t)$ , men man kan overbevise sig om, at  $c(r, t)$  må være eksponentielt begrænset ved følgende overvejelser.

Ved forsøgets begyndelse injiceres en endelig mængde af fluorescien i blodbanen, som derefter udvaskes i den menneskelige organisme.  $c_0(t)$  er derfor en ikke voksende funktion, og må så være eksponentielt begrænset. I starten er koncentrationen inde i øjet mindre end koncentrationen udenfor  $c(r, t) < c_0(t)$ . I dette tidsrum diffunderer der stof ind i øjet, og  $c(r, t)$  er voksende, omend mindre end  $c_0(t)$ . Når koncentrationen inde i øjet bliver større end udenfor, vil der begynde at diffundere stof ud af øjet, og  $c(r, t)$  må således efterhånden aftage. Man ser således at i det tidsrum hvor  $c(r, t)$  vokser, er den mindre end den eksponentielt begrænsede funktion  $c_0(t)$ , og dermed selv eksponentielt begrænset. For de senere tidsrum vil  $c(r, t)$  stort set være faldende, og dermed også eksponentielt begrænset. Sammenlagt mener vi således godt at  $c(r, t)$  kan betragtes som eksponentielt begrænset.

I det følgende vil vi først Laplacetransformere de ligninger der danner vores problem. Dernæst vil vi løse den fremkomne differentialligning i den Laplacetransformerede plan, og så invertere denne løsning for at få en løsning til de oprindelige ligninger. Som tidligere nævnt er problemet beskrevet ved de fire ligninger L1 - L4 (jvnf. kapitel 3).

Vi bestemmer først den Laplacetransformerede af højresiden i (L1) ved at benytte differentiationsreglen. Det giver os

$$L \left\{ \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} \right\} = s L \{c(r, t)\} - c(r, 0) = s \cdot \tilde{c}(r, s)$$

hvor  $c(r, 0) = 0$  ifølge (L4). Det bemærkes, at den Laplacetransformerede til  $\frac{\partial c(r, t)}{\partial t}$  eksisterer, da den Laplacetransformerede til  $c(r, t)$  eksisterer.

Laplacetransformerer vi nu også venstresiden i (L1) får vi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right) dt &= \frac{D}{r^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left( e^{-st} r^2 \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right) dt = \\ \frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} r^2 \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} dt \right)^* &= \frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} dt \right) \\ &= \frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{c}(r,s)}{dr} \right) \diamond \end{aligned}$$

Vi tillader os her at ombytte integration og differentiation (ved \*) da operationerne ikke angår den samme variabel (Jensen, 1984). Skiftet fra bløde d'er til stive d'er sker fordi integralet kun er afhængig af en variabel, mens  $c(r, t)$  er afhængig af to variable. Iøvrigt benytter vi stive d'er for  $\tilde{c}(r, s)$  afledede (ved  $\diamond$ ) skønt der egentlig er to variable, men da vi opfatter  $s$  som en parameter, udskiftes de bløde d'er til fordel for de stive d'er.

Ovenstående resultat giver os sammen med det foregående resultat at

$$(3) \quad \frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{c}(r, s)}{dr} \right) = s \cdot \tilde{c}(r, s)$$

Vi har nu opnået den såkaldte Helmholtz ligning. Vi foretager en omskrivning af (3) for at opnå en homogen sædvanlig differentilligning med konstante koefficienter, da vi herved lettere vil få den fuldstændige løsning. Vi indfører substitutionen (4)

$$(4) \quad \tilde{c}(r, s) = \frac{y(r, s)}{r}$$

Ved at differentiere fås

$$(5)$$

indsættes (4) og (5) i (3) får vi

$$\begin{aligned} \frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \left( -\frac{y(r,s)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dy(r,s)}{dr} \right) \right) &= s \frac{y(r,s)}{r} \\ \Downarrow \\ \frac{D}{r^2} \left( -\frac{dy(r,s)}{dr} + \frac{dy(r,s)}{dr} + r \frac{d^2 y(r,s)}{dr^2} \right) &= s \frac{y(r,s)}{r} \\ \Downarrow \\ \frac{D}{r} \frac{d^2 y(r,s)}{dr^2} &= s \frac{y(r,s)}{r} \end{aligned}$$



$$(6) \quad \frac{d^2 y(r,s)}{dr^2} - \frac{s}{D} y(r,s) = 0$$

Vi har nu en sædvanlig homogen lineær differentiaalligning med konstante koefficienter hvis løsning er givet ved

$$(7) \quad y(r,s) = c_1 e^{\sqrt{s/D}r} + c_2 e^{-\sqrt{s/D}r}$$

hvor  $c_1, c_2$  er reelle konstanter, som skal bestemmes ud fra randbetingelserne. Randbetingelsen (L2) Laplacetransformeres og vi har

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{d}{dr} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} c(r,t) dt \right) \right|_{r=0} = 0$$

$$(8) \quad \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dr} \tilde{c}(r,s) \right|_{r=0} = 0$$

Indsættes (4) i (8) ser man

$$-\frac{y(r,s)}{r^2} + \frac{1}{r} \left. \frac{dy(r,s)}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$(9) \quad \Leftrightarrow \left. \frac{r \cdot \frac{dy(r,s)}{dr} - y(r,s)}{r^2} \right|_{r=0} = 0$$

For at bestemme denne grænseværdi for  $r$  gående mod nul anvendes L'Hospitals regel

$$\frac{\frac{d}{dr} \left( r \frac{dy(r,s)}{dr} - y(r,s) \right)}{\frac{d}{dr} r^2} = \frac{r \frac{d^2 y(r,s)}{dr^2} + \frac{dy(r,s)}{dr} - \frac{dy(r,s)}{dr}}{2r}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2 y(r,s)}{dr^2}$$

For at (9) skal være opfyldt, skal der Jvnf. (6) altså gælde

$$(10) \quad \frac{s}{D} y(0,s) = 0$$

og man ser af (7) at  $c_1 = c_2$ . Anvendes dette resultat på (7) har vi

$$\begin{aligned} y(r,s) &= c_1 e^{\sqrt{s/D}r} - c_1 e^{-\sqrt{s/D}r} \\ &= c_1 \left( e^{\sqrt{s/D}r} - e^{-\sqrt{s/D}r} \right) \\ &= 2c_1 \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} r \right) \end{aligned}$$

Indsættes dette i udtrykket for substitutionen ses at

$$(11) \quad \tilde{c}(r,s) = \frac{2c_1 \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} r \right)}{r}$$

For at bestemme  $c_1$  i (11) vender vi os nu mod den anden randbetingelse (L4). Hvis vi Laplacetransformerer denne randbetingelse ses

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-st} \left( c(a,t) + \frac{D}{P} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} c_0(t) dt \\ \Downarrow & \\ & \int_0^{\infty} e^{-st} c(a,t) dt + \frac{D}{P} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} c(r,t) dt \right) \Big|_{r=a} = \tilde{c}_0(s) \\ \Downarrow & \\ (12) \quad & \tilde{c}(a,s) + \frac{D}{P} \frac{\partial \tilde{c}(r,s)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \tilde{c}_0(s) \end{aligned}$$

Indsættes nu (11) i (12) er

$$\begin{aligned} & \frac{2c_1 \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right)}{a} + 2c_1 \frac{D}{P} \left( \frac{\cosh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) \cdot \frac{\sqrt{s}}{D} \cdot a - \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} a \right)}{a^2} \right) = \tilde{c}_0(s) \\ \Downarrow & \\ & \frac{2c_1}{a} \left( \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) + \frac{D}{aP} \left( \cosh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) \cdot \frac{\sqrt{s}}{D} \cdot a - \sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) \right) \right) = \tilde{c}_0(s) \\ \Downarrow & \\ & c_1 = \frac{1}{2} \tilde{c}_0(s) \frac{a}{\sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) \left( 1 - \frac{D}{aP} \right) + \frac{\sqrt{Ds}}{P} \cosh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right)} \\ \Downarrow & \\ & c_1 = \frac{1}{2} \tilde{c}_0(s) \frac{aP/\sqrt{D}}{\sinh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right) \left( \frac{P}{\sqrt{D}} - \sqrt{D}/a \right) + \sqrt{Ds} \cosh \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a \right)} \end{aligned}$$

Indsættes dette resultat i (11) er

$$(13) \quad \tilde{c}(r,s) = \tilde{c}_0(s) \frac{aP/r\sqrt{D} \cdot \sinh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot r)}{\lambda \cdot \sinh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a) + \sqrt{s} \cosh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a)}$$

hvor  $\lambda = \frac{P}{\sqrt{D}} - \frac{\sqrt{D}}{a}$  Lader vi

$$(14) \quad \tilde{F}(r,s) = \frac{aP/r\sqrt{D} \cdot \sinh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot r)}{\lambda \cdot \sinh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a) + \sqrt{s} \cosh(\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot a)}$$

bliver (13) til

$$(15) \quad \tilde{c}(r,s) = \tilde{c}_0(s) \cdot \tilde{F}(r,s)$$

Vi er nu parate til at invertere  $\tilde{c}(r,s)$  i (15), for at opnå et udtryk for  $c(r,t)$ . Hertil benytter vi foldningsreglen som siger at den Laplacetransformerede af foldningsintegralet (16) er lig med produktet af de enkelte Laplacetransformerede (17).

$$(16) \quad f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$(17) \quad L\{f * g\} = L\{f\} \cdot L\{g\}$$

Foldningsreglen giver da i vores tilfælde :

$$(18) \quad c(r,t) = \int_0^t c_0(t-\tau) F(r,\tau) d\tau$$

For at kunne beregne  $c(r,t)$  udfra (18) skal vi have inverteret  $\tilde{F}(r,s)$ . Denne invertering lettes ved at approximere i udtrykket for  $\tilde{F}(r,s)$  i (15). Derfor undersøger vi  $\tilde{F}(r,s)$  for  $s$  gående mod uendelig. Der gælder at

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-a\sqrt{s/D}} = 0$$

og for store  $s$  får vi derfor

$$\tilde{F}(r,s) = \frac{aP/r\sqrt{D} (e^{r\sqrt{\frac{s}{D}}} - e^{-r\sqrt{\frac{s}{D}}}) \cdot \frac{1}{2}}{\lambda (e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} - e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}}) \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{s} (e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}}) \cdot \frac{1}{2}}$$

↓

$$\tilde{F}(r,s) \approx \frac{aP (e^{r\sqrt{\frac{s}{D}}} - e^{-r\sqrt{\frac{s}{D}}})}{r\sqrt{D} (\lambda + \sqrt{s}) e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}$$

↓

$$(19) \tilde{F}(r,s) \approx \frac{aP}{r\sqrt{D}} \left( \frac{e^{-(a-r)\sqrt{s/D}}}{\lambda + \sqrt{s}} - \frac{e^{-(a+r)\sqrt{s/D}}}{\lambda + \sqrt{s}} \right)$$

sættes nu

$$k_1 = \frac{a-r}{\sqrt{D}} \quad k_2 = \frac{a+r}{\sqrt{D}}$$

kan (19) skrives som

$$\tilde{F}(r,s) \approx \frac{aP}{r\sqrt{D}} \left( \frac{e^{-k_1\sqrt{s}}}{\lambda + \sqrt{s}} - \frac{e^{-k_2\sqrt{s}}}{\lambda + \sqrt{s}} \right)$$

Lad nu

$$\tilde{G}_1 = \frac{e^{-k_1\sqrt{s}}}{\lambda + \sqrt{s}} \quad \tilde{G}_2 = \frac{e^{-k_2\sqrt{s}}}{\lambda + \sqrt{s}}$$

$\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$  kan omskrives så vi får

$$\tilde{G}_1 = \frac{e^{-k_1\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} - \frac{e^{-k_1\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \lambda)} \cdot \lambda$$

$$\tilde{G}_2 = \frac{e^{-k_2\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} - \frac{e^{-k_2\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \lambda)} \cdot \lambda$$

Med disse omskrivninger kan vi bestemme objektfunktionerne til  $\tilde{G}_1$  og  $\tilde{G}_2$  vha. en tabel over de Laplacetransformerede :

$$G_1 = \frac{e^{-k_1^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} - \lambda e^{\lambda(\lambda t + k_1)} \operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{t} + \frac{k_1}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$G_2 = \frac{e^{-k_2^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} - \lambda e^{\lambda(\lambda t + k_2)} \operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{t} + \frac{k_2}{2\sqrt{t}}\right)$$

hvor

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} e^{-s^2} ds$$

er den komplementære fejlfunktion.

Ialt fås

$$F(r,t) \approx \frac{aP}{r\sqrt{D}} \left( \frac{e^{-k_1^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} - \lambda e^{\lambda(\lambda t + k_1)} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{t} + \frac{k_1}{2\sqrt{t}} \right) - \frac{e^{-k_2^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} + \lambda e^{\lambda(\lambda t + k_2)} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{t} + \frac{k_2}{2\sqrt{t}} \right) \right)$$

Indsættes værdierne for  $k_1$  og  $k_2$  i ovenstående udtryk for  $F(r,t)$  får vi efter omskrivning

$$(20) \\ F(r,t) \approx \frac{aP}{r\sqrt{D}} \left( \frac{e^{-(a-r)^2/4Dt} - e^{-(a+r)^2/4Dt}}{\sqrt{\pi t}} - \lambda \left( e^{\lambda(\lambda t + (a-r)/\sqrt{D})} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{t} + \frac{(a-r)}{2\sqrt{Dt}} \right) - e^{\lambda(\lambda t + (a+r)/\sqrt{D})} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{t} + \frac{(a+r)}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \right)$$

Vi har nu opnået en approximation til  $F(r,t)$  når  $s$  er stor og den samlede løsning  $c(r,t)$  kan bestemmes vha. ligning (18). Men vi må først vurdere, hvad det betyder for  $t$ , at  $s$  skal være stor. Til dette formål Taylor udvikler vi  $c(r,t)$  omkring  $t = 0$ .

$$c(r,t) = c(r,0) + \frac{\partial c(r,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(r,t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{(n-1)} c(r,t)}{\partial t^{(n-1)}} \Big|_{t=0} \cdot t^{(n-1)} + \text{rest-led} \\ \approx \sum_{k=0}^M c_k \frac{t^k}{k!} \quad \text{hvor } c_k = \frac{\partial^{(k)} c(r,t)}{\partial t^{(k)}} \Big|_{t=0}$$

Laplacetransformeres  $c(r,t)$  skrevet som en Taylor udvikling ses at

$$\begin{aligned}\tilde{c}(r,s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} c(r,t) dt \approx \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^M c_k \frac{t^k}{k!} dt \\ &= \sum_{k=0}^M c_k \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^M c_k \frac{1}{s^{k+1}}\end{aligned}$$

Ved at rækkeudvikle den Laplacetransformerede i  $s^{-1}$  bestemmes koefficienterne  $c_k$ . Jo større  $s$  er, jo mindre vil  $s^{-1}$  være, og jo hurtigere vil leddene i summen gå mod nul. Dette betyder at jo mindre  $s^{-1}$  er, desto bedre vil et endeligt antal led fastlægge  $\tilde{c}(s)$ . De samme koefficienter  $c_k$  fastlægger imidlertid også en afsnitssum af funktionens Taylorrække i  $t = 0$ , som på samme måde er en bedre og bedre approximation jo mindre  $t$  er. Den approximative løsning der er fundet, og som er gyldig for store  $s$ , er således kun gyldig for små  $t$ .

#### 4.2 BESTEMMELSE VIA. AF SEPARATION AF DE VARIABLE.

I dette afsnit vil vi vise hvorledes man kan finde et udtryk for koncentrationen  $c(r,t)$ , ved at løse det tidligere beskrevne differentiaalligningssystem ved separation af de variable.

Vi er interesseret i at få omformet vores problem givet ved ligningerne (L1) - (L4), til et egenværdiproblem og så rækkeudvikle løsningen efter egenfunktionerne.

Vi gør først problemet dimensionsløst ved at indføre følgende parametre:

$$(5) \quad \begin{aligned}x &= \frac{r}{a} \\ \alpha &= \frac{D}{aP} \\ \delta &= \frac{D}{a^2}\end{aligned}$$

Herved opnår vi at  $x \in [0,1]$  samt at reducere antallet af parametre i problemet fra 3 til 2. For at få randbetingelse (4) til at blive homogen, indfører vi nu funktionen  $\psi(x,t)$  givet ved

$$(6) \quad \psi(x,t) = c(ax,t) - c_0(t)$$

Dette er nødvendigt for senere at få et egenværdiproblem. Derved får vi:

$$(7) \quad \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial c_0(t)}{\partial t}$$

Sættes dette ind i ligningerne (1) - (4), sammen med de ovenfor indførte parametre (5) omformes ligningerne til

$$(8) \quad \frac{1}{\delta} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial c_0}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right)$$

$$(9) \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$(10) \quad \psi(x,0) = -c_0(0)$$

$$(11) \quad \psi(1,t) + \alpha \left. \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

Nu har vi fået homogene randbetingelser, men til gengæld har vi fået en inhomogen diffusionsligning (8). Vi vil løse (8) - (11) ved separation af de variable. Først betragter vi den til (8) svarende homogene ligning.

$$(12) \quad \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = 0$$

Heri indsættes produktformen  $\psi(x,t) = X(x) \cdot T(t) = X \cdot T$  og vi får

$$(13) \quad -\frac{1}{\delta} T' X + \frac{1}{x^2} (2x X' T - x^2 X'' T) = 0$$

$$(14) \quad \frac{1}{\delta} \frac{T'}{T} = \left( \frac{2}{x} \frac{X'}{X} + \frac{X''}{X} \right)$$

idet vi har divideret igennem med  $X \cdot T$ .

Da venstre side af (14) kun afhænger af  $t$ , og da højre side kun afhænger af  $x$  må begge udtryk være lig med den samme konstant, f.eks.  $-\omega^2$ . Dette giver nu de separerede ligninger :

$$(15) \quad X''(x) + \frac{2}{x} X'(x) + \omega^2 X(x) = 0 \quad \text{og} \quad T'(t) + \delta \omega^2 T(t) = 0$$

samt randbetingelserne

$$(15a) \quad X'(0) = 0$$

$$(15b) \quad X(1) + \alpha X'(1) = 0$$

$$(15c) \quad T(0) = -c_0(0)$$

hvor (15a) og (15b) henholdsvis svarer til randbetingelserne (9) og (11) og hvor (15c) svarer til (10). Den separerede ligning i den variable  $x$  (ligningerne (15), (15a), (15b)) danner et egenværdiproblem, et såkaldt Sturm-Liouville problem.

Ved substitutionen  $Y = x \cdot X$  i (15) fås

$$(16) \quad Y'' + \omega^2 Y = 0$$

(16) er en sædvanlig anden ordens differentiaalligning med løsninger af formen  $Y = A \cdot \sin \omega x + B \cdot \cos \omega x$ . Den fuldstændige løsning til (15) er da

$$(17) \quad X = \frac{1}{x} (A \cdot \sin \omega x + B \cdot \cos \omega x)$$

Begyndelsesbetingelsen  $X'(0) = 0$  giver  $B = 0$ . Det skal bemærkes at  $x = 0$  er en singularitet så værdien i  $X'(0)$  bestemmes som en grænseværdi ved hjælp af L'Hospitals regel.

Da  $B = 0$  bliver egenfunktionerne af formen

$$(18) \quad X_m = \frac{\sin \omega_m x}{x} \quad m=1,2,\dots,$$

Randbetingelsen (15b) giver ved indsættelse af (18) :

$$\sin \omega_m - \alpha \sin \omega_m + \alpha \omega_m \cos \omega_m = 0$$

⇓

$$(1 - \alpha) \sin \omega_m + \alpha \omega_m \cos \omega_m = 0$$

⇓

$$(1 - \alpha) \tan \omega_m + \alpha \omega_m = 0$$

⇓

$$(19) \quad \tan \omega_m = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_m$$

Egenværdierne  $\omega_m$  fås da ved løsning af (19).

Som tidligere skrevet er det nu ideen at løsningen til (8) - (11) udvikles ved hjælp af de fundne egenfunktioner med tilhørende egenværdier, samt at det inhomogene led i (8) udvikles på passende vis efter de samme egenfunktioner. I appendix (V) er vist at betingelserne for at anvende udviklingssætningen er opfyldt, og vi har derfor at enhver stykkevis differentiabel funktion  $y$ , der er defineret på  $[0, 1]$  på entydig vis kan udvikles i en række efter  $X_m$ .



Rækken er

$$(20) \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(X_m, x^2 y)}{(X_m, x^2 X_m)} X_m$$

hvor  $(\cdot, \cdot)$  er det indre produkt på intervallet  $[a, b]$  givet ved

$$(z, y) = \int_a^b z^* \cdot y \, dx,$$

hvor  $z^*$  er den komplekskonjugerede til  $z$ .

Vi vender nu tilbage til de separerede ligninger (15). Hvis  $X_m$  og  $T_m$  tilfredsstiller de separerede ligninger tilfredsstiller produktfunktionen  $\psi = X_m \cdot T_m$  den homogene ligning (12). Vi er imidlertid interesseret i løsningen til den inhomogene ligning (8), så vi bestemmer ikke  $T_m$  af (15). I stedet udvikler vi det inhomogene led i (8) som følger :

Vi skriver konstanten 1 som

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \frac{\sin \omega_i x}{x}$$

hvor  $\bar{a}_i$  bestemmes ved hjælp af (20).

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= \frac{\int_0^1 \frac{\sin \omega_i x}{x} \cdot x^2 \, dx}{\int_0^1 \frac{\sin^2 \omega_i x}{x^2} \cdot x^2 \, dx} \\ &= \frac{\left[ \frac{\sin \omega_i x}{\omega_i^2} - \frac{x \cos \omega_i x}{\omega_i} \right]_0^1}{\left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\omega_i x}{4\omega_i} \right]_0^1} \end{aligned}$$

↓

$$(21) \quad \bar{a}_i = \frac{4 \sin \omega_i - 4 \omega_i \cos \omega_i}{2 \omega_i^2 - \omega_i \sin 2\omega_i}$$

Det inhomogene led  $\frac{\partial c_0(t)}{\partial t}$  kan da skrives

$$(22) \quad \frac{1}{\delta} \frac{\partial c_0}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial c_0}{\partial t} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \frac{\sin \omega_i x}{x}$$

Vi ønsker dog stadig at have løsningen til (8) på produktform :

$$(23) \quad \psi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) \cdot X_{\omega_i}(x)$$

hvor  $X_{\omega_i}(x) = \frac{\sin \omega_i x}{x}$ . Da problemet er selvadjungeret bestemmer vi nu  $T_i$  ved at indsætte (22) og (23) i (8), samt ved at benytte den separate ligning i  $X(x)$ , der kan skrives som  $-(x^2 X'(x))' = \omega^2 x^2 X(x)$

$$(24) \quad \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial T_i}{\partial t} X_{\omega_i} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial c_0}{\partial t} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i X_{\omega_i} = \sum_{i=1}^{\infty} -\omega_i^2 X_{\omega_i} T_i$$

og får så

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\omega_i^2 T_i + \frac{1}{\delta} \frac{\partial T_i}{\partial t} + \bar{a}_i \frac{1}{\delta} \frac{\partial c_0}{\partial t}) X_{\omega_i} = 0$$

$T_i$ 'erne må da opfylde ligningen

$$(25) \quad \frac{dT_i}{dt} + \delta \omega_i^2 T_i = -\bar{a}_i \frac{dc_0}{dt}$$

Som er en inhomogen første ordens differentiaalligning, hvis løsning er givet ved

$$(26) \quad T_i(t) = -\bar{a}_i e^{-\delta \omega_i^2 t} \int_0^t \frac{\partial c_0}{\partial \tau} e^{\delta \omega_i^2 \tau} d\tau + e^{-\delta \omega_i^2 t} T_i(0)$$

Oprindeligt havde vi sat  $\psi(x, t) = c(ax, t) - c_0(t)$ . Derfor får vi alt i alt løsningen :

$$(27) \quad c(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) \cdot X_{\omega_i}\left(\frac{r}{a}\right) + c_0(t)$$

til vores oprindelige problem. Her bestemmes  $T_i(t)$  af (26), og  $X_{\omega_i}\left(\frac{r}{a}\right)$  bestemmes af (18).

Tilbage bliver at bestemme  $T_i(0)$ . Dette gøres således :

Da

$$(28) \quad \psi(x, 0) = -c_0(0) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(0) \frac{\sin \omega_i \cdot x}{x}$$

og da

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \frac{\sin \omega_i \cdot x}{x}$$

↓

$$(29) \quad -c_0(0) = \sum_{i=1}^{\infty} -c_0(0) \bar{a}_i \frac{\sin \omega_i \cdot x}{x}$$

ser man at  $T_i(0)$  bliver :

$$(30) \quad T_i(0) = -c_0(0) \cdot \bar{a}_i$$

#### 4.3 SAMMENLIGNING AF KONCENTRATIONSBEREGNINGER.

For at kunne vurdere de to metoder vi har benyttet til at udlede udtrykkene for koncentrationen i de to foregående afsnit, har vi implementeret de fremkomne formler for koncentrationen. Vi vil ikke her nærmere beskrive implementationen, men blot henvise til appendix II og III der indeholder dokumentationen for henholdsvis asymptoteprogrammet (løsning ved hjælp af Laplacetransformationen) og separationsprogrammet (løsning ved separationen af de variable). Programmerne er begge istand til at beregne koncentrationen for forskellige tider og radier.

I bilag 2 er gengivet koncentrationsværdier, beregnet efter de to metoder for  $t = 600, 1200, \dots, 7200$  s, og  $r = 0.1, 0.2, \dots, 1.2$  cm. Endvidere har vi på baggrund af de beregnede værdier, plottet samhørende værdier af radius og koncentration for en fastholdt tid (bilag 3).

Sammenligner man uddata fra de to programmer ses at der stort set er god overensstemmelse, omend der dog er forskelle, især for små tidsværdier og for værdier af radius i 0.1 cm. og 1.2 cm.

##### **Forskelle for små tider.**

For små tidsværdier ses separationsprogrammet at give nogle negative koncentrationsværdier, hvorimod asymptoteprogrammet giver små, men positive værdier.

Disse forskelle skyldes formentlig unøjagtigheder opstået under beregningerne, samt de tilnærmelser der er benyttet under udledningen. Absolut set er forskellene dog så små, at de ligger langt under nøjagtigheden på koncentrationsmålingerne, og de beregnede værdier må derfor regnes for nul.

### **Forskelle inde ved øjets centrum og ude ved randen.**

Som nævnt i dokumentationen for de to programmer, er ingen af dem, uden videre istand til at beregne koncentrationen midt i øjet. Dette kan være en af årsagerne til at der er en vis forskel på resultaterne når koncentrationen beregnes tæt på øjets centrum (radius = 0.1), men også her gælder der, at værdierne er så små, at de ligger under usikkerheden på beregningerne og målingerne.

Ser man på koncentrationstværdierne helt ude ved randen, viser der sig også her en række forskelle. Disse forskelle kan skyldes at vi i asymptoteprogrammet måtte foretage en justering af radius, for at få beregnet grænseværdien for radius  $\rightarrow 1.2$  korrekt (se endvidere appendix II).

På trods af de ovenstående forhold må man sige, at der er en god overensstemmelse mellem de beregnede koncentrationer, men det er naturligvis ikke muligt, ud fra de ovenstående resultater, at sige, hvilken metode der er mest rigtig. Imidlertid må man antage at det faktum, at uddata stemmer godt overens må betyde, at de begge giver en god beskrivelse af koncentrationen, ud fra den opstillede model.

Endvidere ses det at de approximationer, der blev udført ved beregningen af løsningen ved hjælp af laplacetransformationen, ikke har været af sådan en karakter, at de har kunnet forstyrret resultaterne væsentligt.

### **Vurdering af beregningshastigheden.**

I artiklen (Larsen et. al., 1983), som beskriver hvorledes problemet oprindeligt blev løst, blev løsningen ved hjælp af separationsmetoden vurderet som værende for langsom til at beregne koncentrationerne i praksis, og derfor forkastet. Vi ville gerne have haft tid til nærmere at efterprøve denne påstand, men har på grund af tidsnød måttet undlade at gøre det. En sådan vurdering ville nemlig indebære, at man satte sammenlignelige mål for nøjagtigheden af beregningerne op, samt vurderede den mængde af beregninger, der skulle til for at opnå den valgte nøjagtighed. Ingen af disse to ting forekommer umiddelbart helt simple.

Det eneste man kan sige, ud fra vores sparsomme studier af emnet, er at der ikke umiddelbart ser ud til at være nogen klar forskel på antallet af led, de to metoder kræver for at opnå en vis nøjagtighed. Da mængden af beregninger der skal til for at udregne et led, endvidere er af nogenlunde samme størrelsesorden, og da kompleksiteten af den enkelte beregning kan variere meget, er det svært uden en nærmere undersøgelse, at sige noget præcist. Det virker imidlertid som om at asymptoteløsningen

indebærer visse fordele under beregningen. Ikke mindst fordi der ikke er brug for de store arrays, der i separationsprogrammet benyttes til at opbevare de faste størrelser ( $T_i(0)$  m.fl.) for ikke at skulle beregne dem gentagne gange.

## 5 Bestemmelse af permeabiliteten.

Vi har opstillet en model for diffusion i øjet, vha. af hvilken koncentrationen  $c(r, t)$  kan bestemmes, når  $P$  og  $D$  er kendte. I dette kapitel behandler vi det inverse problem. Dvs. vi søger istedet at bestemme  $P$  og  $D$  udfra opstillede model, når  $c(r, t)$  er målt eksperimentelt.

### 5.1 EN FORMEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN.

Vi vil først udlede en simpel formel for  $P$ , idet vi tager hensyn til at koncentrationen af fluorescein kun kan måles ud til en vis grænse  $r'$  (ca.  $0.9a$ , hvor  $a$  er øjets radius), fra øjets centrum. Vi bestemmer i denne forbindelse et udtryk for mængden af fluorescein i øjet til tiden  $t$ , da vi har en forventning om, at man på denne måde kan opstille en formel for  $P$ .

Volumenet af en kugleskal med tykkelsen  $dr$  og radius  $r$  er givet ved

$$4\pi r^2 dr,$$

og idet  $dr$  er infinitesimalt lille, kan koncentrationen i dette område betragtes som konstant, bliver mængden af stof i denne skal så :

$$m(r, t) = 4\pi r^2 c(r, t) dr.$$

Mængden af stof i en kugle til tiden  $t$ , med radius  $a$  er derfor

$$(1) \quad M(r, t) = 4\pi \int_0^a c(r, t) r^2 dr.$$

Fra tidligere har vi

$$c(r, t) \simeq \int_0^t c_0(t - \tau) F(r, \tau) d\tau$$

Anvendes dette i forbindelse med (1), og husker vi, at man kun kan foretage målinger ud til  $r'$  fås

$$4\pi \int_0^{r'} r^2 c(r, t) dr = 4\pi \int_0^{r'} r^2 \int_0^t c_0(t - \tau) F(r, \tau) d\tau dr$$

eller

$$(2) \quad \int_0^{r'} r^2 c(r, t) dr = \int_0^t c_0(t - \tau) \int_0^{r'} r^2 F(r, \tau) dr d\tau$$

Vi har her tilladt os at ombytte integralerne på højresiden, da integrationsgrænserne er kontinuerte funktioner med øvre grænse større end nedre grænse i de åbne intervaller, og da funktionen under integraltegnet er kontinuert (Jensen, 1984).

For at udregne det inderste integral, foretager vi en laplacetransformation, og får

$$(3) \quad \begin{aligned} L \left\{ \int_0^{r'} r^2 F(r, \tau) dr \right\} &= \int_0^\infty e^{-s\tau} \int_0^{r'} r^2 F(r, \tau) dr d\tau \\ &= \int_0^{r'} r^2 \int_0^\infty e^{-s\tau} F(r, \tau) d\tau dr \\ &= \int_0^{r'} r^2 \tilde{F}(r, s) dr \end{aligned}$$

Her er  $\tilde{F}(r, s)$  den laplacetransformerede af  $F(r, \tau)$  mht.  $\tau$ . Denne har vi tidligere i rapporten udledt til at være givet ved

$$\tilde{F}(r, s) = \frac{a \cdot P / r \cdot \sqrt{D} \cdot \sinh(r \cdot \sqrt{\frac{s}{D}})}{\lambda \cdot \sinh(a \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) + \sqrt{D} \cdot \cosh(a \cdot \sqrt{\frac{s}{D}})}$$

Indsættes dette i (3) får vi

$$(4) \quad \begin{aligned} &\frac{a \cdot P}{\sqrt{D}} \cdot \int_0^{r'} r \cdot \sinh(r \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) dr = \\ &\frac{a \cdot P}{\sqrt{D}} \left[ r \cdot \sqrt{\frac{D}{s}} \cdot \cosh(r \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) - \frac{D}{s} \sinh(r \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) \right]_0^{r'} = \\ &\frac{a \cdot P}{\sqrt{D}} \cdot \left( r' \sqrt{\frac{D}{s}} \cdot \cosh(r' \sqrt{\frac{s}{D}}) - \frac{D}{s} \cdot \sinh(r' \sqrt{\frac{s}{D}}) \right) \\ &\frac{a \cdot P}{\sqrt{D}} \cdot \left( r' \sqrt{\frac{D}{s}} \cdot \cosh(r' \sqrt{\frac{s}{D}}) - \frac{D}{s} \cdot \sinh(r' \sqrt{\frac{s}{D}}) \right) \\ &\lambda \cdot \sinh(a \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) + \sqrt{D} \cdot \cosh(a \cdot \sqrt{\frac{s}{D}}) \end{aligned}$$

Vi vil nu reducere lidt på ovenstående udtryk, og ser i denne sammenhæng først på leddene :

$$\lambda \sinh \left( a \sqrt{\frac{s}{D}} \right) + \sqrt{s} \cosh \left( a \sqrt{\frac{s}{D}} \right),$$

hvor  $\lambda$  er givet ved  $\frac{P}{\sqrt{D}} + \frac{\sqrt{D}}{a}$  og har størrelsesordenen  $10^{-3} \text{sec}^{-\frac{1}{2}}$ . Da

$$\sinh x < \cosh x \quad \forall x \in R$$

vil det første led derfor være mindst 100 gange mindre end det andet led, blot  $s \geq 0.1 \text{sek}^{-1}$ . For store  $s$  kan vi derfor se bort fra det f led.

Vi ser nu på det tilbageblevne led

$$\sqrt{s} \cosh \left( a \sqrt{\frac{s}{D}} \right) = \frac{\sqrt{s}}{2} (e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}})$$

Vi vil igen foretage en lille reduktion. Vi antager at det sidste led kan slettes, og ser på hvornår  $\frac{\sqrt{s}}{2} e^{(a\sqrt{\frac{s}{D}})}$  er 100 gange større end  $\frac{\sqrt{s}}{2} e^{(-a\sqrt{\frac{s}{D}})}$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ 100 \cdot e^{(-a\sqrt{\frac{s}{D}})} &= e^{(a\sqrt{\frac{s}{D}})} \\ & \Downarrow \\ \ln(100) - a\sqrt{\frac{s}{D}} &= a\sqrt{\frac{s}{D}} \\ & \Downarrow \\ \sqrt{\frac{s}{D}} &= \frac{\ln(100)}{2a} \simeq 2 \text{cm}^{-1} \\ & \Downarrow \\ s &\simeq 4 \cdot 10^{-6} \text{sec}^{-1} \end{aligned}$$

hvor  $a = 1.2 \text{cm}$  og  $D = 6 \cdot 10^{-6} \text{cm}^2/\text{sek}$ . Dermed har vi, at hvis  $s > 4 \cdot 10^{-6}$ , er det sidste led  $\frac{\sqrt{s}}{2} e^{(-a\sqrt{\frac{s}{D}})}$  mindst 100 gange mindre end det første led.

Omskrives  $\sinh$  og  $\cosh$  i tælleren i (4) til en sum af eksponentialfunktioner, og anvendes det sidste argument for at reducere  $e^{(a\sqrt{\frac{s}{D}})} + e^{(-a\sqrt{\frac{s}{D}})}$  til  $e^{(a\sqrt{\frac{s}{D}})}$  bliver (4) til

$$\begin{aligned} & \frac{a \cdot P}{\sqrt{sD}} \left( r' \sqrt{\frac{D}{s}} - \frac{D}{s} \right) e^{-(a-r')\sqrt{\frac{s}{D}}} \\ &= \frac{a \cdot P}{s} \left( r' - \sqrt{\frac{D}{s}} \right) e^{-(a-r')\sqrt{\frac{s}{D}}} \end{aligned}$$



Vurderer vi indholdet af parantesen for  $r' \simeq 1$  (dvs. næsten ude ved barrieren) og for store  $s$  er

$$\sqrt{\frac{D}{s}} < \sqrt{D} \simeq 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

Dvs. at vi kan se bort fra  $\sqrt{\frac{D}{s}}$  og får

$$a \cdot p \cdot r' \cdot \frac{e^{-(a-r')\sqrt{s}}}{s}$$

Dette kan vi nu transformere tilbage med hjælp fra følgende formel

$$\mathcal{L}\left\{\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

og får herefter

$$aPr' \cdot \text{erfc}\left(\frac{a-r'}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Dvs. vi har at

$$\int_0^{r'} r^2 F(r,t) dr \simeq aPr' \text{erfc}\left(\frac{a-r'}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

og (2) bliver så

$$\int_0^{r'} r^2 C(r,t) dr \simeq a \cdot p \cdot r' \int_0^t c_0(t-\tau) \text{erfc}\left(\frac{a-r'}{2\sqrt{D\tau}}\right) d\tau$$

Vi kan nu opstille et udtryk for permeabiliteten  $P$  som følger

$$(5) \quad P \simeq \frac{\int_0^{r'} r^2 C(r,t) dr}{a \cdot r' \int_0^t c_0(t-\tau) \text{erfc}\left(\frac{a-r'}{2\sqrt{D\tau}}\right) d\tau}$$

Imidlertid er denne formel, som det fremgår ikke eksakt, og vi vil derfor med udgangspunkt i (5), i næste afsnit nærmere beskrive, hvorledes  $P$  bestemmes i praksis.

## 5.2 PERMEABILITETSBESTEMMELSE I PRAKSIS.

Udgangspunktet for det konkrete arbejde, hvori modellen indgår, er at man har en række målinger af koncentrationer i blodet  $c_0(t)$ , og en række målinger af koncentrationer i øjet  $c_m(r, t)$ . Desuden har man formlerne for beregning af  $c(r, t)$  (udfra kendt  $P$  og  $D$ ) og af  $P$  (udfra kendte værdier af  $c(r, t)$ ,  $c_0(t)$  og  $D$ ).

Da disse formler imidlertid ikke er eksakte, og da man ikke kender en eksakt formel (funktion) for  $c_0(t)$ , vil det normalt ikke være muligt at bestemme  $P$  og  $D$ , så  $c(r, t)$  og  $c_m(r, t)$  passer helt overens. Opgaven bliver derfor at bestemme  $P$  og  $D$ , så der bliver bedst mulig overensstemmelse imellem de beregnede og de målte værdier af koncentrationen.

Til løsningen af det ovenstående problem benyttes mindste-kvadratersmetode, og problemet bliver så at minimere den følgende sum

$$S = \sum_{i=1}^N (c_m(r_i, t) - c(r_i, t, P, D))^2$$

Vi ser, at  $c$  her opfattes som en funktion, ikke bare af  $r$  og  $t$ , men også af  $P$  og  $D$ . Dette skyldes, at det jo gælder om at finde det par  $(P, D)$ , hvor funktionen  $S$  har sit minimum.

Når  $P$  og  $D$  skal findes, benyttes den tidligere fundne formel (5) til bestemmelse af  $P$  til at give et udgangspunkt for værdien af  $P$ , og derefter benyttes Marquardt's algoritme til at minimere  $S$ . Vi vil ikke her komme nærmere ind på Marquardt's algoritme, men kan henvise interesserede læsere til (Madsen, 1979), hvor algoritmen er beskrevet.

## 5.3 ENTYDIGHED AF DEN FUNDNE PERMEABILITET.

Vi vil i dette afsnit kort vise, at den værdi der kan bestemmes for  $P$ , ved minimering af summen  $S$  i foregående afsnit, er entydig. Problemstillingen forenkles lidt ved at antage, at  $D$  er kendt.

$S$  er givet ved

$$S = \sum_{i=1}^N (c_m(r_i, t) - c(r_i, t, P, D))^2$$

For det  $P$ , hvor  $S$  er mindst, må der gælde, at den partielle afledede er nul, dvs.

$$\frac{\partial S}{\partial P} = -2 \sum_{i=1}^N ((c_m(r_i, t) - c(r_i, t, P, D)) \frac{\partial c}{\partial P}(r_i, t, P, D)) = 0$$

Idet vi som nævnt forenkler problemstillingen ved at antage,  $D$  er kendt, vil vi bestemme  $P$ , ved at benytte en tilnærmet udgave af randbetingelsen

$$D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=a} = P(c_0(t) - c(a, t))$$

som bliver til

$$D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=a} = P c_0(t)$$

da  $c(r, t)$  er væsentlig mindre end  $c_0(t)$  i det tidsinterval vi ser på.

Vi har tidligere i rapporten opnået følgende udtryk for  $c(r, t)$

$$c(r, t) = \int_0^t c_0(t - \tau) F(r, \tau) d\tau$$

hvor den laplacetransformerede af  $F(r, t)$  er givet ved

$$\bar{F}(r, s) = \frac{\frac{aP}{r\sqrt{D}} \sinh r \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)}}{\lambda \sinh a \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)} + \sqrt{s} \cosh a \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)}}$$

Vi har desuden argumenteret for, at der i udtrykket for  $\bar{F}(r, s)$  kan ses bort fra  $\lambda$ . Gøres dette, vil  $P$  kun indgå i tælleren i ovenstående udtryk, og  $P$  kan derfor sættes udenfor integraltegnet i ovenstående udtryk for  $c(r, t)$ . På denne baggrund kan vi sige, at  $c(r, t)$  er proportional med en funktion  $c_1(r, t)$ , hvor proportionalitetsfaktoren er  $P$ , dvs.

$$c(r, t, P) = P c_1(r, t)$$

Når dette og den afledede

indsættes i  $\frac{\partial S}{\partial P}$  får vi

$$\frac{\partial S}{\partial P} = -2 \sum_{i=1}^N (c_m(r_i, t) - P c_1(r_i, t)) c_1(r_i, t) = 0$$

Vi kan herefter bestemme  $P$  ved

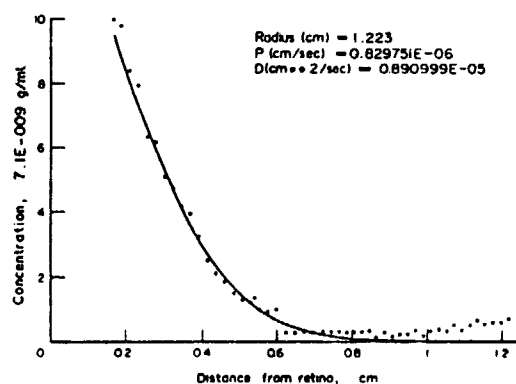
$$P = \frac{\sum_{i=1}^N c_1(r_i, t) c_m(r_i, t)}{\sum_{i=1}^N c_1(r_i, t)^2}$$

Af dette ser man, at der med forbehold for den foretagne forenkling, der ligger i at regne  $D$  som kendt, altid vil findes netop én værdi for  $P$ , uanset værdierne af  $c_m(r, t)$  og  $c_0(t)$ .

## 6. Vurdering af den kuglesymmetriske model.

I dette kapitel vil vi foretage en vurdering af de af koncentrationsværdier den kuglesymmetriske model giver, i forhold til de eksperimentelle målinger af koncentrationen af fluorescein inde i øjet.

Den opstillede model giver koncentrationsværdier, der aftager hele vejen ind til centrum af øjet, hvorimod nogle af de eksperimentelle værdier afviger fra dette forløb.



Figur 1. De beregnede koncentrationsværdier kontra de målte.

Som det ses af figur 1, er det især forholdene inde ved centrum der afviger. De eksperimentelle data giver her en graf, der er nedad buet.

Vi vil i det følgende foretage nogle beregninger, der skal belyse det ovennævnte forhold, samt af hensyn til de steder hvor den simple randbetingelse er benyttet, vurdere om den er rimelig, dvs. om der netto kan finde en udstrømning sted.

Først vil vi vurdere løsningen til diffusionsligningen i en omegn af  $r = 0$ . Vi vil undersøge om det er muligt, at løsningen med en bestemt kombination af  $P$  og  $D$ , vil kunne gøre grafen nedad hult i en omegn af øjets centrum. Til dette formål vil vi bestemme et udtryk for  $\partial^2 c(r, t) / \partial r^2$  for  $r \rightarrow 0$ . Hvis  $c(r, t)$  skal kunne være nedad hult, dvs. have et lokalt maximum, i en omegn af  $r = 0$ , skal der gælde at

$$\frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial r^2} < 0$$

i denne omegn.

Vi betragter den laplacetransformerede diffusionsligning

$$\frac{d^2 \tilde{c}}{dr^2}(r, s) + \frac{2}{r} \frac{d\tilde{c}}{dr}(r, s) = \frac{s}{D} \tilde{c}(r, s)$$

⇕

$$(1) \quad \frac{d^2 \tilde{c}}{dr^2}(r, s) = \frac{s}{D} \tilde{c}(r, s) - \frac{2}{r} \frac{d\tilde{c}}{dr}(r, s)$$

Vi bestemmer grænseværdien for  $d^2 \tilde{c}(r, s) / dr^2$  ved at bestemme grænseværdien for højresiden i (1).

Vi har tidligere i rapporten fundet frem til at løsningen til (1) har formen

$$(2) \quad \tilde{c}(r, s) = A(s) \frac{\sinh(r \sqrt{\frac{s}{D}})}{r}$$

Vi bemærker, at  $\tilde{c}(r, s)$  har en singularitet i  $r = 0$ . Grænseværdien for  $\tilde{c}(r, s)$  for  $r \rightarrow 0$  bestemmes vha. rækkeudvikling. Ved at benytte rækkeudviklingen for  $\sinh x$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ser vi, at

$$\frac{\sinh x}{x} \rightarrow 1 \text{ for } x \rightarrow 0,$$

og benyttes dette i kombination med at multiplicere med  $\sqrt{\frac{s}{D}}$  i tæller og nævner i (2), får vi at

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{c}(r, s) = A(s) \sqrt{\frac{s}{D}}$$

Vi vil nu bestemme  $\frac{d\tilde{c}}{dr}(r, s)\Big|_{r=0}$ . Der gælder at

$$\frac{2}{r} \frac{d\tilde{c}}{dr}(r, s) = \frac{2}{r} A(s) \left( \frac{r\sqrt{\frac{s}{D}} \cosh(r\sqrt{\frac{s}{D}}) - \sinh(r\sqrt{\frac{s}{D}})}{r^2} \right)$$

Ved at benytte rækkeudviklingen for  $\sinh x$  og  $\cosh x$ , hvor sidstnævnte rækkeudvikles som

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

fås

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \frac{d\tilde{c}}{dr}(r, s) &= \\ 2A(s) &\left( \frac{r(1 + \frac{1}{2}r^2 \frac{s}{D} + O(r^4))\sqrt{\frac{s}{D}} - (r\sqrt{\frac{s}{D}} + \frac{1}{6}r^3(\sqrt{\frac{s}{D}})^3 + O(r^5))}{r^3} \right) \\ &= 2A(s) \left( \frac{s}{D} \right)^{3/2} - \frac{1}{6} \left( \frac{s}{D} \right)^{3/2} + O(r^2) \\ (4) \quad &= \frac{2}{3} A(s) \left( \frac{s}{D} \right)^{3/2} + O(r^2) \end{aligned}$$

Vi kan nu udtrykke  $\frac{d^2\tilde{c}}{dr^2}(r, s)\Big|_{r=0}$ , ved at indsætte (3) og (4) i (1), og får herved

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{c}}{dr^2}(r, s)\Big|_{r=0} &= \frac{s}{D} A(s) \sqrt{\frac{s}{D}} - \frac{2}{3} A(s) \left( \frac{s}{D} \right)^{3/2} \\ &= A(s) \sqrt{\frac{s}{D}} \left( \frac{s}{D} - \frac{2}{3} \frac{s}{D} \right) \\ &= \left( A(s) \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \frac{1}{3} \frac{s}{D} \\ &= \tilde{c}(r, s)\Big|_{r=0} \frac{1}{3} \frac{s}{D} \end{aligned}$$

Ved at transformere tilbage fra laplaceplanen fås

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}(r, t)\Big|_{r=0} = \frac{1}{3D} \frac{\partial c}{\partial t}(r, t)\Big|_{r=0}$$

I de tider vi betragter er  $\frac{\partial c}{\partial t}(r, t)|_{r=0} \geq 0$ , da koncentrationen i centrum af øjet stiger i disse tidsrum, og ialt kan vi derfor konkludere at

$$(5) \quad \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}(r, t)|_{r=0} \geq 0$$

Dette resultat betyder, at modellen kun kan beskrive situationer hvor grafen for  $c(r, t)$  i  $r = 0$  er opad hult, og ikke som nogle af de eksperimentelle værdier indikerer nedad hult. Hvis der ikke er fejl i de eksperimentelle målinger, må vi på denne baggrund antage, at modellen ikke beskriver virkeligheden godt nok, og derfor må tages op til revision.

Vi vil nu se på om det er korrekt at benytte den simple randbetingelse (6), således som det sker enkelte steder i rapporten.

$$(6) \quad \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{P}{D} c_0(t)$$

Forskellen på den simple randbetingelse og den mere korrekte almindeligt brugte, er at der i den simple, ikke regnes med nogen nettoudstrømning fra øjet til de tider vi betragter. Betingelsen for at bruge denne forsimpning er at  $c(a, t) \ll c_0(t)$ .

Det er ikke muligt at aflæse om denne betingelse er opfyldt udfra de eksperimentelle data, da koncentrationen kun kan måles ud til en vis afstand fra randen, og vi må derfor nøjes med at vurdere korrektheden udfra de beregnede koncentrationsværdier.

I talsættene fra den asymptotiske løsning, såvel som fra separationsløsningen, fås koncentrationer ved randen på ca.  $2.0 \cdot 10^{-7}$ , mens koncentrationen i blodbanen ikke kommer under  $1.5 \cdot 10^{-6}$  for  $t \leq 7200$  sec. Der er således mindst en faktor 8 til forskel, og vi mener derfor at så længe man holder sig til de små tider  $t \leq 7200$  sec, er det i orden at benytte den simple randbetingelse.



## 7 Den Rotationssymmetriske Model

Vi skal i dette kapitel opstille en differentiaalligningsmodel, der beskriver permeabilitets- og diffusionsforholdene i øjet, i en rotationssymmetrisk geometri. Først vil vi imidlertid beskrive baggrunden for, og geometrien i denne model.

### 7.1 BAGGRUND OG GEOMETRI

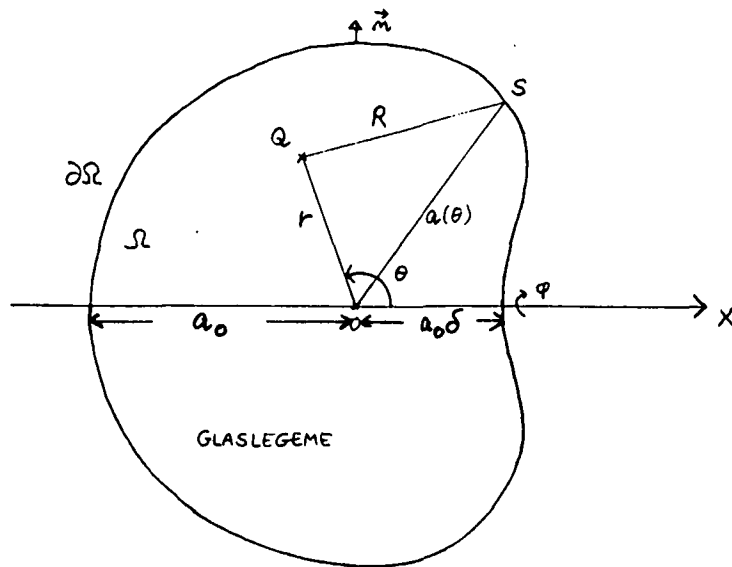
#### Baggrund.

I den model vi tidligere har beskrevet, opfattedes øjet som kuglesymmetrisk. Det var derfor ikke muligt, indenfor modellens rammer, at beskrive den deformation af glaslegemet (i forhold til det kuglesymmetriske) som linsen giver, eller at beskrive de ændrede permeabilitetsforhold, der eksisterer i og omkring linsen. I den rotationssymmetriske model søger vi, at indflette disse to forhold i vores model, ved at tillade, at geometri og permeabilitet varierer i retningen fra for til bag i øjet, men ikke i et snit vinkelret på øjets geometriske akse.

Vi går altså fra en kuglesymmetrisk til en rotationssymmetrisk model af øjet. Dermed er også sagt, at vores model ikke tillader en fuldstændig fri beskrivelse af forholdene i øjet. Der er specielt de følgende 2 begrænsninger: for det første kan afvigelser fra det rotationssymmetriske i permeabilitet og geometri, i snittet vinkelret på øjets akse ikke beskrives, og for det andet regner vi stadig diffusionskoefficienten for konstant. Vi mener imidlertid ikke at der er nogen af de ovennævnte forhold, der afviger fra vores rotationssymmetriske model i en sådan grad, at det vil give anledning til fejl af betydning.

Hvad den første indskrænkning angår, mener vi at afvigelserne i øjet fra det rotationssymmetriske er så små og det ekstra arbejde i at udvide modellen til en tre-dimensionel model af øjet så stort, at der ikke ville være noget rimeligt forhold mellem gevinsten og besværet. Hvad den anden indskrænkning angår mener vi, at det er korrekt under normale omstændigheder at betragte diffusionskoefficienten som konstant. Ikke mindst fordi glaslegemet har en homogen struktur.

#### Geometri.



Figur 1. Øjets geometri.

Til brug for opstillingen af differentiaalligningsmodellen, og dens senere omformning til en integralligning, vil vi nu beskrive den geometri, og de benævnelser der bruges.

På figur 1 kan man se et snit gennem glaslegemet, med de betegnelser der bruges.

Som man ser bruger vi kuglekoordinater :  $r$  er afstanden fra origo  $O$ ,  $\theta$  er vinklen langs aksens, og  $\varphi$  er vinklen om aksens.

Glaslegemet betegnes i det følgende med  $\Omega$ , og randen betegnes med  $\partial\Omega$ . Et punkt i glaslegemet kaldes  $Q$ , mens et punkt på randen benævnes  $S$ .

Afstanden fra centrum til randen  $|OS|$  er nu ikke længere konstant, men afhænger af  $\theta$ . Denne afstand betegnes  $a(\theta)$ . Et punkt  $S \in \partial\Omega$ , kan derfor skrives  $S(a(\theta), \theta, \varphi)$ . Afstanden fra centrum til det bagerste punkt i øjet  $|OS(a(\pi), \pi, 0)|$  kaldes  $a_0$ , mens afstanden langs aksens, fra centrum til linsen  $|OS(a(0), 0, 0)|$  kaldes  $\delta a_0$ . Her er  $\delta$  et udtryk for "sammepresningen" på grund af linsen :

$$\delta = \frac{|OS(a(0), 0, 0)|}{|OS(a(\pi), \pi, 0)|}$$

Til at beskrive de punkter som ligger på aksens, benyttes  $X$ .

Endelig benytter vi  $R$  til at betegne  $|QS|$ , dvs. afstanden fra et punkt i øjet, til et punkt på randen, og  $\vec{n}$  til at betegne den udadrettede normalvektor på randen  $\partial\Omega$ .

## 7.2 OPSTILLING AF LIGNINGERNE.

Vi vil nu, med udgangspunkt i ligningerne for den kuglesymmetriske model, opstille det differentilligningssystem, som beskriver den rotationssymmetriske model.

Først og fremmest har vi stadig diffusionsligningen, omend nu i den mere generaliserede udgave :

$$(1) \quad \frac{\partial c(Q, t)}{\partial t} = D \nabla^2 c(Q, t) \quad Q \in \Omega$$

Hvor  $c$ 's afhængighed af  $Q$ , er af  $Q$ 's koordinater.

Koncentrationen af fluorescein i øjet før injektion, dvs. til tiden  $t = 0$ , er igen nul :

$$(2) \quad c(Q, 0) = 0 \quad Q \in \Omega$$

Ligningen der beskriver diffusion over en barriere ændres også på grund af den nye geometri til det mere generelle :

$$-D \frac{\partial c(Q, t)}{\partial n} = P(\theta) \cdot (c(Q, t) - c_0(t)) \quad Q \in \partial\Omega$$

jvnf. (Crank, 1975, s. 9). Her er  $\partial c(Q, t)/\partial n$  den normalafledede. For de tider vi betragter, gælder der som flere gange tidligere set  $c(Q, t) \ll c_0(t)$ , og vi tillader os derfor at forenkler det ovenstående til :

$$(3) \quad D \frac{\partial c(Q, t)}{\partial n} \Big|_{Q \in \partial\Omega} = P(\theta) \cdot c_0(t)$$

Den sidste ligning vi brugte til at beskrive det kuglesymmetriske tilfælde med :

$$\frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

gælder ikke altid i den ny rotationssymmetriske model, da den symmetri der lå bag ligningen, kun er tilstede i nogle få tilfælde. Et sådant specialtilfælde er den kuglesymmetriske model.

Sammenfattende har vi altså de følgende 3 ligninger, der beskriver vores problem :

$$(1) \quad \frac{\partial c(Q, t)}{\partial t} = D \nabla^2 c(Q, t) \quad Q \in \Omega$$

$$(2) \quad c(Q, 0) = 0 \quad Q \in \Omega$$

$$(3) \quad D \left. \frac{\partial c(Q, t)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q \in \partial \Omega} = P(\theta) \cdot c_0(t)$$

### 7.3 OMFORMNING TIL INTEGRALLIGNINGER

Vi viser nu hvorledes (1) - (3) kan omformes til de integralligninger, udfra hvilke den videre analyse vil foregå.

Først laplacetransformerer vi (1) - (3). For (1) får vi :

$$L \left\{ \frac{\partial c(Q, t)}{\partial t} \right\} = s \cdot L\{c(Q, t)\} - c(Q, 0) = s \cdot \tilde{c}(Q, s)$$

jvnf (2), og idet integration og differentiationen kan ombyttes :

$$L\{D \nabla^2 c(Q, t)\} = D \int_0^\infty e^{-st} \nabla^2 c(Q, t) dt = D \nabla^2 \tilde{c}(Q, s)$$

Sammenlagt bliver (1) så til :

$$\begin{aligned} s \cdot \tilde{c}(Q, s) &= D \nabla^2 \tilde{c}(Q, s) \\ \Downarrow \\ (4) \quad \left( \nabla^2 - \frac{s}{D} \right) \tilde{c}(Q, s) &= 0 \end{aligned}$$

For (3) finder man :

$$\begin{aligned} L \left\{ D \cdot \left. \frac{\partial c(Q, t)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q \in \partial \Omega} \right\} &= D \cdot L \left\{ \left. \frac{\partial c(Q, t)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q \in \partial \Omega} \right\} \\ &= D \cdot \left. \frac{\partial \tilde{c}(Q, s)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q \in \partial \Omega} \end{aligned}$$

og

$$L\{P(\theta) \cdot c_0(t)\} = P(\theta) \cdot L\{c_0(t)\} = P(\theta) \cdot \check{c}_0(s)$$

og dermed bliver (3) :

$$(5) \quad D \cdot \frac{\partial \check{c}(Q, s)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{Q \in \partial \Omega} = P(\theta) \cdot \check{c}_0(s)$$

### Fundamentalløsningen.

En fundamentalløsning for  $R \neq 0$  til (4), er givet ved det følgende (jvnf. (Kanwal, 1971)) :

$$(6) \quad \check{E} = \frac{e^{-\sqrt{s/D}R}}{R}$$

hvor  $R$  som før nævnt er  $|QS|$  (her behøver  $S$  ikke at ligge på randen).

Grunden til at vi danner en fundamentalløsning afhængig af  $|QS|$ , er at (6) senere vil indgå i et fladeintegral over hele randen.

Vi vil nu vise at (6) vitterligt er en løsning til (4) for  $R \neq 0$ . Til det formål vælger vi et midlertidigt koordinatsystem med centrum i  $Q$  (dvs.  $R = 0$ ).

Koordinatskiftet ser i rektangulære koordinater således ud :

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c$$

og man ser heraf at (4) ikke ændres da :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x'} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial x'^2},$$

Idet (6) kun afhænger af afstanden  $R = |QS|$ , har vi med det nye koordinatsystem, en kuglesymmetrisk løsning, og (4) kan så skrives som :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \check{c}(R, s)}{\partial R} \right) = \frac{s}{D} \check{c}(R, s)$$

Indsættes (6) i venstresiden får vi for  $R \neq 0$  :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R^2 \cdot \left( -\sqrt{\frac{s}{D}} R e^{-\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot R} - e^{-\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot R} \right)}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left( \sqrt{\frac{s}{D}} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot R} \left( \sqrt{\frac{s}{D}} R - 1 \right) + \sqrt{\frac{s}{D}} e^{\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot R} \right) \\ &= \frac{\frac{s}{D} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}} \cdot R}}{R} \end{aligned}$$

Vi ser altså at (6) tilfredsstillere (4).

Nu danner vi integralet (Igen jvnf. (Kanwal,1971)) :

$$(9) \quad \bar{c}(Q) = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \cdot \bar{E}(|Q S|) dS$$

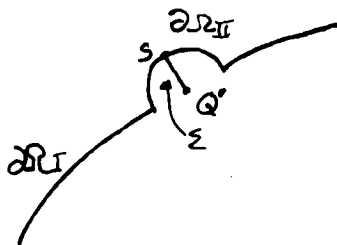
og undersøger om det tilfredsstillere vores differentialligninger (4) og (5), samt hvilke betingelser der måtte være derfor.

Først kigger vi på om (9) tilfredsstillere (4), såfremt  $Q$  ikke ligger på randen.

Da punkterne  $Q$  og  $S$  varierer uafhængigt af hinanden, kan man ombytte integration og differentiation, og man får :

$$\left(\nabla^2 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \bar{E}(|QS|) dS = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \left(\nabla^2 \bar{E}(|QS|) - \frac{\varepsilon}{D} \bar{E}(|QS|)\right) dS = 0$$

Dernæst ser vi på om (9) tilfredsstillere (4), hvis  $Q \in \partial\Omega$ . Først undersøger vi om (9) overhovedet gælder, når  $Q \in \partial\Omega$ . Vi viser dette ved at lade  $Q'$  være et punkt på randen, samt ved, rundt om  $Q'$ , at tilføje randen en halvkugle  $\partial\Omega_{II}$  med radius  $\varepsilon$  (figur 2). Randen  $\partial\Omega$  består nu af  $\partial\Omega_I$  og  $\partial\Omega_{II}$ .



Figur 2. Randen om  $Q'$ .

(9) kan så skrives

$$(10) \quad \tilde{c}(Q') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_I} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS + \int_{\partial\Omega_{II}} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS \right\}$$

I det sidste led er  $|Q' S| = \varepsilon$ , og overfladearealet af halvkuglen er  $2\pi\varepsilon^2$ . Da  $\varepsilon$  er infinitesimalt lille, regnes  $\tilde{\sigma}(S)$  for konstant lig  $\tilde{\sigma}(Q')$ , og vi får så :

$$\int_{\partial\Omega_{II}} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS = \tilde{\sigma}(Q') \frac{e^{-\sqrt{s/D}\varepsilon}}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$$

og (10) bliver til :

$$\begin{aligned} \tilde{c}(Q') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_I} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS + \tilde{\sigma}(Q') e^{-\sqrt{s/D}\varepsilon} 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS \end{aligned}$$

Vi ser altså at (9) gælder, og dermed at (4) er opfyldt.

Nu mangler vi kun at se på om (9) opfylder (5), og beregner

$$\left. \frac{\partial \tilde{c}(Q', s)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q' \in \partial\Omega}$$

ved hjælp af det samme trick som før :

$$\left. \frac{\partial \tilde{c}(Q', s)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q' \in \partial\Omega} =$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_I} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS + \int_{\partial\Omega_{II}} \tilde{\sigma}(S) \cdot \tilde{E}(|Q' S|) dS \right\} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_I} \tilde{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS + \int_{\partial\Omega_{II}} \tilde{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS \right\} \end{aligned}$$

I det andet led vil  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|)$  svare til at differentiere efter  $\overline{Q' S}$ , da der er tale om en kugleskal, og det bliver så :

$$\left. \frac{\partial c(Q', t)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{Q' \in \partial\Omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial\Omega_I} \tilde{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\sigma}(Q') \frac{\varepsilon \left( -\sqrt{\frac{s}{D}} \right) e^{-\sqrt{s/D}\varepsilon} - e^{-\sqrt{s/D}\varepsilon}}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon^2 \} + O(\varepsilon^2) \\
(11) \quad & = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS - 2\pi\bar{\sigma}(Q')
\end{aligned}$$

Fra (5) og (11) får man så :

$$P(\theta)\tilde{c}_0(s) = -D \left( 2\pi\bar{\sigma}(Q) + \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q S|) dS \right)$$

Hvis  $P(\theta)$  og  $\tilde{c}_0(s)$  er kendte, kan  $\bar{\sigma}(Q)$  findes :

$$(12) \quad \bar{\sigma}(Q) = -\frac{1}{2\pi} \frac{P(\theta)}{D} \tilde{c}_0(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q S|) dS$$

(12) kaldes en Fredholm integralligning af 2. art.

Eksistens og entydighed for en sådan ligning er givet ved nedstående sætning, Fredholms sætning ( Hansen, 1971 ) :

*Ved en Fredholm integralligning af 2.art er der følgende muligheder : Enten har ligningen altid (dvs. for enhver værdi af inhomogeniteten) netop en løsning, eller den tilsvarende homogene ligning*

$$\bar{\sigma}(Q') = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS$$

*har et endeligt antal lineært uafhængige løsninger  $y_1, y_2, \dots, y_p$ . I det sidste tilfælde har den adjungerede ligning*

$$\bar{\sigma}(Q') = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S)^* \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{E}(|Q' S|) dS$$

*også  $p$  lineært uafhængige løsninger  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . Her gælder at hvis  $(z_k, f) \neq 0$  for mindst et  $k$ , har ligningen (12) ingen løsning, hvor  $f$  er det inhomogene led. Er  $(z_k, f) = 0$  for alle  $k$ , har ligning (12) uendelig mange løsninger. Hvis  $y_0$  er en af disse, er den fuldstændige løsning :*

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^p a_k y_k$$

*hvor  $a_k$  er vilkårlige konstanter. Suppleres ligningen med bestemmelsen  $(z_k, y) = 0$  for alle  $k$ , findes der kun en løsning.*

Det er således ligetil at undersøge det direkte problem, dvs. at bestemme  $\tilde{c}(Q, s)$  når  $P(\theta)$  og  $\tilde{c}_0(s)$  er kendt. idet  $\bar{\sigma}(S)$  findes af (12), hvorefter  $\tilde{c}(Q, s)$  kan beregnes af (9).



I det rotationssymmetriske tilfælde gælder, som i det kuglesymmetriske tilfælde, at det virkelige problem ikke er at finde  $\tilde{c}(Q)$  når  $P(\theta)$  og  $\tilde{c}_0(s)$  er kendt, men at bestemme  $P(\theta)$ , når  $\tilde{c}_0(s)$  og  $\tilde{c}(Q)$  er kendt i en form af en række målinger.

$P(\theta)$  kunne findes af (12), hvis  $\tilde{\sigma}(S)$  var kendt. Opgaven bliver derfor først at bestemme  $\tilde{\sigma}(S)$ . Dette kan gøres udfra (9). Da  $\tilde{c}(Q)$  kun er kendt langs øjets optiske akse, omskrives (9) til at beskrive netop dette tilfælde. Denne (forholdsvis trivielle) omskrivning er gennemgået i Appendix VI, og ender op med :

$$(13) \quad \tilde{c}(x) = \int_0^\pi \tilde{\sigma}(\theta) \cdot K(x, \theta) d\theta$$

hvor

$$(14) \quad K(x, \theta) = \tilde{E} \left( \sqrt{x^2 + a(\theta)^2 - 2xa(\theta) \cos \theta} \right) \\ 2\pi a(\theta) \sin \theta \sqrt{a(\theta)^2 + \left( \frac{da}{d\theta} \right)^2}$$

Her er  $x$  koordinaten for  $X$  på  $x$ -aksen regnet med fortegn.

(13) er en såkaldt Fredholm integralligning af 1. art. En sådan har desværre ikke de samme behagelige egenskaber hvad angår eksistens og entydighed, som en Fredholm integralligning af 2. art.

## 8 En numerisk metode til analyse af en Fredholm integralligning af 1.art

I forrige kapitel fik vi opstillet en Fredholm integralligning af 1.art, der har formen

$$(1) \quad \int_{I_z} K(t, z)f(z)dz = g(t), \quad t \in I_t, z \in I_z,$$

hvor kernen  $K(t, z)$  og højresiden  $g(t)$  er kendte funktioner og  $f(z)$  er ukendt. Vi er interesserede i at kunne udtale os om løsningen til denne ligning, men som vi har skrevet tidligere, har ligningen nogle ubehagelige egenskaber såsom, at løsningen måske ikke er entydig, eller måske slet ikke eksisterer.

Vi vil i dette kapitel beskrive en metode vha. hvilken, man kan undersøge en Fredholm integralligning af 1. art (altså også vores) analytisk, bl.a. mht. eksistens og entydighed af en løsning til ligningen. Denne metode kaldes SVE (eng. Singular Value Expansion), og består i at rækkeudvikle kernen  $K(t, z)$  vha. værdier kaldet singulære værdier, og nogle funktioner kaldet højre- og venstre- singulære funktioner.

SVE er dog sjældent anvendelig i praksis, og man griber derfor ofte til en numerisk approximation af SVE. Vi skal derfor i dette kapitel også se nærmere på en sådan approximation. Denne approximation består i først at transformere det oprindelige problem til et algebraisk problem vha. en metode kaldet MM (eng. Method of Moments), hvorved man opnår et ligningssystem af formen

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{z}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}},$$

hvor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  er en matrix, og  $\underline{\underline{\mathbf{z}}}$  og  $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$  er søjlevektorer.

Efter anvendelsen af MM, analyseres det algebraiske problem vha. en metode kaldet SVD (eng. Singular Value Decomposition), hvor matricen  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  rækkeudvikles vha. af nogle værdier kaldet de singulære værdier, og nogle vektorer kaldet højre- og venstre- singulære vektorer. Der vil så være en sammenhæng mellem de singulære værdier fra henholdsvis SVE og SVD, og mellem de singulære funktioner fra SVE og de singulære vektorer fra SVD.

Fremstillingen af SVE, MM og SVD i dette kapitel bygger på (Hansen, 1987). Det skal nævnes, at vi i vores fremstilling kun har medtaget de ting, der er nødvendige for at kunne forstå vores resultater. Der er således ikke tale om nogen fuldstændig beskrivelse af ovennævnte metoder. Hvis læseren ønsker en sådan fremstilling, kan vi henvise til ovennævnte reference, samt til (Baker, 1977), (Stoer og Bulirsch, 1980) og (Dongarra et al., 1979), hvor SVD er nærmere beskrevet.

### 8.1 RÆKKEUDVIKLING AF KERNEN EFTER DE SINGULÆRE VÆRDIER (SVE)

En SVE af en kerne  $K(t,z)$  er givet ved

$$(2) \quad K(t, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(t) v_i(z), t \in I_t, z \in I_z,$$

hvor  $\mu_i$ 'erne kaldes de singulære værdier, og  $u_i(t)$ 'erne og  $v_i(z)$ 'erne kaldes henholdsvis venste og højre singulære funktioner. Det skal bemærkes, at ovennævnte notation afviger fra den gængse skrivemåde, hvor der på  $\mu_i$ 's plads plejer at stå  $\mu_i^{-1}$ . Ovenstående notation stammer fra (Hansen, 1987), og er benyttet for at få sammenhængen mellem SVE og SVD til at træde tydeligere frem.

#### Kvadratisk integrabel.

Nu er det imidlertid ikke alle kerner, der har en SVE. For at kunne karakterisere en mængde af kerner, som har en SVE, indfører vi begrebet kvadratisk integrabel. En kerne siges at være kvadratisk integrabel, hvis normen af  $K$  givet ved

$$\|K\| = \sqrt{\int_{I_t} \int_{I_z} |K(t, z)|^2 dz dt}.$$

eksisterer, og  $K$  tilfredsstiller

$$\int_{I_t} |K(t, z)|^2 dt < \infty, \int_{I_z} |K(t, z)|^2 dz < \infty$$

Vi kan nu karakterisere den ovennævnte mængde, idet der gælder, at hvis en kerne er kvadratisk integrabel, så har den en SVE.

## Egenskaber ved de singulære værdier og de singulære funktioner.

Der kan hæftes en række egenskaber på de singulære værdier og funktioner, og vi vil angive nogle af de vigtigste her

a)  $\mu_i$ 'erne er ikke negative værdier, og  $\mu_i$ 'er forskellig fra nul, kan altid ordnes i ikke stigende rækkefølge.

b) Venstre og højre singulær funktioner er ortonormale dvs.

$$(u_i(t), u_j(t)) = \delta_{ij}$$

$$(v_i(z), v_j(z)) = \delta_{ij}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ , hvor  $\delta_{ij} = 1$ , når  $i = j$  og  $\delta_{ij} = 0$ , når  $i \neq j$ .

[( , ) er det indre produkt, og er defineret nærmere senere i dette kapitel]

Endvidere er begge mængder  $\{u_i(t)\}$  og  $\{v_i(z)\}$  fuldstændige.

c) De singulære værdier og funktioner er relateret ved ligningerne

$$\int_{I_z} K(t, z)v_i(z)dz = \mu_i u_i(t)$$

$$\int_{I_t} K(t, z)u_i(t)dt = \mu_i v_i(z)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

(ovenstående eftervises ved indsættelse af (2) på venstresiderne)

d) De Singulære værdier  $\mu_i$  er entydige, og de singulære funktioner svarende til forskellige singulære værdier er entydige på nær multiplikation med en kompleks konstant  $c_i$  af længden 1, dvs.  $\{u_i, v_i\}$  kan erstattes med  $\{c_i u_i, c_i v_i\}$  (at længden af  $c_i$  netop skal være 1 skyldes, at de singulære funktioner er normale).

### Eksistens og entydighed af løsningen til (1).

Med SVE ved hånden, kan vi nu undersøge eksistens og entydighed af løsningen  $f$  til (1). Der Gælder, at hvis (1) har en kvadratisk integrabel løsning  $f$ , så kan denne løsning formelt fremstilles ved

$$(3) \quad f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i v_i(z), \text{ hvor } \xi_i = (v_i, f)$$

At  $f$  skal være kvadratisk integrabel indebærer, at følgende skal gælde

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

Her er  $\|f\|$  normen af  $f$ , defineret ved

$$\|f\| \equiv \sqrt{(f, f)},$$

hvor  $(f, f)$  er det indre produkt defineret ved

$$(f, \phi) = \int_{I_+} f(z)\phi(z)dz.$$

Tilsvarende kan højresiden i (1) udvikles som

$$(4) \quad g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(t), \text{ hvor } \beta_i = (u_i, g)$$

Anvendes nu (1), (3) og (4) samt egenskaberne ved de singulære værdier og funktioner får vi

$$\begin{aligned}
& \int_{I_z} K(t, z) f(z) dz = g(t) \\
& \Downarrow \\
& \int_{I_z} K(t, z) \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i v_i(z)) dz = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(t) \\
& \Downarrow \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \int_{I_z} K(t, z) v_i(z) dz = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(t) \\
& \Downarrow \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mu_i u_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(t) \\
& \Downarrow \\
(5) \quad & \beta_i = \mu_i \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Den sidste biimplikation gælder fordi  $u_i(t)$ 'erne er lineært uafhængige.

Hvis løsningen  $f$  eksisterer, må (3) og (5) tilfredsstilles. Af (5) ser vi, at hvis et  $\mu_i$  er nul skal det tilsvarende  $\beta_i$  være nul.  $\beta_i$ 'erne beregnes ved

$$\beta_i = (u_i, g)$$

Dette betyder, at eksistensen af en løsning  $f$  er betinget af, at højresiden  $g$  har den egenskab, at

$$\beta_i = (u_i, g) = 0 \text{ for alle } \mu_i = 0$$

Denne betingelse på  $g$  kaldes for Picards første betingelse. Hvis Picards første betingelse er opfyldt kan  $f$  udtrykkes ved (3), hvor

$$(6) \quad \xi_i = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\mu_i}, & \text{for } \mu_i \neq 0 \\ \text{vilkårlig,} & \text{for } \mu_i = 0 \end{cases}$$

Forudsat at  $f$  er kvadratisk integrabel, har vi således angivet en gyldig løsning til (1) ved  $f$ . Imidlertid medfører kravet om, at  $f$  skal være kvadratisk integrabel, at der kommer endnu en betingelse på  $g$ , nemlig

$$\sum_{\mu_i \neq 0} |\xi_i|^2 = \sum_{\mu_i \neq 0} \left( \frac{|\beta_i|}{\mu_i} \right)^2 = \sum_{\mu_i \neq 0} \left( \frac{|(u_i, g)|}{\mu_i} \right)^2 < \infty,$$

idet der skal gælde, at

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

Dette betyder, at for at en kvadratisk integrabel løsning skal **eksistere**, skal  $\beta_i$ -koefficienterne betraget som absolutte værdier, aftage hurtigere end de singulære værdier  $\mu_i$ 'erne. Denne betingelse på  $g$  kaldes for Picards anden betingelse. Af (6) ses det, at  $f$  fremstilles **entydig**, hvis og kun hvis alle de singulære værdier  $\mu_i$  er forskellige fra 0, for ellers kan nogle af  $\xi_i$ 'erne vælges vilkårligt. Man kan dog definere en entydig løsning, ved at sætte de vilkårlige komponenter  $\xi_i$  i (6) til 0.

Det kan vises, at rækken af  $\mu_i$ 'er, har nul som dens eneste mulige grænse, når  $i \rightarrow \infty$  (dvs.  $\mu_i \rightarrow 0$  for  $i \rightarrow \infty$ ). Da  $\mu_i \rightarrow 0$  for  $i \rightarrow \infty$ , kan vi på baggrund af (5) udlede, at  $\beta_i$ 'erne må aftage hurtigere end  $\xi_i$ 'erne.

## 8.2 MOMENT METODEN (MM) OG DEKOMPOSITION EFTER DE SINGULÆRE VÆRDIER (SVD)

Med SVE-analysen beskrevet i foregående afsnit, har vi nu et apparat til at analysere integralligningen (1). Imidlertid er metoden som regel umulig at udføre i praksis, fordi SVE sjældent kan bestemmes analytisk.

Istedet for en analytisk bestemmelse, kan man benytte en approximation til SVE, der beregnes numerisk. Dette kan f.eks. gøres ved først at omdanne problemet beskrevet ved (1) til et algebraisk problem

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{b}},$$

vha. "Moment metoden" (MM), og derefter bestemme SVD af  $\underline{\mathbf{A}}$ . Derefter benyttes det, at der er en nøje korrespondance mellem nogle parametre i SVE og SVD. Vi vil i dette afsnit beskrive MM, SVD samt sammenhængen mellem SVE og SVD.

### Moment metoden.

Lad  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  og  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  være ortonormale funktioner i henholdsvis intervallet  $I_t$  og  $I_z$ . MM består så i at omdanne (1) til et algebraisk system

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{z}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}},$$

hvor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in R^{n \times n}$  og

$$(7) \quad a_{ij} = \int_{I_z} \int_{I_t} \psi_i(t) K(t, z) \phi_j(z) dz dt,$$

$$(8) \quad b_i = \int_{I_t} \psi_i(t) g(t) dt$$

### Singulær Værdi Dekomposition.

Vi vender os nu mod SVD. SVD er defineret for rektangulære komplekse matricer, men vi begrænser os her til at omtale SVD af kvadratiske reelle matricer, da det er tilstrækkeligt i denne sammenhæng.

SVD af en kvadratisk matrix  $A \in R^{n \times n}$  er defineret ved

$$(9) \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \underline{\underline{\mathbf{u}}}_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i^T,$$

hvor

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \text{en } n \times n \text{ matrix } \in R^{n \times n}, \text{ med } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

i diagonalen og nuller på resten af pladserne i matricen.

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}} = [\underline{\underline{\mathbf{u}}}_1 \ \underline{\underline{\mathbf{u}}}_2 \ \dots \ \underline{\underline{\mathbf{u}}}_n] \in R^{n \times n}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = [\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \ \dots \ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_n] \in R^{n \times n}$$

$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$  betyder  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ -matricen transponeret og  $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i^T$  betyder  $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$ -søjlen transponeret.



$\underline{\underline{U}}$  og  $\underline{\underline{V}}$  er unitære. Dette betyder i vores tilfælde, hvor  $\underline{\underline{U}}$  og  $\underline{\underline{V}}$  kun indeholder reelle værdier, at  $\underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{U}}^{-1}$  og  $\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}^{-1}$

Skalarerne  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  er ikke negative værdier, ordnet i ikke stigende rækkefølge, og kaldes de singulære værdier til  $\underline{\underline{A}}$ . Antallet af singulære værdier forskellig fra nul, er lig med rangen af matricen  $\underline{\underline{A}}$ .  $\underline{\underline{u}}_1, \underline{\underline{u}}_2, \dots, \underline{\underline{u}}_n$  og  $\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \dots, \underline{\underline{v}}_n$  kaldes henholdsvis venstre- og højre singulære vektorer til  $\underline{\underline{A}}$ .

De singulære værdier og vektorer i forbindelse med SVD har nogle egenskaber, der svarer til de egenskaber, som vi fremhævede i forbindelse med de singulære værdier og funktioner ved SVE. Disse egenskaber vil vi i det følgende angive, idet vi dog først opskriver det relevante indre produkt, nemlig det sædvanlige Euklidske produkt

$$(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = \underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{y}}$$

### Egenskaber ved de singulære værdier og vektorer.

De vigtigste egenskaber ved de singulære værdier og vektorer, er spredt ud over fire punkter, der svarer til de punkter, som blev opstillet i forbindelse med egenskaberne ved de singulære værdier og funktioner i forbindelse med SVE.

- a) Det er allerede pointeret, at  $\sigma_i$ 'erne er ikke negative værdier, og at  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  er ordnet i ikke stigende rækkefølge.
- b) Venste og højre singulære vektorer er ortonormale, dvs.

$$\underline{\underline{u}}_i^T \underline{\underline{u}}_j = \delta_{ij}$$

$$\underline{\underline{v}}_i^T \underline{\underline{v}}_j = \delta_{ij}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ , hvor  $\delta_{ij} = 1$ , når  $i = j$  og  $\delta_{ij} = 0$ , når  $i \neq j$ .

- c) De singulære værdier og funktioner er relateret ved ligningerne

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}_i = \sigma_i \underline{\underline{u}}_i$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{u}}_i = \sigma_i \underline{\underline{v}}_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

(ovenstående eftervises ved at indsætte (9) på venstresiderne),

(d) De singulæreværdier  $\sigma_i$  er entydige, og de singulære vektorer svarende til forskellige singulære værdier, er entydige på nær multiplikation med en kompleks konstant af længden 1, dvs.  $\{\underline{u}_i, \underline{v}_i\}$  kan erstattes med  $\{c_i \underline{u}_i, c_i \underline{v}_i\}$

Vi vender os nu mod sammenhængen mellem SVE og SVD.

### 8.3 SAMMENHÆNGEN MELLEM SVE OG SVD

Vi lader SVD af matricen  $\underline{\underline{A}}$  være givet ved (9), og definerer funktionerne  $u'_j$  og  $v'_j$  ved

$$u'_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} \psi_i(t)$$

$$v'_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} \phi_i(t),$$

hvor  $j = 1, 2, \dots, n$  og  $u_{ij}$  og  $v_{ij}$  er elementer i henholdsvis  $\underline{\underline{U}}$  og  $\underline{\underline{V}}$

Forbindelsen mellem SVD af  $\underline{\underline{A}}$  og SVE af  $K$ , er da givet ved følgende sætning (Hansen, 1987)

**SÆTNING.** Hvis kernen  $K$  er kvadratisk integrabel og basisfunktionerne  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  og  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  er ortonormale i henholdsvis intervallet  $I_1$  og  $I_2$ , så vil de singulære værdier  $\sigma_i^{(n)}$ , hvor  $n$  er antallet af basisfunktioner, bliver bedre og bedre approximationer til den sande singulære værdi  $\mu_i$ , når  $n$  vokser:

$$\sigma_i^{(n)} \leq \sigma_i^{(n+1)} \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Endvidere er funktionerne  $u'_j$  og  $v'_j$  ortonormale, og for enhver forskellig singulær værdi  $\mu_i$ , konvergerer de mod de tilsvarende singulære funktioner, når  $n \rightarrow \infty$ .

## 8.4 ANALYSE AF INTEGRALLIGNINGEN (1) VHA. DEN APPROXIMEREDE SVE

Efter beregningen af den approximerede SVE, kan man analysere integralligningen (1). Det kan gøres i 4 trin

Trin 1: Beregn approximationer til  $\{\beta_i\}$  og  $\{\xi_i\}$  ved

$$\beta_i' \equiv (u_i', g) = \underline{u}_i^T \underline{b}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\xi_i' \equiv \frac{\beta_i'}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

hvor  $\underline{u}_i$  er den  $i$ 'te søjle i matricen  $\underline{U}$ , og  $r$  er rangen af  $\underline{A}$  ( $\sigma_i = 0$  for  $i = r + 1, \dots, n$ )

Trin 2: Undersøg om Picard's 1.betingelse er opfyldt, dvs.  $\beta_i'$ -koefficienterne svarende til  $\sigma_i \simeq 0$ , skal være tilstrækkelig små.

Trin 3: Undersøg om Picard's 2.betingelse er opfyldt. Det er ofte nok blot at betragte størrelsen af  $\xi_i'$ , når  $i$  vokser. En alternativ metode er at kontrollere om  $S_k$  givet ved

$$S_k = \sum_{i=1}^k |\xi_i'|^2 = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\beta_i'}{\sigma_i} \right|^2,$$

konvergerer for voksende værdier af  $k$ . Hvis  $S^k$  ikke konvergerer, tyder det på at Picard's 2.betingelse ikke er opfyldt.

Trin 4: Hvis Picard's betingelser er opfyldt, beregnes den approximerende løsning  $f'$  ved

$$f'(z) = \sum_{i=1}^r \xi_i' v_i'(z)$$

## 9. Numerisk analyse af den opstillede Fredholm integralligning af 1. art

I dette kapitel vil vi undersøge den i kapitel 8 opstillede integralligning, vha. af de numeriske metoder, der er beskrevet i foregående kapitel.

### 9.1 UDLÆDNING AF DE NØDVENDIGE FORMLER

Integralligningen er givet ved

$$(1a) \quad \tilde{c}(x) = \int_0^\pi \tilde{\sigma}(\theta) K(x, \theta) d\theta, \\ x \in [-a_0, a_0\delta] = I_x, \quad \theta \in [0, \pi] = I_\theta$$

hvor

$$(1b) \quad \tilde{K}(x, \theta) = \tilde{E}(\sqrt{x^2 + a(\theta)^2 - 2xa(\theta)\cos\theta}) \times \\ 2\pi a(\theta) \sin\theta \sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da(\theta)}{d\theta}\right)^2}$$

idet vi benytter de samme betegnelser som i kapitel 8.

Det præcise udtryk for  $a(\theta)$ , dvs. afstanden fra øjets centrum udtil linsen, har vi udledt som følger. Glaslegemet begynder at krumme indad ved ca. 60 grader, dog meget langsomt i starten. Det funktionsudtryk vi søger at bestemme, skal da opfylde at  $a(\frac{\pi}{3}) = a_0$ . For  $\theta = 0$  er afstanden til linsen (jvn. kapitel 7) sat til  $a_0\delta$ , så en anden betingelse der skal inkluderes i vores udledning er, at  $a(0) = a_0\delta$ . Vi søger en pæn glat funktion for  $a(\theta)$ , og vælger et udtryk af formen

$$a(\theta) = \alpha \cos 3\theta + \beta$$

Ved at indsætte de ovenstående betingelser på  $a(\theta)$ , kan  $\alpha$  og  $\beta$  bestemmes

$$\begin{aligned}
a(0) &= a_0\delta = \alpha + \beta \\
a\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a_0 = -\alpha + \beta \\
&\Downarrow \\
\beta &= a_0 \left(\frac{1+\delta}{2}\right) \\
\alpha &= a_0 \left(\frac{\delta-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Det samlede udtryk for  $a(\theta)$  bliver da

$$a(\theta) = \frac{\delta-1}{2}a_0 \cos 3\theta + \frac{\delta+1}{2}a_0$$

Sammenfattende kan  $a(\theta)$  skrives som

$$a(\theta) = \begin{cases} a_0, & \text{for } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \\ \frac{\delta-1}{2}a_0 \cos 3\theta + \frac{\delta+1}{2}a_0, & \text{for } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Før vi anvender ovennævnte metoder, skal vi sikre os, at kernen er kvadratisk integrabel. Det gør vi ved at overbevise os om at kernen er begænset, så vil den nemlig også være kvadratisk integrabel. Når man ser på de funktionsudtryk, der indgår i kernen er det klart, at der kun kan opstå problemer, når argumentet til  $\tilde{E}$  nærmer sig nul. Senere i kapitlet vil vi vise, at kernen har en grænseværdi, når argumentet til  $\tilde{E}$  går mod nul. Kernen er således begrænset, og derfor også kvadratisk integrabel.

### Valg af basisfunktioner.

For at kunne transformere vores integralligning til et algebraisk system vha. Method of Moments, skal vi have nogle basisfunktioner. Vi har valgt et simpelt sæt af basisfunktioner  $\psi_i(x)$  og  $\phi_i(\theta)$ , som vi har fået fra (Hansen, 1987).

Vi inddeler hvert af intervallerne  $I_x$  og  $I_\theta$  i  $n$  lige store delintervaller  $I_x^{(i)}$  og  $I_\theta^{(i)}$  med henholdsvis samme længde  $h_x$  og  $h_\theta$ . De ortonormale basisfunktioner vælges så som

$$(2) \quad \psi_i(x) = \begin{cases} h_x^{-\frac{1}{2}}, & x \in I_x^{(i)} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \quad \phi_i(\theta) = \begin{cases} h_\theta^{-\frac{1}{2}}, & \theta \in I_\theta^{(i)} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$$

$\psi_i(x)$  og  $\phi_i(\theta)$  er trappfunktioner, og det giver os stykkevis konstante approximationer til de singulære funktioner.

Med disse basisfunktioner bliver (7) og (8) i kapitel (8) til de simple udtryk

$$(4) \quad a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{h_x}} \frac{1}{\sqrt{h_\theta}} \int_{I_x^{(i)}} \int_{I_\theta^{(j)}} K(x, \theta) d\theta dx, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(5) \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{h_x}} \int_{I_x^{(i)}} g(x) dx, i = 1, 2, \dots, n$$

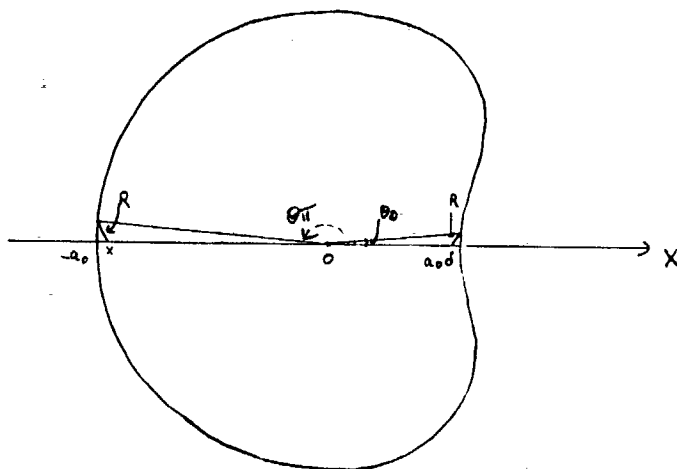
Vi vil i de 2 næste afsnit beskrive beregningen af  $a_{ij}$  og  $b_i$  i forbindelse med vores konkrete problem.

#### Beregning af $a_{ij}$ .

Beregningen af dobbeltintegralet i (4) foretages numerisk. Det gøres vha. Simpsons metode udvidet til 2 dimensioner, der er beskrevet i (Abramovitz og Stegun).

Der er imidlertid et problem i denne udregning, da funktionen  $\tilde{E}(R)$  givet ved

$$\tilde{E}(R) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{2}{B}}R}}{R},$$



Figur 1

indgår i  $K(x, \theta)$ , og denne funktion har en singularitet i punktet  $R = 0$ .  $R$  bliver lig med nul i punkterne  $(x, \theta) = (-a_0, \pi)$  og  $(x, \theta) = (a_0, 0)$  (se figur 1). Vi har derfor lavet et selvstændigt estimat for dobbeltintegralet i (4) i en omegn af de ovennævnte punkter, og opnår herved approximerede værdier for  $K(x, \theta)$  i de 2 "kriminelle" punkter. Vi vil gennemgå denne estimering i omegnen af punktet  $(x, \theta) = (-a_0, \pi)$

Integrerer vi over en omegn af ovennævnte punkt, og ses der bort fra  $\frac{1}{\sqrt{h_x}}$  og  $\frac{1}{\sqrt{h_\theta}}$ , bliver (4) med (1b) indsat til

$$(6) \quad I = \int_{-a_0}^{-a_0 + \alpha a_0} \int_{\pi - \alpha}^{\pi} \frac{e^{-\sqrt{\frac{x}{b}} R}}{R} \times 2\pi a(\theta) \sin \theta \sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2} d\theta dx$$

Vi indfører substitutionerne  $\theta_1 = \pi - \theta$ , og  $x_1 = 1 + \frac{x}{a_0}$ . For  $\theta$  tæt på  $\pi$  kan vi desuden approximerer  $\frac{da(\theta)}{d\theta}$  med 0, og  $\sin(\pi - \theta) \simeq \pi - \theta = \theta_1$ .

Med ovenstående approximationer og substitutioner bliver (6) til

$$I \simeq \int_0^\alpha \int_\alpha^0 -\frac{e^{-\sqrt{\frac{x}{b}} R}}{R} \times 2\pi a_0^3 \theta_1 d\theta_1 dx_1$$

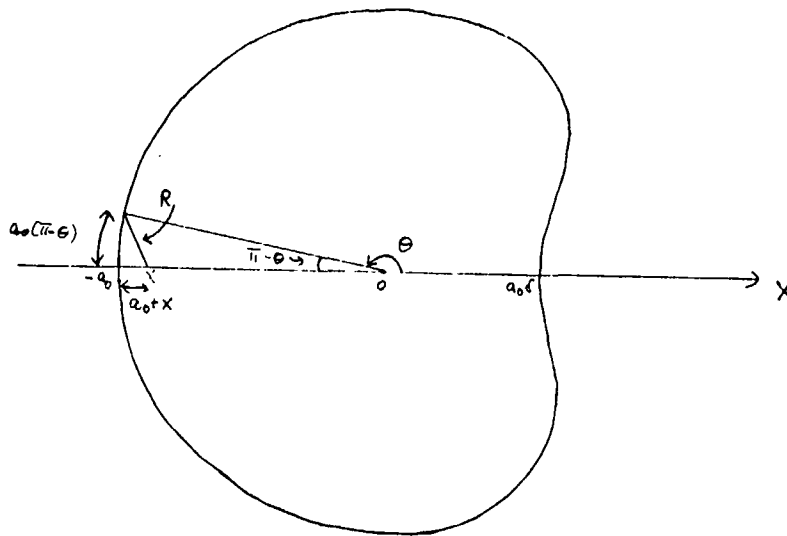
⇕

$$I \simeq \int_0^\alpha \int_0^\alpha \frac{e^{-\sqrt{\frac{x}{b}} R}}{R} \times 2\pi a_0^3 \theta_1 d\theta_1 dx_1$$

For små  $\theta_1$  kan vi lave en tilnærmelse på  $R$

$$\begin{aligned} R &\simeq \sqrt{(a_0 + x)^2 + a_0^2(\pi - \theta)^2} \\ &= \sqrt{(a_0 x_1)^2 + a_0^2(\pi - \theta)^2} \\ &= a_0 \sqrt{x_1^2 + \theta_1^2}, \end{aligned}$$

idet vi har anvendt pythagoras sætning (se figur 2).



Figur 2



Vi bemærker yderligere, at der for små  $R$  gælder, at

$$e^{-\sqrt{\frac{1}{b}}R} \simeq 1,$$

og får herefter ialt, at

$$\begin{aligned} I &\simeq 2\pi a_0^3 \int_0^\alpha \int_0^\alpha \frac{\theta_1}{a_0 \sqrt{x_1^2 + \theta_1^2}} d\theta_1 dx_1 \\ &\Downarrow \\ I &\simeq 2\pi a_0^2 \int_0^\alpha \left[ \sqrt{x_1^2 + \theta_1^2} \right]_0^\alpha dx_1 \\ &\Downarrow \\ I &\simeq 2\pi a_0^2 \int_0^\alpha \left( \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} - x_1 \right) dx_1 \end{aligned}$$

Indføres nu substitutionen  $y = \frac{x_1}{\alpha}$  opnår vi

$$I \simeq 2\pi a_0^2 \alpha^2 \int_0^1 \left( \sqrt{1 + y^2} - y \right) dy$$

Værdien af ovenstående integral kan f.eks. findes ved at slå op i en stamfunktionstabel, og vi får herefter at

$$I \simeq \pi a_0^2 \alpha^2 \left( \sqrt{2} - 1 + \ln(1 + \sqrt{2}) \right)$$

Arealet af det område, der integreres over er  $\alpha a_0 \cdot \alpha = \alpha^2 a_0$ , og  $K(x, \theta)$  kan derfor approximeres med

$$\frac{I}{\alpha^2 a_0},$$

dvs. at

$$K(-a_0, \pi) \simeq \pi a_0 \left( \sqrt{2} - 1 + \ln(1 + \sqrt{2}) \right)$$

Udføres tilsvarende regning for punktet  $(x, \theta) = (\delta a_0, 0)$  får vi,

$$K(\delta a_0, 0) \simeq \pi a_0 \delta (\sqrt{2} - 1 + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

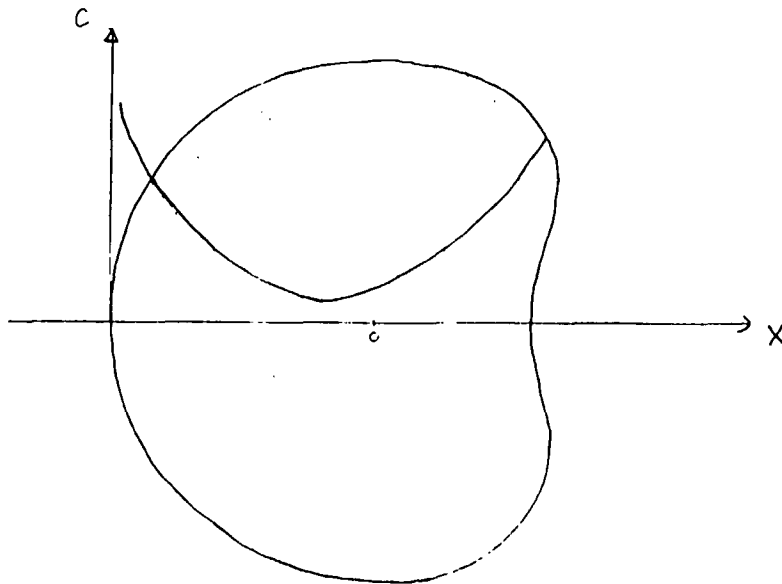
### Beregning af $b_i$ .

I dette afsnit vil vi beskrive, hvorledes den højreside der benyttes i forbindelse med vores problem bestemmes.

Højresiden til integralligningen er (jvf. kapitel 7)  $\tilde{c}(x)$ , og når den kendes kan  $b_i$  beregnes som

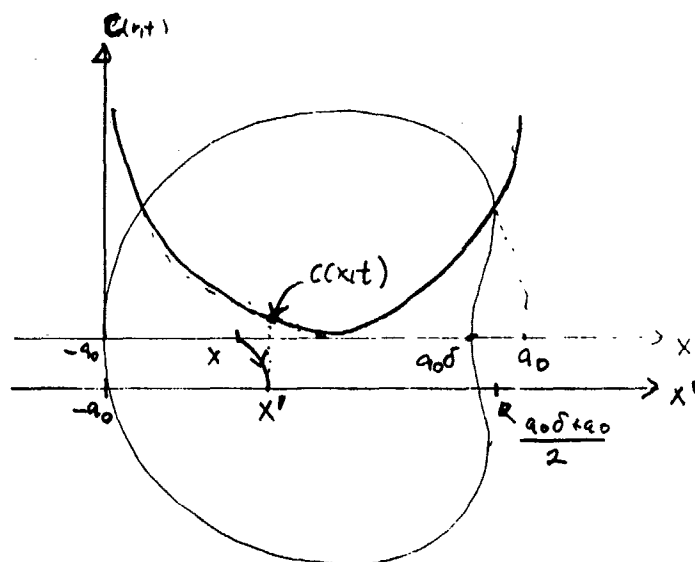
$$b_i = \frac{1}{\sqrt{h_x}} \int_{I_x} \tilde{c}(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots$$

For at analysen af integralligningen skal have nogen mening, må vi søge at bestemme en fysisk set realistisk højreside. En typisk koncentrationsprofil for fluoresceinen i øjet er vist i (figur 3). Profilen i (figur 3) afviger kun fra de koncentrationsprofiler den kuglesymmetriske model giver, ved at den får sit lokale minimum tidligere, dvs. før kurven når centrum. En realistisk profil kan derfor konstrueres ved at "sammenpresse" en kuglesymmetrisk profil hen mod glaslegemet bagende.



Figur 3. Figuren viser en typisk koncentrationsprofil for fluorescein i øjet.

Vi skaffer os således en højreside  $\tilde{c}(x)$  ved at tage formelen for  $c(r, s)$  fra kapitel 4, og foretage et passende koordinatskift. I praksis foretager vi dog ikke koordinatskiftet ved at presse funktionen sammen, men ved at gøre det "modsatte", nemlig at strække x-aksen ud. Det punkt som vi vil finde koncentrationen for, føres over i et nyt punkt  $x'$ , beliggende længere væk fra øjets bagende, og man aflæser så koncentrationen for dette punkt, på den kuglesymmetriske koncentrationsprofil (se figur 4).



Koordinatskiftet kommer så til at se således ud

$$\begin{aligned}
 x' - (-a_0) &= \gamma(x - (-a_0)) \\
 &\Downarrow \\
 x' + a_0 &= \gamma(x + a_0) \\
 &\Downarrow \\
 (7) \quad x' &= \gamma(x + a_0) - a_0,
 \end{aligned}$$

hvor  $\gamma$  er 'strækningsfaktoren'.

Vi har vurderet, at man opnår en rimelig kurve hvis  $a_0 \delta$  føres over i  $\frac{a_0 \delta + a_0}{2}$ , dvs. midtpunktet mellem linsens bagkant, og punktet  $x = a_0$ . Nu kan  $\gamma$  beregnes idet  $x = a_0 \delta$  og  $x' = \frac{a_0 \delta + a_0}{2}$

$$a_0 \frac{1+\delta}{2} + a_0 = \gamma(a_0\delta + a_0)$$

$$\Downarrow$$

$$(8) \quad \gamma = \frac{3+\delta}{2(1+\delta)}$$

$b_i$  kan nu bestemmes som

$$(9) \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{h_x}} \int_{I_x^{(i)}} \tilde{c}_0(s) \tilde{F}(x', s) dx,$$

med udtrykket for  $\tilde{c}(s)_0$  indsat.

For store  $s$  bliver (9) til

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{h_x}} \frac{a_0 P}{\sqrt{D}} \frac{\tilde{c}_0(s)}{\lambda + \sqrt{s}} \int_{I_x^{(i)}} \frac{e^{(x'-a)\sqrt{\frac{s}{D}}} - e^{-(x'+a)\sqrt{\frac{s}{D}}}}{x'} dx,$$

hvor  $h_x = \frac{\delta a_0 + a_0}{\text{antal intervaller}}$ , og  $x'$  bestemmes af (7).

Integralet beregnes numerisk vha. simpsons metode, og den laplace-transformerede af  $c_0(t)$  bestemmes ud fra den i appendix I tilnærmede funktion

$$c_0(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + a_3 e^{b_3 t},$$

dvs.  $\tilde{c}_0(s)$  er givet ved

$$\tilde{c}_0(s) = \frac{a_1}{s - b_1} + \frac{a_2}{s - b_2} + \frac{a_3}{s - b_3}$$

**Inddata og uddata i forbindelse med program til analyse af integralligningen.**

I dette afsnit vil vi kort beskrive arbejdsgangen i det program vi har lavet for at kunne analysere vores integralligning. Den overordnede ide med programmet er, at benytte de numeriske metoder beskrevet i kapitel 8, til at vurdere om den opstillede integralligning har en løsning. Programudskriften kan ses i bilag 8, bortset fra den benyttede Linpack rutine, som er beskrevet i (Dongarra et al. 1979).

Inddata til programmet er den Laplacetransformerede tid  $s$ , og det antal intervaller for hvilke beregningerne skal udføres. Givet disse inddata beregner programmet først matricen  $\underline{A}$  og søjlevektoren  $\underline{b}$ . Næste trin er så udfra  $\underline{A}$  at beregne de singulære værdier  $\sigma_i$ , samt matricerne  $\underline{U}$  og  $\underline{V}$ . Denne beregning foregår i den ovennævnte Linpack-rutine.

Nu kan  $\beta'_i$  og  $\xi'_i$  værdierne beregnes, og følgende parametre udskrives fra programmet

$$b'_i \quad \sigma_i \quad \beta'_i \quad \xi'_i$$

### Vurdering af størrelsen af $s$ .

Vi vil nu vurdere hvilke  $s$  værdier, der med rimelighed kan benyttes som inddata til programmet. Grunden til at ikke alle  $s$  værdier vil producere korrekte uddata, ses for det første af, at vi i udledningen af integralligningen har gjort antagelser, der kun er gyldige for visse  $s$  værdier, og for det andet at udtrykket  $e^{-\sqrt{s/DR}}$  let kan blive mindre end maskinnøjagtigheden. Hvad det sidste angår gælder, at hvis udtrykket bliver mindre end den mindste positive real\*8 (Double), sættes værdien automatisk til nul. For mange af værdierne vil dette ikke blot betyde en nedrunding, men en alvorlig afskæring af funktionen. Vi skal altså vurdere hvornår  $e^{-\sqrt{s/DR}}$  bliver mindre end  $10^{-304}$  (det mindste tal, der kan repræsenteres med real\*8 som datatype). For  $D = 6 \cdot 10^{-6}$  og  $R = 1.2$  får man

$$e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}R} < 10^{-304}$$

$$s > D \left( \frac{304 \ln(10)}{1.2} \right)^2$$

$$s > 6 \cdot 0.34 = 2.04$$

Programmet vil altså begynde at skære af, hvis  $s$  bliver større end ca. 2.04, og  $s$  må derfor ikke være meget større end denne værdi af hensyn til nøjagtighederne på beregningerne.

## 9.2 FREMGANGSMÅDEN VED VURDERING AF UDDATA

I dette afsnit vil vi beskrive den fremgangsmåde vi benytter, når uddata fra en programkørsel vurderes. Formålet med at vurdere uddata, er at afgøre om der findes en kvadratisk integrabel løsning til integralligningen. med den konstruerede højreside indsat. Som nævnt i kapitel 8 er der tre betingelser der skal være opfyldt, for at en sådan løsning eksisterer. En undersøgelse af uddata kan derfor foregå i de følgende tre trin :

Trin 1. Først undersøges om  $\sigma_i^{(n)}$ ,erne konvergerer for fastholdt  $i$  og voksende  $n$ , dvs :

$$\sigma_i^{(n)} \leq \sigma_i^{(n+1)}$$

Trin 2. Dernæst checkes om Picards 1. betingelse er opfyldt. Picards 1. betingelse siger at de  $\beta'_i$  koefficienter der svarer til  $\sigma_i \simeq 0$  skal være "tilstrækkelig" små.

Trin 3. Endelig undersøges om Picards 2. betingelse er opfyldt. Denne går ud på at summen

$$s_k = \sum_{i=1}^k |\xi'_i|^2 = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\beta'_i}{\sigma_i} \right|^2$$

skal konvergere for voksende værdier af  $k$ . Denne betingelse er opfyldt hvis  $\xi'_i = \frac{\beta'_i}{\sigma_i}$  går mod nul.

Hvis de ovenstående tre betingelser er opfyldt, og kun da, kan man konkludere at der findes en kvadratisk integrabel løsning, som opfylder integralligningen.

Hvis betingelsen i trin 1 ikke er opfyldt, er der 2 muligheder. Enten er der en fejl i programmet, eller også er den kerne man benytter ikke kvadratisk integrabel.

Hvis trin 1 er opfyldt, men ikke trin 2 eller 3, kan man konkludere at der ikke eksistere en løsning for integralligningen med den pågældende højreside indsat. Man kan så eventuelt forsøge sig med en anden højreside.

### 9.3 VURDERING AF UDDATA

Her vil vi vurdere uddata givet forskellige værdier af  $s$  og  $n$  som inddata (se udskrift i bilag 4).

Fremgangsmåden er som nævnt i sidste afsnit at sikre sig at  $\sigma_i^{(n)}$ ,erne konvergerer som de skal, og så undersøge om Picards 2 betingelser er opfyldt.

Vi betragter først uddata fra kørslen med  $s = 0.001$  og  $n = 2, 4, \dots, 30$  som inddata.

Trin 1. For  $\sigma_1^n$  hvor  $n = 2, 4, \dots, 30$ , dvs. den første  $\sigma$  værdi udregnet for forskellige størrelser af  $\underline{A}$ -matricen, ses værdierne at være voksende og at konvergere, idet forskellen mellem to på hinanden følgende  $\sigma$  værdier, for voksende  $n$  bliver mindre og mindre.

For  $\sigma_2^{(n)}$ , hvor  $n = 2, 4, \dots, 30$  ses en endnu hurtigere konvergens til en værdi omkring 0.14.

De resterende  $\sigma_i^{(n)}$  værdier  $2 \leq i \leq 30$  kan også siges at konvergere, så alt i alt tør vi godt konkludere at  $\sigma_i^{(n)}$  for fast  $i$  og  $n$  løbende konvergerer.

Kravet i trin 1 er således opfyldt og vi går videre til trin 2.

Trin 2. Næste punkt er at checke om Picards 1. betingelse gælder, altså om de  $\beta'_i$ -koefficienter der svarer til  $\sigma_i \simeq 0$  er tilstrækkeligt små. Denne betingelse er ikke let at undersøge, idet der her er tale om at vurdere hvornår  $\beta'_i$  er "tilstrækkelig" lille.

Ved at betragte sammenhørende værdier af  $\sigma_i$  og  $\beta'_i$  for  $n = 30$ , tillader vi os at antage at betingelsen er opfyldt. For en  $i$ -værdi omkring 16, ses  $\sigma_i \simeq 10^{-10}$ , mens den tilsvarende  $\beta'_i \simeq 10^{-8}$ , hvilket må siges at opfylde betingelsen. For større værdier af  $i$  ( $i > 16$ ) ses også, at kravet er opfyldt.

Vi antager derfor at dette krav er opfyldt, og vender os mod det sidste trin.

Trin 3. For at undersøge om Picards anden betingelse er opfyldt, bemærker man først, at man kan betragte den absolutte værdi af  $\xi'_i$ . Grunden til dette er, at  $\xi'_i$  skal gå mod nul, men det er ikke givet fra hvilken side det skal ske, kun at den skal gøre det i et smallere og smallere bælte omkring nul. Denne  $\xi'_i$  værdi skal altså konvergere mod nul for ethvert fastholdt  $n$  og varierende  $i$ . Det ses umiddelbart at  $\xi_i^{(n)}$  ikke for nogen værdier af  $n$ , opfylder Picards anden betingelse.

Vi har nu undersøgt inddata for  $s = 0.001$  og  $n = 2, 4, \dots, 30$  og fundet at Picards 2. betingelse ikke er opfyldt. For at se om denne  $s$ -værdi var den eneste, der gav uddata der ikke opfyldte denne betingelse, har vi givet andre værdier af  $s$  som inddata til programmet ( $s = 0.1, s = 0.001, s = 0.0001$ ). Ved at undersøge disse nye uddata har vi fundet at Picards 2. betingelse heller ikke er opfyldt for nogen af disse  $s$  værdier.

Dette leder os til den konklusion, at der ikke eksisterer en kvadratisk integrabel løsning til integralligningen, med den pågældende højreside indsat. For at se om det i det hele taget er muligt at finde en løsning, kan man korrigere højresiden så Picards 2. betingelse er opfyldt. Dette vil vi nu komme nærmere ind på i næste afsnit.

### Numerisk eksperiment til bestemmelse af en løsning.

Vi vil nu konstruere et datasæt der opfylder Picards anden betingelse.

Grunden til at Picards 2. betingelse ikke var opfyldt i vores tidligere eksperimenter, var at  $\xi'_i$ 'erne ikke konvergerede mod nul. Vi vil derfor konstruere et sæt af  $\xi'_i$ 'er, der går mod nul.  $\xi'_i$  blev beregnet som forholdet  $\xi'_i = \frac{\beta'_i}{\sigma_i}$ , så for at få dette forhold til at gå mod nul, skal  $\beta'_i$  korrigeres nedad, på en sådan måde, at den aftager hurtigere mod nul end  $\sigma_i$ . For at opnå dette vælges den korrigerede  $\beta_i$  (kaldet NYBETA) på følgende måde

$$NYBETA = \beta'_i \cdot 10^{(-1 \cdot \text{maximum af}(i - \text{snit} + 1.0))}$$

Sættes *snit* f.eks. til 3, vil de første 2 korrigerede  $\beta'_i$  værdier være de samme som før, mens de efterfølgende ganges med en faktor  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ , ... Samtidig lader vi programmet beregne den fremkomne  $NY\xi'_i$  og den  $NYb_i$ , der svarer til  $NY\xi'_i$ . Man kan så sige at  $NYb_i$  er en række værdier af  $b_i$  der vitterligt giver en løsning, idet  $NY\xi'_i$ 'erne jo nu konvergerer.

Ved at foretage de ovenstående ændringer i vores program, opnår vi at for hver værdi af de tidligere afprøvede  $s$  og  $n$  som inddata, får vi beregnet et sæt  $NY\xi'_i$ , der konvergerer mod nul, og som altså opfylder Picards anden betingelse. Vi har på den måde dannet en ny højreside. Med den nye højreside, vil det være muligt at opskrive en kvadratisk integrabel løsning til vores integralligning.

Hvis vi fra starten havde brugt denne højreside, var alt altså gået godt. Sammenligner vi nu vores nye højreside med den gamle, vil vi få et mål for hvor følsom analysen af integralligningen er.

Vi giver endnu en gang en  $s$ -værdi på 0.001 som inddata, men denne gang til det program der er fremkommet med ovenstående tilføjelse.

For  $n = 30$  f.eks. ses  $NYb_i$ , og den gamle  $b_i$  umiddelbart at ligge tæt sammen. For at undersøge dette nærmere, har vi plottet  $b_i$  som en funktion af  $i = 1, 2, 3, \dots, 30$  (se bilag 5). Bemærk den logaritmiske  $b_i$ -akse

Af grafen ses at de to sæt af  $b'_i$  er sammenfaldende i siderne, mens der er en større forskel i midten. Udfra grafen og tallene, må man konkludere, at selv små forstyrrelser i højresiden kan medføre, at der ikke eksisterer en kvadratisk integrabel løsning.

Iøvrigt kunne man forvente, at grafen for  $b_i$  ville se ud som i bilag 5. Man kan nemlig betragte  $b_i$ 'erne som et mål for koncentrationen langs øjets geometriske akse.

#### 9.4 FORSLAG TIL VIDERE ARBEJDE MED INTEGRALLIGNINGEN

Dette afsnit skitserer, hvordan man eventuelt kunne arbejde videre med de resultater, vi har opnået med integralligningen.



Det er klart at udgangspunktet for vores arbejde med at opstille en integralligning, var at finde en løsning der passede bedre overens med måleresultaterne, end den kuglesymmetriske løsning vi tidligere har beskrevet.

For at vurdere følsomheden af systemet, kunne man enten have løst den Fredholms integralligning af 2. art, som vi opstillede i kapitel 7, og derved finde et udtryk for koncentrationen. Man kunne så se om man med dette udtryk indsat som højreside, ville kunne komme tilbage til den permeabilitet man startede med, når man analyserede integralligningen af første art som ovenfor beskrevet, evt med nogle forstyrrelser på højresiden, for at simulere måleusikkerhed.

En anden måde at finde en højreside på, ville være at benytte et sæt ægte måleresultater, som man så approximerede med en kurve, og laplacetransformerede.

Til slut skal det nævnes, at man nok burde "teste" den Fredholm integralligning af 1.art, vi har fået opstillet, ved at sætte  $\delta$  lig med 1, og så anvende den kuglesymmetriske løsning som højreside. Gør vi det skulle vi gerne få at permeabiliten er konstant langs blod-nethinde-barrieren.

## 10. Konklusion

Vi har igennem de foregående afsnit opstillet den kuglesymmetriske model, og vha. af denne fundet udtryk for koncentrationen  $c(r, t)$  og permeabiliteten  $P$ . Vi har endvidere udvidet denne model til den rotationssymmetriske model, og undersøgt denne. Vi ønsker som en afrunding på projektet, at give en mere overordnet vurdering af de resultater vi er nået frem til.

I kapitel 6 konkluderede vi, at den kuglesymmetriske model ikke i alle tilfælde kunne beskrive de målte koncentrationsværdier godt nok. Det var naturligvis denne konklusion, der var baggrunden for, at vi opstillede den rotationssymmetriske model. Denne model skulle gøre det muligt at give en bedre beskrivelse af sammenhængen mellem koncentration og permeabilitet. Vi mener imidlertid ikke at udvidelsen har været uden problemer. Vi ser især problemer på to områder. For det første forekom der beregninger, der lå udenfor maskinnøj agtigheden, og for det andet var udfaldet af den analyse, integralligningen blev underkastet, meget følsom overfor valg af højresiden. Vi vil kort kommentere de to problemer.

Problemerne med maskinnøjagtigheden opstår, fordi den valgte datatype `real*8` kun tillader os at gå op til en  $s$ -værdi på maksimalt 2-3 (for større  $s$ -værdier bliver der for mange underflow i beregningerne). Dermed er der også sat en bundgrænse for hvor små  $t$ -værdier det implementerede program kan behandle. Skifter man til datatypen `real*16` (den mest præcise datatype i VAX-fortran), udvides området for  $s$ -værdier op til ca. 70, men det vil samtidig give anledning til et betragtelig forøgelse i beregningstiden.

Gennem de foretagne eksperimenter i forbindelse med analyse af integralligningen, har vi observeret, at systemet er meget følsomt overfor hvilke højresider, dvs. hvilke koncentrationsværdier, der benyttes. Det kan blive et stort problem, hvis modellen skal anvendes i praksis, idet man her opererer med en vis usikkerhed på de målte koncentrationer.

På baggrund af de ovenstående betragtninger må vi sige som en endelig konklusion på vores arbejde, at vi ikke er istand til at vurdere den rotationssymmetriske model's anvendelighed, uden yderligere eksperimenter (jvf. kapitel 9).

## Litteraturliste.

- Abramowitz, m og Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications.
- Baker, T.H. 1977. *The Numerical Treatment of Integralequations*. Oxford : Clarendon Press.
- Carslaw, H.S. og Jaeger, J.C. 1959. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford : Clarendon Press.
- Carstensen, J. 1981. *Numeriske metoder*. Herning :
- Crank, J . 1956 . *The Mathematics of Diffusion*. Oxford : Clarendon Press.
- Dongarra, J.J. , Bunch, J.R. , Moler, G.B. og Stewart, G.W. 1979. *Linpac*. Philadelphia : Siam.
- Fatt, I. 1975. *Flow and Diffusion in the Vitreous Body of the eye*. Bulletin of Mathematical Biology , vol. 37.
- Fatt, I. 1978. *Physiology of the eye*. Boston : Butterworths.
- Fatt, I og Rosenbluth, R.F. *Flow and Diffusion in the Vitreous Body A Model Study*. Fra University of California.
- Hansen, E. 1971. *Sædvanlige Differentialligninger fra Fysikken*. Lyngby : Polyteknisk Forlag.
- Hansen, P.C. 1987. *Computation of the Singular Value Expansion*. Submitted to Computing.
- Jensen, H.E. 1984. *Matematisk Analyse* ( Bind 1-4). DTH : Matematisk institut.
- Kanwal, R.P. 1971. *Linear Integral Equations*. New York : Academic Press.
- Krogsaa et al. 1981. *The blood-retinal barrier permeability in diabetic patients*. Acta Ophthalm 59, s. 689 - 694.
- Larsen et al. 1983. *Transient transport across the blood-retina barrier*. Bulletin of Mathematical Boilogy Vol. 45, s. 749 - 758.

Madsen,K. 1979. *Optimering*. DTH.

Rubinow S.I. 1975 *Introduction to mathematical Biology*. New York.

Smithies,F. 1970. *Integral Equations*. Cambridge : University Press.

Spiegel,M.R. 1968 . *Mathematical Handbook*. USA. McGraw-Hill.

Stoer,J. og Bulirsch,R. 1980. *Introduction to Numerical Analysis*. New York : Springer.

Wilkinson,J.H. og Reinch,C.L. 1971. *Linear Algebra*. Heidelberg : Springer.

## Appendix 1

### Beregning af $c_0(t)$

Funktionen  $c_0(t)$ , som bruges i beregningen af både den asymptotiske løsning og separationsløsningen, angiver koncentrationen af fluorescein i blodbanen. Disse koncentrationer kendes kun som eksperimentelle målinger, for bestemte tider.

For at kunne bruge  $c_0(t)$  i vores beregninger skal vi imidlertid helst have et funktionsudtryk for  $c_0(t)$ . Vi skal i dette afsnit søge at finde et sådant udtryk for en bestemt række måleværdier. Fremgangsmåden der benyttes er imidlertid generel, og vil kunne benyttes også for andre måleværdier.

De henfaldsprocesser i kroppen hvortil henfaldet af fluorescein i blodet hører, vides at foregå eksponentielt. Det var derfor naturligt at antage at  $c_0(t)$  kunne skrives som en sum af eksponentialfunktioner :

$$(1) \quad c_0(t) = \sum_{i=1}^N b_i e^{a_i t}$$

Den korrekte fremgangsmåde ville nu være at man udfra den biologisk-medicinske faglitteratur, opstillede en model der beskrev henfaldsprocesserne, og ved hjælp af denne nåede frem til et udtryk for  $c_0(t)$ .

Vi har imidlertid ikke følt at beregningen af  $c_0(t)$  var et særligt centralt punkt i projektet (omend interessant nok), og vi valgte derfor en simple fremgangsmåde.

Ved hjælp af vor viden om at en eksponentialfunktion på enkeltlogaritmisk papir, ville kunne tegnes som en ret linie, samt med brug af lommeregner, nåede vi frem til at følgende udtryk gav en god tilnærmelse for  $c_0(t)$  :

$$(2) \quad c_0(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + a_3 e^{b_3 t}$$

hvor

$$(2a) \quad a_1 = 9.3344$$

$$(2b) \quad b_1 = -0.015463/60$$

$$(2c) \quad a_2 = 22.4922$$

$$(2d) \quad b_2 = -0.15504/60$$

$$(2e) \quad a_3 = 32.8475$$

$$(2f) \quad b_3 = -1.0/60$$

$b_3$  er her rimeligt tilfældigt valgt, idet leddet  $a_3 e^{b_3 t}$  af funktionen kun har til formål at sørge for en rimelig værdi omkring  $t = 0$  og  $t = 1$ , og derudover være så stejl at den ikke giver noget nævneværdigt bidrag til de punkter, hvor funktionen skulle passe med måleresultaterne.

Tabel 1 giver de målte værdier og de med (2) beregnede.

t	målt.	beregn.
0	50.0	64.7
1	50.0	40.5
5	19.0	19.2
15	9.6	9.6
30	6.2	6.1
60	3.4	3.7
120	1.5	1.5

Tabel 1. Målte og beregnede værdier af  $c_0(t)$

Man ser at der er god overensstemmelse for alle værdierne, undtagen for  $t = 0$  og  $t = 60$  sekunder. I disse to punkter var det ikke muligt at tilnærme funktionen med en eksponentialfunktion, da måleværdien er den samme.

Det skal bemærkes, at det måske nok er lige i overkanten at anvende 3 eksponentialfunktioner i udtrykket for  $c_0(t)$ , når vi kun har 6 målte værdier. Men det var nødvendigt for at få en rimelig god overensstemmelse mellem kurven for den fundne  $c_0$ -funktion, og måleværdierne.

## Appendix 2

### Beskrivelse af implementationen af den asymptotiske løsning.

Vi har tidligere beskrevet, hvorledes man kunne udregne koncentrationen  $c(r, t)$  ved hjælp af et foldningsintegral.

Vi vil i dette kapitel beskrive, hvordan vi har implementeret et program, der numerisk beregner  $c(r, t)$  ved hjælp af det ovennævnte foldningsintegral.

Integralet ser ud som følger :

$$(1) \quad c(r, t) = \int_0^t c_0(t - \tau) \cdot F(r, \tau) d\tau$$

$$\text{hvor} \quad F(r, \tau) = \frac{Pa}{r\sqrt{D}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{r^2 + r^2}{4D\tau}} \sinh \frac{ar}{2D\tau} \right.$$

$$(2) \quad \left. - \lambda e^{\lambda^2\tau} \left[ e^{\lambda(a-r)/\sqrt{D}} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{\tau} + \frac{a-r}{2\sqrt{D\tau}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - e^{\lambda(a+r)/\sqrt{D}} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{\tau} + \frac{a+r}{2\sqrt{D\tau}} \right) \right] \right],$$
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds$$

Vi vil i det følgende gennemgå de enkelte dele af implementeringen :

- Beregning af  $\int$ .
- Beregning af integranden.

og derefter beskrive nogle særlige forhold omkring implementeringen og integrationen, og endelig vurdere det nødvendige antal intervaller, der skal til for at integralet bliver beregnet med tilstrækkelig stor præcision.

Vi vil ikke beskrive hovedprogrammet og dets funktion nærmere her, men henvise til appendix 3 om separationsprogrammet, hvor det samme mønster følges.

## BEREGNING AF INTEGRALET.

Vi skal nu se på hvorledes integralet i (1) beregnes.

Det er klart, at en eksakt integration ved hjælp af de gængse integrationsformler ikke er mulig på grund af  $F(r, \tau)$ 's kompleksitet, og i programmet beregner vi det derfor ved hjælp af numerisk integration.

Til beregningen af integralet benytter vi Simpson's formel. Denne formel tilnærmer i hvert delinterval integranten med et andengradspolynomium.

For 1 delinterval  $[a, b]$  fås således følgende approximation :

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

hvor

$$(4) \quad h = \frac{b-a}{2}$$

$$y_0 = f(a) \quad y_1 = f(a+h) \text{ og } y_2 = f(a+2h)$$

Når hele integrationsintervallet  $[0, t]$  deles op i et lige antal delintervaller  $n$ , får man i vores tilfælde følgende formel :

$$(4) \quad \int_0^t f(r, \tau) d\tau = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + \dots + f(t))$$

hvor  $h$  er intervalstørrelsen.

Dette kan også skrives som

$$(5) \quad \int_0^T f(r, \tau) d\tau = \frac{h}{3}(\text{sum1} + \text{sum2} + \text{sum4})$$

hvor

$$(5a) \quad \text{sum1} = f(0) + f(t)$$

$$(5b) \quad \text{sum2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(2 \cdot i \cdot h)$$

$$(5c) \quad \text{sum4} = 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f((-1 + 2 \cdot i) \cdot h)$$

Simpson formel giver en fejl af størrelsen :

$$(6) \quad \frac{h^4(t-0)}{180} f^{(4)}(c)$$

hvor  $c \in [0, t]$ .



## BEREGNING AF INTEGRANDEN.

Vi vil nu beskrive hvorledes de enkelte dele af integranden ( $c_0(t - \tau)$  og  $F(r, \tau)$ ) beregnes.

### Beregning af $c_0$ ..

$c_0(t)$  kendes kun i form af en række målepunkter, og vi var derfor nødt til at finde en funktion, der i rimelig grad passede til disse resultater. I appendix 1 er det nærmere beskrevet hvorledes  $c_0(t)$  er approximeret.

I programmet er beregningen af  $c_0(T - \tau)$  henlagt til en egen subroutine.

### Beregning af $F(r, \tau)$ .

Beregningen af  $F$  er på mange måder lige ud af landevejen, idet vi i (2) har en færdig formel til brug i beregningen.

Den eneste ændring i udregningen i programmet i forhold til (2) er at udtrykket :

$$(6) \quad e^{-\frac{a^2 + r^2}{4D\tau}} \cdot \sinh\left(\frac{ar}{2D\tau}\right)$$

er skrevet om til :

$$(7) \quad e^{-\frac{(a-r)^2}{4D\tau}} - e^{-\frac{(a+r)^2}{4D\tau}}$$

da vi skønnede at (7) var hurtigere at beregne end (6), blandt andet fordi der i (7) skal udregnes en eksponentialfunktion mindre.

Ellers følger beregningen af  $F(r, \tau)$  (2) slavisk. Dog har vi i programmet tilladt os at dele beregningen op på 14 sætninger. Dette er sket dels for at gøre det mere overskueligt, men også for at undgå dobbeltberegninger.

### Beregning af eksponentialfunktionen..

Beregning af eksponentialfunktionen ligger indbygget i Pascal, og burde derfor ikke volde problemer. Der sker dog det, at programmet 'går ned' såfremt  $\exp(x)$  bliver mindre end den mindste positive double ( $10^{-33}$ ) eller den største positive double ( $10^{33}$ ).

Det er det første tilfælde, der har givet os problemer, og vi har valgt at tackle den situation ved at indkapsle eksponentialfunktionen i vores egen udgave af den. Denne udgave sørger blot for at såfremt

$$\exp(x) < 10^{-33} \Rightarrow x < -80$$

sættes  $\exp(x)$  til nul.

Der er ingen fare i at foretage den ovenstående tilnærmelse, da eksponentialfunktionen intetsteds optræder i en nævner.

### Beregning af $\operatorname{erfc}(x)$ .

I udtrykket for  $F(r, \tau)$  indgår den komplementære fejlfunktion  $\operatorname{erfc}(x)$ .

I beregningen af den har vi valgt den følgende tilnærmelse :

$$(8) \quad \operatorname{erfc}(x) \simeq (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \cdot e^{-x^2}$$

hvor

$$(8a) \quad t = \frac{1}{1 + px}$$

og

$$(8b) \quad a_1 = 0.254829592$$

$$(8c) \quad a_2 = -0.284496736$$

$$(8d) \quad a_3 = 1.421413741$$

$$(8e) \quad a_4 = -1.453152027$$

$$(8f) \quad a_5 = 1.061405429$$

$$(8g) \quad p = 0.3275911$$

Tilnærmelsen er taget fra (Abramovitz), og garanterer en fejl på max.  $1.5 \cdot 10^{-7}$  for  $x \in [0, \infty]$ .

Vi valgte denne tilnærmelse fremfor det eksakte udtryk :

$$(9) \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1) \cdot i!} \right)$$

fordi (9) kun konvergerer meget langsomt, og blandt andet derfor er er meget beregningstung.

### SÆRLIGE FORHOLD.

Vi skal nu se på de punkter i beregningen, hvor det er nødvendigt at tage særlige hensyn, samt foretage en vurdering af intervalstørrelsen og intervalantallet i beregningen af integralet.

## Beregningsen af $c(r, t)$ for

$$r \rightarrow 0, r = a, t = 0, \tau = 0$$

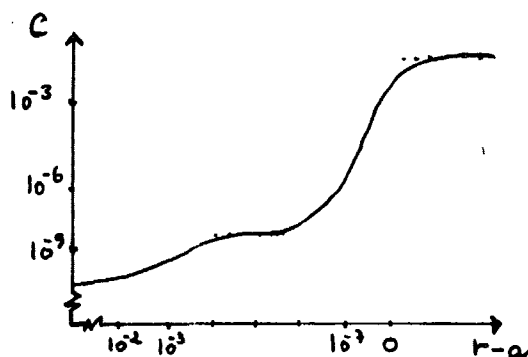
I hver af de ovenstående fire tilfælde kan integralet og funktionen  $F(r, \tau)$  ikke blot beregnes uden videre, og vi vil derfor i det følgende vurdere, hvad der så skal gøres i hvert enkelt tilfælde.

### $r \rightarrow 0$

Når  $r \rightarrow 0$  vil leddet  $\frac{Pa}{r\sqrt{D}} \rightarrow \infty$ , og programmet er derfor ikke istand til at beregne koncentration midt i øjet. Her er en nærmere analyse dog påkrævet.

### $r \rightarrow a$

Når  $r \rightarrow a$  udviste programmet en opførsel i stil med grafen på figur 1



figur 1. Koncentrationsprofilen for  $r \rightarrow a$

Da koncentrationer på  $10^{-5}$  og derover ikke er forenelige med hverken modellens forudsætninger, eller med måleresultaterne ( $c_0(t)$  er f.eks. af størrelsesordenen  $10^{-5}$ , d.v.s. mindre end  $c(a, t)$ ), antog vi at den asymptote der er for  $r - a \simeq 10^{-5}$  var et mere korrekt udtryk for koncentrationen helt tæt op ad nethinden.

I programmet har vi derfor justeret øjets radius  $a$  en anelse op, således at et korrekt resultat kan beregnes for  $r \simeq a$ .

$t = 0$

For at forhindre at integrationsproceduren giver sig til at beregne det følgende :

$$\int_0^0 c_0(0 - \tau) \cdot F(r, \tau) d\tau$$

er der sat en test ind, der sætter integralet til 0, såfremt  $t = 0$ .

$\tau = 0$

Da  $\tau$  indgår i nævneren flere steder i  $F(r, \tau)$ , er det ikke muligt at beregne  $F(r, \tau)$  for  $\tau = 0$ . Dette betyder videre, at det ikke er muligt i programmet at have 0 som den nedre integrationsgrænse. Den er derfor sat til  $10^{-5}$ .

#### OVERVEJELSER OMKRING DET NØDVENDIGE INTERVALANTAL.

Vi har prøvet at undersøge hvor mange, eller hvor store integrationsintervaller det er nødvendigt at have, hvis koncentrationen skal beregnes med en vis nøjagtighed.

Den numeriske beregning af integralet, skal gå mod den eksakte værdi, når antallet af intervaller (kaldet  $n$ ) går mod uendelig :

$$\int_n g(x) dx \rightarrow \int g(x) dx \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Her angiver  $\int_n$  den numeriske beregning af integralet med  $n$  intervaller.

derfor må differensen på beregningen af integralet med  $n$ , og med  $n - 2$  intervaller, gå mod nul :

$$\int_n g(x) dx - \int_{n-2} g(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Differensen kan derfor bruges til at teste nøjagtigheden af den numeriske beregning. Er differensen stor, så er nøjagtigheden lille, og omvendt.

For at finde frem til det korrekte intervalantal, beregnede vi derfor denne differens for  $n = 4, 6, 8, \dots$  indtil den kom under en vis værdi, der var sat i relation til den beregnede værdi. D.v.s. vi havde følgende stopbetingelse :

$$\left| \int_n g(x) dx - \int_{n-2} g(x) dx \right| \leq k \left| \int_n g(x) dx \right|$$

hvor  $k$  angiver den relative ændring. Det er vigtigt at bemærke, at  $k$  ikke direkte angiver den nøjagtighed der er på resultatet, selvom størrelsen af  $k$  nok siger noget derom.

Desværre viste resultaterne af de ovenstående beregninger, at såvel intervalantallet, som intervalstørrelsen svingede vildt.

For  $k = 10^{-3}$  fik vi f.eks. intervalantal mellem 4 og 60, og intervalstørrelser mellem 10 og 375.

Der var dog det mønster i resultaterne, at der krævedes flest intervaller i centrum af øjet, og færre og færre ud mod randen, undtagen på selve randen, hvor der igen krævedes ekstra mange intervaller.

Der er således ikke nogen endegyldig sandhed om hvilket intervalantal og hvilken intervalstørrelse, der giver en bestemt nøjagtighed, og vi kan kun konkludere, at man er nødt til at tage rigeligt med intervaller for at opnå en bestemt nøjagtighed.

**Appendix 3.**  
**Beskrivelse af implementationen af løsningen**  
**ved separation af de variable.**

I det følgende vil vi beskrive hvorledes vi har implementeret et program til beregning af koncentrationen  $c(r, t)$ , udfra den formel vi fandt da vi løste ligningssystemet v.h.j.a. separation af de variable. Programmet er skevet i programmeringssproget Pascal, og er opdelt i en række mindre procedurer samt et lille hovedprogram.

Vi har tidligere i rapporten fundet frem til følgende udtryk for koncentrationen

$$(1a) \quad c(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (T_i(t) X_{\omega_i}(x)) + c_0(t)$$

hvor

$$(1b) \quad T_i(t) = -a_i e^{-\delta\omega_i^2 t} \int_0^t \frac{\partial c_0(\tau)}{\partial \tau} e^{\delta\omega_i^2 \tau} d\tau + e^{-\delta\omega_i^2 t} T_i(0)$$

$$(1c) \quad X_{\omega_i}(x) = \frac{\sin \omega_i x}{x}, \text{ hvor } x = \frac{r}{a}$$

og

$$(1d) \quad c_0(t) = b_1 e^{a_1 t} + b_2 e^{a_2 t} + b_3 e^{a_3 t}$$

I udtrykket for  $X_{\omega_i}(x)$  er  $a$  øjets radius, dvs.  $a = 1.2$ , og  $r$  er afstanden målt fra centrum af øjet.  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  og  $b_3$  i udtrykket for  $c_0(t)$  er bestemt i appendix 1.

Regner vi lidt på udtrykket for  $T_i(t)$  får vi

$$T_i(t) = -\bar{a}_i e^{-\delta\omega_i^2 t} \int_0^t \frac{dc_0}{d\tau} e^{\delta\omega_i^2 \tau} d\tau + e^{-\delta\omega_i^2 t} T_i(0)$$

$$\begin{aligned} T_i(t) = & -\bar{a}_i e^{-\delta\omega_i^2 t} \left( a_1 b_1 \int_0^t e^{(a_1 + \delta\omega_i^2)\tau} d\tau + a_2 b_2 \int_0^t e^{(a_2 + \delta\omega_i^2)\tau} d\tau + a_3 b_3 \int_0^t e^{(a_3 + \delta\omega_i^2)\tau} d\tau \right) + \\ & e^{-\delta\omega_i^2 t} T_i(0) \end{aligned}$$

$$T_i(t) = -\bar{a}_i e^{-\delta \omega_i^2 t} \left( \frac{a_1 b_1}{a_1 + \delta \omega_i^2} \left[ e^{(a_1 + \delta \omega_i^2)t} \right]_0^t + \frac{a_2 b_2}{a_2 + \delta \omega_i^2} \left[ e^{(a_2 + \delta \omega_i^2)t} \right]_0^t + \frac{a_3 b_3}{a_3 + \delta \omega_i^2} \left[ e^{(a_3 + \delta \omega_i^2)t} \right]_0^t \right) + e^{-\delta \omega_i^2 t} T_i(0)$$

$$(2a) \quad T_i(t) = -\bar{a}_i \left( \frac{a_1 b_1}{a_1 + \delta \omega_i^2} \left( e^{a_1 t} - e^{-\delta \omega_i^2 t} \right) + \frac{a_2 b_2}{a_2 + \delta \omega_i^2} \left( e^{a_2 t} - e^{-\delta \omega_i^2 t} \right) + \frac{a_3 b_3}{a_3 + \delta \omega_i^2} \left( e^{a_3 t} - e^{-\delta \omega_i^2 t} \right) \right) + e^{-\delta \omega_i^2 t} T_i(0)$$

I udtrykket for  $T_i(t)$  er  $\bar{a}_i$  givet ved

$$(2b) \quad \bar{a}_i = \frac{4 \sin \omega_i - 4 \omega_i \cos \omega_i}{2 \omega_i^2 - \omega_i \sin 2 \omega_i}$$

$T_i(0)$  er givet ved

$$(2c) \quad T_i(0) = -c_0(0) \bar{a}_i,$$

og  $\delta$  er givet ved

$$(2d) \quad \delta = \frac{D}{a^2} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{1.2^2} s^{-1}$$

#### BESTEMMELSE AF EGENVÆRDIER

Egenværdierne  $\omega_i$  bestemmes ud fra løsning af ligningen

$$(3) \quad \tan \omega_i = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_i \Leftrightarrow \tan \omega_i - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_i = 0,$$

hvor  $\alpha$  bestemmes ud fra

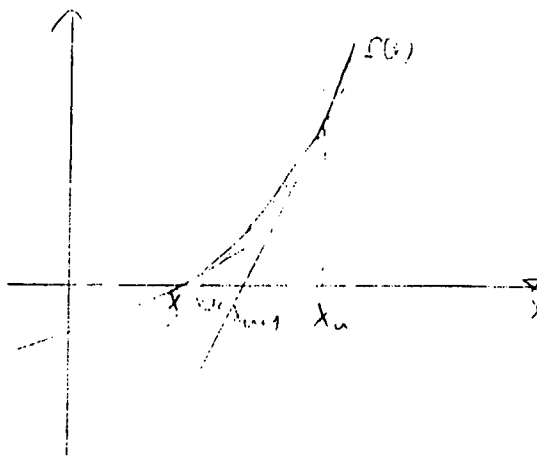
$$\alpha = \frac{D}{aP} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{1.2 \cdot 10^{-6}} = 5$$

Vi skal altså bestemme nulpunkter for funktionen

$$(4) \quad f(x) = \tan x - \frac{\alpha}{\alpha - 1} x$$

Disse nulpunkter beregnes vha. Newton-Raphsons iterationsformel. Hvis funktionen man vil bestemme nulpunkter for er beskrevet ved  $f(x)$ , er iterationsformlen givet ved

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Figur 1.

Geometrisk kan formelen fortolkes som, at  $x_{n+1}$  fås som skæringspunktet mellem x-aksen og tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $(x_n, f(x_n))$ , se figur 1.

Da løsningerne til ligningen tilnærmer sig  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$  jo større  $n$  bliver, sker der det at tangenten for  $f(x_n)$  bliver meget stejl. I en sådan situation, med stejl tangent, fungerer Newton-Raphsons formel dårligt, da den benytter den afledede af funktionen, og vi omskriver derfor (3) således :

$$\tan \omega_i = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_i \Leftrightarrow \cot \omega_i = \frac{\alpha - 1}{\alpha \omega_i}$$

hvorved vi kommer udenom problemet. Vi bestemmer altså egen-værdierne, ved at finde nulpunkterne for funktionen

$$(6) \quad f(x) = \cot x - \frac{\alpha - 1}{\alpha x}$$

Da den implementering af Pascal, som vi anvender ikke indeholder funktionen  $\cot x$ , omskrives  $f(x)$  til

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\alpha - 1}{\alpha x}$$

Vi bestemmer nu  $f'(x)$  :

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha^2 x^2} = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{\alpha - 1}{\alpha x^2}$$

Nulpunkterne beregnes således ud fra iterationsformlen



$$(7) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{\cos x_n}{\sin x_n} - \frac{\alpha-1}{\alpha x_n}}{\frac{-1}{\sin^2 x_n} + \frac{\alpha-1}{\alpha x_n^2}}$$

Ønsker læseren en mere detaljeret beskrivelse af Newton-Raphsons iterationsformel, kan vi henvise til f.eks. (Carstensen, 1981).

#### PROCEDURER OG HOVEDPROGRAM.

I programmet **seperation** er beregninger af  $T_i$ 'erne anbragt i en procedure kaldet **beregn\_Ti**. Beregningerne af  $a_i$ 'erne er anbragt i en procedure kaldet **beregn\_ai**. Beregningerne af  $T_i(0)$ 'erne er anbragt i en procedure kaldet **beregn\_Ti\_0**. Beregningerne af egenværdierne er anbragt i en procedure kaldet **beregn\_omega**, og endelig er beregningen af en koncentration anbragt i en procedure kaldet **beregn\_c**.

I hovedprogrammet tildeles en række konstanter deres værdi, og en række variable initialiseres. Herudover er der i hovedprogrammet 2 repeat-løkker, hvorfra beregningen af koncentrationen af flourescein inde i øjet styres. Vi bestemmer koncentrationen af flourescein til tiden 0, 10, 20, ..., 120 min i en afstand fra centrum af øjet på henholdsvis 0.1, 0.2, ..., 1.2 cm. Det skal bemærkes, at der i programmet regnes i sekunder og ikke i minutter.

Nu er koncentrationen af flourescein jo givet ved en sum med uendelig mange led. I praksis er det naturligvis nødvendigt at begrænse antallet af led, der regnes med. Det er sådan, at jo længere vi kommer ud i rækken af led ved udviklingen af en koncentration, jo mindre bliver bidraget, og vi har valgt at operere med en nøjagtighed, der siger, at når et nyt led er af en sådan størrelsesorden, at

$$(8) \quad \frac{\text{værdien af et nyt led i summen}}{\text{koncentrationens værdi indtil da}} \leq 10^{-4},$$

så stoppes summeringen. I programmet er tælleren i ovenstående brøk kaldet **tillæg** og nævneren, svarer til **værdi + c<sub>0</sub>(t)**.

Det er klart, at jo flere led, der skal med i den sum en koncentration er givet ved, jo flere beregninger skal der udføres. Vi har i den grad, det ikke ødelægger overskueligheden af programmet, tilstræbt kun at udføre identiske beregninger en gang. Beregningen af  $\omega_i$ ,  $a_i$  og  $T_i(0)$  foregår således ikke hver de benyttes, men en gang for alle. Da antallet af led der skal med i beregningen af en funktionsværdi, ikke kan afgøres på forhånd, beregnes de ovennævnte værdier i blokke på 100, således at der til en start beregnes de første 100 led. Hvis det under de senere beregninger skulle vise sig, at de første 100 led ikke var tilstrækkelige til opnå den ønskede præcision for et sæt af  $(r, t)$ , beregnes de næste 100 led, osv.

#### BEREGNING AF $c(r, t)$ FOR $r \rightarrow 0$ .

Programmet kan ikke uden videre beregne koncentrationen i centrum af øjet, da  $r$  indgår i tælleren i beregningen af  $X_{\omega_i}(x)$ ;  $x = \frac{r}{a}$ . Vi er derfor nødt til at foretage en særskilt vurdering i dette punkt.

$X_{\omega_i}(x)$  beregnes som :

$$X_{\omega_i}(x) = \frac{\sin \omega_i x}{x}, \quad \text{hvor } x = \frac{r}{a}$$

Grænseværdien kan bestemmes ved at benytte taylorudviklingen af sinus som er :

$$(9) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

derved får man for  $\frac{\sin \omega_i x}{x}$  :

$$(9) \quad \frac{\sin \omega_i x}{x} = \omega_i + O(x^2) \text{ for } x \rightarrow 0$$

Grænseværdien er altså for  $x \rightarrow 0$   $\omega_i$ , og dermed kan koncentrationen i dette punkt beregnes som :

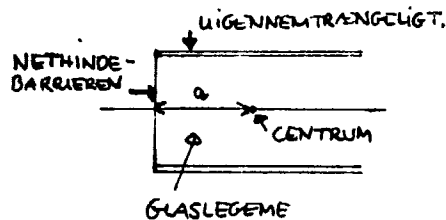
$$X_{\omega_i}(0) = \omega_i$$

#### Appendix 4. Vurdering af en plangeometrisk model.

I dette appendix viser vi, at den af (Krogsaa et. al., 1981) opstillede formel for  $P$ , ifølge den opstillede model i (Larsen et. al., 1983), vil føre til en unøjagtighed mht. bestemmelse af  $P$ .

Da Krogsaa et. al. skulle opstille en formel til bestemmelse af permeabiliteten (her kaldet  $P'$ ), gjorde de følgende antagelser:

1) De antog at man kunne betragte retina som plan, og formulerede derfor diffusionsligningen i en plan geometri. Figur 1 viser en skitse af deres geometri



Figur en plan-geometrisk model af øjet

Diffusionsligningen kommer derfor til at se ud som følger

$$(1) \quad D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

2) Da koncentrationen  $c(r, t)$  i øjet, for de tidsrum vi betragter (små  $t$ -værdier), er langt mindre end koncentrationen uden for øjet, valgte man i randbetingelsen

$$-D \left. \frac{\partial c}{\partial r}(r, t) \right|_{r=a} = P'(c(a, t) - c_0(t))$$

at se bort fra koncentrationen i øjet  $c(a, t)$ . Dette betyder, at man ikke regner med tilbagestrømning fra øjet til blodet. Randbetingelsen bliver da

$$(2) \quad D \frac{\partial c}{\partial r}(r, t) \Big|_{r=a} = P' c_0(t)$$

De øvrige to betingelser

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial r}(r, t) \Big|_{r=0} = 0$$

og

$$(4) \quad c(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a$$

gælder stadig.

Vi vil nu i den plane geometri, finde en formel for  $P'$ . Vi starter med at beregne mængden af stof i øjet til tiden  $t$ . I den plane geometri kan volumen af en skive med tværsnitsarealet  $A$ , og bredden  $dr$  skrives som

$$Vol = A dr$$

Da  $dr$  er infinitesimalt lille kan koncentrationen i dette område betragtes som konstant, og mængden af stof i skiven bliver så

$$m(r, t) = c(r, t) A dr$$

Den totale mængde af stof i øjet er således givet ved

$$M(t) = \int_0^a c(r, t) A dr$$

For at komme videre i beregningerne, kigger vi nu på den tidsafledede af  $M(t)$

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^a A \cdot c(r, t) dr \right) \\ &= A \cdot \int_0^a \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} dr \end{aligned}$$

Idet vi tager  $\frac{\partial c}{\partial t}$  fra (1), kan (5) omformes til

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= A \cdot D \int_0^a \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} dr \\ &= A \cdot D \left[ \frac{\partial c}{\partial r} \right]_0^a\end{aligned}$$

Her husker vi på (2) og (3), som giver værdien af hver sin grænse, og man ender så op med følgende :

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= A \cdot D \left( \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=a} - \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} \right) \\ &= A \cdot D \left( \frac{P'}{D} \cdot c_0(t) - 0 \right) \\ &= A \cdot P' \cdot c_0(t)\end{aligned}$$

Man finder herefter let  $M(t)$  :

$$\begin{aligned}M(t) &= \int_0^t \frac{dM}{dt} dt = \int_0^t A \cdot P' \cdot c_0(t) dt \\ &= A \cdot P' \cdot \int_0^t c_0(t) dt\end{aligned}$$

og fra (5) får vi nu :

$$M(t) = A \cdot \int_0^a c(r,t) dr = A \cdot P' \int_0^t c_0(t) dt$$

Heraf kan  $P'$  så findes

$$(6) \quad P' = \frac{A \cdot \int_0^a c(r,t) dr}{A \cdot \int_0^t c_0(t) dt} = \frac{\int_0^a c(r,t) dr}{\int_0^t c_0(t) dt}$$

En tolkning af (6) kunne være, at permeabiliteten  $P'$  kan bestemmes som forholdet mellem mængden af stof i øjet til tiden  $t$ , og den mængde af stof, der har været tilstede i en skive med tykkelsen 1 udenfor øjet, indtil tiden  $t$ .

Det første er indlysende (jvnf. formel (5)). Det andet ses af, at volumen af en skive med tværsnitsareal  $A$  og tykkelsen  $1$  er  $1 \cdot A$ . Mængden af stof i denne skive til tiden  $t$  er så  $c_0(t)A$ , og den samlede mængde indtil tiden  $t$  bliver så

$$A \int_0^t c_0(\tau) d\tau$$

Hvis det i (6) opnået resultat var nøjagtig skulle man, hvis man indsætter formelen for  $c(r, t)$ , som er udledt tidligere i rapporten få at

$$P' = P$$

Vi vil nu vise, at dette ikke er tilfældet.

Hvis man sætter

$$I(t) = \int_0^a c(r, t) dr$$

bliver (6) til

$$P' = \frac{I(t)}{\int_0^t c_0(\tau) d\tau}$$

Da  $c_0(t)$  bygger på målte værdier, kan den ikke skrives om. Vi vil derfor koncentrere os om  $I(t)$ . Vi vil starte med at laplacetransformere  $I(t)$ , og idet vi erindrer, at den laplacetransformerede af  $c(r, t)$  er

$$L\{c(r, t)\} = \tilde{c}(r, s) = \tilde{c}_0(s) \tilde{F}(r, s),$$

hvor

$$\tilde{F}(r, s) = \frac{\frac{aP}{r\sqrt{D}} \sinh r \sqrt{\frac{s}{D}}}{\lambda \sinh a \sqrt{\frac{s}{D}} + \sqrt{s} \cosh a \sqrt{\frac{s}{D}}}$$

får vi, at

$$\begin{aligned} (7) \quad L\{I(t)\} &= \tilde{I}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^a c(r, t) dr \right) dt \\ &= \int_0^a \int_0^\infty e^{-st} c(r, t) dt dr \\ &= \int_0^a L\{c(r, t)\} dr = \int_0^a \tilde{c}(r, s) dr \\ &= \int_0^a \tilde{c}_0(s) \cdot \tilde{F}(r, s) dr \\ &= \tilde{c}_0(s) \cdot \frac{a \cdot P / \sqrt{D}}{\lambda \sinh(a \sqrt{\frac{s}{D}}) + \sqrt{s} \cdot \cosh(a \sqrt{\frac{s}{D}})} \int_0^a \frac{\sinh(r \sqrt{\frac{s}{D}})}{r} dr \end{aligned}$$

Ved at anvende de samme vurderinger, som vi anvendte i forbindelse med reduktion af  $\tilde{F}(r, s)$  tidligere i rapporten, opnår vi herefter følgende formel for  $I(t)$  :

$$\tilde{I}(s) \approx C_0(s) \frac{a \cdot P}{\sqrt{D \cdot s}} \cdot 2 e^{-(a\sqrt{\frac{s}{D}})} \int_0^a \frac{\sinh(r\sqrt{\frac{s}{D}})}{r} dr$$

Vi foretager nu et parameterskift  $x = r\sqrt{\frac{s}{D}}$  i integralet og får :

$$(8) \quad \tilde{I}(s) \approx C_0(s) \cdot \frac{a \cdot P}{\sqrt{D \cdot s}} \cdot 2 e^{-(a\sqrt{\frac{s}{D}})} \int_0^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} \frac{\sinh x}{x} dx$$

For overskuelighedens skyld vil vi nu nøjes med at kigge nærmere på en del af det foregående, nemlig :

$$\tilde{I}_1(s) = e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \int_0^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} \frac{\sinh x}{x} dx$$

Den resterende del af (8) vender vi tilbage til senere.

Da  $\frac{\cosh(x)}{x}$  kommer til at indgå i udregningen af ovenstående integral, og da denne funktion har en singularitet i  $x = 0$ , skiller vi en lille omegn ( $0$  til  $\alpha$ ) fra det interval, der skal integreres over. Idet  $\frac{\sinh(x)}{x}$  konvergerer mod 1 for  $x$  gående mod nul, kan integralet over denne omegn sættes til en værdi  $k$ . Anvendes der partiel integration på udtrykket for  $I(t)$ , får vi så

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(s) &= e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \left( \int_0^\alpha \frac{\sinh x}{x} dx + \int_\alpha^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} \frac{\sinh x}{x} dx \right) \\ &= e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \left( k + \left[ \frac{\cosh x}{x} \right]_\alpha^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + \int_\alpha^{a\sqrt{\frac{s}{D}}} \frac{\cosh x}{x^2} dx \right) \\ &= e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \left( k_1 + \frac{\cosh a\sqrt{\frac{s}{D}}}{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + \frac{\sinh a\sqrt{\frac{s}{D}}}{(a\sqrt{\frac{s}{D}})^2} + O\left(\frac{e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}{(a\sqrt{\frac{s}{D}})^3}\right) \right) \end{aligned}$$

hvor  $k_1$  er bidraget fra det første integral plus bidraget fra det venstre endepunkt af de øvrige, og  $O\left(\frac{e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}{(a\sqrt{\frac{s}{D}})^3}\right)$  er restleddene ved integrationen.

Idet vi nu ser bort fra  $k_1$  og  $O\left(\frac{e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}{(a\sqrt{\frac{s}{D}})^3}\right)$  får vi

$$\tilde{I}_1(s) \approx e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \left( \frac{\cosh a\sqrt{\frac{s}{D}}}{a\sqrt{\frac{s}{D}}} - \frac{\sinh(a\sqrt{\frac{s}{D}})}{(a\sqrt{\frac{s}{D}})^2} \right)$$

Foretages nu den sædvanlige approximation for  $\sinh x$  og  $\cosh x$

$$\sinh x \simeq \frac{e^x}{2}, \quad \cosh x \simeq \frac{e^x}{2}$$

når vi herefter frem til

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(s) &\simeq e^{-a\sqrt{\frac{s}{D}}} \left( \frac{e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}{2a\sqrt{\frac{s}{D}}} + \frac{e^{a\sqrt{\frac{s}{D}}}}{2(a\sqrt{\frac{s}{D}})^2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + \frac{1}{a^2 \frac{s}{D}} \right) \end{aligned}$$

Dette indsættes i (8), og vi opnår da

$$\begin{aligned} \tilde{I}(s) &= c_0(s) \frac{a \cdot P}{\sqrt{D} \cdot s} \left( \frac{1}{a\sqrt{\frac{s}{D}}} + \frac{1}{a^2 \frac{s}{D}} \right) \\ &= c_0(s) \left( \frac{P}{s} + \frac{P \cdot \sqrt{D}}{a \cdot s^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Vi transformerer nu tilbage vha. foldningsreglen, og får

$$I(t) = \int_0^t c_0(t-\tau) P d\tau + \int_0^t c_0(t-\tau) \frac{P\sqrt{D}}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} d\tau$$

idet  $\frac{P}{s}$  inverteret er  $P$ , og  $\frac{P\sqrt{D}}{a}$  inverteret er  $\frac{P\sqrt{D}}{a} \frac{\sqrt{\tau}}{\Gamma(\frac{3}{2})}$ , hvor  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

Hvis vi nu endelig griber tilbage til formel (6) får vi

$$p' \simeq \frac{P \cdot \int_0^t c_0(t-\tau) d\tau + \frac{P \cdot \sqrt{D} \cdot 2}{a \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \sqrt{\tau} c_0(t-\tau) d\tau}{\int_0^t c_0(t) dt}$$

eller (da  $\int_0^t c_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t c_0(t) dt$ ):

$$p' \simeq p + \frac{2P \cdot \sqrt{D}}{a \sqrt{\pi}} \frac{\int_0^t \sqrt{\tau} \cdot c_0(t-\tau) d\tau}{\int_0^t c_0(t-\tau) d\tau}$$



Vi ser altså , at der er en fejl af størrelsesordenen i forhold til P givet ved :

$$\frac{2\sqrt{D}}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\int_0^t \sqrt{\tau} \cdot c_0(t-\tau) d\tau}{\int_0^t c_0(t-\tau) d\tau}$$

ved den plane geometri. Dog skal man være opmærksom på de tilnærmelser, der begås i beregningerne af  $c(r, t)$  og  $I(t)$ .

**Appendix 5**  
**Udviklingsætningens gyldighed i løsningen**  
**v.hj.a. separation af de variable**

Vi vil i dette appendix vise tilladeligheden af at bruge udviklingsætningen formuleret s.105 i (Hansen, 1971), når løsningen på det endimensionale problem findes ved separation af de variable.

Vores differentialligning er givet ved

$$X''(x) + \frac{2}{x}X'(x) + \omega^2 X(x) = 0$$

der også kan skrives som

$$(x^2 X'(x))' = -\omega^2 x^2 X(x)$$

Vi lader  $L$  betegne differentialoperatoren i vores problem :

$$(1) \quad L = \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d}{dx} \right)$$

Vi vil nu vise at  $L$  er selvadjungeret, det vil sige :

$$(2) \quad (z, Ly) = (Lz, y)$$

hvor  $(, )$  er det indre produkt på intervallet  $[a, b]$  givet ved :

$$(3) \quad (z, y) = \int_a^b z^* \cdot y \, dx$$

Indsætter vi vores differentialoperator i venstresiden af (2) får vi ved hjælp af delvis integration :

$$(4) \quad \int_0^1 z^* \left( \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) \right) dx = z^* \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) \Big|_0^1 + y \cdot z'^* x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 y (2x z'^* + x^2 z''^*) dx$$

Idet randbetingelsen er :

$$z'(0) = 0 \text{ og } y'(0) = 0 \text{ og}$$

$$z(1) + \alpha z'(1) = 0$$

$$y(1) + \alpha y'(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z(1)}{z'(1)} = \frac{y(1)}{y'(1)}$$

giver de første to led i (4) intet bidrag, og (4) bliver da til

$$(5) \int_0^1 y \left( \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dz}{dx} \right) \right)^* dx$$

Da vi har et selvadjungeret egenværdiproblem, er samtlige egenværdier reelle. I et selvadjungeret egenværdiproblem med differentiaalligningen

$$Ly = \lambda \cdot r \cdot y$$

hvor  $r$  er en kontinuert funktion, der antager luttet positive værdier i det indre af definitionsintervallet, gælder ortogonalitetsrelationen  $(\varphi, r\psi) = 0$ . Her er  $\varphi$  og  $\psi$  egenfunktionerne hørende til forskellige egenværdier. I vores tilfælde er  $y = X(x)$ ,  $\lambda = -\omega^2$  og  $r = x^2$ . Vi viser, at ortogonalitetsrelationen gælder ved vores konkrete problem, dvs. at vi viser at systemet af egenfunktioner  $X_m = \frac{\sin \omega_m \cdot x}{x}$  er ortogonalt når  $r = x^2$  da :

$$\begin{aligned} (X_i, X_j \cdot x^2) &= \int_0^1 \frac{\sin \omega_i x}{x} \cdot \frac{\sin \omega_j x}{x} \cdot x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\cos(\omega_i - \omega_j)x - \cos(\omega_i + \omega_j)x) dx = \\ &= \frac{\cos \omega_i \cos \omega_j}{2} \left( \frac{\tan \omega_i - \tan \omega_j}{\omega_i - \omega_j} - \frac{\tan \omega_i + \tan \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \right) = \end{aligned}$$

Vi benytter nu at  $\tan \omega_i = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \omega_i$ . Parantesen giver da :

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\cos \omega_i \cos \omega_j}{2} \left( \frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_i - \omega_j} - \frac{\omega_i + \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \right) = 0$$

$$0 = 0$$

Vi mangler nu kun at godtgøre at systemet af egenfunktioner er fuldstændigt. Da vi har set at  $\omega_i$  er reel og da

$$\frac{\sin \omega_i x}{x} = -\frac{\sin(-\omega_i x)}{x}$$

↓

$$X_{\omega_i} = -X_{-\omega_i},$$

udgør systemet  $\{X_{\omega_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  hvor  $\omega_i$  er en positiv løsning til

$$\tan \omega_m = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_m$$

et fuldstændigt system af egenfunktioner. Alt ialt har vi således, at betingelserne for at anvende udviklingssætningen er opfyldt, så enhver stykkevis differentiabel funktion  $y$ , der er defineret på  $[0, 1]$  kan på entydig vis udvikles i en række efter  $X_m$ . Rækken er :

$$(6) \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(X_m, x^2 y)}{(X_m, x^2 X_m)} X_m$$

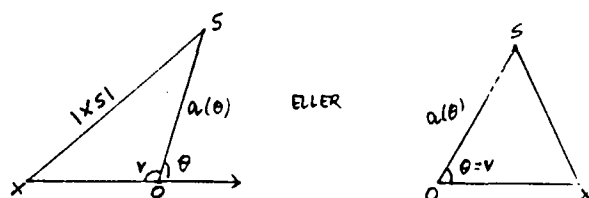
## Appendix 6 Omregning af integralligningen

Vi skal nu vise, hvorledes man kan omforme integralligningen :

$$(1) \quad \bar{c}(Q) = \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(S) \bar{E}(|Q'S|) dS$$

opstillet i kapitel 7 til netop at beskrive vores problem, hvor  $\bar{c}(Q)$  kun er kendt i en række punkter på øjets geometriske akse. Heri ligger der 2 opgaver. For det første at beregne  $|XS|$ , hvor  $X$  er et punkt på akse, og for det andet at skifte integrationsvariabel.

Afstanden  $|XS|$  beregnes v.h.j.a. de almindelige regneregler for trekanter.



Figur 1. Beregning af  $|XS|$ .

$$|XS|^2 = |XO|^2 + |OS|^2 - 2|XO||OS| \cos v$$

hvor  $v$  er vinklen **inde** i trekanten på figur 1. Kaldes afstanden  $|XO|$  for  $x$ , og afstanden  $|OS|$  for  $a(\theta)$  fås :

$$(2) \quad |XS| = \sqrt{x^2 + a(\theta)^2 - 2|x|a(\theta) \cos v}$$

Vi ser nu på leddet  $|x| \cos v$ . For  $x < 0$  er  $v = \pi - \theta$ , og for  $x > 0$  er  $v = \theta$ . dermed får man :

$$|x| \cos v = \begin{cases} -x \cos(\pi - \theta) & x < 0 \\ x \cos \theta & x > 0 \end{cases} = x \cos \theta$$

(2) bliver så til :

$$(3) \quad |XS| = \sqrt{x^2 + a(\theta)^2 - 2x a(\theta) \cos \theta}$$

Da  $S$  koordinater kun afhænger af  $\theta$  og  $\varphi$   $S(a(\theta), \theta, \varphi)$ , og da værdien af  $\varphi$  pga. rotationssymmetrien, er uden betydning for beregningen af integralet, vil det være naturligt at skifte integrationsvariabel, fra  $S$  til  $\theta$ .  $\tilde{\sigma}(S)$  kan vi derfor skrive som  $\tilde{\sigma}(\theta)$ , blot med det forbehold, at  $\tilde{\sigma}$  naturligvis skal tilpasses den nye parameter.

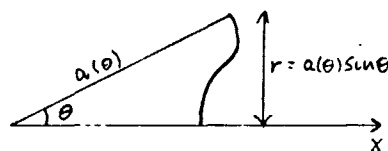
Når vi integrerer, gør vi det over alle punkterne  $S$  på randen  $\partial\Omega$ . En integration over  $\theta$  må derfor for hver værdi af  $\theta$ , give bidraget fra hele den cirkelskive som ligger i vinklen  $\theta$  fra origo. Vi summerer så op over alle skrivelserne ved i integrationen at lade  $\theta$  løbe fra 0 til  $\pi$ , dvs. fra for til bag i øjet.

For at kunne beregne integralet over  $\theta$ , må vi beregne arealet af cirkelskiven liggende i vinklen  $\theta$ , og med "vinkelbredden"  $d\theta$ . Dette areal kan beregnes som omkreds gange bredde.

Omkredsen af en cirkel er som bekendt :

$$2\pi \text{ radius}$$

Radius vil her være afstanden fra akse til skiven (Figur 2).

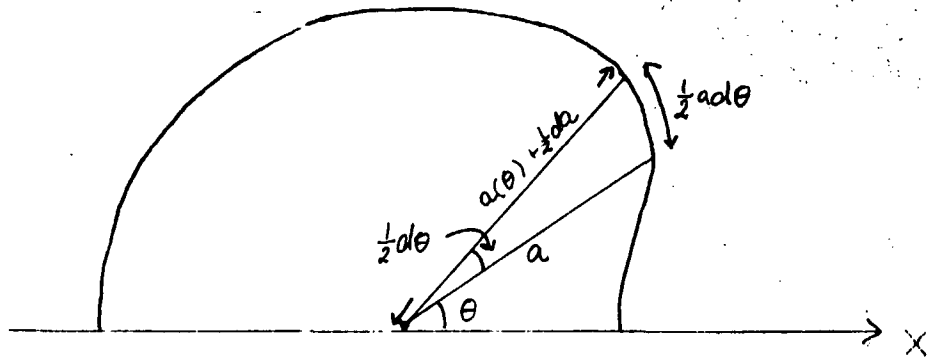


Figur 2. Beregning af omkreds

Denne radius er  $a(\theta) \sin \theta$ , og omkredsen bliver derfor :

$$(4) \quad 2\pi a(\theta) \sin \theta$$

Hvis øjet havde været kuglesymmetrisk kunne bredden af skiven være beregnet som  $a(\theta) d\theta$ . Dette er imidlertid ikke tilfældet, og vi må derfor tage højde for den ændring en afvigelse vil give.



Figur 3. Beregning af bredden.

Afvigelsen fra det kuglesymmetriske, kan i  $\theta + \frac{1}{2}d\theta$  tilnærmes med  $a(\theta) + \frac{1}{2}da - a(\theta) = \frac{1}{2}da$ . Da  $d\theta$  er infinitesimalt lille, kan kurven med god tilnærmelse siges at være en ret linie, og afvigelsen siges at stå vinkelret på denne. Vi kan derfor bruge Pythagores til at beregne den reelle bredde af stykket :

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}da\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a(\theta)d\theta\right)^2} =$$

$$\sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

I alt summerer koordinatskiftet op i :

$$(5) \quad dS = 2 \pi a(\theta) \sin \theta \sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

og vi får den følgende integralligning :

$$(6) \quad \tilde{z}(X) = \int_0^\pi \tilde{\sigma}(\theta) K(X, \theta) d\theta$$

hvor

$$k(X, \theta) = \tilde{E} \left( \sqrt{x^2 + a(\theta)^2 - 2x a(\theta) \cos \theta} \right).$$

$$(7) \quad 2 \pi a(\theta) \sin \theta \sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2}$$

## Bilag 1.

Artiklen "transient transport  
across the blood-retina barrier",  
optrykt fra "Bulletin of  
Mathematical Biology.

*Bulletin of Mathematical Biology* Vol. 45, No. 5, pp. 749-758, 1983.  
Printed in Great Britain

0092-8240/83\$3.00 + 0.00  
Pergamon Press Ltd.  
© 1983 Society for Mathematical Biology

### TRANSIENT TRANSPORT ACROSS THE BLOOD- RETINA BARRIER

- JESPER LARSEN  
MATH-TECH Institute,  
Sommervej 7,  
DK-2920 Charlottenlund, Denmark
  
- HENRIK LUND-ANDERSEN and BENT KROGSAA  
University Eye Clinic,  
Rigshospitalet, E2061,  
DK-2100 Copenhagen, Denmark

A mathematical model of the transport of fluorescein across the blood-retina barrier in the transient state and the subsequent diffusion of fluorescein in the vitreous body is presented. The function of the barrier is lumped in a single parameter—the permeability. The sensitivity of this parameter due to changes in the other parameters of the model is given. This establishes the foundation for the quantitative assessment of the barrier function through vitreous fluorophotometry.

*Ombygning af* → *ret. bl. / ret. h. / back*

*1. Introduction.* The blood-retina barrier separates the retinal cells from the blood stream. The barrier is composed of the pigment epithelium and the endothelium of the retinal vasculature (Cunha-Vaz, 1979). The concept 'barrier' (cf. the blood-brain barrier) refers to the fact that under normal circumstances the barrier is tight, permitting passage of only biologically important substances (glucose and certain amino acids), while all other water ~~sclerosis disseminata and retinitis pigmentosa~~ are associated with a barrier. However, a variety of diseases—diabetes mellitus, arterial hypertension, sclerosis disseminata and retinitis pigmentosa—are associated with a barrier breakdown (Cunha-Vaz, 1980). The resultant increase in the permeability of the barrier disturbs the retinal homeostasis, leading to a reduction of visual acuity and, in severe cases, to blindness.

An exact determination of the permeability is of considerable clinical interest, since it provides a deeper understanding of the pathophysiology of the disease in question. Also, the permeability functions as a sensitive parameter for the assessment of the effectiveness of a given treatment and the intensity of the disease. Finally, an exact determination of the permeability is of importance in genetical advising, since a slight increase in the permeability might be the only indicator of the fact that an otherwise healthy person is a carrier of a certain disease.

In a method of measuring the penetration through the blood-retina barrier the water-soluble substance fluorescein (mol. wt = 372,  $r = 5.5 \text{ \AA}$ ) is injected into the blood. Simultaneous records of the free (not plasma-bound) fluorescein concentration along the optical axis in the vitreous body of the eye are registered using ultrafiltration and optical techniques. The details of the experimental technique are found in Lund-Andersen *et al.* (1983b). Since the injected fluorescein is continuously eliminated from the blood, the transport problem is transient. The time history of the fluorescein concentration in the blood plasma together with a parameter describing the permeation through the blood-retina barrier and the diffusion coefficient in the vitreous body suffice to determine the concentration of fluorescein in the vitreous body.

Cunha-Vaz and Maurice (1967) used various solutions from Crank (1956) to calculate the permeability of the blood-retina barrier in rabbits. However, the solutions of Crank apply for a constant flux through the barrier, a condition which is difficult to establish in human examinations and which is absent in the paper mentioned. As an approximate evaluation of the permeability of the barrier, Lund-Andersen and Lassen (1981) normalized the area below the concentration profile in the vitreous with the area below the time history of the fluorescein concentration in the blood plasma. A more elaborate approximation was presented by Krogsaa *et al.* (1981).

In the present paper a mathematical model of transport through the blood-retina barrier is formulated. A solution which is valid for the actual parameter range is found. This forms the basis for the solution of the inverse problem, i.e. the problem of determining the involved parameters from the measured fluorescein concentrations in the blood and in the vitreous. An explicit formula for the permeability is derived. From this the sensitivity of the permeability due to changes in the other parameters is found. The present solution is compared with the approximate formula of Krogsaa *et al.* (1981).

**2. The Boundary-value Problem.** Figure 1 shows a schematical section through the eye. The transport of fluorescein in the vitreous is assumed to be governed by the diffusion equation (cf. Fatt, 1975):

$$\nabla \cdot (D \nabla c) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

where  $c$  is the concentration,  $t$  is the time and  $D$  the diffusion coefficient, which is considered to be a constant. It is approximately equal to  $6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$ . A measure of the 'extent of diffusion' at time  $t$  is given by  $r = \sqrt{6Dt}$  (cf. Rubinow, 1975). An hour after the injection of fluorescein in the blood  $r \approx 0.36 \text{ cm}$ , which is one-third of the radius of curvature  $a$  of



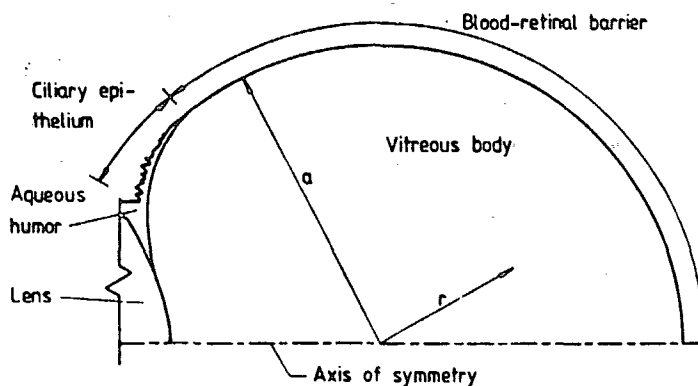


Figure 1. Schematic section through the eye,  $r$  = radial coordinate,  $a$  = radius of the retina-vitreous interface.

the retina. Thus a moderate amount of fluorescein in the aqueous humor has only little influence on the concentration profile at the back of the eye, which can then be considered to be part of a sphere of radius  $a$ . Hence, due to the symmetry, the diffusion in the vitreous can be reduced to a one-dimensional problem,

$$\frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (2)$$

where  $r$  is the radial distance (see Figure 1). The boundary condition at  $r = 0$  is, due to symmetry,

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (3)$$

The initial condition is deduced from the fact that prior to the injection there is no fluorescein in the vitreous body, i.e.

$$c(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

*The barrier condition.* As mentioned earlier, the blood-retina barrier is composed of two structures, i.e. the pigment epithelium and the endothelium of the retinal vascular system. Anatomically the two barrier systems are separated from each other by only a few hundred micrometers, and they can in the present context be regarded as a single barrier. When a substance (e.g. fluorescein) has penetrated the barrier there is free access through the retinal extracellular space to the vitreous body.

In the formulation of the barrier condition we have used the presumably simplest assumption that the net flux across the barrier is proportional to the difference in the concentrations on the two sides of the barrier. The proportionality factor  $P$  is then a measure of the permeability of the barrier.  $P$ , which we regard as a permeability coefficient, is a lumped constant reflecting all transport processes responsible for the permeation, including transport due to differences in the electrical potential and active transport, as suggested by Cunha-Vaz and Maurice (1967) from the experiments with rabbits. For humans we find that the model based on our simple assumption fits well with experimental data (see Figure 4). Mathematically, the barrier condition is expressed as

$$-D\partial c(a, t)/\partial r = P(c(a, t) - c_0(t)) \quad (5)$$

or

$$c(a, t) + \frac{D}{P} \frac{\partial}{\partial r} c(a, t) = c_0(t), \quad (6)$$

where  $c_0(t)$  is the blood plasma concentration of free fluorescein. In the eye the real area of the blood-retina barrier is unknown and, in analogy with the formalism used in transport physiology (Crone, 1963),  $P$  represents the  $P \cdot S$  product (i.e. the product of the permeability and the surface area of the barrier) per unit area of the retina-vitreous interface.

**3. The Solution.** The solution to the problem stated in the previous section is easily found by the use of the Laplace transform. The result is

$$\bar{c}(r; s) = \bar{c}_0(s) \cdot \bar{F}(r; s), \quad (7)$$

where

$$\bar{F}(r; s) = \frac{\frac{aP}{r\sqrt{D}} \sinh r \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)}}{\lambda \sinh a \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)} + \sqrt{s} \cosh a \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)}}, \quad (8)$$

in which  $\lambda = P/\sqrt{D} - \sqrt{D}/a$  and  $s$  is the transform variable. If this solution is inverted directly there results a slowly convergent series for short times. Instead we expand (8) for  $\text{Re}(s)$  large (cf. Carslaw and Jaeger, 1959) and invert the result as

$$c(r, t) \approx \int_0^t c_0(t - \tau) F(r, \tau) d\tau, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}
 F(r, \tau) = \frac{Pa}{r\sqrt{D}} & \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{a^2+r^2}{4D\tau}} \sinh \frac{ar}{2D\tau} \right. \\
 & - \lambda e^{\lambda^2\tau} \left[ e^{\lambda(a-r)/\sqrt{D}} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{\tau} + \frac{a-r}{2\sqrt{D\tau}} \right) \right. \\
 & \left. \left. - e^{\lambda(a+r)/\sqrt{D}} \operatorname{erfc} \left( \lambda\sqrt{\tau} + \frac{a+r}{2\sqrt{D\tau}} \right) \right] \right], \quad (10)
 \end{aligned}$$

in which

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds$$

is the complementary error function.

In Figure 2 we have depicted the concentration profiles for  $a = 1.2$  cm,  $D = 6 \times 10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/sec and  $P = 10^{-6}$  cm/sec 30, 60 and 120 min after the injection of fluorescein. For the function  $c_0(t)$  we have used the values listed in Table I.

From Figure 2 we see that although the influx of fluorescein is positive during the period (2 hr) considered, the concentration right next to the

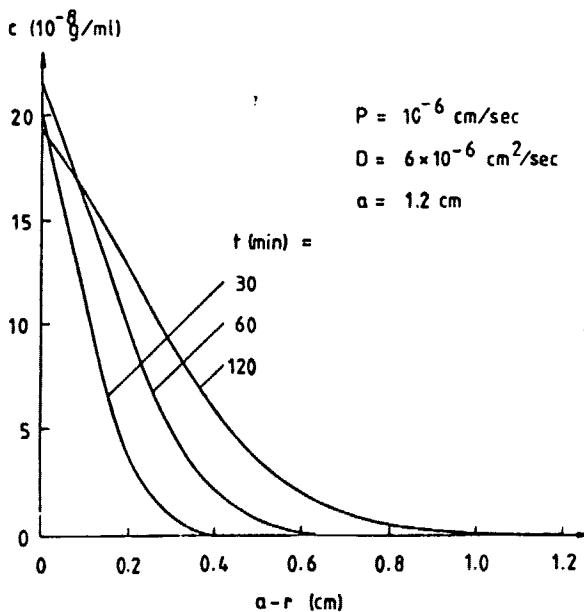


Figure 2. Concentration of fluorescein in the vitreous body vs the distance from the retina.  $D = 6 \times 10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/sec,  $P = 10^{-6}$  cm/sec and  $a = 1.2$  cm.

retina decreases. This demonstrates the changing balance between the time-dependent transport across the blood-retina barrier and the transport due to diffusion in the vitreous body.

TABLE I  
Concentration of Free (not Plasma-bound) Fluorescein  
in the Blood Plasma (cf. Lund-Andersen *et al.*, 1983a)

$t$	$c_0$ ( $10^{-6}$ g/ml)
0+	50.0
1	50.0
5	19.0
15	9.6
30	6.2
60	3.4
120	1.5

4. *The Inverse Problem.* In the fluorophotometric technique the concentration is determined as an average over a small volume spanned by the incident beam of blue light and the detector beam. The measured concentration of fluorescein is in error when this volume intersects with the retina due to the absorption of light in the retina. Thus it is not possible to measure the concentration of fluorescein within a distance of approximately 1 mm from the retina. Due to the spherical form of the vitreous a substantial part of the fluorescein which has penetrated the blood-retina barrier is within this layer. This is illustrated in Figure 3, where we have depicted the proportion of fluorescein in  $r < 0.9a$  to the total amount of fluorescein which has penetrated the barrier.

Krogsaa *et al.* (1981) used a clearance consideration for the determination of the permeability constant. Moreover, they considered (implicitly) the retina to be plane. For a plane retina with a unidirectional flux the permeability constant  $P'$  is found by integration of the one-dimensional diffusion equation with the boundary condition  $D\partial c(a, t)/\partial r = P'c_0(t)$ , i.e.

$$P' = \frac{\int_0^a c(r, t) dr}{\int_0^t c_0(\tau) d\tau} \quad (11)$$

By substitution of (9) into (11) we find

$$P' \approx P + \frac{4P\sqrt{D}}{a\sqrt{\pi}} \frac{\int_0^t c_0(t-\tau)\sqrt{\tau}d\tau}{\int_0^t c_0(\tau)d\tau} \quad (12)$$

The integrals in (12) can be calculated using the values for  $c_0$  from Table I. Thus we find that  $P'/P$  varies between 1.18, 1.28 and 1.41, 0.5, 1 and 2 hr after the time of the injection respectively for  $D = 6 \times 10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/sec and  $a = 1.2$  cm.

A simple formula for the permeability constant, taking into account that one cannot measure the concentration within a distance of  $a - r'$  from the retina, is found by integrating the solution (9) from 0 to  $r'$ , i.e.

$$P \approx \frac{\int_0^{r'} c(r, t)r^2 dr}{ar' \int_0^t c_0(t-\tau) \operatorname{erfc} \frac{a-r'}{2\sqrt{D\tau}} d\tau} \quad (13)$$

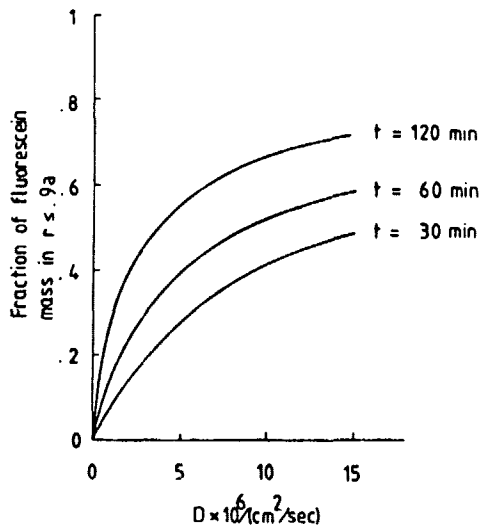


Figure 3. Fraction of fluorescein mass in  $r < 0.9a$  vs  $D$  for three different values of time.

We determine  $P$  and  $D$  by minimizing

$$S = \sum_{i=1}^N w_i (c_m(r_i, t) - c(r_i, t))^2, \quad (14)$$

where  $c_m(r_i, t)$  is the measured value at  $r = r_i$ ,  $c$  is the corresponding value given by (9) and

$$w_i = \min(1/\zeta^2, 1/c_m(r_i, t)^2), \quad (15)$$

in which  $\zeta = 10^{-9}$  g/ml. The minimum of (14) is found by use of Marquardt's (1963) algorithm. As a starting point for the iteration a one-dimensional optimization using (13) is performed. In Figure 4 we have shown an example of how the model fits to actual data.

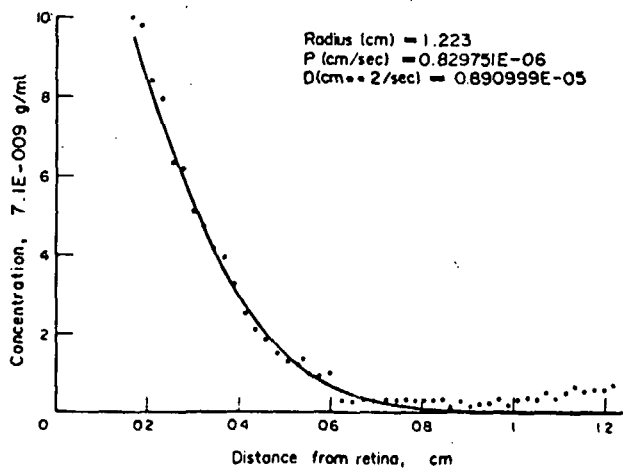


Figure 4. Concentration of fluorescein in the vitreous body vs the distance from the retina 1 hr after the injection of fluorescein. — Model; ..... experimental data.

The radius  $a$  is determined as part of the experimental procedure (Krogsaa *et al.*, 1982). The sensitivity of  $P$  due to variations in  $a$  and  $D$  can be calculated from (13), i.e.

$$\frac{\partial P/P}{\partial a/a} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} I - 1 \quad (16)$$

and

$$\frac{\partial P/P}{\partial D/D} = -\frac{a-r'}{2\sqrt{\pi}} I, \tag{17}$$

where

$$I = \frac{\int_0^t c_0(t-\tau) \exp\left(\frac{-(a-r')^2}{4D\tau}\right) \frac{d\tau}{2\sqrt{(D\tau)}}}{\int_0^t c_0(t-\tau) \operatorname{erfc} \frac{a-r'}{2\sqrt{(D\tau)}} d\tau} \tag{18}$$

For the fluorescein concentration in the blood plasma given in Table I and for  $D = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ,  $a = 1.2 \text{ cm}$  and  $r' = 0.9a$ , we find the sensitivity coefficients given in Table II. It is seen from the table that a careful determination of the radius is crucial in determining  $P$ , e.g. a relative error on  $a$  of 2% results in a relative error on  $P$  of 22% half an hour after the injection.

TABLE II  
Sensitivity Coefficients, i.e. the Ratio Between  
Relative Errors, Corresponding to  
 $D = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$  and  $a = 1.2 \text{ cm}$

$t$ (min)	$\frac{\partial P/P}{\partial a/a}$	$\frac{\partial P/P}{\partial D/D}$
30	11.0	-0.24
60	6.6	-0.38
120	3.7	-0.24

This work was supported by The Danish Medical Research Council and The Committee for the Prevention of Blindness.

LITERATURE

Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger. 1959. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press.  
Crank, J. 1956. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford: Clarendon Press.  
Crone, C. 1963. "The Permeability of Capillaries in Various Organs as Determined by Use of the 'Indicator Diffusion' Method." *Acta Physiol. Scand.* 58, 292-305.

- Cuhna-Vaz, J. 1979. "The Blood-Ocular Barriers." *Survey Ophthalm.* 23, 279-296.
- (Ed.) 1980. *The Blood-Retinal Barriers*. Nato Advanced Study Institutes Series A: Life Sciences, Vol. 32. New York: Plenum Press.
- and D. M. Maurice. 1967. "The Active Transport of Fluorescein by the Retinal Vessels and the Retina." *J. Physiol.* 191, 467-486.
- Fatt, I. 1975. "Flow and Diffusion in the Vitreous Body of the Eye." *Bull. math. Biol.* 37, 85-90.
- Krogsaa, B., H. Fledelius, J. Larsen and H. Lund-Andersen. 1982. "Fotometric Oculometry I." *Acta Ophthalm.* Submitted.
- H. Lund-Andersen, J. Mehlsen, L. Sestoft and J. Larsen. 1981. "The Blood-Retinal Barrier Permeability in Diabetic Patients." *Acta Ophthalm.* 59, 689-694.
- Lund-Andersen, J., B. Krogsaa and P. K. Jensen. 1983a. "Fluorescein in Human Plasma *in Vivo*." *Acta Ophthalm.* In press.
- and J. Larsen. 1983b. "The Calculation of the Blood-Retinal Barrier Permeability to Fluorescein." In preparation.
- and N. Lassen. 1981. "Microvascular Permeability in Diabetic Patients." *Bibiphy Anat.* 20, 675-678.
- Marquardt, D. W. 1963. "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters." *J. Soc. indust. appl. Math.* 11, 164-168.
- Rubinow, S. I. 1975. *Introduction to Mathematical Biology*. New York: Wiley.

RECEIVED 4-11-82  
REVISED 6-8-82



## Bilag 2.

Kørselsresultater fra den kuglesymmetriske model.

1. Kørselsresultater fra implementationen af løsningen ved separation af de variable.
2. Koncentrationsberegninger fra implementationen af den asymptotiske løsning.

Tid = 0. Radius = 0.10 Conc = 3.7943747E-09  
 Tid = 0. Radius = 0.20 Conc = -3.0053816E-09  
 Tid = 0. Radius = 0.30 Conc = 1.9155483E-09  
 Tid = 0. Radius = 0.40 Conc = -7.8085229E-10  
 Tid = 0. Radius = 0.50 Conc = -1.5926800E-10  
 Tid = 0. Radius = 0.60 Conc = 7.3306319E-10  
 Tid = 0. Radius = 0.70 Conc = -8.8246100E-10  
 Tid = 0. Radius = 0.80 Conc = 7.4311852E-10  
 Tid = 0. Radius = 0.90 Conc = -2.6628864E-10  
 Tid = 0. Radius = 1.00 Conc = -1.5872111E-10  
 Tid = 0. Radius = 1.10 Conc = 4.4895593E-10  
 Tid = 0. Radius = 1.20 Conc = -2.8111373E-10  
 Tid = 600. Radius = 0.10 Conc = -6.8919038E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.20 Conc = 5.4691409E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.30 Conc = -3.4898338E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.40 Conc = 1.4191086E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.50 Conc = 2.9175709E-13  
 Tid = 600. Radius = 0.60 Conc = -1.3320810E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.70 Conc = 1.6051836E-12  
 Tid = 600. Radius = 0.80 Conc = -8.7248715E-13  
 Tid = 600. Radius = 0.90 Conc = 7.1728107E-11  
 Tid = 600. Radius = 1.00 Conc = 3.4434152E-09  
 Tid = 600. Radius = 1.10 Conc = 4.8459515E-08  
 Tid = 600. Radius = 1.20 Conc = 2.1616765E-07  
 Tid = 1200. Radius = 0.10 Conc = -2.0882278E-12  
 Tid = 1200. Radius = 0.20 Conc = 1.6571346E-12  
 Tid = 1200. Radius = 0.30 Conc = -1.0574104E-12  
 Tid = 1200. Radius = 0.40 Conc = 4.2999496E-13  
 Tid = 1200. Radius = 0.50 Conc = 9.0017268E-14  
 Tid = 1200. Radius = 0.60 Conc = -2.4911697E-13  
 Tid = 1200. Radius = 0.70 Conc = 8.2819536E-12  
 Tid = 1200. Radius = 0.80 Conc = 2.1024128E-10  
 Tid = 1200. Radius = 0.90 Conc = 2.9255656E-09  
 Tid = 1200. Radius = 1.00 Conc = 2.2140144E-08  
 Tid = 1200. Radius = 1.10 Conc = 9.1535957E-08  
 Tid = 1200. Radius = 1.20 Conc = 2.1508752E-07  
 Tid = 1800. Radius = 0.10 Conc = -9.8069668E-13  
 Tid = 1800. Radius = 0.20 Conc = 7.7824982E-13  
 Tid = 1800. Radius = 0.30 Conc = -4.9604636E-13  
 Tid = 1800. Radius = 0.40 Conc = 2.2456725E-13  
 Tid = 1800. Radius = 0.50 Conc = 7.4374110E-13  
 Tid = 1800. Radius = 0.60 Conc = 1.4346464E-11  
 Tid = 1800. Radius = 0.70 Conc = 1.9920087E-10  
 Tid = 1800. Radius = 0.80 Conc = 1.7878446E-09  
 Tid = 1800. Radius = 0.90 Conc = 1.0737554E-08  
 Tid = 1800. Radius = 1.00 Conc = 4.2602737E-08  
 Tid = 1800. Radius = 1.10 Conc = 1.1417680E-07  
 Tid = 1800. Radius = 1.20 Conc = 2.1297778E-07  
 Tid = 2400. Radius = 0.10 Conc = -6.6854065E-13  
 Tid = 2400. Radius = 0.20 Conc = 5.3406154E-13  
 Tid = 2400. Radius = 0.30 Conc = -2.6736010E-13  
 Tid = 2400. Radius = 0.40 Conc = 1.3336263E-12  
 Tid = 2400. Radius = 0.50 Conc = 1.5356116E-11  
 Tid = 2400. Radius = 0.60 Conc = 1.4658635E-10  
 Tid = 2400. Radius = 0.70 Conc = 1.0394052E-09  
 Tid = 2400. Radius = 0.80 Conc = 5.4004600E-09  
 Tid = 2400. Radius = 0.90 Conc = 2.0892785E-08  
 Tid = 2400. Radius = 1.00 Conc = 5.9661059E-08  
 Tid = 2400. Radius = 1.10 Conc = 1.2812356E-07  
 Tid = 2400. Radius = 1.20 Conc = 2.1174095E-07

Tid = 3000. Radius = 0.10 Conc = -5.2371001E-13  
 Tid = 3000. Radius = 0.20 Conc = 5.6034101E-13  
 Tid = 3000. Radius = 0.30 Conc = 1.1666691E-12  
 Tid = 3000. Radius = 0.40 Conc = 1.3342203E-11  
 Tid = 3000. Radius = 0.50 Conc = 9.9432588E-11  
 Tid = 3000. Radius = 0.60 Conc = 5.9710983E-10  
 Tid = 3000. Radius = 0.70 Conc = 2.8365662E-09  
 Tid = 3000. Radius = 0.80 Conc = 1.0667715E-08  
 Tid = 3000. Radius = 0.90 Conc = 3.1373364E-08  
 Tid = 3000. Radius = 1.00 Conc = 7.3494752E-08  
 Tid = 3000. Radius = 1.10 Conc = 1.3771760E-07  
 Tid = 3000. Radius = 1.20 Conc = 2.1008563E-07  
 Tid = 3600. Radius = 0.10 Conc = -2.0566832E-13  
 Tid = 3600. Radius = 0.20 Conc = 1.9418736E-12  
 Tid = 3600. Radius = 0.30 Conc = 1.0586986E-11  
 Tid = 3600. Radius = 0.40 Conc = 6.6591484E-11  
 Tid = 3600. Radius = 0.50 Conc = 3.4939014E-10  
 Tid = 3600. Radius = 0.60 Conc = 1.5353022E-09  
 Tid = 3600. Radius = 0.70 Conc = 5.5817805E-09  
 Tid = 3600. Radius = 0.80 Conc = 1.6773534E-08  
 Tid = 3600. Radius = 0.90 Conc = 4.1371101E-08  
 Tid = 3600. Radius = 1.00 Conc = 8.4714936E-08  
 Tid = 3600. Radius = 1.10 Conc = 1.4451476E-07  
 Tid = 3600. Radius = 1.20 Conc = 2.0762672E-07  
 Tid = 4200. Radius = 0.10 Conc = 1.6656090E-12  
 Tid = 4200. Radius = 0.20 Conc = 9.6011772E-12  
 Tid = 4200. Radius = 0.30 Conc = 4.5865898E-11  
 Tid = 4200. Radius = 0.40 Conc = 2.1227925E-10  
 Tid = 4200. Radius = 0.50 Conc = 8.6304974E-10  
 Tid = 4200. Radius = 0.60 Conc = 3.0309904E-09  
 Tid = 4200. Radius = 0.70 Conc = 9.0977141E-09  
 Tid = 4200. Radius = 0.80 Conc = 2.3178592E-08  
 Tid = 4200. Radius = 0.90 Conc = 5.0595554E-08  
 Tid = 4200. Radius = 1.00 Conc = 9.3894784E-08  
 Tid = 4200. Radius = 1.10 Conc = 1.4926659E-07  
 Tid = 4200. Radius = 1.20 Conc = 2.0439696E-07  
 Tid = 4800. Radius = 0.10 Conc = 9.7611787E-12  
 Tid = 4800. Radius = 0.20 Conc = 3.5522285E-11  
 Tid = 4800. Radius = 0.30 Conc = 1.3707376E-10  
 Tid = 4800. Radius = 0.40 Conc = 5.0897867E-10  
 Tid = 4800. Radius = 0.50 Conc = 1.7073388E-09  
 Tid = 4800. Radius = 0.60 Conc = 5.0666846E-09  
 Tid = 4800. Radius = 0.70 Conc = 1.3174629E-08  
 Tid = 4800. Radius = 0.80 Conc = 2.9782354E-08  
 Tid = 4800. Radius = 0.90 Conc = 5.8924318E-08  
 Tid = 4800. Radius = 1.00 Conc = 1.0140791E-07  
 Tid = 4800. Radius = 1.10 Conc = 1.5244879E-07  
 Tid = 4800. Radius = 1.20 Conc = 2.0061483E-07  
 Tid = 5400. Radius = 0.10 Conc = 3.4598628E-11  
 Tid = 5400. Radius = 0.20 Conc = 1.0004570E-10  
 Tid = 5400. Radius = 0.30 Conc = 3.2188477E-10  
 Tid = 5400. Radius = 0.40 Conc = 1.0085056E-09  
 Tid = 5400. Radius = 0.50 Conc = 2.9107414E-09  
 Tid = 5400. Radius = 0.60 Conc = 7.5791079E-09  
 Tid = 5400. Radius = 0.70 Conc = 1.7607507E-08  
 Tid = 5400. Radius = 0.80 Conc = 3.6251847E-08  
 Tid = 5400. Radius = 0.90 Conc = 6.6378655E-08  
 Tid = 5400. Radius = 1.00 Conc = 1.0752875E-07  
 Tid = 5400. Radius = 1.10 Conc = 1.5438769E-07  
 Tid = 5400. Radius = 1.20 Conc = 1.9643996E-07

Tid = 6000.	Radius = 0.10	Conc = 9.3834749E-11
Tid = 6000.	Radius = 0.20	Conc = 2.3032997E-10
Tid = 6000.	Radius = 0.30	Conc = 6.3890840E-10
Tid = 6000.	Radius = 0.40	Conc = 1.7473649E-09
Tid = 6000.	Radius = 0.50	Conc = 4.4717757E-09
Tid = 6000.	Radius = 0.60	Conc = 1.0481135E-08
Tid = 6000.	Radius = 0.70	Conc = 2.2251026E-08
Tid = 6000.	Radius = 0.80	Conc = 4.2459155E-08
Tid = 6000.	Radius = 0.90	Conc = 7.2972484E-08
Tid = 6000.	Radius = 1.00	Conc = 1.1247661E-07
Tid = 6000.	Radius = 1.10	Conc = 1.5536045E-07
Tid = 6000.	Radius = 1.20	Conc = 1.9206117E-07
Tid = 6600.	Radius = 0.10	Conc = 2.1143100E-10
Tid = 6600.	Radius = 0.20	Conc = 4.5689256E-10
Tid = 6600.	Radius = 0.30	Conc = 1.1216196E-09
Tid = 6600.	Radius = 0.40	Conc = 2.7458265E-09
Tid = 6600.	Radius = 0.50	Conc = 6.3672233E-09
Tid = 6600.	Radius = 0.60	Conc = 1.3685481E-08
Tid = 6600.	Radius = 0.70	Conc = 2.6965198E-08
Tid = 6600.	Radius = 0.80	Conc = 4.8327703E-08
Tid = 6600.	Radius = 0.90	Conc = 7.8802246E-08
Tid = 6600.	Radius = 1.00	Conc = 1.1643091E-07
Tid = 6600.	Radius = 1.10	Conc = 1.5558887E-07
Tid = 6600.	Radius = 1.20	Conc = 1.8757303E-07
Tid = 7200.	Radius = 0.10	Conc = 4.1529630E-10
Tid = 7200.	Radius = 0.20	Conc = 8.0972793E-10
Tid = 7200.	Radius = 0.30	Conc = 1.7958891E-09
Tid = 7200.	Radius = 0.40	Conc = 4.0075496E-09
Tid = 7200.	Radius = 0.50	Conc = 8.5612807E-09
Tid = 7200.	Radius = 0.60	Conc = 1.7113660E-08
Tid = 7200.	Radius = 0.70	Conc = 3.1663323E-08
Tid = 7200.	Radius = 0.80	Conc = 5.3980241E-08
Tid = 7200.	Radius = 0.90	Conc = 8.3914906E-08
Tid = 7200.	Radius = 1.00	Conc = 1.1955255E-07
Tid = 7200.	Radius = 1.10	Conc = 1.5522513E-07
Tid = 7200.	Radius = 1.20	Conc = 1.8309773E-07

Der bliver beregnet ialt 8500 egenvfrdier

beresning af koncentration i Jet.

Permeabilitet : 9.999999747524E-07  
 \Jets radius : 1.2000999450684E+00  
 Diffusionskonstanten : 6.0000002122251E-06  
 Lambda : -1.6328232103482E-03

tid: 600.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	0.000000E+00
tid: 600.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	0.000000E+00
tid: 600.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	6.76148E-33
tid: 600.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	8.43471E-28
tid: 600.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	2.86569E-23
tid: 600.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	2.60373E-19
tid: 600.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	6.29475E-16
tid: 600.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	4.06343E-13
tid: 600.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	7.09032E-11
tid: 600.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	3.43011E-09
tid: 600.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	4.82986E-08
tid: 600.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.09927E-07
tid: 1200.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	5.36023E-26
tid: 1200.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	4.62566E-23
tid: 1200.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	2.69198E-20
tid: 1200.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	8.93411E-18
tid: 1200.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	1.60782E-15
tid: 1200.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.53813E-13
tid: 1200.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	7.76426E-12
tid: 1200.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	2.06746E-10
tid: 1200.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	2.91955E-09
tid: 1200.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	2.21099E-08
tid: 1200.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	9.15486E-08
tid: 1200.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.09615E-07
tid: 1800.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	1.04184E-19
tid: 1800.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	7.79785E-18
tid: 1800.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	4.95155E-16
tid: 1800.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	2.25477E-14
tid: 1800.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	6.99713E-13
tid: 1800.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.44926E-11
tid: 1800.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	1.98559E-10
tid: 1800.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	1.79456E-09
tid: 1800.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	1.07176E-08
tid: 1800.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	4.25738E-08
tid: 1800.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.14136E-07
tid: 1800.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.07774E-07
tid: 2400.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	1.54739E-16
tid: 2400.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	3.39921E-15
tid: 2400.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	7.10148E-14
tid: 2400.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	1.19243E-12
tid: 2400.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	1.52849E-11
tid: 2400.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.46381E-10
tid: 2400.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	1.03711E-09
tid: 2400.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	5.41586E-09
tid: 2400.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	2.08619E-08
tid: 2400.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	5.96204E-08
tid: 2400.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.28073E-07
tid: 2400.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.06724E-07
tid: 3000.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	1.27630E-14
tid: 3000.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	1.34159E-13
tid: 3000.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	1.43481E-12
tid: 3000.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	1.32018E-11

tid: 3000.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	9.92291E-11
tid: 3000.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	5.96109E-10
tid: 3000.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	2.83331E-09
tid: 3000.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	1.06131E-08
tid: 3000.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	3.13499E-08
tid: 3000.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	7.34027E-08
tid: 3000.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.37662E-07
tid: 3000.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.05310E-07
tid: 3600.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	2.45644E-13
tid: 3600.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	1.57958E-12
tid: 3600.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	1.07920E-11
tid: 3600.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	6.63727E-11
tid: 3600.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	3.48868E-10
tid: 3600.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.53319E-09
tid: 3600.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	5.57671E-09
tid: 3600.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	1.67214E-08
tid: 3600.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	4.13427E-08
tid: 3600.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	8.46238E-08
tid: 3600.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.44462E-07
tid: 3600.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.03141E-07
tid: 4200.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	2.04675E-12
tid: 4200.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	9.27684E-12
tid: 4200.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	4.59737E-11
tid: 4200.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	2.11835E-10
tid: 4200.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	8.61662E-10
tid: 4200.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	3.02689E-09
tid: 4200.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	9.08953E-09
tid: 4200.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	2.32354E-08
tid: 4200.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	5.05457E-08
tid: 4200.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	9.38104E-08
tid: 4200.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.49218E-07
tid: 4200.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	2.00254E-07
tid: 4800.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	1.00722E-11
tid: 4800.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	3.51961E-11
tid: 4800.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	1.37025E-10
tid: 4800.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	5.08190E-10
tid: 4800.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	1.70486E-09
tid: 4800.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	5.06106E-09
tid: 4800.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	1.31582E-08
tid: 4800.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	2.98251E-08
tid: 4800.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	5.88751E-08
tid: 4800.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	1.01330E-07
tid: 4800.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.52395E-07
tid: 4800.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	1.96814E-07
tid: 5400.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	3.48234E-11
tid: 5400.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	9.96687E-11
tid: 5400.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	3.21579E-10
tid: 5400.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	1.00714E-09
tid: 5400.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	2.90784E-09
tid: 5400.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	7.57096E-09
tid: 5400.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	1.75893E-08
tid: 5400.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	3.62830E-08
tid: 5400.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	6.63306E-08
tid: 5400.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	1.07457E-07
tid: 5400.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.54338E-07
tid: 5400.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	1.92994E-07
tid: 6000.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	9.39286E-11
tid: 6000.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	2.29823E-10
tid: 6000.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	6.38110E-10
tid: 6000.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	1.74540E-09

tid: 6000.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	4.46836E-09
tid: 6000.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.04718E-08
tid: 6000.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	2.22240E-08
tid: 6000.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	4.24807E-08
tid: 6000.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	7.29484E-08
tid: 6000.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	1.12411E-07
tid: 6000.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.55315E-07
tid: 6000.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	1.88945E-07
tid: 6600.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	2.11356E-10
tid: 6600.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	4.56164E-10
tid: 6600.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	1.12036E-09
tid: 6600.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	2.74278E-09
tid: 6600.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	6.36237E-09
tid: 6600.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.36757E-08
tid: 6600.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	2.69380E-08
tid: 6600.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	4.83413E-08
tid: 6600.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	7.87821E-08
tid: 6600.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	1.16373E-07
tid: 6600.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.55539E-07
tid: 6600.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	1.84782E-07
tid: 7200.	radius: 0.1000000	antal led .	200.	conc :	4.14974E-10
tid: 7200.	radius: 0.2000000	antal led .	200.	conc :	8.08822E-10
tid: 7200.	radius: 0.3000000	antal led .	200.	conc :	1.79405E-09
tid: 7200.	radius: 0.4000000	antal led .	200.	conc :	4.00387E-09
tid: 7200.	radius: 0.5000000	antal led .	200.	conc :	8.55290E-09
tid: 7200.	radius: 0.6000000	antal led .	200.	conc :	1.70999E-08
tid: 7200.	radius: 0.7000000	antal led .	200.	conc :	3.16361E-08
tid: 7200.	radius: 0.8000000	antal led .	200.	conc :	5.38224E-08
tid: 7200.	radius: 0.9000000	antal led .	200.	conc :	8.38933E-08
tid: 7200.	radius: 1.0000000	antal led .	200.	conc :	1.19500E-07
tid: 7200.	radius: 1.1000000	antal led .	200.	conc :	1.55181E-07
tid: 7200.	radius: 1.2000000	antal led .	200.	conc :	1.80597E-07

### Bilag 3.

Grafer over de beregnede koncentrationer med den kuglesymmetriske model.

1.  $t = 60$  min.

Rød kurve : Den asymptotiske løsning.

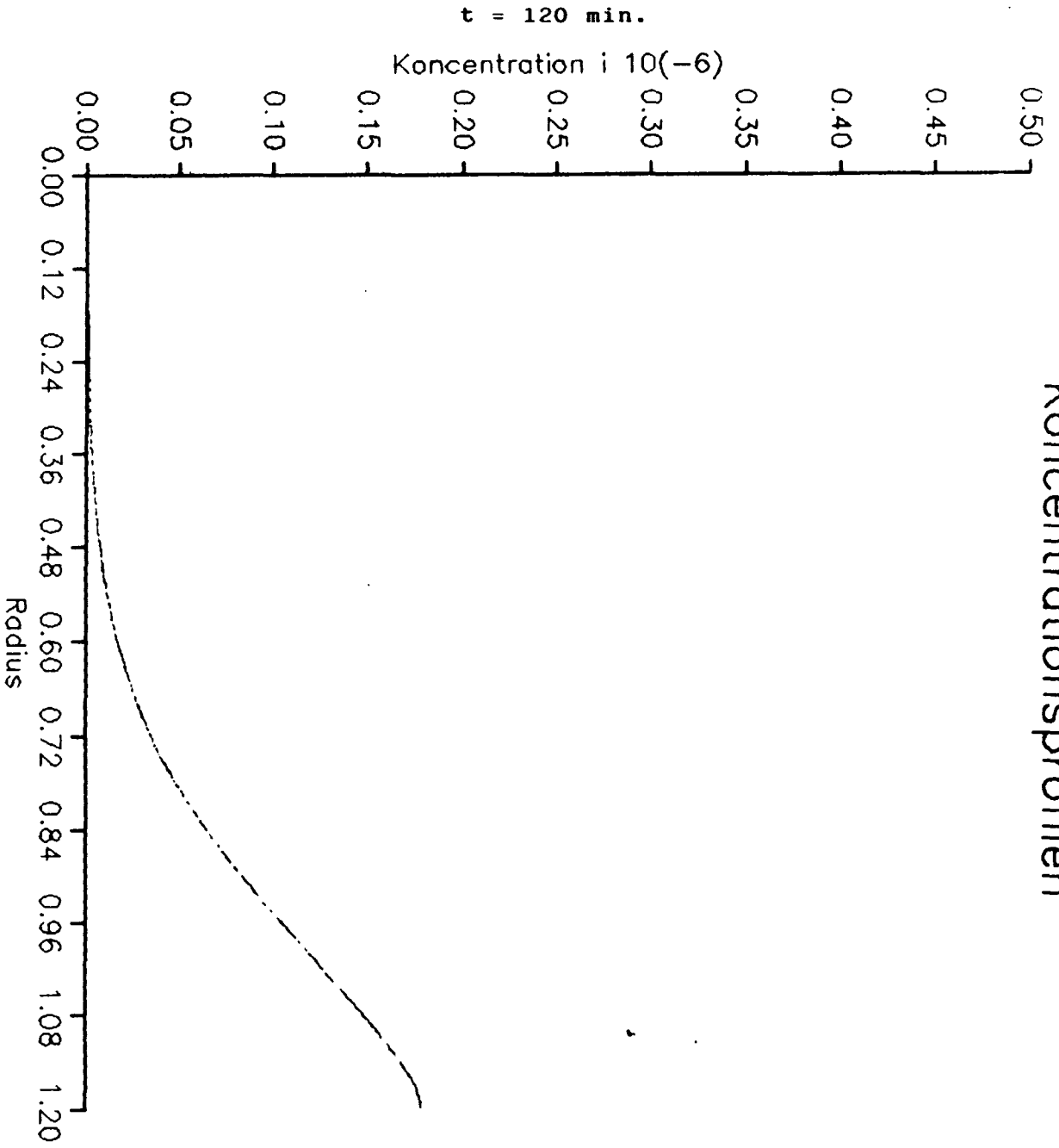
Grøn kurve : løsningen ved separation af de variable.

2.  $t = 120$  min.

Farvekoder som i 1.



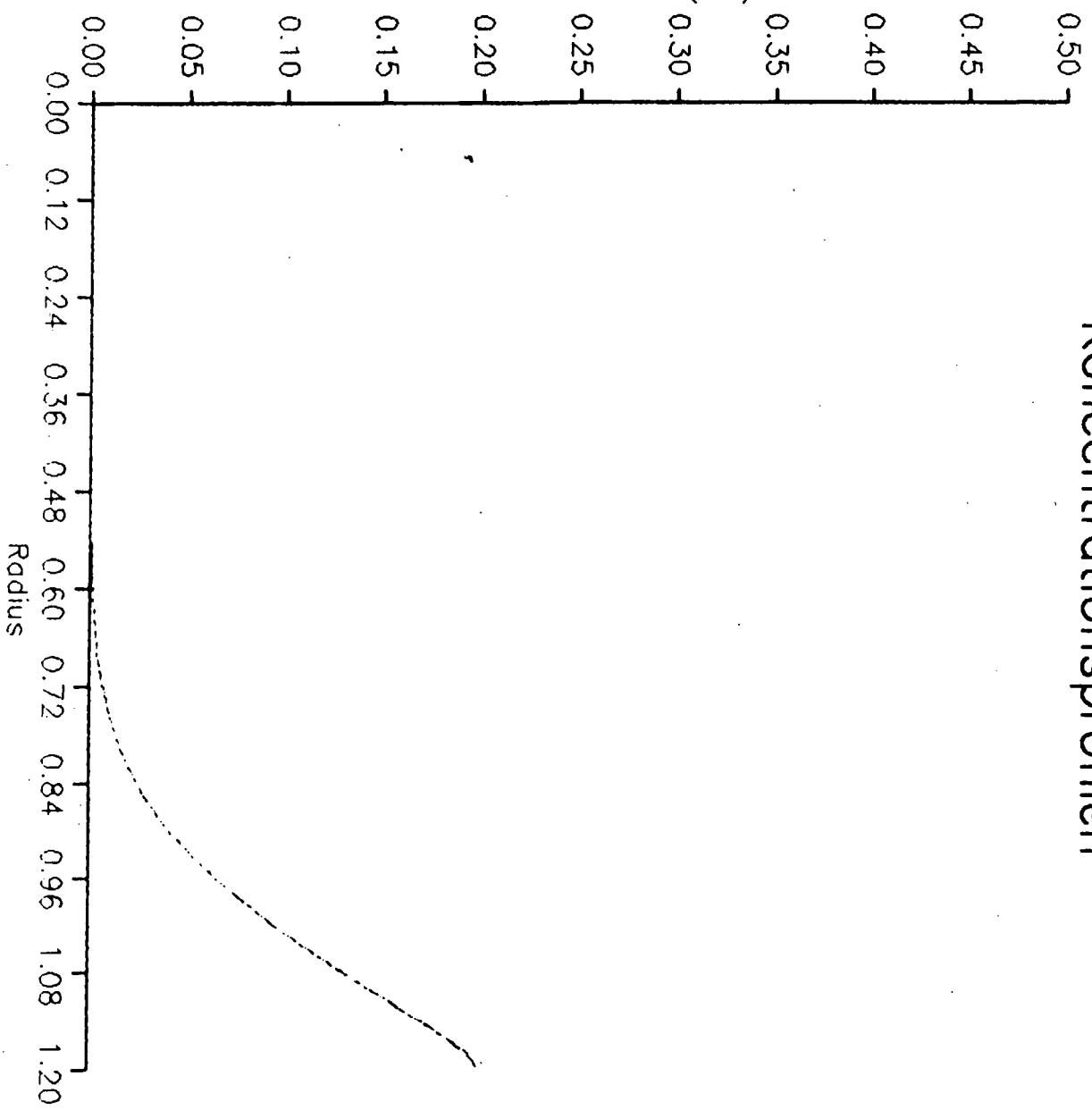
# Konzentrationsprofilen



# Konzentrationsprofilen

t = 60 min.

Konzentration  $\cdot 10^{-6}$



#### Bilag 4.

Kørselsresultater fra analysen af den  
rotationssymmetriske model.

1. Uddata for  $s = 0.001$ .
2. Uddata for  $s = 0.0001$ .

tiden s : 0.00010

interval\_antel : 30

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigmas(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.57E-003	0.38E+000	-0.54E-003	-0.14E-002	0.51E-003	-0.54E-003	-0.14E-002
2	0.24E-003	0.24E+000	-0.14E-003	-0.59E-003	0.24E-003	-0.14E-003	-0.59E-003

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigmas(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.57E-003	0.59E+000	-0.60E-003	-0.10E-002	0.58E-003	-0.60E-003	-0.10E-002
2	0.14E-003	0.38E+000	0.24E-003	0.62E-003	0.13E-003	0.24E-003	0.62E-003
3	0.94E-004	0.56E-001	-0.42E-004	-0.76E-003	0.54E-004	-0.42E-004	-0.76E-003
4	0.24E-003	0.12E-001	-0.21E-004	-0.18E-002	0.25E-003	-0.21E-004	-0.18E-002

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigmas(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.57E-003	0.68E+000	-0.62E-003	-0.92E-003	0.58E-003	-0.62E-003	-0.92E-003
2	0.21E-003	0.44E+000	-0.25E-003	-0.57E-003	0.19E-003	-0.25E-003	-0.57E-003
3	0.95E-004	0.92E-001	0.65E-004	0.70E-003	0.62E-004	0.65E-004	0.70E-003
4	0.72E-004	0.36E-001	-0.44E-004	-0.13E-002	0.31E-004	-0.44E-004	-0.13E-002
5	0.10E-003	0.10E-001	0.73E-006	0.72E-004	0.56E-004	0.73E-009	0.72E-007
6	0.24E-003	0.11E-002	-0.16E-005	-0.15E-002	0.25E-003	-0.16E-009	-0.15E-006

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigmas(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.56E-003	0.71E+000	-0.63E-003	-0.89E-003	0.57E-003	-0.63E-003	-0.89E-003
2	0.25E-003	0.46E+000	0.25E-003	0.55E-003	0.23E-003	0.25E-003	0.55E-003
3	0.13E-003	0.12E+000	0.74E-004	0.61E-003	0.95E-004	0.74E-004	0.61E-003
4	0.76E-004	0.54E-001	0.62E-004	0.11E-002	0.41E-004	0.62E-004	0.11E-002
5	0.61E-004	0.23E-001	-0.44E-005	-0.19E-003	0.24E-004	-0.44E-008	-0.19E-003
6	0.72E-004	0.56E-002	-0.10E-005	-0.18E-003	0.29E-004	-0.10E-009	-0.18E-007
7	0.12E-003	0.86E-003	-0.87E-004	-0.10E-002	0.71E-004	-0.87E-011	-0.10E-007
8	0.23E-003	0.58E-004	0.30E-004	0.51E-002	0.24E-003	0.30E-012	0.51E-008

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.54E-003	0.73E+000	-0.63E-003	-0.87E-003	0.54E-003	-0.63E-003	-0.87E-003
2	0.28E-003	0.47E+000	0.25E-003	0.54E-003	0.27E-003	0.25E-003	0.54E-003
3	0.16E-003	0.15E+000	0.78E-004	0.54E-003	0.13E-003	0.78E-004	0.54E-004
4	0.94E-004	0.65E-001	0.70E-004	0.11E-002	0.61E-004	0.70E-004	0.11E-004
5	0.65E-004	0.34E-001	-0.10E-004	-0.31E-003	0.32E-004	-0.10E-004	-0.31E-004
6	0.55E-004	0.11E-001	-0.52E-005	-0.48E-003	0.20E-004	-0.52E-005	-0.48E-003
7	0.59E-004	0.27E-002	-0.15E-005	-0.55E-003	0.21E-004	-0.15E-010	-0.55E-008
8	0.78E-004	0.51E-003	0.18E-006	0.36E-003	0.37E-004	0.18E-012	0.36E-008
9	0.12E-003	0.59E-004	-0.15E-006	-0.28E-002	0.86E-004	-0.15E-013	-0.28E-009
10	0.22E-003	0.28E-005	0.78E-007	0.28E-001	0.24E-003	0.78E-015	0.28E-009

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.51E-003	0.74E+000	-0.64E-003	-0.87E-003	0.54E-003	-0.64E-003	-0.87E-003
2	0.30E-003	0.48E+000	0.25E-003	0.53E-003	0.29E-003	0.25E-003	0.53E-003
3	0.18E-003	0.16E+000	0.79E-004	0.49E-003	0.15E-003	0.79E-004	0.49E-004
4	0.11E-003	0.73E-001	0.75E-004	0.10E-002	0.82E-004	0.75E-004	0.10E-004
5	0.76E-004	0.42E-001	-0.15E-004	-0.36E-003	0.45E-004	-0.15E-007	-0.36E-004
6	0.50E-004	0.16E-001	-0.94E-005	-0.60E-003	0.27E-004	-0.94E-009	-0.60E-007
7	0.50E-004	0.50E-002	0.23E-005	0.45E-003	0.18E-004	0.23E-010	0.45E-008
8	0.51E-004	0.13E-002	-0.94E-007	-0.71E-004	0.18E-004	-0.94E-013	-0.71E-010
9	0.63E-004	0.26E-003	0.11E-006	0.47E-004	0.75E-004	0.11E-013	0.47E-010
10	0.85E-004	0.37E-004	-0.91E-007	-0.25E-002	0.46E-004	-0.91E-015	-0.25E-010
11	0.13E-003	0.32E-005	0.47E-007	0.14E-001	0.97E-004	0.47E-016	0.14E-010
12	0.21E-003	0.12E-006	0.24E-007	0.20E+000	0.23E-003	0.24E-017	0.20E-010

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.49E-003	0.74E+000	-0.64E-003	-0.86E-003	0.52E-003	-0.64E-003	-0.86E-003
2	0.31E-003	0.49E+000	0.25E-003	0.52E-003	0.30E-003	0.25E-003	0.52E-003
3	0.20E-003	0.16E+000	0.79E-004	0.47E-003	0.17E-003	0.79E-004	0.47E-004
4	0.13E-003	0.78E-001	0.78E-004	0.99E-003	0.10E-003	0.78E-004	0.99E-004
5	0.90E-004	0.49E-001	-0.19E-004	-0.38E-003	0.60E-004	-0.19E-007	-0.38E-004
6	0.64E-004	0.20E-001	-0.13E-004	-0.67E-003	0.40E-004	-0.13E-008	-0.67E-007
7	0.53E-004	0.74E-002	0.30E-005	0.41E-003	0.23E-004	0.30E-010	0.41E-008
8	0.46E-004	0.24E-002	-0.15E-006	-0.65E-004	0.17E-004	-0.15E-012	-0.65E-010
9	0.46E-004	0.60E-003	0.26E-008	-0.44E-005	0.15E-004	-0.26E-015	-0.44E-012
10	0.52E-004	0.12E-003	-0.11E-006	-0.89E-003	0.19E-004	-0.11E-014	-0.89E-011
11	0.64E-004	0.20E-004	0.47E-007	0.24E-002	0.30E-004	0.47E-016	0.24E-011
12	0.90E-004	0.23E-005	0.25E-007	0.11E-001	0.54E-004	0.25E-017	0.11E-011
13	0.13E-003	0.16E-006	-0.17E-007	-0.10E+000	0.11E-003	-0.17E-018	-0.10E-011
14	0.20E-003	0.47E-008	-0.97E-008	-0.21E+001	0.23E-003	-0.97E-020	-0.21E-011

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	nv b(i)	nvbeta	nv chi
1	0.47E-003	0.74E+000	-0.64E-003	-0.86E-003	0.50E-003	-0.64E-003	-0.86E-003
2	0.31E-003	0.49E+000	0.25E-003	0.52E-003	0.31E-003	0.25E-003	0.52E-003
3	0.21E-003	0.18E+000	0.78E-004	0.42E-003	0.19E-003	0.78E-005	0.42E-004
4	0.15E-003	0.83E-001	0.80E-004	0.97E-003	0.12E-003	0.80E-006	0.97E-005
5	0.10E-003	0.54E-001	0.21E-004	0.39E-003	0.75E-004	0.21E-007	0.39E-004
6	0.74E-004	0.23E-001	0.14E-004	0.70E-003	0.47E-004	0.14E-008	0.70E-007
7	0.58E-004	0.97E-002	0.37E-005	0.19E-003	0.31E-004	0.37E-010	0.39E-002
8	0.48E-004	0.35E-002	0.34E-006	0.10E-003	0.21E-004	0.36E-012	0.10E-009
9	0.44E-004	0.10E-002	0.14E-006	0.14E-003	0.16E-004	0.14E-012	0.14E-010
10	0.43E-004	0.26E-003	0.13E-006	0.49E-003	0.14E-004	0.13E-014	0.49E-011
11	0.47E-004	0.55E-004	-0.39E-007	-0.79E-004	0.16E-004	-0.39E-016	-0.70E-012
12	0.55E-004	0.97E-005	0.30E-007	0.31E-002	0.22E-004	0.30E-017	0.31E-012
13	0.70E-004	0.13E-005	-0.19E-007	-0.15E-001	0.35E-004	-0.19E-018	-0.15E-012
14	0.94E-004	0.14E-004	0.11E-007	0.90E-001	0.61E-004	0.11E-019	0.90E-013
15	0.13E-002	0.74E+000	-0.65E-008	-0.84E+000	0.11E-002	-0.65E-021	-0.84E-013
16	0.19E-003	0.18E-009	-0.32E-008	-0.18E+002	0.22E-003	-0.32E-022	-0.18E-012

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	nv b(i)	nvbeta	nv chi
1	0.44E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.86E-003	0.48E-003	-0.64E-003	-0.86E-003
2	0.32E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.51E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.51E-003
3	0.19E-003	0.19E+000	0.77E-004	0.43E-003	0.21E-003	0.77E-005	0.40E-004
4	0.14E-003	0.84E-001	0.81E-004	0.95E-003	0.14E-003	0.81E-006	0.95E-005
5	0.11E-003	0.59E-001	0.22E-004	0.38E-003	0.89E-004	0.22E-007	0.38E-006
6	0.89E-004	0.24E-001	0.19E-004	0.73E-003	0.58E-004	0.19E-008	0.73E-007
7	0.64E-004	0.12E-001	0.44E-005	0.37E-003	0.39E-004	0.44E-010	0.37E-008
8	0.53E-004	0.46E-002	0.65E-006	0.14E-003	0.27E-004	0.65E-012	0.14E-009
9	0.45E-004	0.15E-002	0.32E-006	0.21E-003	0.19E-004	0.32E-013	0.21E-010
10	0.41E-004	0.44E-003	0.14E-006	0.35E-003	0.15E-004	0.14E-014	0.35E-011
11	0.40E-004	0.11E-003	0.34E-007	0.30E-003	0.13E-004	0.34E-016	0.30E-012
12	0.42E-004	0.24E-004	-0.27E-007	-0.11E-002	0.14E-004	-0.27E-017	-0.11E-012
13	0.48E-004	0.45E-005	0.20E-007	0.44E-002	0.18E-004	0.20E-018	0.44E-013
14	0.58E-004	0.67E-006	-0.13E-007	-0.19E-001	0.26E-004	-0.13E-019	-0.19E-013
15	0.73E-004	0.79E-007	0.80E-008	0.10E+000	0.41E-004	0.80E-021	0.10E-013
16	0.94E-004	0.66E-008	-0.49E-008	-0.74E+000	0.67E-004	-0.49E-022	-0.74E-014
17	0.13E-003	0.33E-009	-0.28E-008	-0.83E+001	0.12E-003	-0.28E-023	-0.83E-014
18	0.18E-003	0.64E-011	-0.13E-008	-0.20E+003	0.21E-003	-0.13E-024	-0.20E-013

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	nv b(i)	nvbeta	nv chi
1	0.44E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.86E-003	0.47E-003	-0.64E-003	-0.86E-003
2	0.32E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.51E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.51E-003
3	0.23E-003	0.20E+000	0.76E-004	0.39E-003	0.22E-003	0.76E-005	0.39E-004
4	0.17E-003	0.88E-001	0.82E-004	0.93E-003	0.15E-003	0.82E-006	0.93E-005
5	0.12E-003	0.63E-001	0.24E-004	0.38E-003	0.10E-003	0.24E-007	0.38E-006

6	0.95E-004	0.28E-001	0.21E-004	0.75E-003	0.69E-004	0.21E-008	0.75E-007
7	0.74E-004	0.14E-001	-0.51E-005	-0.37E-003	0.48E-004	-0.51E-010	-0.37E-008
8	0.59E-004	0.57E-002	0.98E-005	0.17E-003	0.33E-004	0.98E-012	0.17E-009
9	0.49E-004	0.20E-002	0.52E-006	-0.25E-003	0.24E-004	0.52E-013	0.25E-010
10	0.43E-004	0.64E-003	-0.15E-006	-0.79E-003	0.18E-004	-0.15E-014	-0.79E-011
11	0.39E-004	0.19E-003	0.33E-007	0.17E-003	0.14E-004	0.33E-016	0.17E-012
12	0.38E-004	0.48E-004	-0.22E-007	-0.43E-003	0.12E-004	-0.22E-017	-0.43E-013
13	0.37E-004	0.10E-004	0.20E-007	0.19E-002	0.13E-004	0.20E-018	0.19E-013
14	0.33E-004	0.20E-005	-0.13E-007	-0.63E-002	0.15E-004	-0.13E-019	-0.63E-014
15	0.50E-004	0.33E-006	0.86E-008	0.26E-001	0.20E-004	0.86E-021	0.26E-014
16	0.61E-004	0.43E-007	-0.57E-008	-0.13E+000	0.30E-004	-0.57E-022	-0.13E-014
17	0.76E-004	0.44E-008	0.36E-008	0.82E+000	0.46E-004	0.36E-023	0.82E-015
18	0.98E-004	0.32E-009	-0.22E-008	-0.68E+001	0.73E-004	-0.22E-024	-0.68E-015
19	0.13E-003	0.14E-010	0.12E-008	0.88E+002	0.12E-003	0.12E-025	0.88E-015
20	0.18E-003	0.24E-012	0.58E-009	0.24E+004	0.21E-003	0.58E-027	0.24E-014

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	nv b(i)	nubeta	nv chi
1	0.43E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.84E-003	0.45E-003	-0.64E-003	-0.84E-003
2	0.32E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.51E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.51E-003
3	0.23E-003	0.20E+000	0.73E-004	0.37E-003	0.23E-003	0.73E-005	0.37E-004
4	0.18E-003	0.91E-001	0.83E-004	0.92E-003	0.16E-003	0.83E-006	0.92E-005
5	0.13E-003	0.64E-001	0.24E-004	0.37E-003	0.11E-003	0.24E-007	0.37E-006
6	0.10E-003	0.30E-001	0.23E-004	0.76E-003	0.80E-004	0.23E-008	0.76E-007
7	0.81E-004	0.15E-001	-0.57E-005	-0.37E-003	0.56E-004	-0.57E-010	-0.37E-008
8	0.65E-004	0.68E-002	0.13E-005	0.28E-003	0.40E-004	0.13E-011	0.28E-009
9	0.54E-004	0.26E-002	0.72E-006	0.20E-003	0.29E-004	0.72E-013	0.20E-010
10	0.46E-004	0.90E-003	-0.22E-006	-0.24E-003	0.21E-004	-0.22E-014	-0.24E-011
11	0.40E-004	0.28E-003	0.38E-007	0.13E-003	0.16E-004	0.38E-016	0.13E-012
12	0.37E-004	0.80E-004	-0.14E-007	-0.17E-003	0.13E-004	-0.14E-017	-0.17E-013
13	0.36E-004	0.20E-004	-0.21E-007	-0.10E-002	0.12E-004	-0.21E-018	-0.10E-013
14	0.37E-004	0.45E-005	0.13E-007	0.28E-002	0.12E-004	0.13E-019	0.28E-014
15	0.40E-004	0.89E-006	-0.88E-008	-0.99E-002	0.13E-004	-0.88E-021	-0.99E-015
16	0.45E-004	0.15E-006	-0.61E-008	-0.41E-001	0.17E-004	-0.61E-022	-0.41E-015
17	0.52E-004	0.22E-007	0.41E-008	0.19E+000	0.23E-004	0.41E-023	0.19E-015
18	0.63E-004	0.26E-008	0.27E-008	0.10E+001	0.33E-004	0.27E-024	0.10E-015
19	0.79E-004	0.24E-009	-0.17E-008	-0.73E+001	0.50E-004	-0.17E-025	0.73E-016
20	0.10E-003	0.15E-010	0.10E-008	0.68E+002	0.77E-004	0.10E-026	0.68E-016
21	0.13E-003	0.58E-012	0.58E-009	0.10E+004	0.12E-003	0.58E-028	0.10E-015
22	0.17E-003	0.83E-014	-0.27E-009	-0.32E+005	0.20E-003	-0.27E-029	-0.32E-015

beresnings fuldført, info : 0

1	0.41E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.84E-003	0.44E-003	-0.64E-003	-0.84E-003
2	0.31E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.51E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.51E-003
3	0.24E-003	0.20E+000	0.74E-004	0.36E-003	0.23E-003	0.74E-005	0.36E-004
4	0.18E-003	0.92E-001	0.84E-004	0.91E-003	0.17E-003	0.84E-006	0.91E-005
5	0.14E-003	0.62E-001	0.25E-004	0.36E-003	0.12E-003	0.25E-007	0.36E-004
6	0.11E-003	0.32E-001	0.24E-004	0.76E-003	0.89E-004	0.24E-008	0.76E-007
7	0.88E-004	0.17E-001	-0.63E-005	-0.37E-003	0.65E-004	-0.63E-010	-0.37E-008

8	0.71E-004	0.78E-003	0.17E-005	0.22E-003	0.47E-004	0.17E-011	0.22E-009
9	0.59E-004	0.31E-002	-0.93E-006	-0.39E-003	0.35E-004	-0.93E-013	-0.30E-010
10	0.49E-004	0.12E-002	-0.24E-006	-0.21E-003	0.24E-004	-0.24E-014	-0.21E-011
11	0.43E-004	0.39E-003	0.49E-007	0.15E-003	0.20E-004	0.49E-016	0.12E-012
12	0.39E-004	0.12E-003	0.41E-008	0.34E-004	0.15E-004	0.41E-018	0.34E-014
13	0.36E-004	0.33E-004	-0.22E-007	-0.65E-003	0.13E-004	-0.22E-019	-0.65E-014
14	0.35E-004	0.84E-005	0.12E-007	0.15E-002	0.11E-004	0.12E-019	0.15E-014
15	0.35E-004	0.19E-005	-0.87E-008	-0.44E-002	0.11E-004	-0.87E-021	-0.44E-015
16	0.37E-004	0.38E-006	0.63E-008	0.17E-001	0.12E-004	0.63E-022	0.17E-015
17	0.41E-004	0.48E-007	-0.44E-008	-0.64E-001	0.12E-004	-0.44E-022	-0.64E-015
18	0.46E-004	0.11E-007	0.30E-008	0.29E-000	0.15E-004	0.30E-024	0.29E-016
19	0.54E-004	0.14E-008	-0.20E-008	-0.15E-001	0.20E-004	-0.20E-024	-0.15E-016
20	0.65E-004	0.15E-009	0.13E-008	0.91E-001	0.37E-004	0.13E-026	0.91E-017
21	0.80E-004	0.12E-010	-0.85E-009	-0.70E-002	0.54E-004	-0.85E-028	-0.70E-017
22	0.10E-002	0.68E-012	0.59E-009	0.74E-003	0.81E-004	0.59E-029	0.74E-017
23	0.13E-003	0.23E-013	-0.29E-009	-0.12E+005	0.15E-003	-0.29E-030	-0.12E-016
24	0.16E-003	0.29E-015	-0.13E-009	-0.45E+006	0.20E-003	-0.13E-031	-0.45E-016

beresning fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.40E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.65E-003	0.42E-003	-0.64E-003	-0.65E-003
2	0.31E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.51E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.51E-003
3	0.24E-003	0.21E+000	0.73E-004	0.34E-003	0.24E-003	0.73E-005	0.34E-004
4	0.19E-003	0.94E-001	0.85E-004	0.90E-003	0.19E-003	0.85E-006	0.90E-005
5	0.15E-003	0.71E-001	0.25E-004	0.35E-003	0.13E-003	0.25E-007	0.35E-006
6	0.12E-003	0.33E-003	0.24E-004	0.77E-003	0.98E-004	0.24E-008	0.77E-007
7	0.95E-004	0.18E-001	-0.69E-005	-0.37E-003	0.73E-004	-0.69E-010	-0.37E-008
8	0.72E-004	0.87E-002	0.20E-005	0.24E-003	0.54E-004	0.20E-011	0.24E-009
9	0.64E-004	0.36E-002	-0.11E-005	-0.31E-003	0.41E-004	-0.11E-012	-0.31E-010
10	0.54E-004	0.14E-002	0.27E-006	0.19E-003	0.27E-004	0.27E-014	0.19E-011
11	0.46E-004	0.51E-003	-0.64E-007	-0.13E-003	0.24E-004	-0.64E-016	-0.13E-012
12	0.41E-004	0.17E-003	-0.74E-008	-0.45E-003	0.18E-004	-0.74E-018	-0.45E-014
13	0.37E-004	0.50E-004	0.23E-007	0.45E-003	0.15E-004	0.23E-018	0.45E-014
14	0.35E-004	0.14E-004	0.17E-007	0.84E-003	0.12E-004	0.17E-019	0.84E-015
15	0.33E-004	0.35E-005	-0.64E-008	0.24E-002	0.11E-004	-0.64E-021	0.24E-015
16	0.34E-004	0.79E-006	0.64E-008	0.24E-002	0.11E-004	0.64E-021	0.24E-015
17	0.35E-004	0.14E-006	-0.45E-008	-0.81E-002	0.11E-004	-0.45E-022	-0.81E-016
18	0.38E-004	0.30E-007	0.32E-008	0.11E+000	0.11E-004	0.32E-023	0.11E-016
19	0.42E-004	0.49E-008	-0.23E-008	-0.44E+000	0.13E-004	-0.23E-024	-0.44E-016
20	0.48E-004	0.69E-009	0.16E-008	0.22E+001	0.14E-004	0.16E-026	0.22E-017
21	0.56E-004	0.82E-010	-0.10E-008	-0.13E+002	0.21E-004	-0.10E-027	-0.13E-017
22	0.67E-004	0.80E-011	0.69E-009	0.84E+002	0.29E-004	0.69E-029	0.84E-018
23	0.82E-004	0.59E-012	0.44E-009	0.74E+003	0.40E-004	0.44E-029	0.74E-018
24	0.10E-003	0.30E-013	-0.24E-009	-0.85E+004	0.57E-004	-0.24E-030	-0.85E-018
25	0.13E-003	0.84E-015	-0.14E-009	-0.12E+006	0.84E-004	-0.14E-031	-0.12E-017
26	0.16E-003	0.27E-016	0.67E-010	0.25E+007	0.19E-003	0.67E-034	0.25E-017

beresning fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.39E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.65E-003	0.41E-003	-0.64E-003	-0.65E-003



i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.31E-003	0.50E+000	0.25E-003	0.50E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.50E-003
2	0.24E-003	0.21E+000	0.73E-004	0.35E-003	0.24E-003	0.73E-005	0.35E-004
3	0.19E-003	0.95E-001	0.85E-004	0.90E-003	0.18E-003	0.85E-006	0.90E-005
4	0.15E-003	0.73E-001	-0.25E-004	-0.34E-003	0.14E-003	-0.25E-007	-0.34E-006
5	0.12E-003	0.35E-001	-0.27E-004	-0.77E-003	0.11E-003	-0.27E-008	-0.77E-007
6	0.10E-003	0.20E-001	-0.75E-005	-0.38E-003	0.80E-004	-0.75E-010	-0.38E-008
7	0.83E-004	0.94E-002	0.24E-005	0.25E-003	0.61E-004	0.24E-011	0.25E-009
8	0.69E-004	0.41E-002	-0.13E-005	-0.33E-003	0.47E-004	-0.13E-012	-0.33E-010
9	0.58E-004	0.17E-002	-0.17E-006	-0.17E-003	0.36E-004	-0.17E-014	-0.17E-011
10	0.50E-004	0.64E-003	-0.85E-007	-0.11E-003	0.28E-004	-0.85E-016	-0.11E-012
11	0.43E-004	0.25E-003	-0.23E-007	-0.11E-003	0.23E-004	-0.23E-017	-0.11E-013
12	0.39E-004	0.71E-004	-0.24E-007	-0.33E-003	0.17E-004	-0.24E-018	-0.33E-014
13	0.35E-004	0.21E-004	-0.15E-007	-0.79E-003	0.14E-004	-0.15E-019	-0.79E-015
14	0.32E-004	0.57E-005	-0.78E-008	-0.14E-004	0.12E-004	-0.78E-021	-0.14E-015
15	0.32E-004	0.14E-005	-0.26E-008	-0.26E-002	0.11E-004	-0.26E-022	-0.26E-016
16	0.32E-004	0.33E-006	0.53E-008	0.15E-001	0.10E-004	0.53E-023	0.15E-016
17	0.32E-004	0.69E-007	-0.59E-008	-0.89E-001	0.10E-004	-0.59E-024	-0.89E-017
18	0.33E-004	0.13E-007	0.14E-008	0.10E+000	0.12E-004	0.14E-025	0.10E-017
19	0.39E-004	0.25E-008	0.54E-009	0.24E+000	0.14E-004	0.54E-027	0.24E-018
20	0.43E-004	0.33E-009	0.24E-009	0.77E+001	0.18E-004	0.24E-027	0.77E-018
21	0.50E-004	0.43E-010	-0.24E-008	-0.61E+002	0.23E-004	-0.24E-028	-0.61E-018
22	0.58E-004	0.47E-011	-0.11E-008	-0.23E+003	0.31E-004	-0.11E-029	-0.23E-018
23	0.69E-004	0.45E-012	0.18E+004	0.18E+004	0.43E-004	0.18E-031	0.18E-018
24	0.83E-004	0.28E-013	0.20E-008	0.71E+005	0.61E-004	0.20E-031	0.71E-018
25	0.10E-003	0.13E-014	-0.62E-010	-0.46E+005	0.87E-004	-0.62E-034	-0.46E-019
26	0.12E-003	0.37E-016	-0.59E-009	-0.16E+008	0.13E-003	-0.59E-034	-0.16E-017
27	0.15E-003	0.23E-017	0.39E-009	0.17E+009	0.19E-003	0.39E-035	0.17E-017
28							

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.38E-003	0.75E+000	-0.64E-003	-0.87E-003	0.40E-003	-0.64E-003	-0.87E-003
2	0.30E-003	0.51E+000	0.25E-003	0.50E-003	0.32E-003	0.25E-003	0.50E-003
3	0.24E-003	0.21E+000	0.73E-004	0.34E-003	0.25E-003	0.73E-005	0.34E-004
4	0.20E-003	0.96E-001	0.84E-004	0.89E-003	0.19E-003	0.84E-006	0.89E-005
5	0.16E-003	0.75E-001	-0.25E-004	-0.33E-003	0.15E-003	-0.25E-007	-0.33E-006
6	0.13E-003	0.34E-001	-0.23E-004	-0.77E-003	0.11E-003	-0.23E-008	-0.77E-007
7	0.11E-003	0.21E-001	-0.80E-005	-0.38E-003	0.87E-004	-0.80E-010	-0.38E-008
8	0.86E-004	0.10E-001	0.27E-005	0.25E-003	0.67E-004	0.27E-011	0.25E-009
9	0.74E-004	0.46E-002	-0.15E-005	-0.33E-003	0.52E-004	-0.15E-012	-0.33E-010
10	0.62E-004	0.20E-002	-0.30E-006	-0.15E-003	0.41E-004	-0.30E-014	-0.15E-011
11	0.53E-004	0.77E-003	-0.11E-006	-0.14E-003	0.32E-004	-0.11E-015	-0.14E-011
12	0.46E-004	0.28E-003	-0.34E-007	-0.15E-003	0.25E-004	-0.34E-017	-0.15E-013
13	0.41E-004	0.94E-004	0.25E-007	0.24E-003	0.20E-004	0.25E-018	0.24E-014
14	0.37E-004	0.30E-004	-0.13E-007	-0.41E-003	0.16E-004	-0.13E-019	-0.41E-015
15	0.34E-004	0.87E-005	-0.65E-008	-0.84E-003	0.11E-004	-0.65E-022	-0.84E-016
16	0.32E-004	0.24E-005	-0.44E-008	-0.27E-002	0.11E-004	-0.44E-023	-0.27E-017
17	0.31E-004	0.14E-006	0.34E-008	0.12E-001	0.10E-004	0.34E-024	0.12E-017
18	0.32E-004	0.29E-007	-0.25E-008	-0.84E-001	0.97E-005	-0.25E-025	-0.84E-018
19	0.33E-004	0.57E-008	0.18E-008	0.32E+000	0.11E-004	0.18E-026	0.32E-018
20	0.36E-004	0.99E-009	-0.13E-008	-0.13E-001	0.13E-004	-0.13E-027	-0.13E-018
21	0.40E-004	0.16E-009	-0.93E-009	-0.60E+001	0.15E-004	-0.93E-029	-0.60E-019
22	0.45E-004	0.22E-010	0.65E-009	0.30E+002	0.19E-004	0.65E-030	0.30E-019
23	0.51E-004	0.26E-011	-0.44E-009	-0.17E+003	0.25E-004	-0.44E-031	-0.17E-019
24	0.60E-004	0.26E-012	0.30E-009	0.12E+004	0.34E-004	0.30E-032	0.12E-019
25							

26	0.70E-004	0.21E-013	0.20E-009	0.92E+004	0.46E-004	0.20E-033	0.92E-020
27	0.84E-004	0.13E-014	-0.12E-009	-0.93E+005	0.63E-004	-0.12E-034	-0.92E-020
28	0.10E-003	0.49E-016	0.72E-010	0.15E+007	0.89E-004	0.72E-036	0.12E-019
29	0.12E-003	0.55E-017	0.45E-010	0.81E+007	0.13E-003	0.45E-037	0.81E-020
30	0.15E-003	0.26E-018	-0.58E-011	-0.23E+008	0.18E-003	-0.58E-039	-0.23E-020

```

tiden s : 0.00100
interval-antal : 30
beresnings fuldført, info : 0

```

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.15E-004	0.26E-001	-0.15E-004	-0.58E-003	0.15E-004	-0.15E-004	-0.58E-003
2	0.43E-006	0.24E-001	-0.42E-006	-0.18E-004	0.43E-006	-0.42E-006	-0.18E-004

```

beresnings fuldført, info : 0

```

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.21E-004	0.61E-001	-0.21E-004	-0.35E-003	0.21E-004	-0.21E-004	-0.35E-003
2	0.46E-007	0.49E-001	-0.61E-006	-0.17E-004	0.11E-006	-0.61E-006	-0.12E-004
3	0.23E-008	0.67E-005	-0.70E-007	-0.10E-001	0.38E-009	-0.70E-008	-0.10E-002
4	0.61E-006	0.71E-006	-0.15E-007	-0.20E-001	0.61E-006	-0.15E-009	-0.20E-003

```

beresnings fuldført, info : 0

```

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.26E-004	0.95E-001	-0.26E-004	-0.27E-003	0.26E-004	-0.26E-004	-0.27E-003
2	0.41E-006	0.73E-001	-0.73E-006	-0.10E-004	0.71E-006	-0.73E-006	-0.10E-004
3	0.83E-008	0.11E-003	-0.33E-006	-0.31E-002	0.13E-007	-0.33E-007	-0.31E-003
4	0.86E-009	0.18E-004	-0.64E-008	-0.35E-003	0.52E-011	-0.64E-010	-0.35E-005
5	0.14E-007	0.13E-005	0.45E-007	0.35E-001	0.86E-008	0.45E-010	0.35E-004
6	0.73E-006	0.17E-006	0.30E-007	0.17E+000	0.73E-006	0.30E-011	0.17E-004

```

beresnings fuldført, info : 0

```

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.29E-004	0.12E+000	-0.29E-004	-0.24E-003	0.29E-004	-0.29E-004	-0.24E-003
2	0.13E-005	0.93E-001	-0.82E-006	-0.88E-005	0.18E-005	-0.82E-006	-0.88E-005
3	0.62E-007	0.56E-003	0.62E-006	0.11E-002	0.96E-007	0.62E-007	0.11E-003
4	0.38E-008	0.20E-003	-0.14E-007	-0.73E-004	0.39E-008	-0.14E-009	-0.73E-004
5	0.65E-009	0.71E-005	0.10E-006	0.15E-001	0.14E-009	0.10E-009	0.15E-004
6	0.26E-008	0.83E-006	-0.26E-007	-0.31E-001	0.11E-008	-0.26E-011	-0.31E-005
7	0.41E-007	0.32E-006	-0.33E-007	-0.10E+000	0.27E-007	-0.33E-012	-0.10E-005
8	0.82E-006	0.30E-007	0.26E-007	0.89E+000	0.82E-006	0.26E-013	0.89E-006

```

beresnings fuldført, info : 0

```

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.31E-004	0.15E+000	-0.31E-004	-0.21E-003	0.31E-004	-0.31E-004	-0.21E-003
2	0.25E-005	0.11E+000	-0.88E-006	-0.81E-003	0.33E-005	-0.88E-006	-0.81E-003
3	0.22E-006	0.16E-002	0.80E-006	0.49E-003	0.30E-006	0.80E-007	0.49E-004
4	0.21E-007	0.80E-003	0.27E-007	0.33E-004	0.25E-007	0.27E-009	0.33E-005
5	0.24E-008	0.29E-004	-0.15E-008	-0.53E-002	0.20E-008	-0.15E-009	-0.53E-005
6	0.58E-009	0.24E-005	-0.96E-008	-0.39E-002	0.17E-009	-0.96E-012	-0.39E-004
7	0.11E-008	0.16E-005	0.50E-007	0.30E-001	0.29E-009	0.50E-012	0.30E-004
8	0.79E-008	0.33E-006	-0.28E-007	-0.86E-001	0.37E-008	-0.28E-013	-0.86E-007
9	0.78E-007	0.56E-007	0.23E-007	0.41E+000	0.52E-007	0.23E-014	0.41E-007
10	0.88E-006	0.33E-008	0.16E-007	0.48E+001	0.88E-006	0.16E-015	0.48E-007

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.32E-004	0.16E+000	-0.33E-004	-0.20E-003	0.32E-004	-0.33E-004	-0.20E-003
2	0.40E-005	0.12E+000	-0.92E-006	-0.78E-005	0.47E-005	-0.92E-006	-0.78E-005
3	0.51E-006	0.34E-002	0.82E-006	0.24E-003	0.63E-006	0.82E-007	0.24E-004
4	0.68E-007	0.20E-002	0.41E-007	0.21E-004	0.79E-007	0.41E-009	0.21E-004
5	0.10E-007	0.83E-004	-0.18E-006	-0.21E-002	0.98E-008	-0.18E-009	-0.21E-005
6	0.18E-008	0.11E-004	-0.61E-009	-0.56E-004	0.12E-008	-0.61E-013	-0.56E-008
7	0.54E-009	0.45E-005	0.60E-007	0.13E-001	0.17E-009	0.60E-012	0.13E-006
8	0.68E-009	0.75E-006	-0.26E-007	-0.35E-001	0.13E-009	-0.26E-013	-0.35E-007
9	0.28E-008	0.57E-006	0.21E-007	0.79E-001	0.96E-009	0.21E-014	0.79E-008
10	0.17E-007	0.57E-007	-0.18E-007	-0.31E+000	0.84E-008	-0.18E-015	-0.31E-008
11	0.12E-006	0.70E-008	-0.13E-007	-0.18E+001	0.81E-007	-0.13E-016	-0.18E-008
12	0.91E-006	0.31E-009	0.82E-008	0.26E+002	0.92E-006	0.82E-018	0.26E-008

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.33E-004	0.18E+000	-0.34E-004	-0.19E-003	0.33E-004	-0.34E-004	-0.19E-003
2	0.55E-005	0.13E+000	-0.95E-006	-0.76E-005	0.62E-005	-0.95E-006	-0.76E-005
3	0.94E-006	0.57E-002	0.72E-006	0.13E-003	0.11E-005	0.72E-007	0.13E-004
4	0.16E-006	0.36E-002	0.56E-007	0.16E-004	0.18E-006	0.56E-009	0.16E-006
5	0.30E-007	0.19E-003	-0.18E-006	-0.97E-004	0.30E-007	-0.18E-009	-0.97E-004
6	0.40E-008	0.37E-004	0.23E-008	0.59E-004	0.50E-008	0.23E-012	0.59E-008
7	0.14E-008	0.11E-004	-0.61E-007	-0.58E-002	0.85E-009	-0.61E-012	-0.58E-007
8	0.51E-009	0.13E-005	0.27E-007	0.21E-001	0.18E-009	0.27E-013	0.21E-007
9	0.51E-009	0.66E-006	-0.14E-007	-0.21E-001	0.85E-010	-0.14E-014	-0.21E-008
10	0.40E-008	0.23E-006	0.17E-007	0.74E-001	0.37E-009	0.17E-015	0.74E-009
11	0.60E-008	0.51E-007	0.13E-007	0.26E+000	0.23E-008	0.13E-016	0.26E-009
12	0.30E-007	0.77E-008	0.97E-008	0.13E+001	0.15E-007	0.97E-018	0.13E-009
13	0.16E-006	0.68E-009	-0.65E-008	-0.96E+001	0.11E-006	-0.65E-019	-0.96E-010
14	0.94E-006	0.23E-010	0.38E-008	0.17E+003	0.94E-006	0.38E-020	0.17E-009

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nvbeta	ny chi
1	0.34E-004	0.19E+000	-0.35E-004	-0.18E-003	0.34E-004	-0.35E-004	-0.18E-003
2	0.70E-005	0.13E+000	-0.97E-006	-0.75E-005	0.175E-006	-0.97E-006	-0.75E-005
3	0.15E-005	0.84E-002	0.54E-006	0.64E-004	0.14E-005	0.54E-007	0.64E-005
4	0.32E-006	0.54E-002	0.69E-007	0.13E-004	0.33E-006	0.69E-009	0.13E-006
5	0.71E-007	0.35E-003	-0.17E-008	-0.49E-003	0.67E-007	-0.17E-009	-0.49E-006
6	0.16E-007	0.91E-004	0.34E-008	0.40E-004	0.14E-007	0.34E-012	0.40E-008
7	0.41E-008	0.22E-004	0.58E-007	0.27E-002	0.30E-008	0.58E-012	0.27E-007
8	0.12E-008	0.24E-005	0.28E-007	0.11E-001	0.64E-009	0.28E-013	0.11E-007
9	0.49E-009	0.16E-005	-0.60E-008	-0.39E-002	0.15E-009	-0.60E-015	-0.39E-009
10	0.43E-009	0.51E-006	0.12E-007	0.30E-001	0.67E-010	0.12E-015	0.30E-009
11	0.89E-009	0.15E-006	-0.12E-007	-0.79E-001	0.19E-009	-0.12E-016	-0.79E-010
12	0.28E-008	0.35E-007	0.94E-008	0.27E+000	0.90E-009	0.94E-018	0.27E-010
13	0.11E-007	0.62E-007	-0.69E-008	-0.11E+001	0.44E-008	-0.69E-019	-0.11E-010
14	0.46E-007	0.78E-009	0.48E-008	0.62E+001	0.25E-007	0.48E-020	0.62E-011
15	0.21E-006	0.54E-010	-0.31E-008	-0.56E+002	0.14E-006	-0.31E-021	-0.56E-011
16	0.95E-006	0.15E-011	0.17E-008	0.12E+004	0.94E-006	0.17E-022	0.12E-010

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nvbeta	ny chi
1	0.34E-004	0.20E+000	-0.35E-004	-0.18E-003	0.34E-004	-0.35E-004	-0.18E-003
2	0.84E-005	0.13E+000	-0.97E-006	-0.74E-005	0.87E-005	-0.97E-006	-0.74E-005
3	0.21E-005	0.11E-001	0.31E-006	0.27E-004	0.21E-005	0.31E-007	0.27E-005
4	0.53E-006	0.74E-002	0.80E-007	0.11E-004	0.52E-006	0.80E-009	0.11E-006
5	0.14E-006	0.57E-003	-0.15E-006	-0.24E-003	0.13E-006	-0.15E-009	-0.24E-006
6	0.37E-007	0.18E-003	0.54E-008	0.29E-004	0.31E-007	0.54E-012	0.29E-008
7	0.10E-007	0.39E-004	0.53E-007	0.14E-002	0.79E-008	0.53E-012	0.14E-007
8	0.31E-008	0.42E-005	-0.24E-007	-0.61E-002	0.20E-008	-0.24E-013	-0.61E-008
9	0.11E-008	0.37E-005	0.48E-008	0.13E-002	0.51E-009	0.48E-015	0.13E-009
10	0.48E-009	0.85E-006	-0.97E-008	-0.15E-001	0.14E-009	-0.97E-017	-0.15E-009
11	0.39E-009	0.31E-006	0.97E-008	0.32E-001	0.59E-010	0.97E-017	0.32E-010
12	0.64E-009	0.96E-007	-0.83E-008	-0.87E-001	0.11E-009	-0.83E-018	-0.87E-011
13	0.18E-008	0.24E-007	0.66E-008	0.27E+000	0.43E-009	0.66E-019	0.27E-011
14	0.51E-008	0.47E-008	0.50E-008	0.11E+001	0.18E-008	0.50E-020	0.11E-011
15	0.18E-007	0.67E-009	0.35E-008	0.53E+001	0.79E-008	0.35E-021	0.53E-012
16	0.65E-007	0.64E-010	0.24E-008	0.34E+002	0.34E-007	0.24E-022	0.34E-012
17	0.25E-006	0.39E-011	0.15E-008	0.35E+003	0.17E-006	0.15E-023	0.35E-012
18	0.94E-006	0.85E-013	-0.77E-009	-0.19E+004	0.97E-006	-0.77E-025	-0.19E-012

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nvbeta	ny chi
1	0.34E-004	0.20E+000	-0.34E-004	-0.18E-003	0.34E-004	-0.34E-004	-0.18E-003
2	0.97E-005	0.14E+000	-0.10E-005	-0.73E-005	0.98E-005	-0.10E-005	-0.73E-005
3	0.28E-005	0.14E-001	0.63E-007	0.44E-005	0.27E-005	0.63E-008	0.44E-006
4	0.80E-006	0.92E-002	0.89E-007	0.97E-005	0.75E-006	0.89E-009	0.97E-007
5	0.24E-006	0.85E-003	-0.11E-006	-0.15E-003	0.21E-006	-0.11E-009	-0.15E-006

	0.71E-007	0.31E-003	0.74E-008	0.24E-004	0.60E-007	0.74E-012	0.24E-008
6	0.29E-007	0.64E-004	0.47E-007	0.72E-003	0.17E-007	0.47E-012	0.24E-008
7	0.71E-008	0.81E-005	0.26E-008	-0.33E-003	0.49E-008	-0.26E-014	0.72E-008
8	0.24E-008	0.70E-005	-0.24E-007	-0.35E-002	0.14E-008	-0.24E-014	-0.33E-009
9	0.94E-009	0.13E-005	0.12E-007	0.97E-002	0.42E-009	0.12E-015	-0.35E-009
10	0.46E-009	0.50E-006	0.75E-008	0.15E-001	0.13E-009	0.75E-017	0.97E-010
11	0.36E-009	0.21E-006	-0.72E-008	-0.35E-001	0.55E-010	-0.72E-018	0.15E-010
12	0.50E-009	0.63E-007	0.41E-008	0.94E-001	0.78E-011	0.61E-019	-0.35E-011
13	0.11E-008	0.15E-007	-0.48E-008	-0.31E+000	0.24E-009	-0.48E-020	0.96E-012
14	0.28E-008	0.30E-008	0.35E-008	0.53E+001	0.87E-009	0.35E-021	-0.31E-012
15	0.83E-008	0.87E-009	-0.25E-008	-0.53E+001	0.32E-008	-0.25E-022	0.12E-012
16	0.26E-007	0.59E-010	0.18E-008	0.30E+002	0.12E-007	0.18E-023	-0.53E-013
17	0.84E-007	0.50E-011	0.12E-008	0.23E+003	0.48E-007	0.12E-024	0.30E-013
18	0.28E-006	0.24E-012	0.71E-009	0.29E+004	0.20E-006	0.71E-026	0.23E-013
19	0.96E-006	0.44E-014	-0.36E-009	-0.82E+005	0.98E-006	-0.36E-027	0.29E-013
20							-0.82E-013

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.34E-004	0.21E+000	-0.36E-004	-0.17E-003	0.34E-004	-0.36E-004	-0.17E-003
2	0.11E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.73E-005	0.11E-004	-0.10E-005	-0.73E-005
3	0.35E-005	0.17E-001	-0.18E-006	-0.10E-004	0.33E-005	-0.18E-007	-0.10E-005
4	0.11E-005	0.11E-001	0.97E-007	0.89E-005	0.10E-005	0.97E-009	0.89E-007
5	0.37E-006	0.12E-002	-0.11E-006	-0.84E-004	0.32E-006	-0.11E-009	-0.96E-007
6	0.12E-006	0.48E-003	0.94E-008	0.20E-004	0.10E-006	0.94E-012	0.20E-008
7	0.41E-007	0.98E-004	0.40E-007	0.41E-003	0.32E-007	0.40E-012	0.41E-008
8	0.14E-007	0.15E-004	-0.16E-008	-0.10E-003	0.10E-007	-0.16E-014	-0.10E-009
9	0.52E-008	0.11E-004	-0.22E-007	-0.20E-002	0.34E-008	-0.22E-014	-0.20E-009
10	0.59E-008	0.18E-005	0.11E-007	0.61E-002	0.11E-015	0.61E-015	0.61E-010
11	0.86E-009	0.76E-006	-0.50E-008	-0.66E-002	0.36E-009	-0.50E-017	-0.66E-011
12	0.45E-009	0.39E-006	0.67E-008	0.17E-001	0.12E-009	0.67E-018	-0.17E-011
13	0.34E-009	0.13E-006	0.55E-008	0.43E-001	0.54E-010	-0.47E-018	0.43E-012
14	0.42E-009	0.36E-007	0.44E-008	0.12E+000	0.59E-010	0.55E-019	-0.17E-011
15	0.77E-009	0.85E-008	-0.33E-008	-0.39E+000	0.15E-009	0.44E-020	0.43E-012
16	0.18E-008	0.18E-008	0.25E-008	0.14E+001	0.48E-009	-0.33E-021	-0.39E-013
17	0.45E-008	0.31E-009	0.18E-008	0.59E+001	0.16E-008	0.25E-022	0.14E-013
18	0.12E-007	0.94E-010	-0.13E-008	-0.30E+002	0.51E-008	0.18E-023	0.59E-014
19	0.36E-007	0.46E-011	0.89E-009	0.19E+003	0.17E-007	-0.13E-024	-0.30E-014
20	0.10E-006	0.33E-012	-0.57E-009	-0.17E+004	0.62E-007	0.89E-026	0.19E-014
21	0.31E-006	0.14E-013	-0.34E-009	-0.25E+005	0.23E-006	-0.57E-027	-0.17E-014
22	0.96E-006	0.22E-015	-0.17E-009	-0.78E+006	0.98E-006	-0.34E-028	-0.25E-014
23						-0.17E-029	0.17E-008
24							0.25E-008

beresnings fuldført, info : 0

i	b(i)	sisma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.34E-004	0.21E+000	-0.36E-004	-0.17E-003	0.34E-004	-0.36E-004	-0.17E-003
2	0.12E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.73E-005	0.12E-004	-0.10E-005	-0.73E-005
3	0.42E-005	0.20E-001	-0.40E-006	-0.20E-004	0.39E-005	-0.40E-007	-0.20E-005
4	0.15E-005	0.13E-001	0.10E-006	0.83E-005	0.13E-005	0.10E-008	0.83E-007
5	0.53E-006	0.16E-002	-0.10E-006	-0.64E-004	0.45E-006	-0.10E-009	-0.64E-007
6	0.17E-006	0.68E-003	0.12E-007	0.17E-004	0.16E-006	0.12E-011	0.17E-008
7	0.70E-007	0.14E-003	0.35E-007	0.25E-003	0.55E-007	0.35E-012	0.25E-008

8	0.24E-007	0.27E-004	0.17E-008	0.65E-004	0.19E-007	0.17E-014	0.65E-010
9	0.10E-007	0.16E-004	-0.20E-007	-0.12E-002	0.68E-008	-0.20E-014	-0.12E-009
10	0.40E-008	0.27E-005	-0.10E-007	-0.39E-002	0.24E-008	-0.10E-015	-0.39E-010
11	0.17E-008	0.12E-005	0.29E-008	0.24E-002	0.87E-009	0.29E-017	0.24E-011
12	0.79E-009	0.62E-006	-0.64E-008	-0.10E-001	0.31E-009	-0.64E-018	-0.10E-011
13	0.44E-009	0.22E-006	0.48E-008	0.23E-001	0.12E-009	-0.48E-019	-0.22E-012
14	0.33E-009	0.48E-007	0.40E-008	0.58E-001	0.53E-010	0.40E-020	0.58E-013
15	0.37E-009	0.15E-007	-0.31E-008	-0.18E+000	0.49E-010	-0.31E-021	-0.18E-013
16	0.60E-009	0.49E-007	0.24E-008	0.47E+000	0.10E-009	0.24E-022	0.49E-014
17	0.12E-008	0.11E-008	-0.18E-008	-0.17E+001	0.29E-009	-0.18E-023	-0.17E-014
18	0.28E-008	0.19E-009	0.14E-008	0.32E+001	0.85E-009	0.14E-024	0.28E-015
19	0.68E-008	0.28E-010	0.96E-009	0.74E+002	0.25E-008	0.96E-026	0.34E-015
20	0.17E-007	0.35E-011	0.67E-009	0.19E+003	0.76E-008	0.67E-027	0.19E-015
21	0.46E-007	0.32E-012	-0.45E-009	-0.14E+004	0.24E-007	-0.45E-028	-0.14E-015
22	0.12E-006	0.21E-013	-0.29E-009	-0.14E+005	0.76E-007	-0.29E-029	-0.14E-015
23	0.34E-006	0.74E-015	0.17E-009	0.23E+006	0.26E-006	0.17E-030	0.23E-015
24	0.95E-006	0.10E-016	0.81E-010	0.80E+007	0.98E-006	0.81E-032	0.80E-015

beresning fuldført, info : 0

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nybeta	ny chi
1	0.34E-004	0.21E+000	-0.36E-004	-0.17E-003	0.34E-004	-0.36E-004	-0.17E-003
2	0.13E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.72E-005	0.12E-004	-0.10E-005	-0.72E-005
3	0.49E-005	0.23E-001	-0.61E-006	-0.26E-004	0.45E-005	-0.61E-007	-0.26E-005
4	0.19E-005	0.11E-006	0.78E-005	0.78E-005	0.16E-005	0.11E-008	0.78E-007
5	0.72E-006	0.20E-002	-0.92E-007	-0.46E-004	0.61E-006	-0.92E-010	-0.46E-007
6	0.28E-006	0.90E-003	0.14E-007	0.16E-004	0.23E-006	0.14E-011	0.16E-008
7	0.11E-006	0.19E-003	0.30E-007	0.15E-003	0.84E-007	0.30E-012	0.15E-008
8	0.44E-007	0.42E-004	0.20E-008	0.49E-004	0.33E-007	0.20E-014	0.49E-010
9	0.18E-007	0.23E-004	-0.19E-007	-0.80E-003	0.13E-007	-0.19E-014	-0.80E-010
10	0.75E-008	0.37E-005	0.94E-008	0.25E-002	0.48E-008	0.94E-016	0.25E-010
11	0.33E-008	0.20E-005	0.17E-008	0.88E-003	0.19E-008	0.17E-017	0.88E-012
12	0.15E-008	0.88E-006	-0.60E-008	-0.69E-002	0.72E-009	-0.60E-018	-0.69E-012
13	0.74E-009	0.12E-006	-0.40E-008	-0.12E-001	0.28E-009	-0.40E-019	-0.12E-012
14	0.43E-009	0.12E-006	0.35E-008	0.30E-001	0.11E-009	0.35E-020	0.30E-013
15	0.32E-009	0.38E-007	0.28E-008	0.74E-001	0.28E-021	0.28E-021	0.74E-014
16	0.33E-009	0.11E-007	-0.23E-008	-0.21E+000	0.43E-010	-0.23E-022	-0.21E-014
17	0.49E-009	0.27E-008	0.18E-008	0.67E+000	0.77E-010	0.18E-023	0.67E-015
18	0.89E-009	0.57E-009	-0.13E-008	-0.24E+001	0.19E-009	-0.13E-024	-0.24E-015
19	0.18E-008	0.11E-009	0.99E-009	0.93E+001	0.51E-009	0.99E-026	0.93E-016
20	0.41E-008	0.17E-010	0.72E-009	0.41E+002	0.14E-008	0.72E-027	0.14E-016
21	0.96E-008	0.23E-011	0.51E-009	0.22E+003	0.38E-008	0.51E-028	0.22E-016
22	0.23E-007	0.25E-012	0.35E-009	0.14E+004	0.11E-007	0.35E-029	0.11E-016
23	0.57E-007	0.21E-013	-0.23E-009	-0.11E+005	0.31E-007	-0.23E-030	-0.11E-016
24	0.14E-006	0.12E-014	-0.15E-009	-0.12E+006	0.91E-007	-0.15E-031	-0.12E-016
25	0.37E-006	0.37E-016	0.84E-010	0.23E+007	0.28E-006	0.84E-033	0.23E-016
26	0.94E-006	0.44E-018	0.39E-010	0.89E+008	0.97E-006	0.39E-034	0.89E-016

beresning fuldført, info : 0

	0.14E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.72E-005	0.13E-004	-0.10E-005	-0.72E-005
2	0.33E-004	0.22E+000	-0.37E-004	-0.17E-003	0.33E-004	-0.37E-004	-0.17E-003
3	0.14E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.71E-005	0.14E-004	-0.10E-005	-0.71E-005
4	0.62E-005	0.28E-001	-0.94E-006	-0.71E-005	0.57E-005	-0.94E-006	-0.71E-005
5	0.27E-005	0.18E-001	0.11E-006	0.71E-005	0.23E-005	0.12E-008	0.71E-007
6	0.12E-005	0.29E-002	-0.85E-007	-0.27E-004	0.99E-006	-0.85E-010	-0.29E-007
7	0.52E-006	0.14E-002	0.19E-007	0.13E-004	0.42E-006	0.19E-011	0.13E-008
8	0.23E-006	0.32E-003	0.22E-007	0.67E-004	0.18E-006	0.22E-012	0.67E-009
9	0.10E-006	0.85E-004	0.28E-008	0.33E-004	0.78E-007	0.28E-014	0.33E-010
10	0.46E-007	0.41E-004	-0.14E-007	-0.38E-003	0.33E-007	-0.14E-014	-0.38E-010
11	0.21E-007	0.67E-005	0.77E-008	0.12E-002	0.14E-007	0.77E-016	0.12E-010
12	0.98E-008	0.48E-005	0.11E-008	0.24E-003	0.62E-008	0.11E-017	0.24E-012
13	0.47E-008	0.15E-005	0.52E-008	0.35E-002	0.27E-008	0.52E-018	0.35E-012
14	0.23E-008	0.58E-006	-0.28E-008	-0.45E-002	0.12E-008	-0.28E-019	-0.45E-013
15	0.12E-008	0.28E-006	-0.28E-008	-0.99E-002	0.52E-009	-0.28E-020	-0.99E-014
16	0.65E-009	0.11E-006	0.24E-008	0.22E-001	0.23E-009	0.24E-021	0.22E-014
17	0.41E-009	0.34E-007	-0.20E-008	-0.57E-001	0.11E-009	-0.20E-022	-0.57E-015
18	0.27E-009	0.10E-007	0.12E-008	0.14E+000	0.53E-010	0.12E-024	0.14E-016
19	0.37E-009	0.71E-009	-0.97E-009	-0.14E+001	0.49E-010	-0.97E-026	-0.14E-016
20	0.54E-009	0.14E-009	0.75E-009	0.47E+001	0.99E-010	0.75E-027	0.47E-017
21	0.99E-009	0.31E-010	-0.53E-009	-0.18E+002	0.56E-011	-0.53E-028	-0.18E-017
22	0.11E-008	0.54E-011	0.41E-009	0.78E+002	0.30E-009	0.41E-029	0.78E-018
23	0.38E-008	0.84E-012	0.30E-009	0.36E+003	0.13E-008	0.30E-030	0.36E-018
24	0.79E-008	0.11E-012	0.21E-009	0.19E+004	0.30E-008	0.21E-031	0.19E-018
25	0.17E-007	0.11E-013	0.12E-009	0.13E+005	0.07E-008	0.12E-032	0.07E-018
26	0.69E-007	0.13E-014	0.74E-010	0.12E+007	0.11E-006	0.74E-034	0.11E-017
27	0.14E-006	0.63E-016	0.43E-010	0.24E+008	0.31E-006	0.43E-035	0.24E-017
28	0.39E-006	0.19E-017	0.26E-010	0.11E+010	0.07E-006	0.26E-036	0.07E-016

beresninga foldftt, info :

i	b(i)	sigma(i)	beta(i)	chi(i)	ny b(i)	nubeta	ny chi
1	0.33E-004	0.22E+000	-0.37E-004	-0.17E-003	0.33E-004	-0.37E-004	-0.17E-003
2	0.14E-004	0.14E+000	-0.10E-005	-0.71E-005	0.14E-004	-0.10E-005	-0.71E-005
3	0.62E-005	0.28E-001	-0.94E-006	-0.71E-005	0.57E-005	-0.94E-006	-0.71E-005
4	0.27E-005	0.18E-001	0.11E-006	0.71E-005	0.23E-005	0.12E-008	0.71E-007
5	0.12E-005	0.29E-002	-0.85E-007	-0.27E-004	0.99E-006	-0.85E-010	-0.29E-007
6	0.52E-006	0.14E-002	0.19E-007	0.13E-004	0.42E-006	0.19E-011	0.13E-008
7	0.23E-006	0.32E-003	0.22E-007	0.67E-004	0.18E-006	0.22E-012	0.67E-009
8	0.10E-006	0.85E-004	0.28E-008	0.33E-004	0.78E-007	0.28E-014	0.33E-010
9	0.46E-007	0.41E-004	-0.14E-007	-0.38E-003	0.33E-007	-0.14E-014	-0.38E-010
10	0.21E-007	0.67E-005	0.77E-008	0.12E-002	0.14E-007	0.77E-016	0.12E-010
11	0.98E-008	0.48E-005	0.11E-008	0.24E-003	0.62E-008	0.11E-017	0.24E-012
12	0.47E-008	0.15E-005	0.52E-008	0.35E-002	0.27E-008	0.52E-018	0.35E-012
13	0.23E-008	0.58E-006	-0.28E-008	-0.45E-002	0.12E-008	-0.28E-019	-0.45E-013
14	0.12E-008	0.28E-006	-0.28E-008	-0.99E-002	0.52E-009	-0.28E-020	-0.99E-014
15	0.65E-009	0.11E-006	0.24E-008	0.22E-001	0.23E-009	0.24E-021	0.22E-014
16	0.41E-009	0.34E-007	-0.20E-008	-0.57E-001	0.11E-009	-0.20E-022	-0.57E-015
17	0.30E-009	0.10E-007	0.12E-008	0.14E+000	0.53E-010	0.12E-024	0.14E-016
18	0.27E-009	0.71E-009	-0.97E-009	-0.14E+001	0.49E-010	-0.97E-026	-0.14E-016
19	0.54E-009	0.14E-009	0.75E-009	0.47E+001	0.99E-010	0.75E-027	0.47E-017
20	0.99E-009	0.31E-010	-0.53E-009	-0.18E+002	0.56E-011	-0.53E-028	-0.18E-017
21	0.11E-008	0.54E-011	0.41E-009	0.78E+002	0.30E-009	0.41E-029	0.78E-018
22	0.38E-008	0.84E-012	0.30E-009	0.36E+003	0.13E-008	0.30E-030	0.36E-018
23	0.79E-008	0.11E-012	0.21E-009	0.19E+004	0.30E-008	0.21E-031	0.19E-018
24	0.17E-007	0.11E-013	0.12E-009	0.13E+005	0.07E-008	0.12E-032	0.07E-018
25	0.69E-007	0.13E-014	0.74E-010	0.12E+007	0.11E-006	0.74E-034	0.11E-017
26	0.14E-006	0.63E-016	0.43E-010	0.24E+008	0.31E-006	0.43E-035	0.24E-017
27	0.39E-006	0.19E-017	0.26E-010	0.11E+010	0.07E-006	0.26E-036	0.07E-016



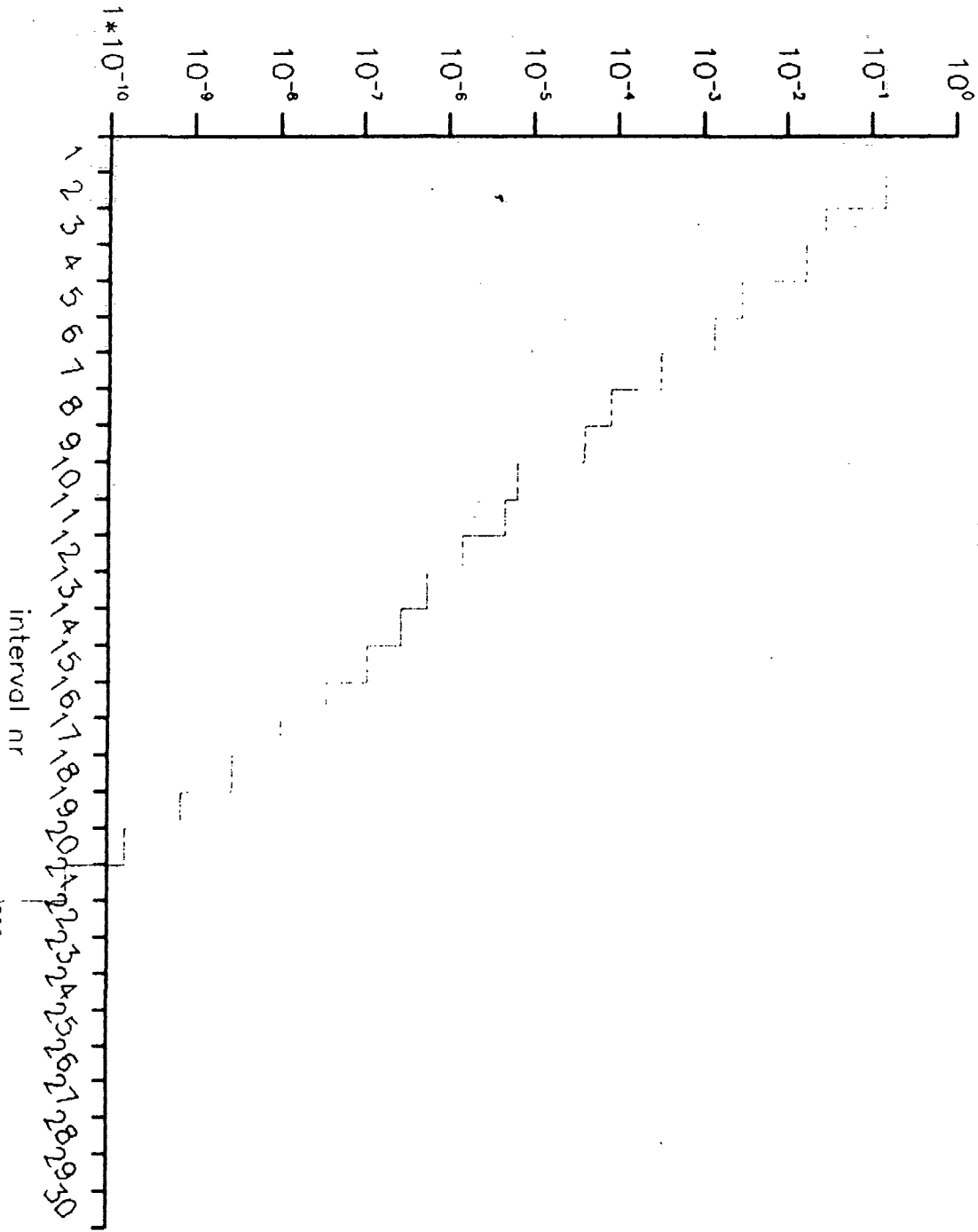
26	0.37E-007	0.11E-014	-0.10E-009	-0.92E+005	0.18E-007	-0.10E-033	-0.92E-019
27	0.81E-007	0.72E-016	0.65E-010	0.90E+004	0.46E-007	0.65E-035	0.90E-019
28	0.18E-006	0.33E-017	0.40E-010	0.17E+008	0.12E-006	0.40E-036	0.12E-018
29	0.41E-006	0.79E-019	-0.22E-010	-0.28E+009	0.33E-006	-0.22E-037	-0.28E-018
30	0.93E-006	0.17E-020	-0.10E-010	-0.61E+010	0.96E-006	-0.10E-038	-0.61E-018

## Bilag 5.

Grafer fra analysen af den rotationssymmetriske model.

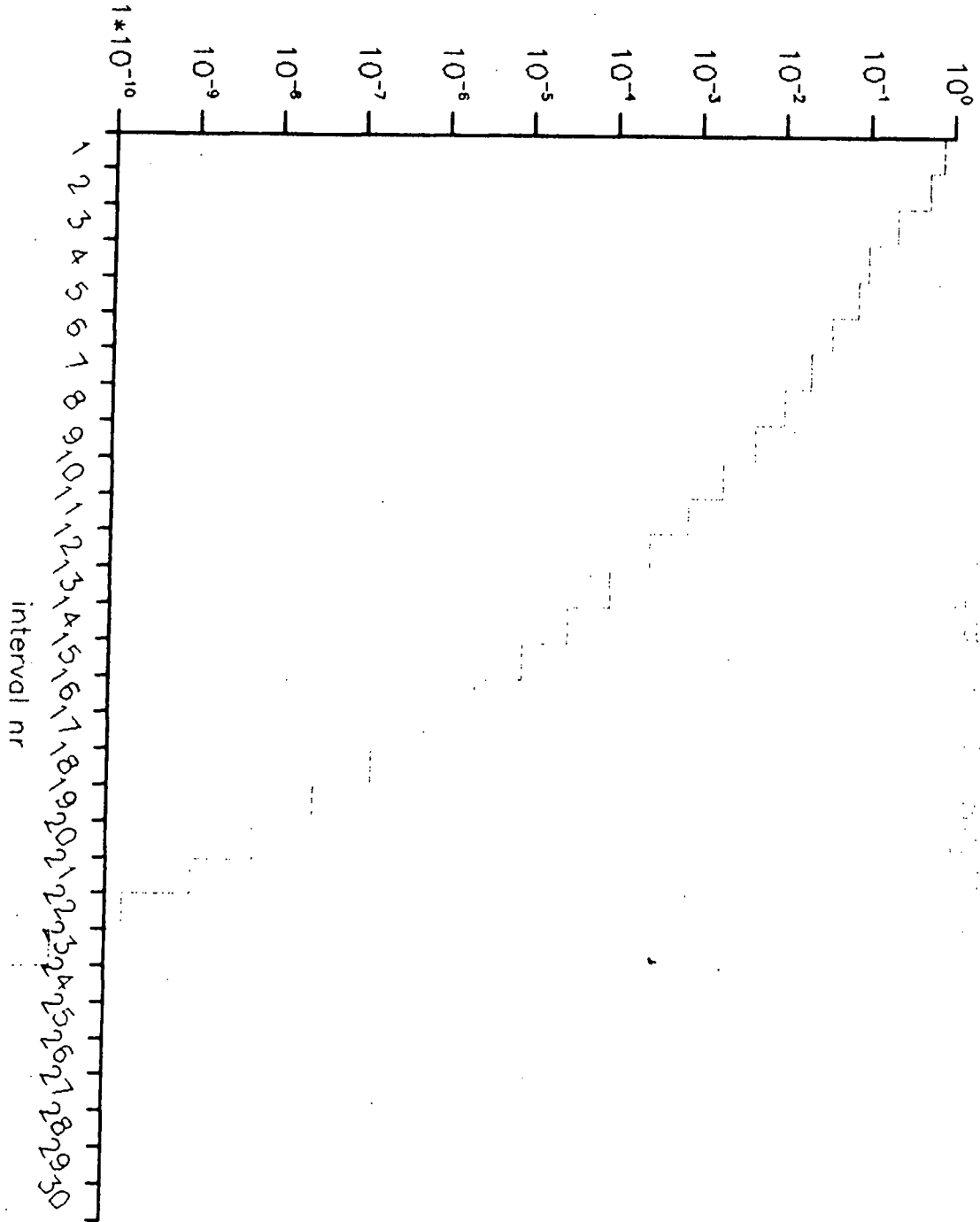
1. Sigma plottet som fkt. af  $i$ , for at kunne vise, at den går mod nul for voksende  $i$ .
2.  $b_i$  og den korrigerede  $b_i$  plottet som fkt. af  $i$  med henblik på at kunne vurdere følsomheden af integralligningen.  
Den originale værdi er plottet fuldt optrukket, mens den korrigerede værdi er plottet stiplet.

s = 0.001  
Sigma(i)

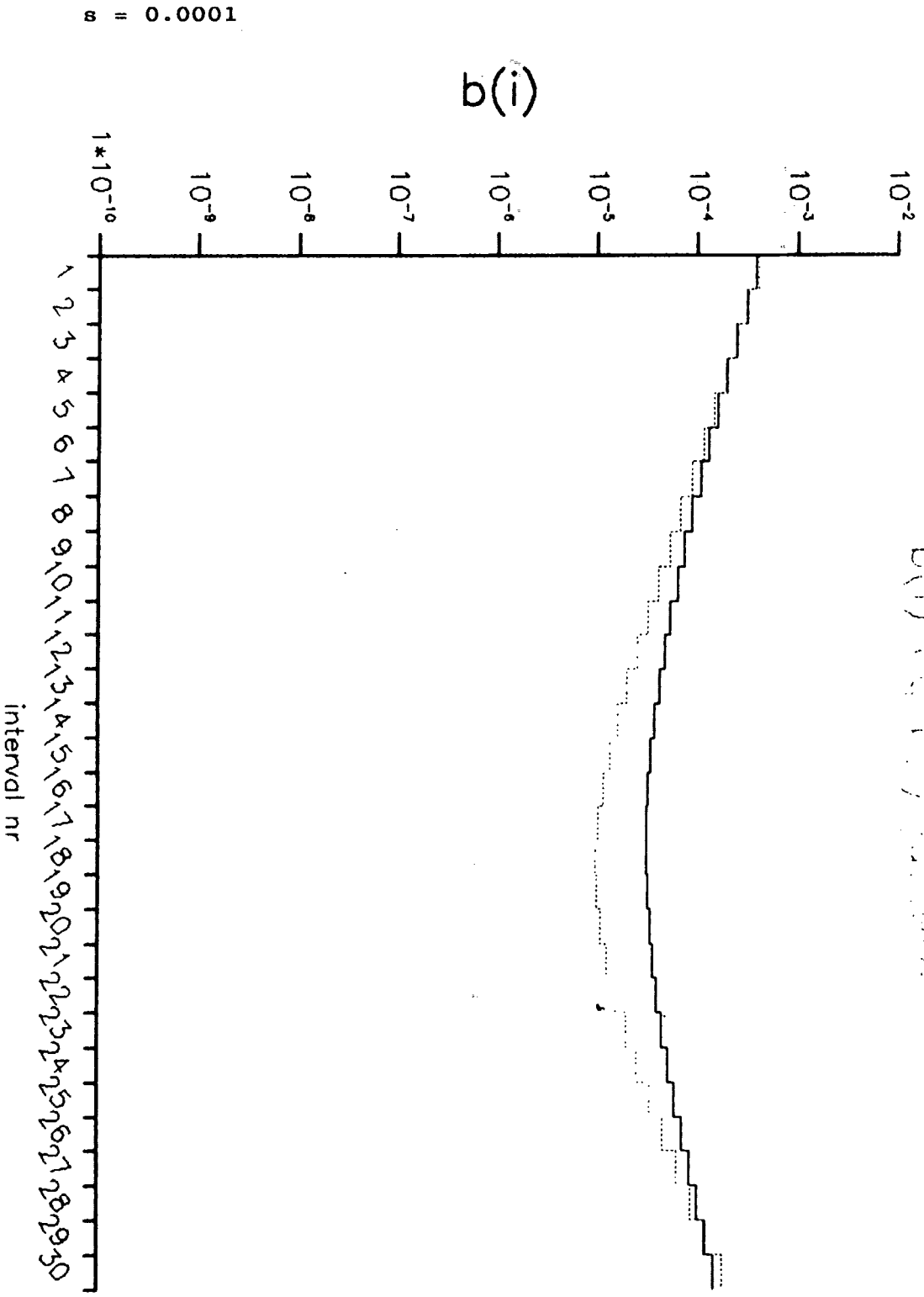


s = 0.0001

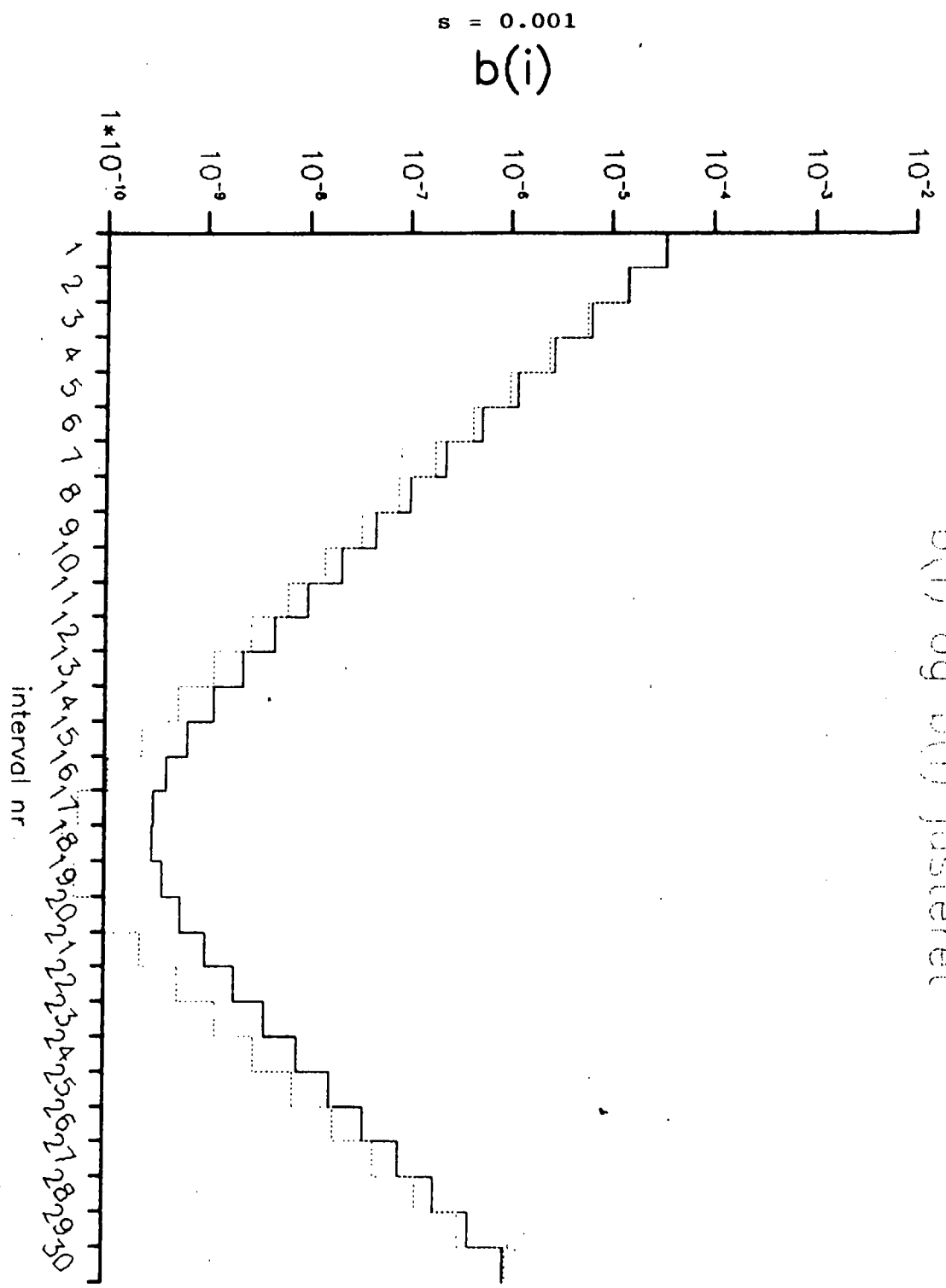
Sigma(i)



$b(i)$  vs  $i$  histogram



$b(i)$  og  $b(i)$  justeret



Bilag 6.

Kildeteksten til programmet der  
beregner koncentrationen udfra  
den asymptotiske løsning.

```

program asymptote(input,output);

var

    lambda,      (* Konstanten P/kvadratrod(D)- kvadratrod(D)/A          *)
    perm,        (* Permeabilitets konstanten                                  *)
    afstand,     (* afstanden fra centrum af #Jet til barrieren                          *)
    diff,        (* diffusionskonstanten                                                  *)
    antalLed,   (* Antallet af led i simpson-integralet                                   *)
    pi,         (* pi sldan som vi alle kender den                                       *)
    radius,     (* mJlerpunktets afstand fra #Jets centrum                               *)
    tid,        (* tidspunktet for beregningen                                           *)
    conc       (* Den beregnede koncentration                                           *)

    : double;

```

```

function exet( x : double ) : double;

    (* Denne specialudgave af eksponentialfunktionen s#rger for at der *)
    (* ikke kommer fejl s#lfremt EXP(X)bliver mindre end n#Jestigheden *)
    (* kan klare. Istedet sfttes funktionsresultatet til nul.        *)

```

```

begin

    if x < -80 then
        exet := 0
    else
        exet := exp(x);

end († exet †);

```

```

function erfc(x : double) : double;

    (* Denne funktion beregner den komplement#re fejlfunktion ERFC(X). *)
    (* Der benyttes en algoritme fundet i .....                          *)
    (* Algoritmen lover en fejl s#l max. ....                             *)

    (* A1 - A5 samt P og T er allesammen konstanter benyttet          *)
    (* i den ovenst#lende algoritme                                     *)

```

```

var

    s1, s2, s3, s4, s5, p, t : double;

```

```

begin

    s1 := 0.254829592;
    s2 := -0.284496736;
    s3 := 1.421413741;
    s4 := -1.453152027;
    s5 := 1.061405429;

    p := 0.3275911;

```



```

t := 1.0/(1.0+P*x);

erfc := t*(a1+t*(a2+t*(a3+t*(a4+t*a5) ) ) ) * exp(-x**2) );

end (* erfc *);

function c0(tid : double) : double;

(* Denne funktion beregner koncentrationen af fluorescein i blodet *)
(* til tiden TID. *)
(* Beregningen bygger på en selv-gjort approksimation af *)
(* alleverdierne v. hJ. s. 3 eksponentialfunktioner. *)
(* En yderligere beskrivelse af denne approksimation findes i *)
(* referencen. *)

(* de 6 konstanter a1,a2,a3 og b1,b2,b3 indgår i denne *)
(* approksimation. *)

var
a1, a2, a3, b1, b2, b3 : double ;

begin

a1 := - 0.015463/60.0;
b1 := 0.0000093344;

a2 := - 0.155040/60.0;
b2 := 0.0000224922;

a3 := - 1.000000/60.0;
b3 := 0.0000181734;

c0 := b1*exp(a1*tid)+ b2*exp(a2*tid)+ b3*exp(a3*tid) ;

end (* c0 *) ;

function f( Radius,tau : double) : double;

(* Denne funktion beregner funktionen f i integraludtrykket. *)
(* Den svarer til funktion fi udtrykket under integraltegnet *)
(* i formelen for beregning af C(R,T). *)
(* Det er videst muligt omfang søgt at undgå dobbelt beregninger, *)
(* for dermed at sikre at beregningerne foregår så hurtigt som *)
(* muligt. *)

(* RADIUS angiver den afstand fra kjet for hvilken FC skal *)
(* beregnes. *)
(* TAU er den parameter der integreres over - en tid. *)

(* De nedenfor definerede variable er indsat for at forenkle og *)
(* optimere beregningen af FC. *)

var
k, ex1, ex2, ex3, ex4, ex5, ex6,

```

```

    fx1, fx2, gx1, gx2, hx1, hx2 : double ;

begin

    fx1 := afstand-radius;
    fx2 := afstand+radius;

    gx1 := 2*sqrt(diff*tau);
    gx2 := 4*diff*tau;

    hx1 := lambda*sqrt(tau);
    hx2 := sqrt(diff);

    K := (perm*afstand)/(radius*hx2);

    ex1 := lambda*fx1/hx2;
    ex2 := lambda*fx2/hx2;

    ex3 := -fx1**2/gx2;
    ex4 := -fx2**2/gx2;

    ex5 := hx1+fx1/gx1;
    ex6 := hx1+fx2/gx1;

    f := k*( 1/sqrt(pi*tau)*
              ( exp(-ex3)-exp(-ex4) )
              -lambda*exp(-lambda**2*tau)*
              ( exp(-ex1)*erfc(ex5) - exp(-ex2)*erfc(ex6) ) );

end (* f *);

function intesrand(radius, tau, tid : double ) : double;

    (* Denne funktion beresner intesranden. *)

    (* RADIUS er afstanden fra Jets centrum. *)
    (* TAU er den tid funktionsværdien p.t. beresnes for. *)
    (* TID er den tid intesraet beresnes for. *)

begin

    intesrand := c0(tid-tau)*f(radius,tau);

end (* intesrand *);

function SIMPSON ( tid, radius, antal_led : double) : double;

    (* Denne funktion beresner intesraet v. hj. a. Simpsons formel. *)
    (* Dette er nfrmere beskrevet i rapporten. *)

    (* TID er den slut tiden for integrationen, dvs. den tid til *)
    (* hvilken koncentrationen skal beresnes. *)
    (* RADIUS er den radius for hvilken koncentrationen skal *)
    (* beresnes. *)
    (* ANTALLEDD Er antallet af led der skal bruges i den numeriske *)

```

```

(*      integration.      *)

var

  I,          (* En tfler *)
  nedre_grænse, (* Den nedre grænse for integrationen *)
  ovre_grænse, (* Den øvre grænse for integrationen *)
  sum2,       (*
  sum1,       (* disse tre er mellemsummer i beregning af integralet *)
  sum4,       (*
  interval    (* Intervalstørrelsen *)

          : double;

begin

  nedre_grænse := 0.00001;
  ovre_grænse  := tid;

  interval     := (ovre_grænse-nedre_grænse)/antal_led;

  sum2         := 0.0;
  sum1         := integrand(radius,nedre_grænse,tid)
               + integrand(radius,ovre_grænse,tid);
  sum4         := 0.0;

  i := 0.0;
  repeat
    i := i + 2.0;
    sum2 := sum2 + 2.0*integrand(radius, nedre_grænse+i*interval, tid);
  until i > antal_led-3.0;

  i := -1.0;
  repeat
    i := i + 2.0;
    sum4 := sum4 + 4.0*integrand(radius, nedre_grænse+i*interval, tid);
  until i > antal_led-2.0;

  simpson := (interval/3.0) * (sum1+sum2+sum4);

end (* simpson *);

(* her begynder hovedprogrammet sj. *)
(* I princippet er det blot en række initialiseringer af de *)
(* forskellige konstanter der er nødvendige, samt en række hvori *)
(* koncentrationen i de forskellige punkter beregnes, og udskrives. *)

(* Skridtlængden for radius er 0.1 cm, og for tiden 10 minutter = *)
(* 600 sekunder. *)

begin

  antal_led := 200.0;
  pi        := 3.141592653589793238462643;
  perm      := 0.000001;
  afstand   := 1.2001;
  diff      := 0.000006;
  lambda    := Perm/sqrt(diff)-sqrt(diff)/afstand;

```

```

Tid      := 600;

writeln(' ');
writeln('beresning af koncentration i #Jet. ');
writeln(' ');
writeln('Permeabilitet      : ',perm);
writeln('\Jets radius      : ',afstand);
writeln('Diffusionskonstanten : ',diff);
writeln('Lambda      : ',lambda);
writeln(' ');

repeat

    radius := 0.1 ;

    repeat

        conc:= simpson(tid,radius,antalLed);
        writeln('tid: ',tid:4:0,' radius: ',radius:8:7,
            ' antal led . ',antalLed:6:0,' conc : ',conc:12);

        radius := radius+0.1;

    until Radius > 1.2;

    Tid := Tid + 600.0;

until Tid > 7200.0;

end.

```

Bilag 7.

Kildeteksten til programmet der beregner koncentrationen, ved hjælp af separation af de variable.

var

```
sl_led, (* Højfløvevariabel der bliver anvendt i bestrøbelserne se at *)
(* undgå gentagelser af identiske beregninger. *)

led, (* led har samme funktion som sl_led. *)

k (* k bliver brugt som index i tabeller. *)

:integer;

radius, (* Melepunktets afstand fra xJets centrum. *)

tid, (* Tidspunktet for beregningen. *)

afstand, (* Afstanden fra centrum af xJet til barrieren. *)

delta, (* Diffusionskonstanten/afstand**2. *)

a1,a2,a3, (* a1,a2,a3,b1,b2 og b3 er konstanter, der indgår i en *)
b1,b2,b3 (* approximation af c0(t) dvs. af koncentrationen af *)
(* fluorescein i blodet. *)

: double;

omega, (* Tabel der indeholder egenværdierne. *)

a1, (* Tabel der indeholder a1'erne *)

ti_0 (* Tabel der indeholder Ti_0'erne *)

: array [1..15000] of double;
```

```
function c0(tid: double) : double;
```

```
(* Denne funktion beregner koncentrationen af fluorescein i blodet *)
(* til tiden "tid". Beregningen bygger på en approximation af mele- *)
(* værdierne vha. 3 eksponentialfunktioner. En nærmere beskrivelse *)
(* af denne approximation findes tidligere i rapporten. *)
```

```
begin
```

```
c0:= b1*exp(a1*tid)+b2*exp(a2*tid)+b3*exp(a3*tid);
```

```
end (* c0 *);
```

```
procedure beregn_omega;
```

```
(* I denne procedure beregnes egenværdierne til egenværdiproblemet *)
(* vha. Newton-Raphsons iterationsformel. X1 og X2 svarer til hen- *)
(* holdsvist  $X_n$  og  $X_{n+1}$  i formel  $X_{n+1} = X_n + F(X_n)/F'(X_n)$ . *)
```

```

x1, x2: double;

begin
  for k:= sl_led to led do
    begin
      (* Her sfttes X2 lis med besyndelsesvfrdien til hver iteration. *)
      (* Besyndelsesvfrdien forskydes med pi for hver iteration. *)

      x2:=0.1+(k-1)*3.14;

      (* Esenyfrdierne bliver bestemt med en njustished pi 0.000001. *)

      while abs(x1-x2) > 0.000001 do
        begin
          x1:= x2;
          x2:= x1-(cos(x1)/sin(x1)-4/(x1*5))/(-1/sin(x1)**2+4/(5*x1**2));
        end;

        omega[k] := x2 ;
      end;
    end (* beresn_omega *);

  procedure beresn_ai;

    (* I denne procedure beresnes ai'erne, efter formlen, der blev *)
    (* udledt tidligere i rapporten. *)

    begin
      for k:= sl_led to led do

        ai[k] := (4*sin(omega[k]) -
                  4*omega[k]*cos(omega[k]) ) /
                  (2*omega[k]**2
                   -omega[k]*sin(2*omega[k]));

      end (* beresn_ai *) ;

    procedure beresn_ti_0;

      (* I denne procedure bliver ti(0)'erne beresnet, efter formlen, som *)
      (* blev udledt tidligere i rapporten. *)

      var
        c_0 (* c_0 svarer til c0(0) *)
          : double;

    begin

```

```

c_0:= c0(0);
for k:= gl_led to led do
    ti_0[k] := - c_0*ai[k];
end (* beregn_ti_0 *) ;

function ti(t : double; i : inteser) : double;
(* I denne funktion beregnes Ti(t), vha formelen der er udledt tidligere *)
(* i rapporten, og som der er regnet videre p e i dokumentationen af pro- *)
(* grammet. *)
begin

    ti := -ai[i]*(a1*b1/(a1+delta*omega[i]**2)*(exp(a1*t)-exp(-delta*
        omega[i]**2*t))+
        a2*b2/(a2+delta*omega[i]**2)*(exp(a2*t)-exp(-delta*
        omega[i]**2*t))+
        a3*b3/(a3+delta*omega[i]**2)*(exp(a3*t)-exp(-delta*
        omega[i]**2*t))))+
        exp(-delta*omega[i]**2*t)*ti_0[i];
end (* ti *) ;

function beregn_c(r : double; t : double) : double;
(* I denne procedure beregnes koncentrationen af flourescein i xJet *)
(* til tiden t, i punkterne med afstanden r, fra centrum af xJe *)
var
    vaerdi, (* vaerdi er den forelxbise sum, der indg er i beregningerne *)
        (* af c *)
    tillaes, (* tillaes er det sidst beregnede led i summen, der indg er *)
        (* i beregningen af c *)
    c0_t    (* c0_t er koncentrationen af flourescein i blodet til tiden t *)
        : double;
    i       (* I anvendes som index i tabeller *)
        : inteser;
begin
    vaerdi := 0;
    i := 0;
    c0_t:= c0(t);
repeat

```



```

i := i + 1;

if i > led then
begin
    sl_led := led+1;
    led := led+100;

    beregn_omega;
    beregn_ai;
    beregn_ti_0;

end;

tillaes := ti(t,i)*afstand*sin(omega[i]*r/afstand)/r;
vaerdi := vaerdi + tillaes;

(* Ner et led i summen, der indgår i udtrykket for c, er mere end *)
(* 10^4 gange mindre end den indtil da beregnede c-værdi, se storres *)
(* summeringen. At dette er en passende størrelsesorden, har vi fundet *)
(* frem til via en serie af eksperimenter, hvor vi har fundet de 10^4, og *)
(* se vurderet effekten på c-værdi *)

until abs(tillaes/(vaerdi+c0_t)) < 0.0001 (* = 10^-4 *);

beregn_c := vaerdi+c0_t;

end (* beregn_c *) ;

```

```

(*****          HOVEDPROGRAM BEGYND          *****)

```

```

begin

(* Initialisering af konstanter og variable *);

afstand := 1.2;
delta := 0.000006/afstand**2;

a1:= -0.0002577;
b1:= 0.0000093344;
a2:= -0.002584;
b2:= 0.0000224922;
a3:= -0.0166667;
b3:= 0.0000181734;

led := 0;
sl_led := 0;

tid:= 0;

(* Fra disse repeat-løkker styres beregningen af fluoresceinkoncen- *)
(* trationen i xJet, til tiden 0, 10, 20, ... , 120 min, i en afstand *)
(* fra xJets centrum på henholdsvis 0.1, 0.2, ... , 1.2 cm. Det skal *)
(* bemærkes at tiden regnes i sekunder *)

```

```

repeat
    radius:= 0.1;
    repeat
        writeln('Tid = ',tid:4:0,' Radius = ',radius:4:2,
            ' Conc = ',beresn_c(radius,tid):14);
        radius:= radius+0.1;
    until radius > afstand;
    tid:=tid+600;
until tid > 7200.0;

writeln;
writeln('Der bliver beresnet ialt ',led:8,' esenyrndier');

end. (* HOVEDPROGRAM SLUT *)

```

Bilag 8.

Kildeteksten til programmet der blev benyttet under analysen af integral-ligningen.

Program test\_ssvd58

C Hovedprogrammet i den numeriske analyse.  
 C I dette program beregnes matricerne A og B rødvendise for analysen.  
 C samt udfra SVD analysen (foretaget via kaldet til SSVDC) beregnes  
 C BETA og CHI. Endvidere beregnes de korrigerede vrdier for B, BETA  
 C og CHI.  
 C  
 C Dette hovedprogram medtager kun de centrale dele af hovedprogrammet  
 C brugt i SVD analysen, idet vi under de numeriske eksperimenter har  
 C udvidet hovedprogrammet se det kunne skrive matricerne ud, teste  
 C graferne m.m.

implicit none

include 'parameter.for'

integer\*4

*	i, j,	!	Tfille variable.
*	n,	!	Max-størrelsen af matricerne.
*	max_int,	!	Max. størrelse af matricen som
		!	beregningen skal gennemføres for.
*	antal_int,	!	Antallet af basisfunktioner -
		!	størrelsen af matricerne.
*	info,	!	Status fra SSVDC1 subrutinen.
*	output,	!	udtæts enhed (5=skrm).
*	snit	!	Grafen hvorfra BETA korrigeres.

parameter (n = 264)

real\*8

*	arr(n,n),	!	A-matricen (venstresiden).
*	u(n,n), v(n,n),	!	Venstre og højre singulære funktioner.
*	sigma(n),	!	De singulære vrdier.
*	x_int,s_int,	!	Intervalstørrelserne v. beregning af ARF
*	hx,	!	Intervalstørrelsen v. beregning af B.
*	simeson_2d, simz,	!	Integration i en og to dimensioner
		!	(subrouiner).
*	c0,	!	Subroutine til beregning af
		!	konstanten i blokbenen.
*	b(n), bng(n),	!	Højresiden og d' korrigerede højreside.
*	chit(n), chins(n),	!	Chi og sine korrigerede.
*	betat(n), betans(n),	!	Beta og sine korrigerede.
*	w(n), work(n)	!	Arbejdsarray til SSVDC1 subrutinen.

C indlæsning af laplace-tiden, afskriftnesrfrne og maksimalt intervalantal,  
 C samt valgt af udskriftsmedium.

print \*, ' test s : '  
 accept \*,s

print \*, ' test intervalantal '  
 accept \*, max\_int

print \*, ' test snit : '  
 accept \*,snit

```

open (unit=output, file = 'sys$output',status='new')

write (output,11) s
11 format (/, ' tiden s : ',f10.5)
write (output,12) max_int
12 format (/, ' interval_antal : ',i4)

do antal_int = 2, max_int, 2

C Initialisering af arrays.

do I = 1,antal_int
  beta_t(i) = 0.0
  betaNY(i) = 0.0
  bny(i) = 0.0
end do

C Her beregnes A-matricen ARR. Fxrst beregnes intervalstxrrelsen, os
C dernfst vfrdien for hvert interval.

x_int = (1.0D0+delta)*a0/dfloat(antal_int)
y_int = (pi)/dfloat(antal_int)

do i = 1,antal_int
  do j = 1,antal_int

    arr(i,j) = simpson_2d(
*      (-a0+dfloat(i-1)*x_int),(-a0+dfloat(i)*x_int),8,
*      (dfloat(j-1)*y_int), (dfloat(j)*y_int), 8)/
*      sqrt(x_int*y_int)

  end do
end do

C Her beregnes hxjresiden b.

hx = (delta+1)*a0/dfloat(antal_int)

do i = 1,antal_int

  b(i) = ( (a0*p*c0(s) ) /
*      ( sqrt(hx*d)*(lambda+sqrt(s))) ) *
*      simp (-a0+dfloat(i-1)*hx , -a0+(dfloat(i))*hx ,64)

end do

C kaldet til SSVDC som beregner de singulfr vfrdier SIGMA, samt U os V.
C Tallet 11 betyder at bede U os V skal beregnes.

call ssvdc(arr,n,antal_int,antal_int,sigma,e,u,n,v,n,
*      work,11,info)

C beregning af BETA os BETANY :

do i = 1,antal_int
  do j = 1, antal_int

    beta_T(i) =beta_T(i)+ u(j,i) * b(j)

```

```

        betaNY(i) =betaNY(i)+ u(J,i) * b(J)
*           *10.0**(-1*Jmax0( (i-snit+1),0))

        end do
    end do

```

C Beregning af den korrigerede hxJreside B.

```

do i = 1,antal_int
    do J = 1, antal_int

        bny(i) = bny(i)+u(i,J) * betaNY(J)

    end do
end do

```

C Beregning af CHI og den korrigerede CHINY.

C Hvis SIGMA er nul sættes CHI og CHINY til 9.9999D300

```

do i = 1,antal_int
    if (abs(sigma(i)) .le. 1.0D-300) then
        chilt(i) = 9.9999D300
        chiny(i) = 9.9999D300
    else
        chilt(i) = beta_T(i)/sigma(i)
        chiny(i) = BETANY(I)/SIGMA(I)
    end if
end do

```

C Udskrift af resultaterne

```

write (output,95) info
95 format (/, ' beregning fuldført, info : ',I4,/,/)

write (output,97)
97 format
*   (/,7x,'i',9x,'b(i)',9x,'sigma(i)',8x,'beta(i)',8x,'chi(i)',
*   9x,'ny b(i)',9x,'nybeta',9X,'ny chi',/)

do i = 1,antal_int
    write(output, 96) i,b(i),sigma(i),beta_t(i),chilt(i),
*   bny(i),BETANY(I),chiny(i)
96 format (4X,i4,7(5x,e10.2e3) )
    end do

end do

```

C Afslutnings

```

close (unit=output)

end

```

real\*8 function f(x)

C Denne funktion giver værdierne til hxJresiden B.

```
implicit none
```

```
include 'parameter.for'
```

```
real*8 x,x1,      ! x-værdien og den sammentrækkede x-værdi.  
*      xpon1,xpon2 ! eksponenterne i funktionsudtrykket.
```

```
C Beregning af funktionen.
```

```
x1 = (3+delta)*(x+a0)/(2*(1+delta)) - a0
```

```
xpon1 = (x1-a0)*sqrt(s/d)
```

```
xpon2 = (x1+a0)*sqrt(s/d)
```

```
f = (exp(xpon1) - exp(-xpon2)) / x1
```

```
return
```

```
end
```

```
real*8 function c0(s1)
```

```
C Denne funktion beregner koncentrationen i blodbanen -  
C Laplacetransformeret.
```

```
implicit none
```

```
include 'parameter.for'
```

```
real*8 s1 ! Laplacevariablen.
```

```
C Beregning af koncentrationen.
```

```
c0 = a1/(s1-b1)+a2/(s1-b2)+a3/(s1-b3)
```

```
return
```

```
end
```

```
real*8 function a(theta)
```

```
C Denne funktion beregner afstanden centrum til randen som funktion af  
C vinklen - THETA.
```

```
implicit none
```

```
include 'parameter.for'
```

```
real*8 theta ! vinklen i forhold til x-aksen.
```

```
C Beregning af funktionen; jvnf. afsnittet om numeriske eksperimenter.
```

```
if (theta.ge.0.0d0 .and. theta.le.pi/3.0d0) then  
  a = alpha*cos(3.0d0*theta)+beta
```

```

else
  a = a0
endif

return

end

```

```

real*8 function diff_a(theta)

```

C Denne funktion beregner den afledte af den ovensteende funktion. Denne  
 C funktion benyttes under beregningen af K.

```

implicit none

include 'parameter.for'

real*8 theta ! vinklen

```

C Beregningen af funktionen, isen jvnf. afsnittet om numeriske  
 C eksperimenter.

```

if (theta.gt.0.0d0 .and. theta.lt.pi/3.0d0) then
  diff_a = -3.0d0*alpha*Dsin(3.0d0*theta)
else
  diff_a = 0.0d0
endif

return

end

```

```

real*8 function E(ars)

```

C Denne funktion beregner E som indgår i beregningen af K.

```

implicit none

include 'parameter.for'

real*8 ars ! Argumentet er R = afstanden X S.

```

C Beregningen.

C Da s/D er lille er der stor sandsynlighed for underflow. Her sættes  
 C værdien af eksponentialfunktionen automatisk til nul.

```

E = Dexp(-Dsqrt(s/D)*ars)/ars

return

end

```



```
real*8 function K(x,theta)
```

```
C Her beregnes kernen K.  
C Som nevnt i kapitlet om de numeriske eksperimenter er der problemer  
C for R=0, svarende til theta=0 eller theta=pi. Hvis R er lille  
C beregnes K derfor efter den approximation der er beskrevet i  
C kapitlet.
```

```
implicit none
```

```
include 'parameter.for'
```

```
real*8
```

```
* theta,x,      ! Inddataparametrene vinkel og koordinat p  
! x-aksen.  
* r,            ! Afstand fra x til s(theta) punkt p  
! randen.  
* a,diff_A, E  ! Funktionerne som indgår i beregningen.
```

```
C Beregning af r
```

```
r = dsqrt(x**2+a(theta)**2-2.0d0*x*a(theta)*dcos(theta))
```

```
C hvis r er lille tør vi til vores approximation.
```

```
if ( r .le. 1.0D-6) then
```

```
C Theta lig nul eller theta lig pi ?
```

```
if (theta .lt. 1.0d-6) then  
  K = pi*a0*deltax*const  
else  
  K = pi*a0*const  
end if
```

```
else
```

```
C den normale beregning af K.
```

```
  K = E(r) *  
*      2.0d0*pi*a(theta)*dsin(theta)*  
*      dsqrt(a(theta)**2+diff_A(theta)**2)
```

```
end if
```

```
return
```

```
end
```

```
real*8 function simpson_2d (xmin, xmax, xant, ymin, ymax, yant)
```

```
C Beregning af simpson integralet i 2 dimensioner for funktionen K.  
C Dette er en opdatering af den 1-dimensionelle algoritme.
```

```
implicit none
```

```

*      xmin, xmax,      ! Min og max for 2. koordinat.
*      xstr, ystr,      ! Intervalstørrelsen for 1. og 2. koordinat.
*      xvst, yvst,      ! Vfstning af det enkelte punkt.
*      xpkt, ypkt,      ! Punktet.
*      sum, vaerdi,     ! Den summerede vfrdi, og den vfstede vfrdi
*                       ! i et enkelt punkt.
*      beresnvst,       ! Funktionen til beregning af vfstene.
*      k                 ! Funktionen for hvilken integralet skal
*                       ! beregnes

```

```

integer*4

```

```

*      xant, yant,      ! Intervalantal for 1. og 2. koordinat.
*      i, j             ! Tfillere

```

C Summer nulstilles, og intervalstørrelsen beregnes.

```

sum = 0.0D0

```

```

xstr = (xmax - xmin) /DFLOAT( xant)
ystr = (ymax - ymin) /DFLOAT( yant)

```

C Summer inden over de enkelte punkter.

C Vfrdien i et punkt er funktionsvfrdien ganget med vfsten for punktet.

```

do i = 0, xant

```

```

    xvst = beresnvst( i, xant)
    xpkt = xmin + dfloat(i)*xstr

```

```

    do j = 0, yant

```

```

        yvst = beresnvst( j, yant)
        ypkt = ymin + dfloat(j)*ystr

```

```

        vaerdi = xvst * yvst * k (xpkt, ypkt )

```

```

        sum = sum + vaerdi

```

```

    end do

```

```

end do

```

C Endelig beregning af integralets vfrdi.

```

simpson_2d = xstr * ystr * sum / 9.0D0

```

```

return

```

```

end

```

```

real*8 function beresnvst(nr, max)

```

C Beregning af vfsten til simpson integralerne.

C Vfsten er 1 for NR=0 eller MAX, 2 for NR lige, og 4 for NR ulige.

C I den to-dimensionelle simpson skal en x og en y vfst multipliceres

C sammen for at fe vfsten.

```
implicit none
integer*4 nr, max
```

C Beregning af vfsten.

```
if ( nr .eq. 0 .or. nr .eq. max) then
  beresn_vst = 1.0D0
else
  if ( jmod(nr,2) .eq. 0 ) then
    beresn_vst = 2.0D0
  else
    beresn_vst = 4.0D0
  end if
end if

return

end
```

```
real*8 function simp (xmin, xmax, xant)
```

C Beregning af det 1-dimensionelle simpson-integral for funktionen F.  
C beregningen er fuldstændig som i det 2-dimensionelle tilfælde.

```
implicit none

real*8 xmin, xmax, ! Xvre og nedre grænse for integralet.
* xstr, ! Intervalstørrelsen.
* xvst, ! Vfsten i et punkt.
* xpkt, ! Punktets koordinat.
* sum, værdi, ! Den summerede værdi, og den vfstede værdi
! i et enkelt punkt.
* beresn_vst, ! Vfstefunktionen.
* f ! Den funktionen for hvilken integralet skal
! beregnes.

integer*4
* xant, ! intervaltallet.
* i ! Tfiller.

sum = 0.0D0

xstr = (xmax - xmin) /DFLOAT( xant)

do i = 0, xant

  xvst = beresn_vst( i, xant)
  xpkt = xmin + dfloat(i)*xstr

  værdi = xvst * f (xpkt)

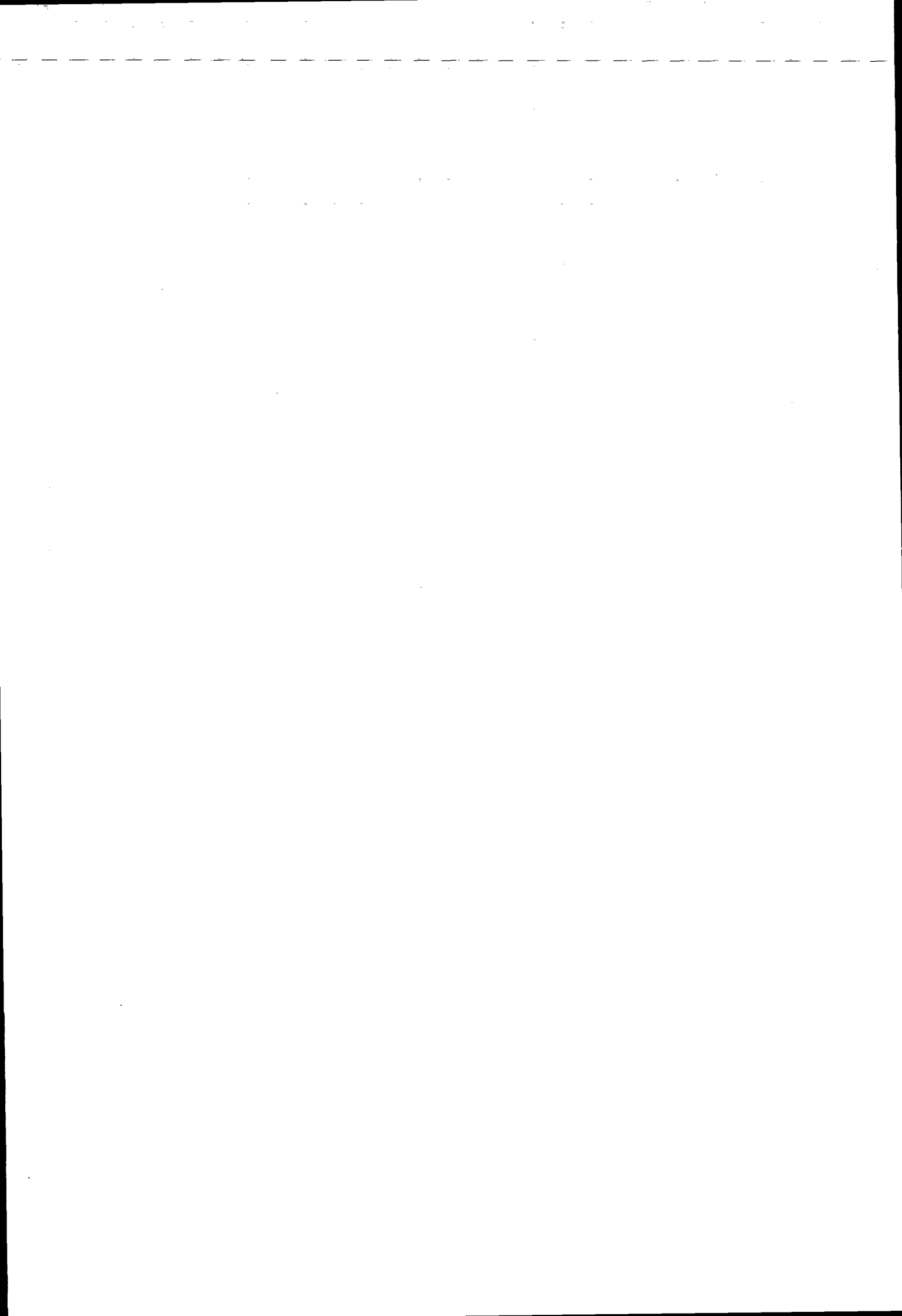
  sum = sum + værdi
```

```
end do
```

```
simp = xstr * sum / 3.0D0
```

```
return
```

```
end
```



- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projekt rapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklærerruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss. Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum". Projekt rapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projekt rapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projekt rapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projekt rapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projekt rapport af: Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality". Af: Helge Kragh.
- 
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE hos 2.G'ERE". a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projekt rapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodul/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projekt rapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS". Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DILLENTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projekt rapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller". Projekt rapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MØNGDELÆRE". Projekt rapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MØSSBAUEREFFEKT MÅLINGER". Projekt rapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. 1. Af: Bent Sørensen. Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".  
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".  
Fire artikler.  
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".  
ENERGY SERIES NO. 2.  
Af: Bent Sørensen.
- 
- 38/81 "TIL EN HISTORIEBORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".  
Projekt rapport af: Erik Gade, Hans Heddal, Henrik Lau og Finn Physant.  
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.  
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VEKSTØKONOMIEN".  
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".  
Projekt rapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.  
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".  
ENERGY SERIES NO. 3.  
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".  
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".  
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".  
ENERGY SERIES NO. 4.  
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".  
Projekt rapport af: Niels Thor Nielsen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-  
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".  
Projekt rapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BÅSEBÅCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".  
ENERGY SERIES NO. 5.  
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".  
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showikl.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".  
Projekt rapport af: Preben Nørregaard.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".  
ENERGY SERIES NO. 6.  
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PICERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".  
Projekt rapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".  
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".  
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.  
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi.  
Af: Else Høytrup.  
  
Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -  
En undersøgelse af matematisk økologi.  
Projekt rapport af: Troels Lange.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-  
Skjulte variable i kvantemekanikken?  
Projekt rapport af: Tom Juul Andersen.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.  
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.  
Projekt rapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES NO. 7.  
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.  
Projekt rapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".  
Projekt rapport af: Annette Post Nielsen.  
Vejledere: Jens Høytrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi 2. rev. udgave.  
Af: Else Høytrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES No. 8.  
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".  
Af: Bernhelm Booss og Jens Høytrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".  
Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".  
Projekt rapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?".  
Projekt rapport af: Lone Billmann og Lars Boye.  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.  
Projekt rapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"  
- en test i l.g med kommentarer.  
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".  
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"  
- et problem og en udfordring for skolen?  
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"  
- økologisk contra traditionelt.  
ENERGY SERIES NO. 9  
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.  
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.  
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"  
- Case: Lineær programmering.  
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.  
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.  
ENERGY SERIES No. 10  
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"  
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.  
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".  
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".  
Projektrapport af: Henrik Ooster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.  
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".  
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig ledningsevne i amorft germanium".  
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".  
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.  
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1  
Af: Bent Sørensen  
nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".  
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".  
Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2  
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".  
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".  
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 90/84 "ENERGI I L.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".  
Af: Albert Chr. Paulsen.
- 
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
1. Lærervejledning  
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
2. Materiale  
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".  
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".  
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3  
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".  
Af: Bjarne Lillethorup.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDEREN".  
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".  
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".  
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".  
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".  
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.  
Vejleder: Klaus Grünbaum.



- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".  
 Projekt rapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.  
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".  
 Af: Jens Jæger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS TRANSITION".  
 Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".  
 Af: Jeppe C. Dyre.  
 Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".  
 Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".  
 - flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.  
 Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
 Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -  
 Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.  
 Projekt rapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.  
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".  
 Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".  
 Projekt rapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".  
 Projekt rapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.  
 Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".  
 Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".  
 Projekt rapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.  
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".  
 Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING".  
 Af: Jacob Mørch Pedersen.  
 Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".  
 Af: Peder Voetmann Christiansen
- 
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".  
 Af: Iben Maj Christiansen  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".  
 Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".  
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".  
 Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".  
 Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY, 8 - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".  
 Projekt rapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".  
 Projekt rapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen  
 Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".  
 Projekt rapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Jars Frandsen.  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅRYB" - om ikke-standard analyse.  
 Projekt rapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.  
 Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"  
 Lecture Notes 1983 (1986)  
 Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"  
 Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.  
 Projekt rapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.  
 Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNELSE"  
 Projekt rapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.  
 Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.  
 Af: Bent Sørensen.
- 
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"  
 Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"  
 MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen  
 Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"  
 Projekt rapport af Frank Colding Ludvigsen  
 Vejledere: Historie: Ib Thiersen  
 Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling  
 Af: Jeppe Dyre  
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."  
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"  
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek  
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"  
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"  
Projektrapport af Finn C. Physant  
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og  
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach  
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Comø Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"  
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987  
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"  
- en ny frekvensbaseret målemetode.  
Fysikspeciale af Jan Vedde  
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"  
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"  
af: Peter Colding-Jørgensen DLH  
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"  
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"  
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"  
Matematikprojekt af:  
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal  
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek  
Krzysztof P. Wojciechowski
- 
- 153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"  
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie  
Historiespeciale  
Af: Hans Hedal  
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"  
By: Jeppe Dyre
- 155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"  
by: Michael Pedersen
- 156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"  
by: Jeppe C. Dyre
- 157/88 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."  
by: Michael Pedersen
- 158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"  
by: Jeppe Dyre
- 159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"  
by: Bent Sørensen
- 160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"  
by: Jens Gravesen
- 161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"  
by: Michael Pedersen