TEKST NR 151 1987

DYNAMISK PROGRAMMERING

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen,
Keld Nielsen og
Jimmy Staal

Vejleder:
Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde
Dynamisk programmering
Matematikprojekt af: Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

IMFUFA tekst nr. 151/87   121 sider   ISSN 0106-6242

Abstract.

Dynamisk programmering er en matematisk optimeringsdisciplin. Grundlæggelsen kan spores til R. Bellmans formulering af et optimalitetsprincip og anvendelse på konkrete optimeringsproblemer omkring 1950. Projektets målsætning er at diskutere det matematiske grundlag for dynamisk programmering - primært ved at undersøge forskellige matematiske formaliseringer af dynamisk programmering og af optimalitetsprincippet.

Indholdsfortegnelse.

KAPITEL 1

1.1. Indledning.

Den foreliggende projektrapport er et resultat af tre RUC-studerendes undersøgelser af et matematisk aktivitetsområdes teoretiske grundlag. Vi er studerende ved RUC's matematikoverbygning på modul III, og det er for alles vedkommende det sidste projektarbejde i vores matematikuddannelser. Da det er et modul III projekt er rapportens indhold præget af et bekendtgørelseskrav om, at stoffet skal have et videnskabsteoretisk og/eller -historisk tilsnit. Kravet har vi opfyldt ved at studere elementer af et matematisk områdes skabelse, udvikling og teoretiske fundament.

Det betragtede emneområde bærer navnet dynamisk programmering. Betegnelsen dækker ikke over en datalogisk disciplin, som det umiddelbart kunne tyde på. Løst formuleret er dynamisk programmering en måde at opstille og løse forskellige optimeringsproblemer på. Rapportens kapitel 2 er helliget en indføring i den tekniske side af dynamisk programmering. Der gives et eksempel på anvendelsen af teorien, og siden generaliseres de grundlæggende begreber. Kapitlet afsluttes med en kort sammenligning af dynamisk programmering med andre optimeringsmetoder.

I kapitel 3 opstiller vi videnskabsteoretiske og -historiske sider ved matematik i almindelighed og dynamisk programmering i særdeleshed. Kapitlet ender op med en kort historisk beskrivelse af dynamisk programmerings fødsel og opvækst, samt problemformuleringen for den resterende del af projektarbejdet.

Kapitel 4 er projektets centrale del. Vi går i dybden med undersøgelser af de helt fundamentale byggestene i teorien for dynamisk programmering. Første del drejer sig om forskellige måder at indlejre teorien i matematiske universer. Dernæst tager vi bestik af diskussionen om optimalitetsprincippet - et bag teorien liggende verbalt formuleret princip, der har en meget central placering, og måske er den egentlige dynamo for teoriens start. Sidste del af kapitlet omhandler aspekter af dynamisk programmerings teoriudvikling.

I kapitel 5 sammenfatter og diskuterer vi vore konklusioner. Endelig har vi en lang litteraturliste (bilag II), der har til hensigt at give et billede af veje og tendenser, som teorien bevæger sig efter.

Birgit Andresen, Keld Nielsen og
Jimmy Staal januar 1987.

KAPITEL 2

2.1. Optimering.

At bestemme den hurtigste vej mellem to punkter i et tyngdefelt, at finde den minimale energi for fordelingen af molekyler i et afsluttet system, at finde den mindst udgiftskrævende måde at tildele ressourcer til forskellige sektorer, at kunne regulere feedbacksystemer, så omkostningerne bliver minimale er alle problemstillinger fra skuffen af optimeringsprocesser. Det fremgår, at optimering er en fællesbetegnelse for det at maximere eller minimere en eller anden størrelse, funktion eller lign.

Optimeringsprocesser og -problemstillinger kan være naturskabte F.eks. fordeler luftmolekylerne i et afsluttet rum sig på en optimal måde, svarende til en minimal energi. Eller processerne kan være menneskeskabte/-tænkte. Her er profitorienterede problemer oplagte eksempler. Uanset problemets art vil der være nogen eller noget, der udfører en handling, der fører systemet fra en starttilstand til en sluttilstand, som hver især kan være kendte eller ukendte. Disse tilstande kan i reglen repræsenteres af matematiske objekter såsom vektorer eller lign.

Når først problemet er matematificeret afgøres, hvilken optimeringsmetode, der er passende at anvende i situationen. Ved nogle optimeringsproblemer skal der tages beslutninger før og/eller under processen, og der kan være stokastiske eller deterministiske effekter forbundet med problemet. Men bl.a. afhængig af processens karakter er der en række forskellige optimeringsdiscipliner til rådighed. Etiketter på den slags discipliner er f.eks. teorien for maximum- og minimumbestemmelse under bibetingelser (klassisk optimering), klassisk variationsregning, matematisk programmering og optimal kontrolteori. Det er ikke nødvendigt at kende til disse optimeringsdiscipliner for at kunne læse rapporten.

2.2. Dynamisk programmering.

Matematisk programmering omfatter en del indbyrdes forskellige optimeringsmetoder. Heriblandt lineær og kvadratisk programmering. I nogle sammenhænge opfattes dynamisk programmering som hørende under matematisk programmering. Det skal siden vise sig, at dynamisk programmering egentlig er af mere generel natur end de øvrige optimeringsdiscipliner. Der er problemer, de andre optimeringsmetoder kan tage sig af, men som dynamisk programmering kan løse på en anden, ny og evt. smartere måde.

Men inden vi siger for meget, om hvad dynamisk programmering kan eller ikke kan, vil vi præsentere læseren for, hvad dynamisk programmering egentlig er (og måske ikke er).

2.3. Et eksempel: Salg af træ.

Vi vil nu give et eksempel på en proces, der i det væsentlige er en almindelig profitmaximeringsopgave. Vi forestiller os, at en mand er i besiddelse af et område beplantet med skov. Han ønsker at sælge al sit træ over en forud fastsat årrække på en sådan måde, at udbyttet af salget bliver maximalt. Vi antager, at prisen er den samme alle år. Lad os endvidere antage, at han det første år har ialt z tons træ stående på området. Af dette beslutter han at sælge x_1 tons (dvs. $x_1 < z$) og lade resten $y_1 = z - x_1$ tons vokse videre til det næste år. I dette efterfølgende år, dvs. år 2, forventes der at være cy_1 tons, hvor $c > 1$. I år 2 beslutter han igen at sælge en del, x_2 tons, og lade resten $y_2 = z_2 - x_2$ tons vokse sig større til der i år 3 vil være cy_2 tons. Denne proces fortsætter han, indtil han beslutter at sælge, hvad der måtte være tilbage i år N, nemlig x_N tons.

Som det fremgår, er processens forløb altså, at ejeren foretager en beslutning x_n i år n, dvs. på det n'te trin i processen. Dette gør han på grundlag af tilstanden $z_n = cy_{n-1} = x_n + y_n$ det pågældne år. Beslutningen x_n fastlægger på entydig måde næste års tilstand $z_{n+1} = cy_n = x_{n+1} + y_{n+1}$ gennem en transformation af z_n under brug af $z_{n+1} = c(z_n - x_n)$.

Skematisk kan vi afbilde processen således:

ÅR	SOLGT MÆNGDE	RESTMÆNGDE	BEHOLDNING NÆSTE ÅR
1	x_1	y_1	cy_1
2	x_2	y_2	cy_2
.	.	.	.
.	.	.	.
N-1	x_{N-1}	y_{N-1}	cy_{N-1}
N	x_N	0	0

Da mængden af træ i starten af processen er z tons, har vi følgende relationer:

$$\begin{aligned} z &= x_1 + y_1 \\ cy_1 &= x_2 + y_2 \\ cy_2 &= x_3 + y_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ cy_{N-2} &= x_{N-1} + y_{N-1} \\ cy_{N-1} &= x_N \end{aligned}$$

Det er nu let at indse, at vi kan eliminere y'erne og derved få:

$$(1): \quad c^{N-1}z = x_N + cx_{N-1} + \ldots + c^{N-2}x_2 + c^{N-1}x_1 \; .$$

Vi antager, at prisen pr. enhed af træet er afhængig af mængden, der sælges. Det indebærer, at en given prisfunktion g er ikke-lineær. Indkomsten for hele partiet under beslutningsfølgen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ bliver

$$(2): \quad g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_N) \; .$$

Denne værdi målt i kroner kalder vi R. Altså er

$$(3): \quad R(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_N) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i).$$

R står for retur og antyder således, at ejeren gennem beslutningsfølgen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ får beløbet $R(x_1, \ldots, x_N)$ retur. Fremover vil en beslutningsfølge også kaldes en <u>politik</u>. Det er ejerens opgave at vælge en politik, der gør R maximal. Hvis der findes en sådan politik, kaldes den en <u>optimal politik</u>.

Nu er optimeringsproblemet formuleret matematisk, endda i en lettere generaliseret forstand, idet vi endnu ikke har specificeret de i eksemplet kendte størrelser, hvoraf specielt funktionen g er interessant. Denne funktions eksplicitte udseende vil i reglen være afgørende for, hvilken optimeringsmetode man skal gribe til for at løse problemet. Da g er antaget ikke-lineær, kan løsningen være overordentlig vanskelig at finde.

Man kunne betragte skovejerens problem som et diskret problem, idet der er tale om at fælde et helt antal træer, solgt i et helt antal tons. Under denne omstændighed vil løsningsbestemmelsen være temmelig omfattende. Hvis vi istedet antager, at x'erne tilhører et interval på den reelle talakse, findes der metoder, som letter løsningen af optimeringsproblemet. Derfor vælger vi at antage dette i det følgende.

Til problemet, vi her står overfor, kan der høstes afgørende fordele ved at bruge dynamisk programmering. Vi vil derfor illustrere den angrebsmåde, som dynamisk programmering tager i anvendelse for at løse problemet.

Vi definerer nu en funktion $f_n(u)$ som den totale indtægt ved at starte med u tons træ og ved at vælge en optimal politik over en periode på n år. Det er da klart, at

$$f_1(u) = g(u).$$

svarende til, at ejeren sælger hele molevitten det første år. Det kunne jo være, at han havde lommesmerter eller skulle bruge området til en kemisk fabrik el.lign. Antager vi imidlertid, at han i det mindste kan vente 2 år, kan vi betragte $f_2(u)$. Lad os videre antage, at en optimal politik er, han efter det første år sælger x^* tons. Da vil vi have, at

$$f_2(u) = g(x^*) + \text{beløbet for salget af } c(u-x^*) \text{ det resterende år.}$$

Hvis $c(u-x^*)$ angiver mængden af træ det andet år, vil indtægten for salget af denne mængde være $f_1(c(u-x^*))$, hvorfor

$$f_2(u) = g(x^*) + f_1(c(u-x^*))$$

når x^* er optimal. Nu kender vi ikke x^*, så derfor vil vi formulere ligningen ovenfor som

$$f_2(u) = \max_{0 \leq x \leq u} \{g(x) + f_1(c(u-x))\} .$$

(Vi antager, at maximum eksisterer.)
Leddet $f_1(c(u-x))$ indeholder ikke noget valg. Valget første år vil nemlig give situationen det andet år.

Vi antager herefter, at skovejeren kan vente tre år med at sælge al sit træ. Derved kan $f_3(u)$ betragtes. Det første år sælges x^* tons, som antages at være en optimal beslutning. Da vil vi have, at

$$f_3(u) = g(x^*) + \text{beløbet for salget af } c(u-x^*) \text{ de resterende år.}$$

Den mængde træ, der skal sælges de to resterende år er $c(u-x^*)$, og salget vil indbringe $f_2(c(u-x^*))$, da salget skal gøres optimalt. Derfor fås

$$f_3(u) = g(x^*) + f_2(c(u-x^*)) \quad ,$$

når x^* er optimal. Nu kendes x^* ikke, så derfor vil vi - ligesom da skovejeren kun havde to år at sælge sit træ i - formulere ligningen for $f_3(u)$ som;

$$f_3(u) = \max_{0 \leq x \leq u} \{g(x) + f_2(c(u-x))\} .$$

Bemærk at valget det andet år ikke fuldstændigt bestemmes af valget det første år.

Det er umiddelbart at indse, at denne argumentation kan forlænges til at gælde for et vilkårligt år som funktion af det foregående . Altså har vi, at

$$f_n(u) = \max_{0 \leq x \leq u} \{g(x) + f_{n-1}(c(u-x))\} .$$

Dette kaldes den <u>rekursive ligning</u> for problemet. Det ses, at for at kende f_n i et punkt må man kende f_{n-1} i et interval. Vi har ved ovenstående tankemåde forvandlet et N-dimensionalt optimeringsproblem - der er N beslutningsvariable defineret på et reelt interval, en på hvert trin - til N 1-dimensionale problemer, som er fastlagt ved

$$f_1(u) = \max_{0 \le x_N \le u} \{g(x_N)\} = g(u)$$

$$f_2(u) = \max_{0 \le x_{N-1} \le u} \{g(x_{N-1}) + f_1(c(u-x_{N-1}))\}$$

$$\vdots$$

$$f_N(u) = \max_{0 \le x_1 \le u} \{g(x_1) + f_{N-1}(c(u-x_1))\}$$

under betingelsen (1).

Dette er en typisk formulering af et optimeringsproblem ved brug af dynamisk programmering. Opgaven er nu at løse disse ligninger, dvs. finde de x'er, der leverer returfunktionernes maxima. Helt eksplicit er sagen at finde de x, der løser ligningen

$$f_N(u) = \max_{0 \le x_1 \le u} \{g(x_1) + \max_{0 \le x_2 \le u_2} \{g(x_2) + \cdots + \max_{0 \le x_{N-1} \le u_{N-1}} \{g(x_{N-1}) + f_1(c(u_{N-1} - x_{N-1}))\} \cdots\}\},$$

hvor u'erne aftager med stigende indexnummer. Komplexiteten af dette udtryk er åbenbart temmelig afhængig af udseendet af g, og denne skal derfor ikke være særlig kompliceret, før de tilgængelige analytiske angrebsmuligheder er forsvindende.

Skabelsen af dynamisk programmering har derfor også været nært knyttet til udviklingen af computere, som (dengang i 1950'erne - og nu) forestår de numeriske beregninger og genererer løsninger. Vi vil imidlertid bringe et eksempel på en funktion g, hvor problemet kan løses analytisk.

Lad g være givet ved

$$g(x) = k \cdot \sqrt{x} \quad , \text{ k er en konstant}, k \neq 0.$$

Dette er ikke et helt realistisk udtryk, men heller ikke uegnet, fordi den vil repræsentere faldende pris ved salg af meget træ. I hvert fald er den ikke-lineær og samtidig relativ simpel. Vi har altså, at

$$(4) \qquad f_1(u) = g(u) = k \cdot \sqrt{u}$$

$$(5) \qquad f_2(u) = \max_{0 \le x \le u} \{k \cdot \sqrt{x} + k \cdot \sqrt{c(u-x)}\}$$

Ser vi på argumentet $k\cdot\sqrt{x} + k\cdot\sqrt{c(u-x)}$ og differentierer med hensyn til x fås:

$$\frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k\cdot c}{2\sqrt{c(u-x)}} = \frac{k}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{u-x}}\right], x\in(0,u)$$

Dette sættes lig med 0 og giver

$$\sqrt{u-x} = \sqrt{cx} \quad \text{eller} \quad cx = u-x \Leftrightarrow x = u/(c+1)$$

Det er tydeligvis et maximumspunkt for udtrykket, og det ligger i intervallet (0,u), hvorfor

$$f_2(u) = k\sqrt{\frac{u}{c+1}} + k\sqrt{c\left(u-\frac{u}{c+1}\right)}$$

$$= k\left[\sqrt{\frac{u}{c+1}} + \sqrt{\frac{c^2u}{c+1}}\right]$$

$$= k\left[\frac{1+c}{\sqrt{1+c}}\sqrt{u}\right] = k\sqrt{u(c+1)}.$$

Helt tilsvarende ses, at

$$f_3(u) = \max_{0\le x\le u}\left\{k\sqrt{x} + f_2(c(u-x))\right\}$$

$$= \max_{0\le x\le u}\left\{k\sqrt{x} + k\sqrt{c(u-x)(c+1)}\right\}$$

$$= k\sqrt{u(1+c+c^2)},$$

hvilket opnås for maximumspunktet $x=u/(1+c+c^2)$. Det kan vises ved induktion, at det generelle mønster er

$$f_n(u) = k\cdot\sqrt{u(1+c+c^2+\ldots+c^{n-1})}$$

opnået for $x=u/(1+c+c^2+\ldots+c^{n-1})$.

Nu er størrelsen af u afhængig af hvilket trin n, man befinder sig i. u er at opfatte som variabel for f. For givet n kender vi ikke u på forhånd, bortset fra værdien på det første trin, hvor u=z. Hvis ejeren også på forhånd har bestemt antallet af år beslutningsprocessen skal forløbe, kan vi altså fastlægge $f_N(z)$.

Men ejeren er endnu ikke tilfreds, for han skal jo vide, hvilken politik han skal benytte for at opnå $f_N(z)$. Beslutningen det første år er bestemt af

$$(6): \quad f_N(z) = \max_{0 \le x \le z} \{g(x) + f_{N-1}(c(z-x))\}$$

Antag, at x_1 er en værdi, der tilfredsstiller (6), altså at x_1 er et optimalt valg. Da vil ejeren det andet år have $z_2 = c(z-x_1)$ tons træ til rådighed. Så vil

$$(7): \quad f_{N-1}(z_2) = \max_{0 \le x \le z_2} \{g(x) + f_{N-2}(c(z_2-x))\}$$

Hvis nu x_2 er en optimal løsning til (7), sælger ejeren x_2 tons træ det andet år. Og således fortsættes processen.

Vi har i det foregående konsekvent brugt vendingerne "en optimal politik", "en optimal løsning" i stedet for den bestemte form: "den optimale politik". Det skyldes, at der i den almene situation sagtens kan tænkes at være flere optimale politikker. Det medfører, at man har et udbud af muligheder for at opnå det optimale resultat.

2.4. Optimalitetsprincippet.

På et sted i det foregående afsnit foretog vi et afgørende og i virkeligheden generelt argument. Det var der, hvor vi sagde, at en optimal politik for den treårige proces bestod af en delbeslutning det første år og af en optimal beslutning de resterende år mht. beslutningen det første år. Faktisk har vi benyttet denne dynamik gennem hele eksemplet. Dvs. at en optimal politik for en n-trins proces bestod af en delbeslutning det første år samt af en optimal beslutningsfølge (politik) over de resterende n-1 år. Det er denne idé, der giver dynamikken i dynamisk programmering. Ideen skyldes nu afdøde Richard Bellman og er oprindelig formuleret således:

> "An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."
> (Bellman 1957 s.83)

Denne idé kaldtes af Bellman <u>optimalitetsprincippet</u>. Vi vil i kapitel 4 vende tilbage til en diskussion af princippet.

2.5. Ingredienserne i dynamisk programmering.

I afsnit 2.3. indførte vi nogle begreber, der blev understregede. Det er hensigten her at tage disse begreber op for at gøre nogle bemærkninger om generalisationsforhold.

Dynamisk programmering er mange ting, men mere præcist er det en metode/teknik/teori til optimering af beslutningsprocesser. Her skal beslutninger forstås i vid forstand. Beslutninger er de ingredienser, der kan manipuleres med for at opnå det ønskede resultat, dvs. optimum af en given objektfunktion. For at beslutningen skal kunne bruges i matematisk forstand, må de være repræsenterede ved et matematisk univers f.eks. funktionsrum, talrum eller andre mængder.

I eksemplet brugte vi navnet returfunktion på den funktion, der skulle optimeres. En sådan funktion kaldes også objektfunktion, kriteriefunktion, omkostnings- eller profitfunktion - lidt afhængig af den konkrete problemstilling. Vi vil hovedsagelig bruge begreberne objekt- og returfunktion.

En beslutningsproces er bl.a. karakteriseret ved en mængde af mulige tilstande for processen på hvert af processens trin.

På følgende figur er skitseret , hvad man kan opfatte som en overgang fra et trin til et følgende i en beslutningsproces.

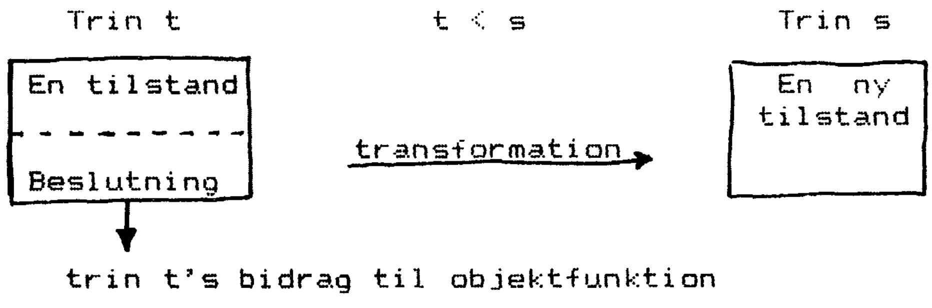

Fig. 1

På trin t er processen beskrevet ved en tilstand. Ud fra denne foretages en beslutning, der resulterer i et bidrag til den samlede objektfunktion. Det skal understreges, at bidragene ikke nødvendigvis leveres additivt. Beslutningen indebærer også, at tilstanden ændres til en anden på et efterfølgende trin. Dette sker gennem en transformation afhængig af beslutning(er) og tilstand(e). I eksemplet svarer transformationen til en overgang fra $z_n = x_n + y_n = cy_{n-1}$ til $z_{n+1} = cy_n$ under brug af beslutningen x_n .

En matematisk problemstilling for dynamisk programmering er at give diagrammet ovenfor en matematisk formalisering. Man kan sige, at dynamisk programmering ikke er matematik før, man har matematiske metoder til behandlingen af det, eller i det mindste har indlejret det i et matematisk univers.

2.6. Generalisationer.

Eksemplet, vi bragte, repræsenterede en procestype, der normalt betegnes som en flertrins beslutningsproces (multistage decision process). Fysisk set forløb processen over en årrække, dvs. der var indlejret et tidsforløb, der var endeligt, og beslutningerne blev taget en gang årligt i overført forstand. Altså een beslutning på hvert af de N trin.

Allokeringsprocesser er af en anden art end flertrins beslutningsprocesserne. Det handler om, at forskellige sektorer skal tildeles en eller anden ressourcemængde (penge, kemikalier el.andet) på en gang, således, at udbyttet af tildelingen bliver maximal. Der er ingen tidsfaktor forbundet med processen. Man kunne mene, at processens inddeling i trin derved ikke var mulig. Men i stedet for at bruge tiden som trinvariabel kan de forskellige sektorer opfattes som trin. En vigtig anvendelse af dynamisk programmering er at få transformeret allokeringsprocesser om til flertrins beslutningsprocesser.

Vi vil angive mulige generalisationer af ingredienserne i dynamisk programmering. Hertil bruger vi benævnelserne indført i afsnit 2.5.

<u>Trinmængden</u> A: I eksemplet var $A=\{1,2,...,N\}$. Dvs. en endelig mængde af numre. En sådan begrænsning vil ikke være aktuel i alle optimeringsprocesser. A kunne istedet være uendelig, enten tællelig eller overtællelig (typisk et interval af den reelle talakse). Man kan også tale om mængden som diskret (endelig eller uendelig men tællelig) eller kontinuert (overtællelig).

<u>Tilstandsrummet</u> S: Et tilstandsrum kan være endeligt eller uendeligt (tælleligt eller overtælleligt). I eksemplet var tilstandsrummet et interval nemlig mængden af træ i vægt. Vi har tidligere givet et eksempel på en endelig tilstandsmængde nemlig, hvis træerne solgtes i hele vægtenheder.

<u>Beslutningsrummet</u> D: Mængden af beslutninger kan ligesom de øvrige variabelrum være endelig eller uendelig (tællelig eller overtællelig). I eksemplet var beslutningsrummet ligesom tilstandsrummet et interval, altså overtælleligt.

Kombineres disse tre, fremstår der tilsyneladende 27 mulige procestyper. Men i princippet kan der forekomme alskens blandinger, når f. eks. beslutningsrum og/eller tilstandsrum på forskellige trin er varieret mellem de mulige typer. Altså er beslutningsrummet på trin s f.eks. kontinuert, mens det på trin t er diskret. Typisk er man dog ikke interesseret i, at sådanne skift i karakteren af beslutningsrum og/eller tilstandsrum varierer i løbet af en proces.

Der findes yderligere en inddeling af procestyper. Betragtes transformationerne mellem trinene i processen, kan disse være enten deterministiske eller stokastiske. I det deterministiske tilfælde fastlægger tilstand og beslutning entydigt næste trins tilstand. Er processen derimod stokastisk er tilstande og/eller beslutninger at opfatte som stokastiske variable. Transformationen fra en tilstand til en anden er så en betinget sandsynlighed, f.eks. sandsynligheden for at være i tilstand s på trin t givet en tilstand s' på trin t'. Klassen af deterministiske processer kan opfattes som en delmængde af de stokastiske, idet en af tilstandsvariablene i en deterministisk proces tillægges sandsynlighed 1, de andre sandsynligheden 0. Derved har stokastiske processer større generalitet end deterministiske, hvorfor teoretiske resultater opnået indenfor stokastisk dynamisk programmering i en vis udstrækning kan finde anvendelse i deterministiske beslutningsprocesser. Til gengæld er resultaterne om stokastiske processer ofte temmelig svage.

Da der i princippet er så mange forskellige procestyper, er det næsten oplagt, at procesnomenklaturen nemt kan bryde sammen. Det gør den også. Det er ikke sjældendt, at forskellige artikelforfattere udi dynamisk programmering bruger samme benævnelser på forskellige procestyper. F.eks. hvis en dynamisk programmeringsproces betegnes diskret beslutningsproces, er det ikke klart, om der hentydes til trin-, beslutnings- eller tilstandsvariablen, samt om processen er stokastisk eller deterministisk.

Endnu et punkt kan give anledning til generalisering og teoretiske undersøgelser. Objektfunktionen behøver ikke at være en enkelt funktion, men der kan være flere forskellige sammenfattet i en vektorfunktion. Og de kan indbyrdes have vidt forskellig komplexitet. Det er et stort problem for dynamisk programmering, hvis objektfunktionen ikke er separabel. At en funktion $F(x_1,\dots,x_N)$ er separabel vil sige, at den f.eks. kan skrives på en af formerne

$$F(x_1,\dots,x_N) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_N(x_N)$$

eller

$$F(x_1,\dots,x_N) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_N(x_N) .$$

Altså at variablene separeres. Objektfunktionernes antal og natur kan således give anledning til selvstændige teoretiske og beregningsmæssige problemer.

2.7. Opgaver for dynamisk programmering.

Således som vi har fremlagt emnet dynamisk programmering, er der tilsyneladende to væsentlige opgaver for dynamisk programmering. Den ene er at formalisere optimalitetsprincippet og/eller beslutningsproces-modellerne. Da dette tema er en stor del af diskussionen i kapitel 4, vil vi udelade den side af sagen her.

Den anden opgave er den matematisk teoretiske og praktiske behandling af fænomenerne i dynamisk programmering. I eksemplet så vi, at midlet til behandlingen af problemet var den rekursive ligning. Processen med at maximere indkomsten ved træfældningen var af den endelige slags mht. trinvariablen. Hvis vi havde ladet N gå mod uendelig, ville processen være uendelig dimensional. Dette kunne resultere i to ting. Enten ville den rekursive ligning være opretholdt for vilkårlig store n, eller vi kunne evt. have opnået, at funktionsfølgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ville konvergere uniformt mod en funktion f. I den situation kunne den statiske funktionalligning

$$f(u) = \max_{0 \le x \le u} \{g(x) + f(c(u-x))\}$$

fremkomme. Det ses, at både højre- og venstresiden direkte afhænger af den samme funktion f. Man ville imidlertid ikke umiddelbart kunne sige, om denne ligning har nogen løsninger, da det ikke er sikret på forhånd, at maximum eksisterer. Derfor vil det mere korrekte og generelle udtryk være:

$$f(u) = \sup_{0 \le x \le u} \{g(x) + f(c(u-x))\}$$

Eksistensen af maximum er betinget af, om grænsefunktionen er kontinuert, hvilket i sidste ende hænger på nogle tekniske betingelser på f_N og dermed bl.a. funktionen g.

Næste skridt i behandlingen er at løse ligningerne. Til den ende er de matematisk analytiske midler meget begrænsede. I langt de fleste - og dermed også i de "realistiske" - modeller, er man henvist til numeriske analysemetoder og computere. Man er almindeligvis interesseret i at undersøge løsningernes egenskaber og adfærd. Dette på forskellige generalisationsniveauer.

Ofte undersøger man en konkret model evt. af et virkelighedsnært problem. Man opstiller en funktionalligning eller en rekursiv ligning for at løse den under givne betingelser, som søges gjort så svage som muligt. At man ofte koncentrerer arbejdet om konkrete modeller skyldes formodentlig det forhold, at formaliseringer ofte enten fører til konkrete – mere eller mindre generelle – modeller, eller de fører til så generelle påstande, at det ikke kan give nyttige resultater. Dette er dog en grov forenkling.

For at bestemme løsninger til ligningerne har man i dynamisk programmering introduceret to metoder. De kaldes henholdsvis succesiv approximation i funktionsrum og succesiv approximation i politikrum. Vi vil her kort beskrive de to angrebsmåder.

Når der arbejdes med en rekursiv eller en statisk funktionalligning, f.eks. af ovennævnte type

$$f(u) = \max_{0 \le x \le u} \{g(x) + f(c(u-x))\},$$

kan der gættes på en (start) funktion. Lad os kalde gættet f^0. Ud fra f^0 bestemmes en politik x^0, der optimerer funktionalligningen, dvs. x^0 maximerer i ovenstående eksempel

$$\{g(x) + f^0(c(u-x))\}.$$

Med denne approximation til den optimale politik bestemmes en ny approximation til den optimale funktion f, lad os kalde denne nye funktion f^1. Processen kan således startes igen med bestemmelse af et x^1, hvorved man etapevis får nye funktioner f^n ud, med tilhørende politikker x^n. Man kan da håbe på, at metoden fører til, at følgen af funktioner konvergerer. Denne måde at løse ligningerne på kaldes succesiv approximation i funktionsrum.

Men det er dog sjældent selve funktionsværdierne, man i praksis har behov for. Det er derimod de optimale politikker. Man kan forsøge at gætte på en (start) politik, altså en approximation til den optimale politik. Hvis vi f.eks. betragter den før omtalte statiske funktionalligning, så lad os kalde startgættet x^0. Dette vil give en ny funktionalligning,

$$f(u) = g(x^0) + f(c(u-x^0)).$$

Man kan da forsøge at løse denne. Lad os antage vi kan skaffe en sådan funktion, og vi kalder den $f^0(u)$. Den nye funktion skal opfattes som en approximation til den optimale funktion f i det oprindelige problem. Funktionen f^0 anvendes så til at bestemme en ny approximeret politik x^1, som optimerer den oprindelige funktionalligning, dvs. i vort eksempel maximerer x^1

$$\{g(x) + f^0(c(u-x))\}.$$

Herved kan processen starte igen med bestemmelse af en ny funktion, som er løsning til den funktionalligning, der fremkommer ved at indsætte x^1 i den oprindelige ligning under antagelse af, at x^1 er en optimal politik. Det vil føre for vidt her yderligere at eksemplificere metoden, men der kan i visse tilfælde opnås, at en politikfølge både er monoton og konvergent mod en optimal politik. Denne metode kaldes at approximere i politikrummet.

Da der kan approximeres i både politikrummet og funktionsrummet, er der i dynamisk programmering indført en dualitet mellem optimale politikker og optimale værdier.

2.8. Dynamisk programmering og de andre.

Efter denne forholdsvis kortfattede og skitseagtige omtale af dynamisk programmering som optimeringsdisciplin er det interessant at se på dens forhold til de øvrige optimeringsdiscipliner. Har dynamisk programmering fordele eller ulemper, og hvor generel er dens anvendelsesfelt set i relation til optimal kontrolteori, andre matematiske programmeringsmetoder og klassisk variationsregning eksempelvis? Specifikt er det generalisationsforholdene der har vores interesse i det følgende: Er dynamisk programmering indlejret i f.eks. optimal kontrolteori?

I eksemplet med træfældningen definerede vi returfunktionen $g(x)$ til at være ikke-lineær. Den kunne have været sat til et lineært udtryk. Men derved ville problemet være indlysende at besvare: Lad al træet gro til år N og sælg det hele. Desuden ville problemet høre under kategorien lineær programmering. Dette antyder, at dynamisk programmering er mere generel end lineær programmering og vel også de andre matematiske programmeringsmetoder. Det er givet, at de fleste matematisk programmeringsopgaver kan formuleres i regi af dynamisk programmering. Det er derimod mere tvivlsomt, om der generelt kan høstes beregningsmæssige og teoretiske fordele af en sådan omformulering.

2.9. Klassisk variationsregning.

Der er tre grundproblemer, der næsten altid bliver diskuteret i en elementær indføring i klassisk variationsregning. Disse er det isoperimetriske problem, brachystochronproblemet og omdrejningsflademinimeringsproblemet. Vi vil ikke behandle disse problemer, men som eksempel på anvendelse af dynamisk programmering i en anden optimeringsboldgade formulerer vi brachystochronproblemet under brug af dynamisk programmering.

Brachy er et græsk ord for kort i betydningen lille. Chronos betyder tid også på græsk. Brachystochronproblemet handler om en partikels bevægelse mellem to punkter i et gravitationsfelt. Problemet blev lanceret af Bernoulli i 1696, og kaldes det simpleste variationsregningsproblem.

I den klassiske variationsregning formuleres problemet ved, at der i et gravitationsfelt er givet to punkter P og Q, som partiklen skal forbinde ved at løbe langs en kurve gennem P og Q på kortest mulig tid (fig.2).

Fig. 2

Formelt kommer det ud på at minimere følgende integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad , \quad x(t_1) = x_1$$

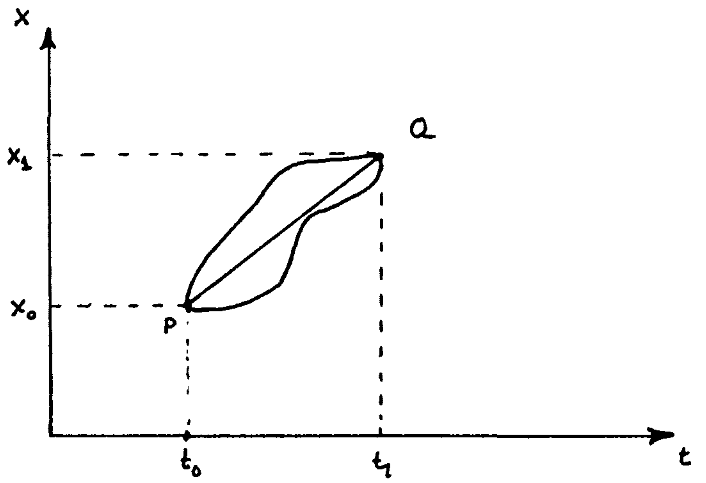

Fig. 3

Variationsregningen giver en partiel differentialligning som nødvendig betingelse på problemets løsning. Det er den såkaldte Eulerligning. Anskuer vi imidlertid problemet på en anden måde, kan vi få inddraget dynamisk programmering, og samtidig vil variationsregningen få en ny formalisme (Bellman 1957 s.247).

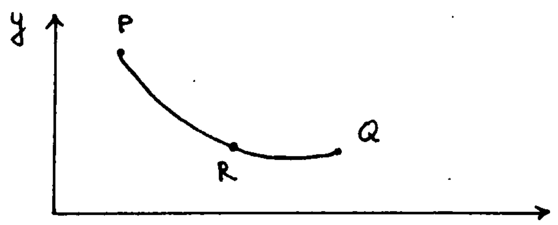

Fig. 4

Man kan anvende optimalitetsprincippet på problemet, hvorved der kan udledes en funktionalligning. Uanset hvad den optimale kurve mellem P og et på kurven mellem P og Q beliggende punkt R er, skal kurvens forløb mellem R og Q være således, at den minimerer den anvendte tid til partiklens bevægelse fra R til Q givet hastigheden i R. Den optimale politik kan udtrykkes ved en ligning i y som funktion af x, som det er normalt i variationsregningen, og ved en ligning i dy/dx som funktion af y og den givne hastighed i (x,y).

Vi har hermed indset, at dynamisk programmering kan give anledning til at betragte den klassiske variationsregnings problemer på en ny måde. Men her stopper forbindelsen mellem de to ikke. Dreyfus (1960) giver beviser for, at de fleste af variationsregningens resultater på simpleste måde drysser ud af dynamisk programmering ved at differentiere en bestemt funktionalligning på passende vis. Dette antyder, at dynamisk programmering er mere generel end variationsregningen.

2.10. Optimal kontrolteori.

Optimal kontrolteori er vagt sagt en generalisering af den klassiske variationsregning. En af dens mere centrale resultater er Pontryagins maximumsprincip. Dette princip implicerer også variationsregningens Euler-Lagrange betingelser. Derfor kan man begrundet spørge til generalisationsforholdet mellem dynamisk programmering og maximumsprincippet. I den anledning giver vi ordet til Pontryagin:

> "The method of dynamic programming was developed for the needs of optimal control processes which are of a much more general character than those which are describable by systems of differential equations. Therefore, the method of dynamic programming carries a more universal character than the maximum principle. However, in contrast to the latter, this method does not have the rigorous logical basis in all those cases where it may be succesfully made use of as valuable heuristic tool."
> (Pontryagin et al. 1962 s.69)

Pontryagin påstår, at dynamisk programmering er meget generel, men samtidig ikke særlig handlekraftig overfor de kontrolproblemer, han selv leger med. Dette implicerer dog ikke, at der behøver at eksistere en modstrid mellem dynamisk programmering og optimal kontrolteori.

2.11. Afslutning

Vi har i dette kapitel været vidt omkring forskellige aspekter af dynamisk programmering. De grundlæggende tænkemåder er blevet skitseret via begreberne trin-, beslutnings- og tilstandsvariable, transformationer, optimalitetsprincippet og den rekursive ligning - eller funktionalligningen. Endvidere er nogle mulige arbejdsfelter for en matematisk beskæftigelse med dynamisk programmeringsproblemer blevet fremlagt. Afslutningsvis er relationerne til andre matematiske optimeringsdiscipliner blevet fremhævet. I forlængelse af dette er der således meget, der tyder på, at dynamisk programmering er temmelig generel i forhold til flere andre optimeringsmetoder.

Kapitlet skal ikke have karakter af en fuldstændig beskrivelse af problemstillinger, angrebsmåder, metoder o.lign., der tages op indenfor dynamisk programmering - om disse sager kan siges meget mere. Men forhåbentlig har kapitlet givet den nødvendige og tilstrækkelige tekniske indsigt således, at læseren kan følge rapportens resterende kapitler.

KAPITEL 3

3.1. Indledning

I kapitel 2 gav vi en fremstilling af det begrebslige indhold i dynamisk programmering. Det skulle derfor være fremgået, hvorledes dynamisk programmerings angrebsmåde på optimeringsproblemer er. Med denne indsigt kan vi vende os mod en uddybning af projektets egentlige arbejdsfelt nemlig en videnskabsteoretisk og -historisk undersøgelse af dynamisk programmering.

Den slags undersøgelser fordrer en anskuelse af, hvorledes matematikken er struktureret og historisk udvikler sig. Der tænkes ikke på forhånd givet en facitliste, men i stedet fremlægges et skema for, hvordan man kan undersøge matematikken og dens discipliner/emnekredse i et videnskabsteoretisk og historisk skær. Skemaet vil ikke være dybt begrundet med henvisninger til andres anskuelser. Derimod fremstår skemaet som selvstændig konstrueret mhp. de videre undersøgelser af dynamisk programmering.

Dette kapitels indhold er følgende: Der lægges ud med en generel formulering af skemaet. Derved skabes en række spørgsmål til, hvorledes dynamisk programmering kan undersøges. På grund af skemaets generalitet og omfanget af dets konsekvenser, må vi desværre lade nogle af mulige undersøgelser ligge. Det går væsentligst ud over sociologiske og historiske aspekter af dynamisk programmering. Til gengæld er der således lagt op til, at andre kan tage fat, hvor vi slipper!

Efter skemaets etablering bringes et kortfattet overblik over dynamisk programmerings historie samt over, hvad dynamisk programmering er idag. Endelig afsluttes kapitlet med en problemformulering, hvis delspørgsmål står til besvarelse i kapitlerne 4 og 5.

3.2. Et videnskabsteoretisk og -historisk syn på matematik. (Et skema)

Der er i hvert fald to væsentlige måder at anskue videnskabsgrenen matematik samt matematiske discipliner på. Det kan gøres i et statisk og/eller et dynamisk perspektiv. Begge synsvinkler kan igen deles i to niveauer: Et sociologisk og et indholdsmæssigt.

Med det statiske perspektiv menes en anskuelsesmåde, der beskuer matematikkens eksterne og interne forhold på et givet tidspunkt. Af den grund kan vi kalde synsvinklen for et "øjebliksbillede" af matematikken og dens discipliner. Hovedsigtet med et sådant afsnit er at spore, hvad der kan udgøre en matematisk disciplin/emnekreds både mht. det videnskabelige samfund, der er involveret i disciplinen/emnekredsen - det sociologiske niveau - og mht. det rent matematiske indhold i disciplinen/emnekredsen. I afsnit 3.3 uddybes "øjebliksbilledet".

Udover at skaffe et fotografisk udtryk for matematikken og dens bestanddele vil en kortlægning af matematikkens og en disciplins (historiske) udvikling give en mere fuldstændigt forståelse af matematikken. Denne dynamiske anskuelse af matematikken kan hæfte sig ved to ting. Det kan dreje sig om at <u>beskrive</u> en matematisk disciplins udvikling, og det kan handle om at konstatere drivkræfter, der <u>forklarer</u> den beskrevne udvikling.

Både beskrivelsen og forklaringer kan søges gennem et sociologisk og et indholdsmæssigt syn på matematikken og dens discipliner/emnekredse. Det her skitserede program vil vi kalde <u>udviklingslinier i matematik</u> (afsnit 3.4).

Sammenfattende har vi altså dannet følgende skema til karakterisering af en matematisk disciplin/emnekreds:

dynamisk	–	beskrivelse forklaring	–	sociologisk indholdsmæssigt
statisk	–	beskrivelse		

Næste skridt er at få begreberne uddybet således, at karakteriseringen kan anvendes på dynamisk programmering.

<u>3.3. "Øjebliksbillede" af matematik.</u>

Øjebliksbilledet af matematik eller en matematisk disciplin kan altså inddeles i to niveauer, et sociologisk og et indholdsmæssigt niveau. På det sociologiske niveau betragtes matematikken eller en matematisk disciplin dels i sine samfundsmæssige relationer og dels som en speciel samfundsmæssig institution med sin egen indre struktur. De samfundsmæssige relationer udgør bl.a. økonomiske,tekniske,politiske og kulturelle påvirkninger mellem matematik og det øvrige samfund. Når vi opfatter den matematiske disciplin eller matematikken som en samfundsmæssig institution, fokuserer vi på det videnskabelige samfunds sociale struktur, bestående af en gruppe personer, der udøver dette videnskabelige specialområde, og som deler fælles viden, normer, kommunikationsmønstre o.lign.

Det andet niveau i øjebliksbilledet kaldte vi for det indholdsmæssige. Matematik eller en matematisk disciplin handler om noget; der findes et netværk af grundlæggende antagelser, sætninger, beviser, metoder, relevante problemstillinger, et fælles sprog hvormed interne diskussioner foregår m.m..

Vi vil først kaste os over generelle betragtninger omkring den sociologiske side af matematik eller en matematisk disciplin, og siden vende os mod den indholdsmæssige side.

Det sociologiske niveau.

Matematik har idag en væsentlig rolle i det industrialiserede samfund. Dets relationer til samfundet kan fra høj flyvehøjde betragtes som:

> "Matematikkens rolle i vores verden er ikke alene væsentlig, den er også vitalt forbundet med formningen af samfundet. I første omgang indgår matematikken i forudsætningerne for
> (1) Samfundets teknologi, produktion og styring, og
> (2) Vores billede(r) af verdens indretning.
> At megen af den vigtigste teknologi - og dermed centrale dele af den materielle produktion - (...) oftest ikke kan tænkes uden matematik, er vist ikke særlig anfægtet. Mindre kendt er det nok at matematik i stigende omfang har vundet indpas i produktionsplanlægning og produktionsstyring, så at sige uden om teknologien. Det sker f.eks. gennem optimering af ressourceanvendelse og ressourceallokering, lagerstyring, virksomhedsallokering m.m."
> (Niss 1984 s.45-46)

Vi kan gå lidt tættere på det sociologiske niveau i matematikken ved at se på matematikken ud fra områder, hvor der foregår matematisk aktivitet. Der kan i grove træk uddestilleres tre arbejdsfelter ; matematisk forskning, anvendelse af matematik og undervisning i matematik. En såkaldt matematisk arbejdsdeling. Denne deling er i første omgang ikke tænkt at dække personer, der beskæftiger sig med matematik, men skal tænkes som typiske felter for matematisk aktivitet. I vores projekt er specielt den matematiske forskning interessant, og til en vis grad anvendelse af matematik, mens undervisningsaspektet er nedprioteret i det følgende. Den sociologiske side af matematisk forskning og anvendelse kan kort skitseres:

1.Matematisk forskning.

Dette felt omhandler produktion af ny matematisk viden:

> "Et nyt matematisk resultat kan karakteriseres som en påstand om et eller andet matematisk sagsforhold hjemmehørende under et af matematikkens delområder,(...), et resultat der er blevet bevist, og som sammen med beviset er blevet optaget til offentliggørelse i en artikel i et matematisk forskningstidsskrift."
> (Niss upubliceret materiale s.10).

I den henseende foregår matematisk forskning hovedsaglig på universiteter, højere læreanstalter, offentlige eller private forskningsinstitutioner og på forskningsafdelinger i visse private virksomheder. For de personer, der udøver forskning, er det typisk, at forskningen er en væsentlig del af deres arbejde, mens kun lidt matematisk forskning stammer fra andre kategorier af personer.

2. Anvendelse af matematik.

I det indledende citat påpegedes den omfattende brug af matematik indenfor en lang række områder. Anvendelsen dækker over udnyttelse af matematiske resultater og metoder på problemstillinger hentet uden for matematikken. De personer, der anvender matematik og de institutionelle rammer, de fungerer indenfor, er mangfoldige, men oftest er disse personer ikke involveret i produktion af ny matematisk viden og matematikundervisning udenfor deres anvendelsesfelt.

Dette er det overordnede billede, men selvfølgelig foregår der forskning blandt andre personer, der ikke er ansat på deciderede forskningsinstitutioner. Men billedet giver et rimeligt godt indtryk af den forholdsvise lukkethed mellem de tre aktivitetsområder. I tilknytning til dette er der også en forholdsvis ringe mobilitet mellem personerne tilknyttet de forskellige aktivitetsområder. Dette opretholder den matematiske arbejdsdeling af den matematiske forskning - og d.v.s. de videnskabelige samfund indenfor matematik - som værende forholdsvist afsondret fra dels anvendelsesmiljøer og dels undervisningsmiljøer, der ikke foretager universitetspræget matematikundervisning. Dog må den matematiske forskning siges at have to centrale kilder til produktion af ny matematisk viden, når vi ser sagen fra den sociologiske side. Der er dels de matematiske grundforskningsmiljøer og dels de anvendelsesorienterede miljøer, der formulerer nye opgaver for matematikken.

Hvis vi fokuserer på den matematiske forskning er der også her en kraftig arbejdsdeling, vi kalder det specialisering indenfor matematikken. Matematikken er fagligt set opdelt i en lang række mindre delområder, som er mere eller mindre sammenknyttede. Dette omtales nærmere, når vi beskriver det indholdsmæssige niveau af matematikken nedenfor. Men i tilknytning til denne specialisering er der en sociologisk side, nemlig en høj grad af specialisering af de personer, der driver matematisk forskning. Den enkelte forsker specialiserer sig indenfor et eller flere delområder af matematikken. Dette kan betyde, at forskningsfeltet repræsenteres af ganske få specialister. Disse områder kan opfattes som "små" videnskabelige samfund, som på det sociologiske niveau dækker over bl.a. de personer, der dyrker dette faglige område. Personerne indenfor et afgrænset område vil have nogenlunde samme faglige matematiske viden. Specialiseringen betyder, at den enkelte matematikforsker har svært ved at skifte til essentielt anderledes områder af matematikken. Samtidig med dette findes et forholdsvis stift karrieresystem, som forstærker tendensen til ikke at brede sig til i andre områder.

En afsluttende bemærkning om den sociologiske side af øjebliksbilledet, som kan være interessant i vores sammenhæng, er tilknytningen af den matematiske forskning til henholdsvis grundforskningsmiljøer og anvendelsesorienterede miljøer. Man kunne udmærket forestille sig, at forskere tilknyttet grundvidenskabelige miljøer har større "hang" til teoretisk stringens i matematikken, mens forskere i anvendelsesmiljøer er mere rettet mod muligheden for at kunne udnytte den nye matematiske viden i praktiske problemer, selvom den matematiske viden ikke er stringent og færdigudviklet. Forskernes miljøer vil sandsynligvis have indflydelse på den matematiske forskning, der drives i de enkelte miljøer.

Det indholdsmæssige niveau.
Vi har ovenfor i generelle betragtninger beskrevet en sociologisk anskuelse af matematikken idag. En karakteristisk egenskab er den omfattende grad af specialisering af matematikere, der er involveret i matematisk forskning. Denne specialisering genfindes i den indholdsmæssige side af matematikken - den matematiske videnskab udgøres idag af et væld af deldiscipliner, som er mere eller mindre forbundet med hinanden. Spørgsmålet er, hvorledes man nærmere skal afgrænse en bestemt matematisk disciplin, når vi fokuserer på den indholdsmæssige side. Det følgende vil være ideer til en afgrænsning. Generelt definerer vi indholdsmæssigt en disciplin ud fra det matematisk faglige indhold. Til en første afgrænsning kan det være relevant at gribe fat i den strukturering af

matematikken, som kommer til udtryk i bl.a. "Mathematical Review" og "Zentralblatt für Mathematik". Netop disse to er centrale tidsskrifter for oversigter over matematiske artikler. Tidsskrifterne er struktureret ud fra en indre stukturering af det samlede matematiske univers. Det er klart, at en så detaljeret inddeling vil afspejle en bestemt opfattelse af matematikkens indre sammenhæng, og derfor også vil have en vis historisk relativitet over sig. Men på den anden side kan den give en ledetråd for en nutidig opfattelse af matematiske disciplinersafgrænsning.

Den strukturering af matematik, der danner grundlag for de to ovennævnte tidsskrifter, stammer fra "The American Mathematical Society Subject Classification Sceme" (AMS). Det grundlæggende princip i struktureringen er, at de matematiske discipliner er organiseret ud fra deres matematiske struktur. Inddelingen er herefter organiseret ud fra en stigende grad af kompleksitet af strukturerne, således at der findes tre grundlæggende strukturer, som danner byggestenene for inddelingen. Disse tre er algebraiske-, topologiske- og ordningsstrukturer. Øverst i hierarkiet findes anvendt matematik, dvs. matematik, som har konkrete bidrag til løsning af problemer i andre fagområder. Derved inddrages et nyt moment, nemlig strukturer fra virkeligheden. Overordnet vil et matematisk emneområde i dette hierarki kunne placeres ud fra dets matematiske struktur og kompleksitet, relativt til andre matematiske emnekredse.

I forlængelse af denne tankegang kan vi opstille en måde at anskue en matematisk disciplin på. Denne kan være et forsøg på at præcisere begrebet matematisk disciplin. Vi kan opstille tre forudsætninger for en matematisk emnekreds/disciplin:

1. Der skal defineres en <u>matematisk struktur</u>. Denne består af matematiske objekter og relationer mellem disse. Disse skal indlejres i en matematisk begrebsramme hentet længere nede i hierarkiet, startende med mængdelære.

2. Der skal rettes en række grundlæggende <u>spørgsmål</u> til den matematiske struktur.

3. Der skal fastlægges et <u>metode apparat</u>. De metoder, der anvendes i en disciplin kan typisk være hentet fra flere andre matematiske discipliner.

Vi har valgt to emnekredse til illustration af denne karakteristiske tænkemåde, hvilket er blevet gjort vha. skemaerne nedenfor. Skemaerne skal ikke opfattes som udtømmende lister, men er kun et udvalg af væsentlige pointer indenfor de to discipliner. Det første er sædvanlige differentialligninger. Disse har klassifikationsnummeret 34-XX, og indeholder 10 delområder og 69 enkeltemner i AMS Subject Classification Sceme. **Differentialligninger har et forholdsvis højt strukturniveau.**

Objekt afgrænsning og relationer	Differentiable funktioner $\subseteq$ reelle og komplekse funktioner $\subseteq$ teori om R^n og C^n. Lignings- og løsningsbegreb forudsætter relationer mellem differentiable funktioner, f.eks. identitet.
Spørgsmål	Eksistens og entydighed af løsninger. Udvidelser af løsninger(fortsættelighed af løsninger). Løsningernes kvantitative og kvalitative adfærd(stabilitetsforhold, grænseopførsel). Løsningsrummets struktur. Mulige løsningsudtryk(formler og analytiske løsninger).
Metoder	Metriske - eller i praksis normerede- rum $\subseteq$ topologi i funktionsrum $\subseteq$ generel topologi. Fixpunktsteori og kontraktioner, operatorer på funktionsrum, lineær algebra, integrationsteori, numerisk analyse, approximationsteori, computer ...

Som det kan ses, arver det forholdsvist høje strukturniveau differentialligninger ligger på teorier fra lavere strukturniveauer, f.eks. generel topologi.

Det andet eksempel er netop generel topologi.

Objekt afgrænsning og relationer	Mængder, relationer, afbildninger.
Spørgsmål	Hierarki af strukturforfininger, som anledning til spørgsmål(f.eks. adskillelsesaxiomer, metriske forhold uniforme forhold, kompakte forhold separabilitets forhold ...) Klassifikation og kortlægning af forskellige strukturer.
Metoder	Logik og mængdelære, med mindre grænsen til algebraisk topologi overskrides.

Generel topologi har et lavt strukturniveau, men de spørgsmål man stiller indenfor emnet, vil ofte føre tilbage til en yderligere indsnævring af de matematiske objekter, der studeres. Hermed fremkommer specialtilfælde eller en sammenkobling til andre discipliner. Den generelle topologi kan dog udmærket studeres uden dens relationer (og tilknytning) til andre matematiske discipliner, men dens væsentligste "eksistensberettigelse" fremkommer først, når dens resultater sættes i relation til andre discipliner.

__Disciplin, angrebsmåde og afgrænsning.__
Når vi i det følgende tænker på en matematisk disciplin udgøres den af en matematiske struktur - med tilhørende centrale spørgsmål og metoder -, dvs. den strengt matematisk faglige viden. Men den viden, i lidt bredere forstand , som besiddes af matematikere (indenfor en disciplin), kan også indholde en fælles viden om , hvad der er relevante problemer og løsningsmetoder, betydningen af anvendeligheden af den matematiske teori, hvorledes matematiske resultater skal præsenteres o.lign. Disse forestillinger kan variere mellem de enkelte matematiske discipliners samfund.

Spørgsmålet, om en given matematisk aktivitet kan rubriceres som en matematisk disciplin, kan derfor tage udgangspunkt i spørgmålet, om aktivitetens område eksisterer som (nyt) begreb i den matematisk faglitteraturs klassifikationssystem. Dette giver et ydre svar på eksistensen af området som en disciplin, og siger noget om det matematiske samfunds accept af emneområdet. Det næste skridt kan herefter være at undersøge indholdssiden i snæver forstand ud fra de tre ovenstående kategorier. Samtidig med dette skal man forholde sig til den sociologiske side af disciplinen, dvs. spørge om der kan afgrænses et videnskabeligt samfund, der er fælles om dette faglige område. Dernæst kan man diskutere, om der eksisterer specielle traditioner, værdier o.lign. blandt de matematikere, der udgør det faglige fællesskab omkring disciplinen. Vi vil mene, at en sådan undersøgelse vil give et rimeligt godt indtryk af den matematiske disciplin på den faglige indholdsside, samt et indtryk af dets udviklingsniveau og problemer.

__3.4. Udviklingslinier i matematik.__
Når man undersøger matematik eller et delområde af matematikken i et historisk lys, er der to væsentlige niveauer. Dels et, hvor man beskriver den historiske udvikling - __beskrivelsesniveauet__ - og dels et hvor man fokuserer på drivkræfterne bag den beskrevne udvikling - __forklaringsniveau__. I det følgende vil vi kort skitsere nogle af drivkræfterne bag udviklingen

af ny matematisk viden. Generelt kan der være mange forskellige drivkræfter bag produktionen af ny matematik. Disse kan strække sig fra specifikt interne matematiske problemer til matematikeksterne faktorer, der inspirerer til produktionen af ny matematisk viden. Talen om eksterne faktorer kan forstås på mindst to måder: For det første snævert forstået som problemstillinger indenfor andre fag- og praksisområder, der nødvendiggør fremkomsten af ny matematisk viden, for at de eksterne problemstillinger kan viderebehandles. For det andet kan eksterne drivkræfter have indflydelse på den videnskabelige institution, såsom økonomiske, ideologiske, politiske og andre samfundsmæssige faktorer. Disse faktorer vil specielt have indflydelse på det sociologiske niveau, der igen kan påvirke indholdsmæssige forhold.

Vi vil først kort nævne typiske drivkræfter bag fremkomsten af ny matematisk viden. Til slut i afsnittet vil vi kort berøre den sociologiske side af drivkræfterne, d.v.s., hvem der typisk driver hvilken slags forskning - typiske agenter i de enkelte områder.

I matematik har man en række uløste problemer, der har tiltrukket en del forskningsaktivitet, man kunne kalde dem "de store gamle problemer". Disse er interessante som en betydelig drivkraft. ikke fordi løsningen af dem isoleret set er specielt interessante, men fordi de har afstedkommet en del forskningsaktivitet og fremkomsten af matematisk viden i forbindelse med forsøgene på at løse dem. Løsningen af disse problemer har været forbundet med stor prestige inden for det matematiske samfund, og de er typisk ikke løste eller forsøgt løste på en gang, men gennem løsning af en sekvens af delproblemer af beslægtede problemer. Nogle typiske eksempler er Riemannhypotesen, som efter sigende skulle være afklaret i 1984 (Devlin 1985) og "Fermat's store sætning", som endnu er uløst (i Vestergaard 1984 findes en omtale af disse to og andre store gamle problemer).

Den typiske matematiske forskning må nok siges at beskæftige sig med, hvad man kunne kalde "små" problemer. Det drejer sig om afklaring af problemstillinger indenfor en disciplin som står uløste, men hvis betydning hovedsagelig ligger indenfor den enkelte disciplin. Problemerne består i at bevise sætninger, undersøge egenskaber ved den matematiske struktur o.lign.. Dette er en slags udvidelsesarbejde og løbende oprydningsarbejde indenfor den matematiske disciplins rammer. en matematisk disciplins normalforskning.

En tredie væsentlig intern drivkraft er, hvad man kan kalde behovet for en indre strukturafklaring af matematikken eller af delområder af matematikken. Dette dækker for det første over en opsamling af mange enkeltundersøgelser på forskellige matematiske **forskningsområder.** Dette vil ofte føre til en syntese i en ny (generaliseret) disciplin. Et eksempel på dette er fremvæksten af den generelle topologi i starten af dette århundrede. En anden typisk strukturafklaring sker i forbindelse med en opbrudsfase, f.eks. den grundlagsdiskussion som matematikken var ude i fra slutningen af 19. århundrede til en trediedel ind i dette. Her forsøgte man at afklare fundamentet for den matematiske videnskab.

Ny matematisk viden kan også fremkomme ud fra matematisk behandling af problemstillinger fra andre fag- og praksisområder. Et matematik-eksternt område , der har haft væsentlig betydning , er fysikken. Det er langt fra alle eksterne problemer (konkrete anvendelser af matematik på andre områder), der lægger op til udvikling af ny matematisk viden. Mange konkrete problemstillinger vil kunne indlemmes i allerede eksisterende matematiske teoridannelser. Men eksterne problemstillinger/anvendelser af matematik kan få betydning for opkomsten af ny matematisk viden. For det første kan behandlingen af sådanne problemstillinger med eksisterende matematiske metoder - som i sig selv ikke inspirerer til ny matematisk udvikling - under visse omstændigheder lægge op til en generalisering, ordning eller strukturafklaring. For det andet kan visse problemstillinger kræve udviklingen af nye matematiske metoder for at kunne løses.

En anden type af eksterne faktorer, der er blevet fremholdt som havende indflydelse på matematikkens udvikling, er, hvad vi kan kalde sociale og samfundsmæssige faktorer, f.eks. økonomiske og politiske. Disse er ikke omfattet blandt de hidtil nævnte drivkræfter. De er også af en lidt anden karakter, idet deres betydning snarere ligger i de rammer, der lægges for den matematiske forskning, end i deres rolle som "direkte" inspirationskilder for udvikling af ny matematisk viden. Men de sociale og samfundsmæssige faktorer kan dog have en væsentlig indflydelse.

Med den ovenfor skitserede type af eksterne drivkræfter har vi allerede bevæget os ind på den sociologiske side af matematiks udvikling. Et andet sociologisk element er spørgsmålet om, hvem der er agenter i de fire ovenfor skitserede direkte drivkræfter i matematisk forskning. Kort fortalt gælder, at typisk forskning i de såkaldte "store gamle problemer" udføres af matematikere fra grundforskningsmiljøer. Også normalforskningen varetages typisk i grundforskningsmiljøer om en disciplin. Men afhængig af disciplinens art kan personer fra andre forskningsområder/-miljøer også bidrage. Specielt har fysikere haft indflydelse på visse grene af matematikken. Den tredie kategori af interne drivkrafter - omhandlende indre strukturafklaring af matematiske discipliner - udføres typisk af matematikere, specielt indenfor grundvidenskabelige miljøer. Den sidste kategori var eksterne problemstillinger fra andre fag- og praksis-områder. Dette vil typisk udføres af matematikere tilknyttet disse anvendelsesmiljøer, men andre forskere, herunder ikke-matematikere, kan også forstilles at bidrage.

Studiet af en historisk udvikling af en konkret matematisk disciplin, kan indbefatte mange forskellige drivkræfter, både eksterne og interne. De interne faktorer kan bl.a. være forsøg på afklaring af den underliggende matematiske struktur og egenskaber ved denne, og hvis disciplinen er forholdsvis afklaret i det matematiske fundament, kan man bl.a. fokusere på undersøgelser af egenskaber ved strukturen eller uddrivelser af eventuelle anomali. De eksterne faktorer kan bl.a. være afgørende for hvilke problemstillinger, der i bred forstand, tages op, og for den grad af præcisering og abstrakthed, der udvikles.

3.5. Rids af dynamisk programmerings historie.

I de foregående afsnit har vi præsenteret en betragtningsmåde, som kan lægges ved en videnskabsteoretisk og -historisk undersøgelse af matematikken og/eller en matematisk disciplin. Afsnittene omhandlede ikke dynamisk programmering. Denne vil vi tage fat på nu. Vi vil med dette afsnit lægge ud med en kort gennemgang af dynamisk programmerings historiske udvikling. Den historie vi præsenterer vil hovedsagelig bevæge sig på et beskrivelsesniveau, og vil indeholde både sociologiske og indholdsmæssige aspekter. Vi må dog pointere, at dette er et kort rids af dynamisk programmerings historie, mere kan siges.

Interessen for optimeringsproblemer og dermed udviklingen af forskellige optimeringsmetoder opstod for alvor i perioden efter anden verdenskrig. Blandt disse metoder hører dynamisk programmering. Det at optimere var dog ikke et nyt felt indenfor matematikken, idet både klassisk optimering af reelle funktioner og den klassiske variationsregning, hvis skabelse er knyttet til den klassiske mekanik, kan føres tilbage til 1700-tallet.

Baggrunden for den stigende interesse for optimering i slutningen af 40'erne og begyndelsen af 50'erne kan ses i lyset af et voksende behov for styring af planlægningsproblemer, som f.eks. kontrol af produktionsprocesser eller militære strategier. Ofte krævede planlægningsproblemernes komplicerede struktur inddragelse af matematiske optimeringsmetoder af en anden type end de allerede eksisterende.

Samfundsudviklingens krav om eller behov for optimeringsmetoder kan ikke i sig selv begrunde den pludselige opdyrkning og udvikling af optimeringsmetoder og -teorier. Eksistensen af instanser, der råder over midler og relevante beslutningsrettigheder, og som har interesse i sagen er også en nødvendighed. Dele af det amerikanske militær udgjorde i efterkrigsårene en sådan instans. Optimeringsmetoden lineær programmering, der så dagens lys for alvor i 1947, er faktisk resultatet af et bestillingsarbejde fra det amerikanske luftvåben (Blomhøj et al. 1984).

Dynamisk programmering så dagens lys omkring 1950. De tidligste arbejder er gjort i perioden 1949 - 1951 (Bellman 1957 s.115), mens de første publikationer stammer fra omkring 1952 - 1954. Den centrale figur i formuleringen af dynamisk programmering i startfasen var Richard Bellman. Bellman var på dette tidspunkt ansat på RAND Corporation (Research ANd Development Corporation). Og den tidlige udvikling af dynamisk programmering både med hensyn til matematisk teori og praktiske anvendelser foregik i regi af RAND. I USA findes en række ikke-statslige foretagender, der er involveret i forskning og udviklingsarbejde, betegnet hjernetruster, og RAND er en af disse. RAND blev oprettet i 1948 og udspringer af en forskningskontrakt - mellem de føderale myndigheder og et privat firma - om anvendelsen af operationsanalyse og matematiske metoder på kernevåbenstrategiske problemer. En del af RAND's forskning igennem 50'erne skete på baggrund af kontrakter med det amerikanske luftvåben (Andersson 1969 s.105-108).

Ligesom lineær programmering blev dette forskningsprogram udi dynamisk programmering financieret af det amerikanske luftvåben (Bellman 1957 xviii, Bellman and Dreyfus 1962 xi). Man kan derfor formode, at det amerikanske luftvåben har øjnet en mulighed for at anvende Bellman's nye optimeringsteori/metode. Bellman nævner selv, i denne tidlige fase af udviklingen, en række andre mulige anvendelsesområder for dynamisk programmering:

> "(...) the theory was created to treat the mathematical problems arising from the study of various multi-stage decision processes (...)"
> (Bellman 1954a s.503)

> "Examples of processes fitting this loose description are furnished by virtually every phase of modern life, from planning of industrial production lines to the scheduling of patients at a medical clinic; from the determination of long-term investment programs for universities to the the determination of a replacement policy for machinery in factories; from the programming of training policies for skilled and unskilled labor to the choice of optimal purchasing and inventory policies for department stores and military establishments."
> (Bellman 1954a s.503)

Tager vi Bellman på ordet med det forbehold, at han er originator og siden bannerfører for teoridannelsen bag dynamisk programmering, tyder det på, at der ligger rent anvendelsesorienterede, dvs. eksternt matematiske forhold til grund for teoriens skabelse. Dette harmonerer da også fint med, at den økonomiske donator havde behov for løsningsmetoder til problemer af ovenfor citerede art.

Vi vender nu blikket mod den indholdsmæssige side af dynamisk programmerings tidlige udvikling. Karakteristiske temaer for tidlige publikationer omkring problemstillinger indenfor dynamisk programmering er:

(1) Funktionalligningsaspekter i forbindelse med teorien for dynamisk programmering.
(2) Dynamisk programmering og variationsregningen.

I en af de tidligste artikler omhandlende dynamisk programmering præsenteres (uden bevis) bl.a. eksistens og entydighedssætninger for bestemte typer af rekursive ligninger. Bellman har også formuleret forskellige procestyper og fremlagt problemer, der siden bliver standardproblemer. Eksempler på overskrifter for dette er diskrete deterministiske eller stokastiske processer eller allokeringsprocesser.

I starten af dynamisk programmerings historie forsøger Bellman også at reklamere for dynamisk programmerings anvendelighed ved blandt andet at fremhæve metodens fordele fremfor variationsregningen (Bellmam 1954b).

I 1957 udkommer Bellman's første bog om dynamisk programmering "Dynamic Programming" (Bellman 1957). Den er en opsummering og systematisering af hans arbejde siden starten af dynamisk programmering. Bogen tager bl.a. udgangspunkt i fler-trins allokeringsprocesser, stokastiske fler-trins beslutningsprocesser. Bogen samt resten af hans arbejde i perioden fremtil 1957 bærer typisk præg af at være resultater kommende fra en anvendelsesorienteret synsvinkel. Det handler i vid udstrækning i både bog og artikler fra perioden om at opstille sætninger vedrørende nødvendige og især tilstrækkelige betingelser for løsningers eksistens og entydighed, gerne i forbindelse med konkrete rekursive og statiske funktionalligninger, samt at pointere nytten af optimalitetsprincippet (se afsnit 2.4). Desuden betones et fortrin ved dynamisk programmering - specielt gældende for flertrins beslutningsprocesser - at dimensionen af problemet bliver reduceret. Karakteristisk for perioden er også den begyndende brug af datamater:

> "The mathematical advantage of this formulation lies first of all in the fact that it reduces the dimension of the process to its proper level, namely the dimension of the decision which confronts one at any particular stage. This makes the problem analytically more tractable and computationally vastly simpler."
> (Bellman 1957 s.xi).

Dynamisk programmering er i tiden efter 1957 ofte præget af systematiske studier indenfor feltet algoritmeteori.

I første halvdel af 60'erne kommer der nye folk til, som ikke har direkte tilknytning til RAND-miljøet, og interessen for dynamisk programmering spredes meget, hvad mængden af udgivne artikler og lærebøger er belæg for. I kølvandet på dynamisk programmerings tidlige etableringsfase følger oprettelsen af et nyt matematisk tidskrift: Journal of Mathematical Analysis and Applications (J.Math.Anal.Appl.). Dette har Bellman også en finger i. Et stort antal af tidskriftets artikler har gennem årene været og er stadig helliget dynamisk programmering. Publikationer fra starten af 60'erne bærer dog stadig præg af propaganda og legitimering af dynamisk programmering. I 1962 udgiver Bellman & Dreyfus en bog, som ligeledes er tilknyttet RAND Corporation. Den er betitlet "Applied Dynamic Programming" og er gennemsyret af dynamisk programmerings anvendelser i forbindelse med computere og approximationsteknikker - en understregning af dynamisk programmerings daværende bevægelsesretning.

I anden halvdel af 60'erne kan anes en etablering af nye områder for dynamisk programmering, som f.eks. beskæftiger sig med, hvorledes dynamisk programmering kan løse problemer indenfor andre felter af matematikken. Eksempelvis funktionalligningsudformningen i dynamisk programmering bruges til at løse komplicerede randværdibetingelser i partielle differentialligninger (Bellman & Lee 1978 s. 16 og Bellman & Angel 1972).

En anden indgangsvinkel til dynamisk programmering er forsøgene på at etablere et generelt teoretisk fundament, samt diskussioner af optimalitetsprincippet og sammenhængen mellem dette og den rekursive ligning. Hos nogle udøvere af dynamisk programmering skaber diskussionerne grundlagstvivl.

I 70'erne begynder dynamisk programmering at indgå som emne på forskellige konferencer om optimering, og i 1977 afholdes den første konference - os bekendt - som udelukkende omhandler problemstillinger indenfor dynamisk programmering (Puterman 1978). Begge dele er eksempler på, at dynamisk programmering tenderer til at blive en accepteret matematisk virksomhed. Endnu et eksempel på dette er, da dynamisk programmering får en selvstændig rubrik i AMS-oversigten; dette i forbindelse med en revision af AMS-rubrikkerne i 1979/80. Under rubrikken 90Cxx (Mathematical Programming) er dynamisk programmering at finde under 90C40, men også under 49-XX som er rubrikken for variationsregning og optimal kontrolteori, findes dynamisk programmering under 49C20.

3.6. Spændvidden af dynamisk programmering.

Et mål med dette projekt er at undersøge dynamisk programmerings status i dag. Via såvel litteratursøgning som nærmere gennemlæsning af en række artikler viste det sig, at dynamisk programmering har mange forskellige berøringsflader, men på grund af den berammede tidshorisont for dette projektarbejde valgte vi at gå i dybden med kun et afgrænset emneområde; nemlig at undersøge hvorledes man har forsøgt at diskutere, præcisere og uddybe dynamisk programmerings teoretiske og matematiske fundament.

Da vi imidlertid finder det misvisende i henhold til dynamisk programmerings samlede status i dag, alene at behandle et i sig selv så begrænset emneområde, vil vi i det følgende forsøge at give et overordnet billede af, i hvilke sammenhænge dynamisk programmering indgår. Dette billede er dannet ud fra en gennemgang af knap 150 artikeloverskrifter(bilag II), spredt læsning i nogle enkelte bøger samt en nærmere gennemlæsning af ca. 30 artikler, hvor udvælgelseskriteriet var at opnå et repræsentativt udvalg af dynamisk programmerings berøringsflader. Hensigten med afsnit er således at give et indtryk af dynamisk programmerings indholdsmæssige side (i "øjebliksbilledet"), hvis vi anvender den før omtalte terminologi.

De problemstillinger, som indgår i dynamisk programmering, kan inddeles i 4 overordnede kategorier, som alle eksisterer i både deterministiske og stokastiske varianter. Vi vil i det følgende kun interessere os for deterministiske problemstillinger. De 4 overordnede kategorier er :

(1) Problemstillinger, som diskuterer, præciserer og uddyber dynamisk programmerings teoretiske og matematiske fundament, samt undersøger bestemte klasser af dynamiske programmerings processer, klasser af funktionalligninger og tilhørende algoritmer.

(2) Problemstillinger, som illustrerer anvendelsen af dynamisk programmering indenfor andre optimeringsområder.

(3) Problemstillinger, som illustrerer anvendelsen af dynamisk programmering på anden matematik.

(4) Problemstillinger, som viser dynamisk programmerings anvendelse på konkret modelarbejde og dermed behandling af bestemte funktionalligninger og tilhørende algoritmer, herunder også algoritmeteori. (Vi har allerede fra første færd elimineret algoritmeteoretiske artikler).

Under kategori (1) hører publikationer, som forsøger at uddybe det generelle teoretiske fundament i dynamisk programmering. De første eksempler på dette er publikationer skrevet af Bellman (Bellman 1952, Bellman 1954a). Senere eksempler ses blandt andet i (Karp & Held 1967), hvor der gøres et forsøg på at stable dynamisk programmering på benene via en mere generel teori. En anden indgangsvinkel til præcisering af dynamisk programmerings fundament er forsøg på at opstille nødvendige og/eller tilstrækkelige betingelser for at bestemte typer af problemer (diskrete, kontinuerte osv.) kan formuleres til dynamisk programmering (Morin 1982). Under kategori (1) findes også publikationer som diskuterer gyldigheden af optimalitetsprincippet og den rekursive ligning (Sniedovich 1978, Sniedovich 1986). Typiske publikationer under kategori (1) omhandler endvidere undersøgelser af, hvornår der eksisterer løsninger til funktionalligninger hidrørende fra forskellige klasser af beslutningsprocesser (Baston 1978, Fisher 1974, Fisher 1975a, Fisher 1975b, Iwamoto 1977a, Iwamoto 1979, Iwamoto 1981, Ibaraki 1973, Bhakta & Mitra 1984). En dyberegående diskussion af problemstillinger hørende til denne kategori findes i kapitel 4.

Som nævnt i kapitel 2 kan dynamisk programmering anvendes på problemstillinger, som hører under variationsregning, under optimal kontrolteori eller under lineær programmering, hvilke er problemstillinger knyttet til kategori (2). (Bellman 1954b, Dreyfus 1960, Capuzzo 1983) er eksempler på dynamisk programmerings tilknytning til den klassiske variationsregning. Blandt andet ses der argumenter for, hvorledes en funktionalligning i dynamisk programmerings regi på en simpel måde danner grundlag for at udlede nødvendige betingelser i klassisk variationsregning, som f. eks. Euler-Lagrangeligningerne. (Vinter 1984, Murray & Yakowitz 1984) er eksempler på dynamisk programmerings tilknytning til optimal kontrolteori, mens (White 1975) knytter dynamisk programmering til lineær programmering.

Kategori (3) indeholder eksempler på dynamisk programmerings anvendelse på matematik, som ikke umiddelbart har noget med optimering at gøre. (Wang 1986, Iwamoto & Wang 1983, Iwamoto & Wang 1986) er eksempler på, hvorledes klassiske uligheder kan omformuleres til dynamisk programmerings problemer og derefter løses. Et andet eksempel er dynamisk programmerings anvendelse på partielle differentialligninger (Bellman & Angel 1972).

Kategori (4), som omhandler konkret modelarbejde (Mirica 1985, Iwamoto 1981, Sugiyama 1986) beskæftiger sig hovedsagelig med 3 problemstillinger:

(1) at opstille en funktionalligning ud fra et konkret problem,

(2) at opstille en algoritme til løsning af en funktionalligning,

(3) at udsige noget om de konkrete løsninger.

Typiske områder, hvor der foregår en modellering ved brug af dynamisk programmering, er i forbindelse med kemiske processtyring, i forbindelse med lagerstyring, i forbindelse med allokeringsprocesser og i forbindelse med kontrollering af missilsystemer, hvor problemet er at minimere missilretningers afvigelse fra fastlagte baner.

Dynamisk programmering har mange berøringsflader, hvor nogle er mere almindelige end andre. Tager vi atter udgangspunkt i de 4 overordnede kategorier, viste en gennemgang af de knap 150 artikeloverskrifter, at de fleste artikler var fra kategori (1) og kategori (4), en mindre del fra kategori (2) og enkelte fra kategori (3). Da de 150 artikeloverskrifter var udvalgt på grundlag af forud fastsatte kriterier siger mængdeforholdene ikke noget om det totale billede. F.eks. har vi undladt af søge efter artikler omhandlende stokastiske processer, algorimeteori og i et vist omfang konkrete modeller. Derfor skal det fremlagte billede ikke opfattes som et kvantitativt billede af spændvidden af dynamisk programmering.

3.7. Problemformulering.

Vi har indtil nu betrådt forskellige områder af dynamisk programmering. Lige fra et simpelt eksempel til dynamisk programmerings generalisationer. Endvidere har vi konstateret og i løse vendinger beskrevet nogle relationer mellem DP og andre optimeringsdiscipliner. I resten af rapporten vil vi undertiden anvende forkortelsen DP for dynamisk programmering. I denne vandring har vi bevidst undgået - undtagen i træeksemplet - at formalisere begrebslighederne i DP. Det skyldes, at vi ville bevare et generalisationsniveau, der tålte/tåler, at man i ét tag kan tale om store klasser af processer, bl.a. for at vise, hvor vidtfavnende DP er. Deraf følger naturligvis, at præciseringer, nuancer og dybereliggende facetter af DP bliver stærkt undertonede.

Det er på sin plads her i overordnede vendinger, at redegøre for, hvad vi forstår ved dynamisk programmering.

i) Dynamisk programmering (DP) er betegnelsen på en aktivitet udøvet af de mennesker, der anlægger en (mere eller mindre) bestemt synsvinkel og angrebsmåde på diverse klasser af problemer - typisk optimeringsproblemer.

ii) DP er en matematisk emnekreds.

Med kapitlerne 2 og 3 præsent skulle i) og ii) være mindre diffuse end deres fremtoning umiddelbart antyder. Vi har med i) betonet, at DP ikke kun er et matematisk-fagligt "supplement" til øvrige optimeringsmetoder, men også rummer sociologiske aspekter. Men vi har valgt, at hovedvægten af projektarbejdet skulle være centreret om DP's internt matematiske strukturer og universer. Det fører os frem til følgende problemer:

P.I. Kan DP - i snævrere matematisk forstand - indlejres i et matematisk univers? Hvilke gevinster/omkostninger implicerer formaliseringer af DP?

En hovedhjørnesten i manges opfattelse af DP er Bellman's optimalitetsprincip (se afsnit 2.4). Der optræder mange steder i litteraturen formelle oversættelser af Bellman's verbalt formulerede princip, hvis betydning for DP måske kan sammenlignes med maximum likelihood princippets betydning for statistikken. Det er alment akcepteret, at der af optimalitetsprincippet (OP) kan udledes en funktionalligning (rekursiv eller statisk). Men der er stedvis rejst spørgsmål om omfanget af af princippets gyldighed. Herudover kan der observeres forskellige (formelle) fortolkninger af OP. Interssante grundlagsorienterede spørgsmål bliver derfor:

P.II. Hvilken formel relation findes mellem OP og funktionalligningsinterpretationen af DP?

Ovenpå fundamentet for DP må der formodes at være en teoribygning, hvis ikke DP skal være indholdsløs. Det er da relevant at efterse, hvilke resultater (sætninger m.v.) dyrkere af DP opnår. Den slags undersøgelser er uløseligt forbundet med det at kunne karakterisere DP som en emnekreds/disciplin i den forstand, det er opridset i afsnit 3.3. under det indholdsmæssige niveau. Vi var oprindeligt interesserede i at reflektere over DP's position ud fra en på forhånd opstillet almen disciplinkarakteristik. Men vi har måttet sande arbejdsbetingede barrierer, der har medført, at karakteristikkens sociologiske lag er blevet nedtonet. Derfor lyder det reducerede spørgsmål:

P.III. I hvilken grad har DP opnået status som en selvstændiggjort matematisk emnekreds/disciplin i den indsnævrede forstand?

Sidevarts har vi dog forsøgt at komplettere DP-billedet med punktvise betragtninger om sociologiske forhold vedrørende DP.

KAPITEL 4

4.1. Indledning.

Vi har i forbindelse med artikelsøgning bl.a. i referattidsskrifterne "Zentralblatt für Mathematik" og "Mathematical Review" årgangene 1979/80-1986, samt tidsskriftet J.Math.Anal.Appl. fra 1970-1986 fundet en stor mængde litteratur, der på en eller flere måder har relation til dynamisk programmering. Udover de ca. 150 artikeloverskrifter vi har fået noteret os (bilag II), er vi stødt på utallige titler, som enten har dækket over stokastiske dynamisk programmeringsfænomener eller over konkrete modelbehandlinger. Næsten alle disse er siet fra undervejs af hensyn til begrænsning af arbejdet og udsynet. Endelig har vi bemærket, at en del artikler er forfattet af østeuropæere, hvorfor vi på grund af sprogbarrierer desværre ikke har kunnet indfange deres budskaber og resultater. Desværre, fordi en større del af titlerne antydede, at der var tale om grundlagsforhold i dynamisk programmering.

Af hensyn til overbliksdannelse og projektplot har vi måttet skære drastisk i den store mængde litteratur. Snittemetoden har været bestemt af problemformuleringen. D.v.s. vi har selekteret artiklerne efter forud-definerede kategorier - en første grovsortering - hvor den for os væsentligste kasse var grundlagsforholdene i dynamisk programmering. Derved blev skaren af artikler kraftig reduceret.

Bemærkningerne ovenfor er med for at antyde et billede af arbejdsprocessen. At metoden endte med at blive som skitseret skyldes en forholdsvis unøjagtig forhåndsantagelse om, at dynamisk programmering som forskningsfelt ikke var uoverskuelig i omfang. Faktum er altså, at det særligt udvalgte materiale blev underkastet en analyse, der bl.a. undersøger om dynamisk programmering kan indhegnes som matematisk emnekreds/disciplin. Analysen peger, som antydet i problemformuleringen i tre retninger.

Den første retning (afsnit 4.2) er at udgrave eksisterende matematiske formaliseringer af dynamisk programmering, og at diskutere deres indbyrdes relationer - specielt m.h.p. generalitetsforhold. Afsnittet vil derfor primært være en analyse af måder, hvorpå dynamisk programmering bliver indlejret i matematiske universer.

Analysens anden retning går ad optimalitetsprincippets spor. En del artikler forholder sig kritisk og/eller formaliserende til optimalitetsprincippet. Det er opgaven i afsnit 4.3 at afdække nogle af artiklernes og bøgernes fortolkninger af Bellman's OP.

Tredie retning (afsnit 4.4) går på at undersøge de matematiske reslutater, man opnår og søger at opnå gennem formaliseringerne og metodeapparatet (optimalitetsprincippet og funktionalligninger) i dynamisk programmering. Afsnittet gør ikke ansats til en egentlig kortlægning, men skal opfattes som stikprøver på forskellige typer af matematiske forskningsarbejder indenfor dynamisk programmering. Deraf følger dets oversigtsmæssige karakter.

Vi understreger, at de tre retninger kun repræsenterer tre sonder ned i dynamisk programmerings-suppen. Vi kunne have valgt adskillige andre retninger at forfølge. Både den stokastiske, numeriske og den algoritmeteoretiske side af dynamisk programmering har vi efterladt urørt. Bl.a. fordi vi ikke i givne tidsramme kan omslutte alt vedrørende dynamisk programmering og samtidig finder grundlagsforholdene væsentligst at kortlægge i forbindelse med indholdsmæssige undersøgelser af DP som en matematisk disciplin. I en afsluttende diskussion (kap.5) vil projektets forskellige tråde blive strikket sammen for at præcisere om dynamisk programmering er en matematisk disciplin eller ej.

4.2. Formalisering af dynamisk programmering.

Dynamisk programmerings opstart var - som vi beskrev i afsnit 3.5 - stærkt knyttet til konkrete anvendelsessituationer. Imidlertid har udviklingen af dynamisk programmering drevet visse forskere til at undersøge mere generelle problemstillinger omhandlende fler-trins beslutningsprocesser. Selvom forskerne har været ude i forskellige ærinder, har deres arbejder ofte væsentlige fællestræk. For at kunne drive de matematiske undersøgelser fremad, har opstilling af en matematisk begrebsramme for de underliggende beslutningsprocesser været nødvendig. Det er udkrystaliseringer af denne begrebsramme, vi omtaler som formaliseringer af dynamisk programmering.

Men det viser sig, at formaliseringen vil afhænge af den (generaliserede) procestype, som den enkelte forsker beskæftiger sig med. I afsnit 2.6 beskrev vi, hvorledes forskellige procestyper kunne fremkomme. Der omtalte vi også, at navngivningen af procestyper ikke var entydig - skulle man fokusere på trin-, beslutnings- eller tilstandsvariablene, når man ville karakterisere procestypen. Denne forvirring i navngivning findes i litteraturen; de enkelte forskere karakteriserer ofte deres procestype med de samme navne, men når deres formalisering undersøges nærmere, viser det sig, at de fælles procesbetegnelser dækker over forskellige begrebsdannelser. Den formalisering den enkelte forsker opstiller dækker over "specialiserede" dynamisk programmerings beslutningsprocesser. Vi vil i det følgende fremlægge nogle af disse formaliseringer, se på ligheder og forskelle mellem dem, samt på hvilke typer af dynamisk programmering de indfanger.

Vi har i vores udvalg af formaliseringsforsøg udset nogle bestemte retninger. For det første er det typisk for vores valg, at trinvariablen er af diskret natur. Ingen af de procestyper vi her fokuserer på har en kontinuert trinvariabel. Det andet fællestræk ved de procestyper, hvis formalisering vi undersøger, er, at transformationen er af deterministisk natur og ikke stokastisk. Dog har vi i et enkelt tilfælde inddraget en formalisering, der indbefatter en stokastisk transformation, men denne formalisering kan opfattes som formaliseringen af en deterministisk procestype. Med fare for at falde i den grøft, vi selv har advaret imod, kan den procestype, vi har studeret formaliseringer af, karakteriseres som diskret (trinvariablen) deterministisk dynamisk programmering.

I vores gennemgang af de forskellige formaliseringsforsøg har vi iagttaget to hovedspor. Det første bygger på begreberne endeligt alfabet og endelig automat - hvilket vi i forbindelse med en konkret formalisering vil forklare nærmere. Retningen vil bl.a. kunne karakteriseres ved , at trinbegrebet træder i baggrunden og ved at beslutningsrummet er diskret. Men en nærmere karakterisering vil vi vende tilbage til. Det andet spor er lidt mere vagt i dets afgrænsning, men trinbegrebet står centralt i formaliseringen, og tilstands- og beslutningsrum er ikke afgrænset til kun at være af diskret natur. Det er dog væsentligt her at fremhæve, at vi ikke kan opstille et fuldstændigt hierarki, idet nogle af formaliseringerne nærmere må betegnes som sidestillede.

Ledetråden gennem afsnittet vil bl.a. være generaliteten af de processer de enkelte forskere arbejder med. Vi vil først præsentere en formalisering foretaget af Mitten (1964). Han diskuterer en beslutningsproces helt generelt betragtet.

Vi vil herefter gå over til det første af de ovenfor anførte spor, nemlig sporet der har udgangspunkt i begreberne endeligt alfabet og endelig automat. Ved at tage udgangspunkt i en bestemt formalisering, nemlig Karp & Held (1967), vil de andre formalismer i kategorien blive sat i sammenhæng med denne. I resten af afsnittet vil vi herefter præsentere forskellige formaliseringsforslag.

Mitten's formalisering af en beslutningsproces.
Mitten's(1964) udgangspunkt er en proces mellem to mængder A og B. Den symboliseres ved P(A,B).

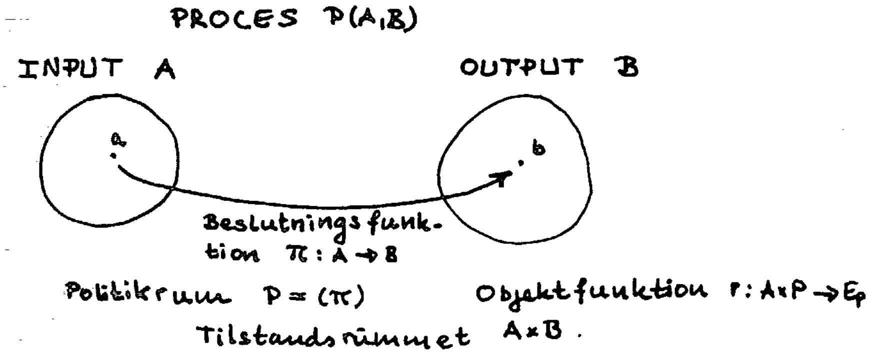

Fig.4.1.

A kaldes inputmængden og B outputmængden. Der stilles ingen krav til deres art eller struktur. Der defineres et tilstandsrum for processen, som er det Cartesiske produkt A X B. Endvidere defineres en beslutningsfunktion $\pi: A \rightarrow B$, som til ethvert inputelement $a \in A$ entydigt forbinder et outputelement $b \in B$, $\pi(a)=b$. Der defineres et politikrum P, som er mængden af alle tilladelige beslutningsfunktioner π, altså en delmængde af mængden af samtlige funktioner fra A til B. Processen P(A,B) betragtes herefter som politikrummet, sammen med dets tilknyttede tilstandsrum A X B. På denne proces defineres en objektfunktion r; $r: A \times B \rightarrow E_p$ (E_p er et euklidisk rum af en eller anden endelig dimension). Afkastet $r(a,\pi)$ måler nytteværdien af at anvende politikken $\pi \in P$ med input $a \in A$. Mitten udvider sin ramme, således at han også betragter sammensætning af processer på forskellige måder.

Mitten opstiller således en meget generel ramme for formaliseringer af beslutningsprocesser. Der er ingen strukturkrav til mængderne A og B. Beslutningerne er funktioner, hvortil der ikke stilles yderligere krav. Objektfunktionen er heller ikke underlagt krav.

Karp & Held's formalisering
Karp & Held (1967) arbejder med en formalisering af, hvad de kalder diskret deterministisk dynamisk programmering. Sigtet er at indkredse to typer af beslutningsprocesser. De kaldes for henholdsvis for en diskret beslutningsproces (discrete decision process) og en sekventiel beslutningsproces (sequential decision process). Karp & Held nævner selv, at inspirationskilden til deres formalisering stammer fra en formalisering præsenteret i 1964 af Y.A. Schreider (Karp & Held 1967 s.693). Vi har ikke studeret Schreider's arbejde.

Både den diskrete og den sekventielle beslutningsproces bygger på begrebet et endeligt alfabet. Endvidere inddrager sekventiel beslutningsproces også begrebet en endelig automat. Den diskrete beslutningsproces er den mest generelle af de to processer – og den mindst strukturerede – og danner udgangspunkt for Karp & Held's formalisering af dynamisk programmeringsbeslutningsprocesser. Men først skal begrebet endeligt alfabet defineres.

Endeligt alfabet
Der eksisterer en endelig mængde D af symboler, alfabetets bogstaver. I en beslutningsproces skal elementerne – symboliseret ved d – i D fortolkes som elementære beslutninger, der kan tages. Der er således endelig mange elementarbeslutninger, der kan tages. Mængden D^* af alle mulige endelige sekvenser af bogstaver betragtes. Et element i D^* kaldes et ord. Et ord f.eks. $x=d_1\ d_2\ d_3$ skal fortolkes som en sekvens af elementarbeslutninger, også kaldet en politik. Der eksisterer en tom sekvens e, kaldet nulsekvensen, som betyder at ingen beslutning foretages. To ord skal kunne "sammenklistres", forstået på den måde, at hvis f.eks. $x=d_1\ d_2\ d_3$ og $y=d_2\ d_4\ d_1\ d_7$, så er beslutningskæden $xy=d_1\ d_2\ d_3\ d_2\ d_4\ d_1\ d_7$ at forstå som en sammenklistring. Nye beslutningskæder dannes altså ud fra allerede givne eller dannede kæder.

Vi kan nu vende os mod Karp & Held's afgrænsning af en diskret beslutningsproces, samt se på generaliteten af deres formalisering.

Definition af diskret beslutningsproces.
En diskret beslutningsproces er defineret som en kvadrupel $\mathfrak{D} = (D,P,U,f)$.

- D er et endeligt alfabet (mængden af elementære beslutninger, beslutningsrummet)
- P er en delmængde af D^* (mængden af politikker for processen, politikrummet)
- U er en vilkårlig mængde (en mængde af dataspecifikationer for processen, parametre afhængig af det givne procesforløb)
- f er en funktion fra P X U til de reelle tal $\hat{R}$ (objektfunktionen for processen)

Karp & Held's diskrete beslutningsproces kan karakteriseres på følgende måde.

Trinbegreb: Der er ikke noget overordnet fælles trinbegreb for hele processen, kun et afledt trinbegreb hørenden til de enkelte beslutningskæder/politikker.

Tilstandsbegreb: Processen indbefatter intet tilstandsbegreb, dvs. tilstandsrummet er ikke defineret for en sådan proces.

Beslutningsbegreb: Dette er defineret i form af et endeligt alfabet og endelige ord dannet af dette. En elementarbeslutning er symboliseret ved et bogstav i alfabetet, der er endeligt mange mulige elementarbeslutninger. En politik er at opfatte som en kæde af elementarbeslutninger, dvs. ord. Derimod behøver politikrummet $P \subseteq D^*$ ikke at være endeligt, da D^* ikke er en endelig mængde. Der forudsættes ingen topologiske, algebraiske eller ordningsstrukturer på hverken beslutnings- og politikrummet.

Objektfunktion: Defineret som en reel funktion på politikrummet og dataspecifikationsmængden. Ellers er der ingen struktur på f.

Den anden procestype Karp & Held definerer er den sekventielle beslutningsproces. For at definere dette er det nødvendigt først at definere begrebet en endelig automat.

Endelig automat
Der er givet et endeligt alfabet D med de egenskaber, som er beskrevet ovenfor. Ud over dette skal der være defineret et tilstandsrum S og en transformation T. Et tilstandsrum S er en endelig mængde. I dette rum skal dels udpeges et specielt element s_0 , der fortolkes som processens starttilstand og en delmængde $F \subset S$, som kaldes mængden af sluttilstande. Transformationen T defineres, som en funktion på $S \times D$ med værdier i S. Transformationen er defineret på elementarbeslutninger, men kan udvides til at gælde for beslutningskæder på følgende måde:

$T(s,e)=s$ for alle $s \in S, e \in D^*$

$T(s,xd)=T(T(s,x),d)$ for alle $d \in D, x \in D^*, s \in S$.

$T(s,x)$ skal fortolkes, som den tilstand der opnås, når vi befinder os i S og gør beslutningskæden svarende til $x \in D^*$. Nu er alle ingredienserne til at definere en endelig automat tilstede. En sådan består af kvintuplen $\alpha=(D,S,s_0,F,T)$ med de ovenfor angivne betydniger. Tilslut skal de beslutningskæder, der er akcepterede af α, defineres. De udgøres af de kæder, der fører processen fra begyndelsestilstanden s_0 ind i en sluttilstand tilhørende F. Sættes $rp(x)=T(s_0,x)$ er $\{x \mid rp(x) \in F\}$ mængden af akcepterede kæder.

Med begrebet endelig automat er det nu muligt at definere en sekventiel beslutningsproces. Denne er en udbygning af den diskrete beslutningsmodel, idet der stilles flere betingelser til dens matematiske struktur.

Definition af sekventiel beslutningsproces.
En sekventiel beslutningsproces Π er en diskret beslutningsproces på en endelig automat, med en objektfunktion, der har en bestemt struktur. Dette kan uddybes ved: Der er givet

(i) en endelig automat $\mathfrak{A}=(D,S,s_0,F,T)$,

(ii) en mængde U, defineret som under den diskrete beslutningsproces.

(iii) en funktion $k:U \rightarrow \grave{R}$, k(u) giver startomkostningen for en given dataspecifikation u,

(iv) en funktion $h:\grave{R} \times S \times D \times U \rightarrow \grave{R}$, $h(\xi,s,d,u)$. h skal fortolkes som afkast/omkostningen ved i tilstand s at gøre beslutning d, når det har kostet ξ at nå til s, givet dataspecifikationen u. Der gælder visse forhold for funktionen h. For det første virker h på elementarbeslutninger, men kan udvides til også at gælde beslutningskæder/politikker. Det fører frem til at definere en funktion $g:D^{*} \times U \rightarrow \grave{R}$. Funktionen g udtrykker en akkumulation af afkastet/omkostningen ved udførelsen af den sekventielle beslutningsproces, givet en startomkostning k(u), starttilstand s_0 og en dataspecifikation u, $g(x,u)=h(k(u),s_0,x,u)$. Funktionen g skal betragtes som processens objektfunktion.

På visse punkter er der altså lagt mere struktur i formaliseringen af en sekventiel beslutningsproces i fht. den diskrete beslutningsproces. Vi kan karakterisere denne forfining af den matematiske struktur på følgende måde.

Tilstandsbegrebet: Der er defineret et tilstandsrum S. Om dette forlanges at det skal være endeligt; blandt dets elementer skal udpeges en starttilstand s for processen, samt en delmængde F af sluttilstande. Der er således ikke lagt nogen algebraisk,topologisk eller ordningsstruktur på rummet S.

Transformation: I kraft af definitionen af den sekventielle beslutningsproces som en endelig automat, er en transformation defineret.

Objektfunktion: Der er lagt mere struktur på objektfunktionen g, som den er defineret gennem h og k end på objektfunktionen f for den diskrete beslutningsproces.Der er dog stadig ingen struktur på mængderne S,D og U, som h bl.a. er defineret på.

Der er ikke noget nyt trinbegreb i fht. den diskrete beslutningsproces. Karp & Held foretager en yderligere specialisering, idet de definerer en monoton sekventiel beslutningsproces. Denne er næsten identisk med den sekventielle beslutningsproces, den eneste forskel er en yderligere betingelse på funktionen h. Kravet til h kaldes monotonicitetsbetingelsen, og er defineret ved;

$$\forall (s,d,u) \in \mathcal{S} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U} : \xi_1 \le \xi_2 \Rightarrow h(\xi_1, s, d, u) \le h(\xi_2, s, d, u).$$

Fortolkningen er, at vi antager at en tilstand s er givet og beslutningen d tages. Nu forestiller vi os, at der findes to veje til tilstanden s - den ene har kostet ξ_1 og den anden ξ_2, og ξ_1 er mindre end eller lig med ξ_2. Tages nu beslutning d, bliver vejen med delomkostningen ξ_1 ikke dyrere end vejen med delomkostningen ξ_2.

Vi har set, at Karp & Held med et meget generelt defineret begreb om en beslutningsproces indfører finere og finere strukturer. Dette gøres bl.a. for at kunne bevise en matematisk egenskab ved den monotone sekventielle beslutningsproces, som de er på jagt efter. Deres mål er en sammenknytning mellem en diskret beslutningsproces og en monoton sekventiel beslutningsproces, idet de viser, at under visse betingelser kan en diskret beslutningsproces oversættes til en monoton sekventiel beslutningsproces. Dette har dog ingen betydning i sammenhæng med vores undersøgelse af deres formalisering.

Vi har gjort forholdsvist meget ud af beskrivelsen af Karp & Held's begreber i forbindelse med beslutningsprocesser. Dette bl.a. fordi vi i andre artikler har set en begrebsdannelse, som overtager deres eller har mange paralleller til denne.

Morin (1982) overtager Karp & Held's begrebsapparat, dog med visse omdøbninger af terminologien. Han anvender apparatet til en diskussion af optimalitets princippet i dynamisk programmering. Diskussionen vender vi tilbage til i afsnit 4.3.

Ibaraki (1973) har også anvendt Karp & Held's begrebsapparat. Han undersøger mere specialiserede beslutningsprocesser, idet objektfunktionerne er defineret på heltallige værdier og skal opfylde visse rekursive betingelser.

<u>Elmaghraby's formalisering</u>

Vi har i det ovenstående beskrevet formaliseringer af beslutningsprocesser defineret af Karp & Held. Formaliseringens startpunkt var en endelig mængde af elementar beslutninger, symboliseret ved et endeligt alfabet. Elmaghraby (1970) tager det samme udgangspunkt. Han overtager dog ikke Karp & Held's begrebsdannelse.

Elmaghraby's sigte med formalisering af beslutningsprocesser i dynamisk programmering er også rettet mod, hvad han kalder diskrete beslutningsprocesser og sekventielle diskrete beslutningsprocesser. Egentlig er første skridt i hans opsætning endnu mere generelt end Karp & Held's for diskrete beslutningsprocesser. En kort skitse af hans tankegang skal gives.

Der er defineret et endeligt alfabet D, svarende til en endelig mængde af elementarbeslutninger. Disse kan sammensættes til ord, dvs. beslutningssekvenser eller politikker.

Et væsentligt punkt, hvor Elmaghraby adskiller sig fra Karp & Held er, at han ikke indfører en objektfunktion, men kun en objekt<u>relation</u> α . På dette punkt kan hans formalisering altså betragtes, som mere generel end Karp & Held's formalisering. Relationen α er givet som en delmængde af $P \times V$. Her betegner $P \subseteq D^*$ en mængde af politikker (af Elmaghraby kaldet inputmængde), som er lukket over for sammenklistringer. V betegner en output mængde (V antages at være et ordnet fuldstændigt metrisk rum), der skal fortolkes som objektrelationens værdirum. Elmaghraby definerer en diskret beslutningsproces som en relation mellem en input mængde og en output mængde. At sammenhængen mellem en politik og output udtrykkes ved en relation indebærer dels, at der ikke nødvendigvis hører et output til enhver politik og dels, at der til en politik kan høre flere output. Elmaghraby's grundlæggende model er hermed skitseret.

Elmaghraby udbygger denne struktur. Han har endnu ikke indført et tilstandsbegreb. Tværtimod er det hovedsagen i artiklen at udvinde et sådant af forholdet mellem politik og output i form af en relation. Tilstandsbegrebet indføres herefter på en sådan måde, at der til hver beslutning d og en given tilstand s udpeges et bestemt output v. Objektrelationen omdannes ved indførelse af tilstandsbegrebet til en objektfunktion af (tilstand, beslutning) med værdier i V. Nærmere bestemt defineres et tilstandsrum, som en mængde S, for hvilken der kan defineres en funktion $G: S \times P \rightarrow V$, så

$$(x,v) \in \alpha \iff \exists s \in S: v = G(x,s).$$

Til tilstandsrummet, som Elmaghraby indfører, stilles nogle yderligere krav, som vi ikke skal komme nærmere ind på. Ingen af disse krav er dog arts- eller strukturkrav til tilstandsrummet. Selvom hans formelle begreb om en diskret beslutningsproces således er lidt anderledes end de tidligere omtalte, bringer det ham dog ikke væsentligt i andre teoretiske retninger ved undersøgelser af bestemte procestyper i dynamisk programmering.

__Opsamlende mellemspil I__
På dette tidspunkt kan en opsummering af de formaliseringsforsøg, der hviler på begrebet om alfabet, automat m.m. være nyttig. Typen af beslutningsprocesser kaldes diskrete deterministiske processer. Den grundlæggende struktur er en diskret beslutningsproces, som udbygges til en sekventiel beslutningsproces. Denne kan med forskellige betingelser udbygges videre.

Beslutningsbegrebet er det centrale begreb i formalisering. Der er givet en endelig mængde elementarbeslutninger, der kan stykkes sammen til endelige beslutningsrækker/politikker. Mens beslutningsrummet er endeligt, kan politikrummmet principielt være endeligt eller uendeligt. Der er dog ikke på disse rum lagt nogen yderligere struktur.

Formaliseringen indeholder intet overordnet trinbegreb. Tilstandsbegrebet indgår ikke i de mest generelle formuleringer, men indføres for sekventielle processer. Der ligger ingen algebraiske, topologiske eller ordningsstrukturer på dem. Om tilstandsrummet er endeligt eller uendeligt afhænger af formaliseringen. Objektfunktionen/relationen kan have forskellige grader af struktur. For diskrete beslutningsprocesser er der ikke defineret en transformation, mens en sådan er defineret for sekventielle beslutningsproces og dets afarter.

__Sniedovich' formalisering__
Vi skal nu se på formalisering foretaget af Sniedovich. Han har præsenteret to forskellige formaliseringer.

I 1986 er Sniedovich (1986) fremkommet med en formalisering af en beslutningsproces i dynamisk programmering. Den er den enkleste af de to formaliseringer, han præsenterer. Han er i artiklen ude i et forsøg på at afklare debatten omkring Bellmans optimalitetsprincip (se afsnit 4.3). Sniedovich fremhæver, at Bellman fremsatte sit optimalitetsprincip i forbindelse med en særlig klasse af dynamisk programmeringsproblemer. Denne klasse karakteriserer Sniedovich (1986) dels ved at være endelig m.h.t. trinvariablen og dels, ved at objektfunktionen kun afhænger af sluttilstanden for processen, samlet kaldet deterministisk endelig-horisont model. Sniedovich præsenterer en formalisering af denne type problemer, der kan samles på følgende måde:

Trinbegreb: Veldefineret trinbegreb, symboliseret ved et naturligt tal. Der er et endeligt antal trin , det sidste trin symboliseres med N.

Tilstandsbegreb: Der er givet et tilstandsrum S, som ikke er nærmere præciseret. Dvs., det er et helt generelt rum.

Beslutningsbegreb: Der er defineret en skare mængder af tilladelige beslutninger, som afhænger af såvel trinnet n og tilstanden s. Beslutningsmængden på trin n og i tilstand s er symboliseret ved D(n,s). Ingen yderligere krav til beslutningsmængerne er anført.

Transformation: Der er givet transformation, for hvert trin n, defineret på følgende måde;

$$T_n : \{(s,d) \mid s \in S, \quad d \in D(n,s)\} \rightarrow S, \text{ hvor man sætter } T_n(s_n, d_n) = s_{n+1}.$$

Dvs., dynamikken i processen er således, at hvis systemet befinder sig i en tilstand s_n på trin n og en beslutning d_n træffes, så fremkommer en ny tilstand s_{n+1} på trin n+1.

Objektfunktion: Der er defineret en objektfunktion g, som kun afhænger af sluttilstanden s_{n+1}. Dvs. $g: S \rightarrow \bar{R}$.

Sniedovich viser, hvordan dynamisk programmeringsproblemer af en tilsyneladende anden art dvs., hvor objektfunktionen f.eks. afhænger af de enkelte trin samt tilstandene og beslutninger hørende til disse, kan omdannes til et dynamisk programmeringsproblem af den her beskrevne type.

Vi kan altså se at Sniedovich' (1986) formalisering indeholder et overordnet trinbegreb, mens dette ikke er tilfældet hos Karp & Held. Endvidere afhænger beslutningen, der træffes på et bestemt trin, af trinnet og tilstanden. Hos Karp & Held forholder det sig faktisk lige omvendt. Her er beslutningen primær - "trinnet" er afledt af positionen i beslutningskæden/politikken og beslutningen afhænger ikke af tilstanden. Karp & Held's eneste krav til tilstandsrummet er, at det er endeligt. Overfor dette stiller Sniedovich (1986) ingen krav til tilstandsrummet. På dette niveau er Sniedovich (1986) nærmest på linie med Mitten (1964).

Den anden formalisme Sniedovich præsenterer er fra 1978, Sniedovich (1978). Denne formalisering har en del lighedspunkter med de formaliseringer, hvis udgangspunkt var i et endeligt alfabet. Den adskiller sig dog på væsentlige punkter. Han benævner selv den procestype, han indlemmer i en matematisk begrebsramme, som en stokastisk sekventiel beslutningsproces (stochastic sequential decision process). Selvom vi hovedsaglig er interesseret i deterministiske processer, har vi medtaget denne formalisering. Formaliseringen kan opfattes som en deterministisk procestype. Karakteriseringen af formaliseringen kan foretages på følgende måde.

Trinbegreb: Modellen indeholder et fundamentalt trinbegreb. Det er givet uafhængigt af de andre begreber, der karakteriserer processen. Hvert trin n er symboliseret ved et naturligt tal, $n \in \mathbb{N}$, dvs. processen er diskret mht. trinvariablen. Trinmængden er hele $\mathbb{N}$.

Tilstandsbegreb: Der er defineret et tilstandsrum S. Om dette er kun forlangt, at det skal være en ikke-tom tællelig mængde. Dvs. der findes tællelig mange tilstande s, som processen kan befinde sig i. Ellers er der ikke lagt andre krav på S.

Beslutningbegreb: Der er defineret en ikke-tom mængde af elementarbeslutninger D, beslutningsrummet. Processen vil udvikles fra en starttilstand gennem en sekvens af skiftende tilstande og beslutninger. En sådan udvikling kan beskrives ved $h_n=(s_1,d_1,s_2,\ldots,d_{n-1},s_n)$, hvilket kaldes en historie. Til det n'te trin er tilknyttet en mængde af sådanne historier, H_n, dvs. $H_1 \subseteq S$ og $H_n \subseteq S \times D \times \ldots \times S$ (2n-1 faktorer). Endvidere er defineret en mængde H af historier, der ikke har noget sluttrin, dvs. $h=(s_1,d_1,s_2,\ldots) \in H$, hvor $H \subseteq S \times D \times S \times D \times \ldots$. På trin n er defineret en afbildning D_n, som udpeger mulige elementarbeslutninger, der kan træffes ud fra historien h_n, $D_n: H_n \rightarrow D$. En beslutning d_n vil kun være mulig, hvis der til d_n er knyttet en positiv sandsynlighed for at føre processen fra s_n over i s_{n+1}. Der vil således blive udpeget en mængde af tilladelige elementarbeslutninger $D_n(h_n)$, givet processen står i tilstanden s_n (h_n symboliserer, at tilstanden s_n er nået ved historien h_n).

Transformation: Transformationen har en stokastisk natur. Den virker således på S. Der er på hvert trin n defineret en transformation ud fra processens forudgående historie h_n og den beslutning d_n, der foretages på trin n.

Objektfunktion: Der er defineret en funktion r_n på hvert trin. Disse har en lidt speciel karakter, idet r_n opregner "afkastet" fra n'te trin og fremad i processen. Således virker den på uendelige historier. Funktionsværdien er et reelt tal;

$$r_n : H \rightarrow \mathbb{R} , \quad H = S \times D \times S \times D \times \ldots$$

Opsamlende mellemspil II

Denne karakterisering skulle indfange de væsentligste sider af Sniedovich (1978) stokastiske sekventielle beslutningsproces. En kort sammenligning med Karp & Held og andres sekventielle beslutningsprocesser viser specielt een væsentlig forskel. Til forskel fra dem indeholder Sniedovich (1978) et overordnet trinbegreb, der adskiller de enkelte trin. Væsentlige ligheder er, at formaliseringerne har diskrete tilstandsrum - gælder dog ikke Elmaghraby -, og den manglende struktur i forbindelse med både tilstands- og beslutningsrum.

Vi har nu behandlet det ene hovedspor i de formaliseringsforsøg, vi har set. Vi skal nu se på den anden retning, der opererer med en topologisk struktur på tilstandsrummet - vi vil tale om, at det kan være kontinuert. Vi vil her starte med Bellman, hvis formaliseringsforsøg fremsættes i hans bog fra 1957, fortsætte med tre artikler af Iwamoto (1977a,1979,1981) og slutte af med Cambini (1974).

Bellman's formalisering

Bellman gør i sine arbejder ikke meget ud af en egentlig formalisering af generelle beslutningsprocestyper. Hans holdning er, at sådanne generaliseringer vil ske på bekostning af de finere strukturer, og derfor er af begrænset anvendelighed. Dog giver han udtryk for, at delklasser af procestyper kan formaliseres. Bellman (1957) giver således en formalisering af, hvad han kalder en diskret deterministisk proces. Denne vil blive omtalt her. Hans formalisering er ikke lige så fint systematiseret og gennemført, som de af os tidligere refererede formaliseringer har været . Men vi kan samle det på følgende måde.

Trinbegreb: Et afklaret, overordnet trinbegreb. Hvert trin er symboliseret med et naturligt tal. Der kan være endeligt eller uendelige mange trin.

Tilstandsbegreb: Der er defineret et tilstandsrum S, som er en delmængde af $\mathbb{R}^M$. Den enkelte tilstand er givet, som $s=(s_1,s_2,\ldots,s_M)$.

Beslutningsbegreb: Der er defineret en beslutningsmængde D, som kan være endelig, tællelig, overtællelig eller en kombination af disse.

Transformation: Der er givet en transformation for hvert trin. Denne er defineret på tilstandsrummet og beslutningsrummet, og fører processen til en tilstand på næste trin; $T_n : S \times D \longrightarrow S$.

Objektfunktion: Der specifiseres ingen specielle krav til objektfunktionen i hans generelle formalisering, men i mange af hans eksempler arbejdes med objektfunktioner, der fremkommer ved addition eller multiplikation af funktioner knyttet til bestemte trin eller tilstande.

Bellman's (1957) formalisering er således ikke specielt præcis, ej heller særlig generel. Dog indfanger den de situationer, hvor tilstandsrummet tillægges en topologisk struktur, samtidig med han beholder muligheden for at medtage beslutningsprocesser, hvor beslutningsrummet er tælleligt eller endeligt. Bellman's pointe ligger da også i en bestræbelse på både at indfange modelsituationer, hvor tilstanden beskrives med et reelt tal, og hvor beslutningsvariablen skal være et helt tal, f.eks. i visse allokeringsprocesser med beslutningsvariable, der udtrykker et stykantal. Bellman fhv. løse formalisering kan således indfange andre konkrete modelanvendelser end flere af de andre formaliseringer. Til gengæld vil det ikke bringe een langt, hvis man går efter at vise generelle matematiske sætninger. En præcisering vil være nødvendig.

Iwamoto's formalisering

Iwamoto fremsætter tre formaliseringer i sine forskningsarbejder med bl.a. etablering af et "invers theorem" i dynamisk programmering (se afsnit 4.4) - svarende til dualitetsproblematikken inden for lineær programmering. De tre formaliseringer fremstilles i Iwamoto (1977a), Iwamoto (1979) og Iwamoto (1981). Først vil formaliseringen baseret på 1977-versionen blive præsenteret forholdsvist grundigt, dernæst vil de to næste relateres til den første.

Formaliseringen i Iwamoto (1977a) samles i følgende. Han kalder selv den type dynamisk programmering, han undersøger, for endelig-trin dynamisk programmering med en deterministisk tilstandstransformation.

Trinbegreb: Der er tale om et veldefineret trinbegreb. Hvert trin symboliseres med et naturligt tal, $n=1,2,...,N$ (N symboliserer her det sidste trin).

Tilstandsbegreb: Der er givet et tilstandsrum S. Dette har en topologisk struktur (Borel delmængde af et Polsk rum, dvs. fuldstændigt, separabelt metrisk rum).

<u>Beslutningsbegreb</u>: Der er givet et beslutningsrum D, som opfylder samme topologiske krav som tilstandsrummet. D udtrykker rummet af elementarbeslutninger. Endvidere er der defineret et beslutningsrum $D_n \subseteq D$ for hvert trin n og enhver tilstand s. Dette skal udtrykke de mulige beslutninger, når systemet er i tilstand s og på trin n.

<u>Transformation</u>: En transformation for hvert trin n i processen er givet :

$$T_n : S \times D \rightarrow S.$$

Der er lagt et topologisk krav på T_n (Borel målelig).

<u>Objektfunktion</u>: Der er givet en objektfunktion tilhørende hvert trin , $g_n : S \times D \times S \times \grave{R} \rightarrow \grave{R}$, $(g_n\ (s_n, d_n,\ s_{n+1}, \}\ ))$, samt en funktion $k: S \rightarrow \grave{R}$, som udtrykker afkastet fra sidste trin. Funktionen g har en speciel form; hvis systemet udvikles gennem en historie $(s_m, d_m, s_{m+1}, \ \ldots \ , d_{n-1}, s_n)$ vil afkastet fra denne historie være udtrykt ved ;

$$g_m(s_m, d_m; g_{m+1}(s_{m+1}, d_{m+1}; g_{m+2}(s_{m+2}, \cdots ; g_{n-1}(s_{n-1}, d_{n-1}, s_n; k(s_n)) \cdots))).$$

I Iwamoto (1979) foretages visse forandringer i formaliseringen. Problemstillingen er stadig den samme procestype overordnet betragtet. Han definerer nu selvstændige tilstandsrum S på hvert trin af processen. Disse rum forlanges nu at være intervaller på den reelle talakse. Der er stadig knyttet et beslutningsrum til hvert trin. Disse skal være en delmængde af $\grave{R}^{p_n}$, p_n er dimensionen på det n'te trin af processen. Endvidere forlanger Iwamoto ikke længere, at D_n afhænger af den tilstand processen befinder sig i på det n'te trin. Han indfører også et afkastrum R_n for det n'te trin af processen, $R_n \subseteq \grave{R}$, samt en afkastfunktion g_n . Han kræver, at afkastfunktionen skal være kontinuert. Denne funktion g_n tænkes nu kun defineret på $D_n \times R_{n+1}$ med værdier R_n , dvs. er en funktion af beslutningen på trin n og afkastet fra trin n+1.

Generelt kan man sige , at han komplicerer sit tilstandsrum/begreb og simplificerer strukturerne på funktionerne.

Iwamoto indfører i 1981 mindre korrektioner. Han vender tilbage til at lade beslutningsrummet på det n'te trin afhænge af tilstanden på trinnet. Endvidere forstærker han sit krav til funktionen k. Den skal være strengt voksende og surjektiv.

Generelt kan man om Iwamoto's formaliseringer sige, at de bevæger sig indenfor samme begrebsramme. Det væsentlige er her - i forhold til Karp & Held og Sniedovich (1978) - , at han opererer med kontinuerte tilstandsrum.

Cambini's formalisering

De formaliseringer, vi har omtalt indtil nu, har et væsentligt fællestræk; der præsenteres en formalisering af en bestemt type beslutningsproces, essentielt uafhængigt af de senere studerede optimeringsproblemer. Beslutningsprocessen formaliseres, og udfra dette er det muligt at formulere et dynamisk programmeringsproblem. Med Cambini (1974) er det næsten omvendt. Hans formalisering er tæt knyttet til hans definition af "det dynamiske programmeringsproblem". Derfor vil den følgende fremstilling af Cambini's formalisering være anderledes end de tidligere præsenterede. Men inden vi når til en præsentation af "det dynamiske programmeringsproblem" skal først en række begreber, Cambini anvender, præsenteres.

Et topologisk rum X betragtes, der kan opfattes som et talrum. Der defineres en ækvivalensrelation R på X, således at der dannes en samling af ækvivalensklasser gennem den kanoniske afbildning π . Afbildningen $\pi : X \rightarrow X/R$ afbilder et element $x \in X$ over på ækvivalensklassen $[\omega]$. Et topologisk rum Ω , som er homeomorft med X/R, kaldes et parameterrum på X.

Cambini fremhæver, at en basal ligning i dynamisk programmering er ;

$$(1) \quad \max_{x \in X} f(x) = \max_{\omega \in \Omega} \max_{x \in [\omega]} f(x) \quad ,$$

hvor $f: X \rightarrow \bar{R}$. Ligningen (1) er opfyldt mht. maximering, hvis det topologiske rum X og funktionen f opfylder visse betingelser af topologisk art.

Der defineres en såkaldt N-trins komposition af X på følgende måde;

Sættet $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ er en N-trins komposition af X, hvis:

1) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{N-1} \subset X_N = X$, dvs. X deles i N-1 ægte delmængder, hvor i<j betyder, at $X_i \cap X_j = X_i$,

2) der til hver X_j (j=1,...,N) hører et parameterrum Ω_j (j=1,..,N). Dvs. ækvivalensrelationen R nedarves til alle delmængderne $X_1, \ldots, X_{N-1}$,

3) der eksisterer for alle $\omega_{j+1} \in \Omega_{j+1}$ (j=1,..,N-1) en homeomorfi $\varphi_{\omega_{j+1}}$ (dvs. bijektiv, og både φ og φ^{-1} er kontinuerte) fra X_j til hver af ækvivalensklasserne $[\omega_{j+1}]$ i den større mængde X_{j+1}.

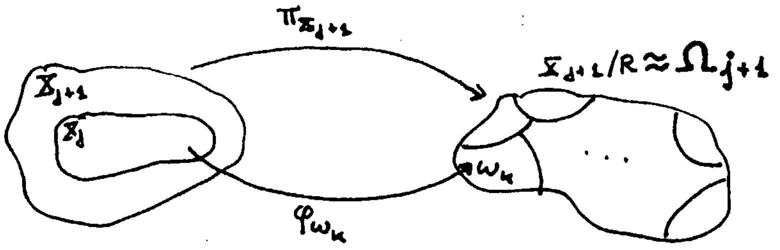

Fig.4.2.

Således defineres altså en N-trins komposition af X. Det er nu muligt at definere et dynamisk programmerings problem. Lad der være givet en reel funktion f på X ($f: X \rightarrow \bar{R}$), og problemet P at bestemme maximum af f på mængden X (under antagelse af, at et sådant eksisterer):

$$P: \max_{x \in X} f(x).$$

Et sådant problem P kan betragtes, som et N-trins dynamisk problem, hvis følgende to krav opfyldes:

1) Der findes N delmængder, X_1, ... ,X_N, der danner en N-trins komposition af X (defineret som ovenfor).

2) Det er for hvert j=1,..,N muligt at definere en funktion $f_j: X \rightarrow \bar{R}$ således, at

   i) $\max_{x \in X_j} f_j(x)$ eksisterer, og

   ii) $\max_{x \in [\omega_j]} f_j(x) = f^*(\omega_j)$ eksisterer for alle $\omega_j \in \Omega_j$

Vi har i forholdsvis formelle rammer skitseret Cambini's formalisering af dynamisk programmering, igennem hans definition af et N-trins dynamisk programmeringsproblem. Det kan herved også ses, at hans angrebsmåde er temmelig anderledes i fht. de andre formaliseringer af dynamisk programmering, vi har set.

Trinbegreb: Der forekommer ikke et trinbegreb uafhængigt af det dynamiske programmeringsproblem. Men kun dynamiske programmeringsproblemer med et endeligt antal trin betragtes.

Tilstandsbegreb: Der er ikke på forhånd givet et tilstandsrum, men vha. ækvivalensrelationen R på X (som nedarves på X_j for alle j=1,..,N-1) fremskaffes et tilstandsrum. Dette kalder Cambini også for parameterrummet. På hvert trin er således defineret et tilstandsrum, som har samme topologiske egenskaber som beslutningsrummene.

Beslutningsbegreb: Mængden X kan opfattes som et beslutningsrum. Vi har tidligere nævnt krav som denne mængde skal opfylde. Endvidere kan mængderne X_j (j=1,..,N) opfattes som beslutningsrum tilknyttet hvert trin j.

Transformation: Der er ikke eksplicit givet en transfomation, men muligvis kan den på de enkelte trin definerede homeomorfe afbildning φ opfattes som en sådan.

Objektfunktion: Objektfunktionen f skal kunne opfylde visse krav af topologisk art, samt kunne oosplittes i N funktioner f_j .

Vi har således set, at Cambini's tilgang er anderledes end de tidligere formaliseringer. Den er også på et forholdsvist højt struktureret niveau, idet der forlanges forholdsvise kraftige krav af mængden X og funktionen f af topologisk art.

Kort afslutning
Vi har gennem dette afsnit fremlagt en række forskellige formaliseringer af beslutningsprocesser i dynamisk programmering. Undervejs har vi set, at en række forskelle mellem disse kunne identificeres, selvom artikelforfatterne benyttetde forholdsvis ens navne for beslutningsprocesserne. Vi har også fremlagt mindre sammenligninger mellem de enkelte formaliseringer afsnittet igennem. Men diskussionen omkring formaliseringerne i forbindelse med vores problemformulering (afsnit 3.7) vil blive gemt til senere (afsnit 5.1).

4.3. Optimalitetsprincippet.
Hensigten med dette afsnit er at belyse den status, optimalitetsprincippet har fået tildelt i tilknytning til dynamisk programmering. Vi har valgt at benandle denne sag, fordi optimalitetsprincippet lige siden dets oprindelse har haft en central rolle i diskussionerne om fundamentet for dynamisk programmering.

I perioden fra Bellman's verbalt formulerede optimalitetsprincip (OP) til i dag, er der publiceret et antal skrifter, hvori OP bliver omformuleret (verbalt) eller formuleret formelt. Disse evt. forskellige udlægninger og fortolkninger er bl.a. blevet benyttet til retfærdiggørelse eller udledelse af den rekursive funktionalligning (RL). Følgelig foreligger der en række matematiske præciseringer af princippet.

Der har været (og der foregår stadig) diskussioner, som i visse tilfælde har givet anledning til tvivl om princippets gyldighedsområde og rækkevidde. Dette afsnit indeholder en undersøgelse af, hvorledes forskellige bøger og artikler fremlægger optimalitetsprincippet.

Bellman opstiller i 1954 for første gang optimalitetsprincippet. Det forløber således:

> "(...) the basic functional equations (...), describing the quantitative aspects of the theory are uniformly obtained from the following intuitive
>
> PRINCIPLE OF OPTIMALITY. An optimal policy has the property that whatever the initial state and the initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decisions."
> (Bellman 1954a s. 504).

I 1957 udgives bogen "Dynamic Programming" skrevet af Bellman. I indledningen står:

> "(...) we explicitly state the principle of optimality whose <u>mathematical transliteration</u> in the case of any specific process yields the functional equation governing the process."
> (Bellman 1957 s. xiii)(vores understregninger.)

I bogens kapitel tre giver Bellman optimalitetsprincippet følgende status:

> "In each process (behandlet i bogens første to kapitler), the functional equation governing the process was obtained by an application of the following intuitive:
>
> PRINCIPLE OF OPTIMALITY. An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."
> (Bellman 1957 s. 83).

Bellman's følgebemærkning er, at en matematisk oversættelse af princippet giver de funktionalligninger, der overhovedet behandles i bogen. Videre påstås:

> "A proof by contradiction is immediate."
> (Bellman 1957 s. 83).

En påstand, hvis validitet vi senere vil diskutere.

Tankegangen i OP illustrerer Bellman ved at konstruere en rekursiv funktionalligning, der modellerer en allokeringsproces. Ligningen er:

$$F_n(x) = \max_{0 \le x_n \le x} \{g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\} \text{ , } n = 1, 2, \ldots$$

Bellman fremhæver, at optimalitetsprincippet er et heuristisk princip, en teknik (og ikke en matematisk sætning), som for konkrete klasser af problemer kan resultere i en rekursiv funktionalligning. Udgangspunktet for næsten alle Bellman's publikationer indenfor dynamisk programmering er da også konkrete funktionalligninger. Man fornemmer derved, hvorledes Bellman opfatter dynamisk programmering som en angrebsmåde snarere end som en (selvstændig) matematisk teori.

På trods af den status Bellman tildeler optimalitetsprincippet, har der gennem årene været uenighed om tolkningen af princippet samt dets forhold til den rekursive funktionalligning. Man kan dele diskussionen om disse forhold i to.

Visse forfattere giver en verbal udlægning af OP, f.eks. ved henvisning til konkrete eksempler. Et emne, der er typisk i sammenhængen, er optimalitetsprincippets forhold til den rekursive funktionalligning. Repræsentanter for verbale formuleringer af OP er (Nemhauser 1966), (Denardo 1982) og (Morin 1982). Andre artikelforfattere giver matematificerede udgaver af princippet gennem formalisering. Derved er man øjensynlig ved at bevæge sig væk fra den heuristiske tankegang i dynamisk programmering, som Bellman advokerede for. Repræsentanter for matematisk formaliserede udgaver af OP er (Mitten 1964), (Karp & Held 1967), (White 1969), (Sniedovich 1978), (Sniedovich 1986), (Morin 1982) og (Hinderer 1970).

Vi vil i det følgende først gribe fat i de formelle udgaver. Den anlagte synsvinkel vil hovedsagelig være forholdet mellem OP og RL.

Mitten's formulering.
Os bekendt er den første, der gør bemærkninger i den retning, (Mitten 1964). Vi har fremlagt Mitten's formalisering af DP i afsnit 4.2. Hans hensigt er ikke at bringe OP i miskredit eller blot at diskutere dets rolle i DP, men han vil udelukkende give tilstrækkelige betingelser på de returfunktioner, som er opstået gennem hans formalisering af DP. Følgende lemma får intetsteds betegnelsen optimalitetsprincip, men det fungerer (tilsyneladende) som et sådant:

"Lemma. Lad X = (x) være en vilkårlig mængde, og lad $Y_i(x) = (y_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, være en endelig følge af vilkårlige mængder, hvis definitioner kan afhænge af $x \in X$. Lad $g_i(x,y_i)$, $i = 1,\ldots,n$, være en følge af reelle funktioner, for hvilke $g^*(x) = \max\{g_i(x,y_i) \mid y_i \in Y_i(x)\}$ eksisterer for $i = 1,\ldots,n$ og for alle $x \in X$. Lad $f(x)$ være en vilkårlig funktion og lad $G(x,y_1,\ldots,y_n) = F(f(x),g_1(x,y_1),\ldots,g_n(x,y_n))$ være en reel funktion, hvorom $G^* =$

$$\max\{G(x,y_1,\ldots,y_n) \mid (x,y_1,\ldots,y_n) \in \bigcup_{x \in X} x \times Y_1(x) \times \cdots \times Y_n(x)\}$$

eksisterer og $F^*(x) = F(f(x),g_1^*(x),\ldots,g_n^*(x))$ eksisterer for alle $x \in X$. Hvis $F^*(x) \geq G(x,y_1,\ldots,y_n)$ for ethvert

$$(x,y_1,\ldots,y_n) \in \bigcup_{x \in X} x \times Y_1(x) \times \cdots \times Y_n(x),$$

så er $G^* = \max\{F^*(x) \mid x \in X\} \equiv F^*$."
(Mitten 1964) (Vores oversættelse).

Der gives i artiklen bevis for lemmaet. Iøvrigt et indirekte bevis - i overensstemmelse med Bellman's førnævnte påstand: "A proof by contradiction is immediate".

Vi vil ikke give en verbal fortolkning af lemmaet, fordi han - som sagt - ikke giver det navnet DP endsige diskuterer dets generelle gyldighedsområde. Men, som det ses, er funktionalligningsinterpretationen af DP eksplicit indlejret i "princippets" formalisering.

<u>Karp & Held's formulering.</u>
Hos (Karp & Held 1967) optræder begrebet optimalitetsprincip. I artiklen forekommer et lemma ("lemma 1"), der har karakter af at være et optimalitetsprincip, men som dog udelukkende er beregnet for sekventielle beslutningsprocesser (se afsnit 4.2.). De formulerer lemmaet på baggrund af et monotonicitetskriterium: Den sekventielle beslutningsproces Π siges at være monoton, såfremt det for alle $(s,d,u) \in S \times D \times U$ gælder, at

$$\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow h(\xi_1,s,d,u) \leq h(\xi_2,s,d,u).$$

(For de tekniske betegnelser henvises til afsnit 4.2. under Karp & Held). Lemmaet lyder:

"Lemma 1. Lad Π være en monoton sekventiel beslutningsproces, og lad P være mængden af ord accepteret af $\mathfrak{a}$. Med $u \in U$ kaldes z optimal mht. u, hvis $z \in P$ og $g(z,u) = \min_{y \in P} g(y,u)$. Lad v og w

være ord således, at rp(v) = rp(w) og g(v,u) $\leq$ g(w,u). Da vil, hvis wx er optimal mht. u. også vx være optimal mht. u."
(Karp & Held 1967 s. 698)(Vores oversættelse.)

De påstår selv, at lemma 1 er "similar to the principle of optimality".

Karp & Held giver et bevis for lemmaet. Et bevis, som ikke er indirekte! Men som dog er ligetil. Med Karp & Held's specielle formalisering for øje kan lemmaet fortolkes verbalt som:

"If there is an optimal policy which reaches an intermediate state s, then there is an optimal policy which reaches s at minimum cost."
(Karp & Held 1967 s. 698).

Deres måde at formalisere DP og OP på giver anledning til et teorem ("Theorem 1") vedr. funktionalligninger for monotone, sekventielle beslutningsprocesser. Faktisk gives bevis for, at funktionalligningerne

$$G(s_0,u) = \min\left\{g(e,u), \min_{\{(s',d)\mid\lambda(s',d)=s_0\}}\{h(G(s',u),s',d,u)\}\right\}$$

og

$$G(s,u) = \min_{\{(s',d)\mid\lambda(s',d)=s\}}\{h(G(s',u),s',d,u)\}\ , \quad s \neq s_0$$

for alle $u \in U$ er gyldige. (G er for $s \in S$ defineret således:

$$G(s,u) = \min_{\{x\mid rp(x)=s\}} g(x,u).\qquad)$$

Heller ikke Karp & Held diskuterer, hverken deres egen eller Bellman's ootimalitetsprincip. Deres hensigt er øjensynlig at få stablet bl.a. ovennævnte resultat på benene: At få sagt "noget" om sekventielle beslutningsprocesser.

<u>White's formulering.</u>
(White 1969) har i sin bog med den almene titel "Dynamic Programming" et afsnit om DP, funktionalligninger og OP under én hat. Vi har af forskellige årsager ikke i afsnit 4.2. fremhævet White's formalisering af DP. Det gør naturligvis, at en præsentation af hans formulering af optimalitetsprincippet bliver besværlig og mere omfangsrig, når vi nu skal fange hans opfattelse af OP.

Groft sagt går hans "formalisering" ud på at karakterisere ingredienserne i DP - ved brug af ord. Ingredienserne er for hans vedkommende: Tilstand, beslutning, transformation, trin og objektværdier ("measure of performance"). Betegner x'er tilstandsvariable, d'er beslutningsvariable og r og s trinvariable angives objektværdien mellem to vilkårlige trin r og s ved

$${}_sV_r\,(x_r, d_r, x_{r+1}, \dots, d_{s-1}, x_s).$$

For det videre forløb er vi nødsaget til at definere to begreber: Baglæns kontraktion og forlæns kontraktion. Vi betragter et delspor (sub-path), der starter i trin 1 og ender i trin r. Dette delspor kaldes en baglæns kontraktion af ethvert delspor, som starter i 1 og ender i trin s, hvor s ≥ r. Tilsvarende defineres et delspor, der starter i r og ender i n, som værende en forlæns kontraktion af delspor, der starter i et vilkårligt trin s med s ≤ r og ender i trin n.

Forretningsgangen i det nævnte afsnit af White er at opstille tre postulater. Det første postulat udsiger, at man kan udtrykke værdien af et spor (vi betragter nu forlæns kontraktioner) som en funktion af det første "link" (en overgang fra en tilstand til en anden, dvs. triplen (x_r, d_r, x_{r+1})) og af værdien af det kontraherede spor resulteret af fjernelsen af det det første link. Formelt er det at sige:

$$(1):\quad {}_sV_r\,(x_r, d_r, x_{r+1}, \dots, d_{s-1}, x_s) = {}_s\phi_r(x_r, d_r, x_{r+1}, {}_sV_{r+1}(x_{r+1}, d_{r+1}, \dots, x_s)).$$

Inden postulat 2 opstilles afledes et funktionalligningsudtryk, der forudsætter, at beslutninger foretages på successive trin. Lad $\pi(\cdot)$ være en fast politik (af deterministisk natur) og lad $\pi_r(\cdot)$ være kontraktionen af $\pi(\cdot)$ fra trinene r til n, begge inklusive. Så defineres værdien af at være i tilstand x_r på trin r og under brug af politikken $\pi_r(\cdot)$, at være lig med værdien af sporet fra trin r og fremefter. Dvs.

$${}_nV_r\,(x_r, \pi_r(\cdot)) = {}_nV_r\,(x_r, d_r, x_{r+1}, \dots, x_n),$$

hvor

$$x_{r+s} = T_{r+s-1}(d_{r+s-1})x_{r+s-1}$$

$$d_{r+s-1} = \pi_{r+s-1}(x_{r+s-1}).$$

($T_m(d)$ er transformationsoperatoren, som opererer på x_m, når beslutningen d tages for at opnå tilstanden x_{m+1}.) White siger så, at den generelle ligning afledt af det første postulat kan skrives:

$$ {}_nV_r(x_r, \pi_r(\cdot)) = {}_n\phi_r(x_r, \pi_r(x_r), T_r(\pi_r(x_r))x_r, {}_nV_{r+1}(T(\pi_r(x_r))x_r, \pi_{r+1}(\cdot)) $$

eller i den rent funktionelle udgave:

$$ (2){:}\ {}_nV_r(x_r, \pi_r(\cdot)) = {}_n\Theta_r(x_r, \pi_r(x_r), T_r(\cdot), {}_nV_{r+1}(\cdot, \pi_{r+1}(\cdot))). $$

Han stater:

> "Equation (2) is the general form of the <u>functional equation</u> encountered in D.P."
> (White 1969 s. 30)

White's andet postulat er i realiteten, at den generelle stokastiske funktionalligning, som vi ikke har medtaget, kan reduceres til en af formen (2). Et udsagn, der nogle gange holder, andre gange ikke.

White's tredie postulat er, at OP er gyldig. Han giver en direkte oversættelse af Bellman's optimalitetsprincip:

> "(...) an optimal policy has the property that all its contractions are optimal."
> (White 1969 s. 32)

White giver herefter advarende bemærkninger angående forståelsen af OP:

> "It (OP) does not mean that past events do not influence the future decision at any stage. It does mean that, if this is the case, the state description must cater for it, i.e. if certain events have happened prior to a specific decision epoch which have a bearing on the decision to be made, then the state description must record this."
> (White 1969 s. 32)

Han understreger, at OP ikke altid er gyldig selvom (2) holder, og han giver i et appendix et eksempel herpå.

<u>Sniedovich' formulering.</u>
Hensigten med artiklen (Sniedovich 1978) er at udvikle en sekventiel beslutningsmodel og i den sammenhæng at definere tre optimalitetsprincipper. Der gives beviser for, at hver af disse principper er gyldige for store klasser af stokastiske sekventielle beslut-

ningsproblemer. Desuden undersøges forholdet mellem principperne og funktionalligningerne.

Vi er nødt til at videreudvikle formalismen fremlagt i afsnit 4.2. Det bemærkes, at vi nu bevæger os over i stokastiske procestyper, som vi egentlig har undsagt os.

Sniedovich studerer sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{A}, P_\delta)$. For enhver følge $\omega = (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega$, $n \in \dot{N}$ og $\delta \in \Delta$ sættes

$$l_{n,\delta}(\omega) \underset{D}{=} r_n(h_\delta(\omega)),$$

som derved er en stokastisk variabel. (δ er en plan $(\delta_1, \delta_2, \ldots)$ dvs. en følge af afbildninger $\delta_n : H_n \to D$, $n \in \dot{N}$. δ er tilladt, hvis og kun hvis $\delta_n(h_n) \in D_n(h_n)$ for alle n og $h_n \in H_n$. Mængden af alle tilladte planer er betegnet Δ.)

Sniedovich gør sig to antagelser:

1) Middelværdien $E_\delta(l_{n,\delta}(\omega))$ mht. δ eksisterer for alle n og $\delta \in \Delta$. Middelværdien betegnes $R_{n,\delta}$. Den betingede middelværdi af $l_{n,\delta}(\omega)$ givet $h_m \in H_m$ betegnet $R_{n,\delta}(h_m)$ er også antaget at eksistere for alle $m, n \in \dot{N}$, $\delta \in \Delta$ og $h_m \in H_m$.

2)
   i) $R_n = \sup_{\delta \in \Delta} R_{n,\delta}$ eksisterer for alle $n \in \dot{N}$

   ii) $R_n(h_m) = \sup_{\delta \in \Delta} R_{n,\delta}(h_m)$ eksisterer for alle $m, n \in \dot{N}$, $h_m \in H_m$.

Planen $\delta \in \Delta$ siges at være <u>optimal</u> mht. det <u>oprindelige</u> problem, hvis og kun hvis

$$R_{1,\delta} = R \equiv R_1$$

(Mængden af alle optimale planer betegnes med Δ^*, og dets elementer med δ^*.)

Planen $\delta \in \Delta$ siges at være optimal for det modificerede problem (h_n, n), $n \in \dot{N}$ og $h_n \in H_n$, hvis og kun hvis

$$R_{n,\delta}(h_n) = R_n(h_n).$$

Herefter kan vi fremlægge de tre optimalitesprincipper. De er alle lanceret som definitioner.

OP 1: Det <u>stærke optimalitetsprincip</u> siges at gælde for den sekventielle beslutningsmodel W, hvis og kun hvis

$$\delta^* \in \Delta^* \Rightarrow R_{1,\delta^*}(h_n) = R_1(h_n)$$

for alle $n \in \grave{N}$, $h_n \in H_n(\delta^*)$.

OP 2: Det <u>svage optimalitetsprincip</u> siges at gælde for W, hvis og kun hvis

$$\delta^* \in \Delta^* \Rightarrow R_{n,\delta^*}(h_n) = R_n(h_n)$$

for alle $n \in \grave{N}$ og $h_n \in H_n(\delta^*)$.

OP 3: <u>DP princippet</u> (the dynamic programming principle) siges at gælde for W, hvis og kun hvis der findes et element $\delta^* \in \Delta^*$ med egenskaben

$$R_{n,\delta^*}(h_n) = R_n(h_n)$$

for alle $n \in \grave{N}$, $h_n \in H_n$.

Det første princip holder altså, hvis og kun hvis <u>enhver</u> optimal plan også er optimal mht. r_1 i alle de modificerede problemer, som planen genererer med positiv sandsynlighed. Bemærk, at det stærke princip kun hænger på den første returfunktion r_1.

Vi vil ikke diskutere principperne yderligere, da de jo stærkt bygger på stokastiske processer. Dog kan vi konstatere, at (Sniedovich 1978) undersøger princippernes gyldighedsområde. Dette sker ved at vise tre teoremer:

T 1: Det stærke optimalitetsprincip gælder for enhver regulær beslutningsmodel. (At modellen er regulær betyder, at den opfylder de førnævnte to antagelser.)

T 2: Det svage optimalitetsprincip gælder for alle regulære, strengt monotone modeller.

T 3: DP-princippet gælder for alle regulære, monotone modeller. (Monotonicitet og strengt ditto er tekniske betingelser på R - eller dermed mellem r_n og r_{n+1}.)
(Sniedovich 1978)(Vores oversættelser.)

Selv bemærker Sniedovich, at Bellman's formulering af OP svarer til det stærke princip.

I 1986 har Sniedovich atter taget optimalitetsprincippet op til diskussion. Denne gang er udgangspunktet en opfattelse af, at andre DP-udøvere har misforstået Bellman's formulering af OP. Påstandene er, at nogle ikke anser OP for at være universelt.

mens andre nægter at anvende betegnelsen princip (Sniedovich 1986).

I artiklen gives et eksempel på, at Bellman's OP faktisk ikke holder. Eksemplet er et "korteste vej" problem illustreret ved grafteoretiske remedier. Det er unødvendigt for sammenhængen her at gennemgå eksemplet. Det væsentlige er Sniedovich' konklusion: Der er ikke taget højde for Bellman's egen formulering vedrørende procestypen.

> "(...) the principle of optimality was formulated in relation to a sequential decision model characterized by its objective function being dependent only on the <u>final state</u> of the proces (...)"
> (Sniedovich 1986 s. 163),

hvilket ovennævnte eksempel ikke var.

På denne baggrund præsenterer Sniedovich tre problemtyper:

P(s): $f(s_1) = \underset{(d_1,\dots,d_N)}{\text{opt}} g(s_{N+1}) \quad , \quad s_1 \in S$

med betingelsen

$$d_n \in D(n, s_n) \quad , \quad n = 1,2,\dots,N$$

og dynamikken

$$s_{n+1} = T(n, s_n, d_n) \, , \quad n = 1,2,\dots,N$$

(P(s) kaldes det oprindelige problem i tilstanden s, jvnf. med OP 1 i det foregående.)

P(n,s): $f_n(s_n) = \underset{(d_n,\dots,d_N)}{\text{opt}} g(s_{N+1}) \quad , \quad 1 \le n \le N \quad , s_n \in S$

med betingelsen

$$d_k \in D(k, s_k) \quad , \quad n \le k \le N$$

og dynamikken

$$s_{k+1} = T(k, s_k, d_k) \quad , \quad n \le k \le N$$

(P(n,s) kaldes det modificerede problem i (n,s).)

P(n,s,d): $f_n(s_n, d_n) = \underset{(d_{n+1},\dots,d_N)}{\text{opt}} g(s_{N+1}) \, , \quad 1 \le n < N \, , s_n \in S,$

med betingelsen

$$d_k \in D(k, s_k) \quad , \quad n+1 \le k \le N$$

og dynamikken

$$s_{k+1} = T(k, s_k, d_k) \, , \quad n \le k \le N$$

(P(n,s,d) kaldes det betingede problem i (n,s,d).)

Med disse problemdefinitioner i baghånden states optimalitetsprincippet som et teorem:

"For ethvert n, $1 \leq n < N$, $s \in S$ og $d \in D(n,s)$ og hvis $(d_{n+1},\ldots,d_N)$ er optimal løsning for $P(n,s,d)$, så vil $(d_{n+1},\ldots,d_N)$ også være optimal løsning for $P(n+1,s')$, $s' = T(n,s,d)$."
(Sniedovich 1986 s. 165) (Vores oversættelse.)

Med dette optimalitetsprincip giver Sniedovich bevis for følgende teorem:

"Der gælder, at

$$f_n(s) = \underset{d \in D(n,s)}{\text{opt}} \quad f_{n+1}(T(n,s,d)) \quad , \quad 1 \leq n \leq N \; , \; s \in S,$$

hvor

$$f_{N+1}(s) = g(s) \quad , \quad s \in S."$$

Dette er det samme som at sige, at optimalitetsprincippet implicerer den rekursive funktionalligning - på baggrund af den procestype og problemformalisering, der er givet.

Videre giver Sniedovich en formulering af OP, som han ofte har set den fremlagt i litteraturen:

"For ethvert n, $1 \leq n \leq N$ og $s \in S$ vil $(d_n,\ldots,d_N)$, hvis $(d_n,\ldots,d_N)$ er en optimal løsning til $P(n,s)$, også være en optimal løsning til $P(n+1,s')$, $s' = T(n,s,d)$."
(Sniedovich 1986) (Vores oversættelse.)

Han fremhæver, at forskellen mellem disse to principper svarer til forskellen mellem "initial optimal decision" og "any initial (feasible) decision", hvorefter han siger, at der (næsten) ikke er nogen forskel - så længe talen er om deterministiske processer. Derimod opstår der problemer ved stokastiske processer, der iøvrigt fordrer en teknisk ændring af det betingede problem, idet transformationen ikke entydigt giver den nye tilstand.

<u>Morin's formulering.</u>
(Morin 1982) hører egentlig til kategorien af DP-udøvere, der både har en verbal og en formel udgave af OP. Først reciterer han Bellman's for derefter at give sin egen verbale formulering:

"An optimal solution must contain optimal (partial) solutions."
(Morin 1982 s. 665)

At han "fremstiller" sin egen version skyldes, siger han, at den er mere passende til sit formål. Morin's formalisme er som tidligere nævnt overtaget fra (Karp & Held 1967). Vi bringer her Morin's formaliserede princip:

> "Hvis $x = x_1 x_2 \in P^*$, hvor $x_1 \in P(s)$, så gælder, at $x_1 \in P^*(s)$."
> (Morin 1982) (Vores oversættelse.)

P^* er mængden af optimale politikker, x_i, $i=1,2$, er delpolitikker. $P(s)$ er mængden af politikker, der bringer os fra s_0 til s. Så med den givne procestype er de to udgaver af OP (næsten) ensbetydende.

Morin får også stablet en funktionalligning på benene:

$$(*) \quad \begin{cases} f(s_0) = \xi_0 \\ f(s) = \min\limits_{(s', d) \in S \times D} \{ h(f(s'), s', d) \mid T(s', d) = s \}, s \in S \setminus \{s_0\} \end{cases}$$

Artiklens formål er at diskutere betingelser på h for at sikre gyldigheden af disse ligninger. Betingelserne har som tidligere noget med monotoni at skaffe. Ligesom hos (Sniedovich 1978) gives to antagelser angående monotoniciteten af h. Den ene vedrører almindelig monotoni, mens den anden angår streng monotoni. Dette for at opnå:

> "Hvis Π er strengt monoton og $x = x_1 x_2 \in P^*$, hvor $x_1 \in P(s')$, så vil $x_1 \in P^*(s')$."
> (Morin 1982) (Vores oversættelse.)

Endelig states:

> "Hvis Π er strengt monoton, så vil funktionalligningerne (*) være gyldige."
> (Morin 1982) (Vores oversættelse)

De umiddelbare begrundelser for denne diskussion mellem OP og funktionalligningsinterpretationen er, at han har givet eksempler (analogt med (Sniedovich 1986)) på, at OP i Bellman's formulering ikke holder i alle tilfælde. Men istedet for at "nærlæse" Bellman, som Sniedovich gør for derved at forsvare Bellman, giver Morin monotonicitetsbetingelser på h for at få afklaret rækkevidden af OP.

Mellemspil.

Nu har vi givet et indtryk af, hvorledes og evt.

hvorfor der gives formelle "oversættelser" af OP. I forbindelse med White blev hans OP dog formuleret i ord, men det var samtidig nært knyttet til hans formalisering, herunder definitionen af kontraktionsbegrebet. Derfor blev hans formulering medtaget i kategorien "formelle oversættelser".

Af de formelle formuleringer af OP, vi er stødt på, har vi ikke refereret dem alle. Eksempelvis har (Iwamoto 1979) givet ikke mindre end tre optimalitets-principper, hvoraf een får titlen "Principle of optimality". Vi synes imidlertid, at det krævede for meget unødig matematisk formalisme at nå frem til disse principper, idet der egentlig ikke er noget essentielt nyt at uddrage. Ligesom hos de fleste øvrige er Iwamoto's formulering knyttet til "mål og med", dvs. til sine specifikke processer og behandlinger af dem.

Morin havde, som vi just har set, både en verbal og en formel translation af OP. Hans indlæg er således placeret just ovenfor for at forestå overgangen til de verbale konstruktioner af OP.

<u>Denardo's formulering.</u>
Denardo's arbejdsområde er netværksproblemer, hvilket i stor grad påvirker hans formuleringer af OP. Han har tre versioner på programmet.

1) "Consider an optimal path from some node to some other node. Any path (i_p,....,i_q) contained in this path is an optimal path from node i_p to i_q."
(Denardo 1982 s. 15)

2) "There exists a policy that is optimal for every node (state)."
(Denardo 1982 s. 15)

3) "An optimal policy has the property that whatever the initial node (state) and initial arc (decision) are, the remaining arcs (decisions) must constitute an optimal policy with regard to the node (state) resulting from the first transition."
(Denardo 1982 s. 16)

Begrundelsen for at indføre tre varianter af princippet er, at det er hensigtsmæssigt at have bestemte versioner til bestemte problemtyper, siges det. Videre tilføjer han, at 2) holder i flere tilfælde end 1), mens de begge iøvrigt holder i de fleste netværksproblemer. Han giver dog et eksempel, hvor 2), men ikke 1) holder. Det ses, at 3) nærmest er identisk med Bellman's formulering. Denardo giver blot DP-ingredienserne, der passer hans betragtninger relevante navne.

Udover blot at state disse tre principper har Denardo nogle kritiske bemærkninger til betegnelsen "princip". Disse bringes fuldt ud her:

> "It would be hard to overstate the importance of the principle of optimality. One of Richard Bellman's deepest insights has been, perhaps, that the principle of optimality is shared by a host of optimization problems whose mathematical formulations are so very disparate. The term principle of optimality is, however, somewhat misleading; it suggests that this is a fundamental truth, not a consequence of more primitive things. Several traditional developments of dynamic programming accept it as a principle and derive from it algorithms that compute optimal policies. The approach taken here is to recognize the principle of optimality as a common theme that guides us as we derive functional equations from more primitive properties of optimization problems."
> (Denardo 1982 s. 16)

Derved fik vi således også pointeret Denardo's opfattelse af, hvordan OP og RL står i forbindelse med hinanden nemlig, OP $\Rightarrow$ RL.

Nemhauser's formulering.
Nemhauser's bidrag til diskussionen om OP er temmelig begrænset, idet han (Nemhauser 1966) ved brug af et beslutningstræ (et grafteoretisk eksempel) argumenterer for Bellman's formulering (Bellman 1957). Derudover giver han et bevis for princippet:

> "A proof of the principle of optimality (by contradiction) simply states that if the remaining decisions were not optimal then the whole policy could not be optimal."
> (Nemhauser 1966 s. 33)

Da Nemhauser's stofområde er diskrete (mht. trinvariablen) deterministiske systemer, der samtidig er endelige (mht. trinvariablen), har han ingen problemer med at udlede den rekursive ligning:

$$f_n(s_n) = \max_{d_n} \{ r_n(s_n, d_n) + f_{n-1}(s_{n-1}) \},$$

Faktisk påstås:

> "A mathematical statement of the principle of optimality is the recursion equations (...)".
> (Nemhauser 1966 s. 33)

Det må tilføjes, at han her tænker på den specielle matematificering, han selv arbejder med.

Hinderer's formulering.
Overskriften her er noget misvisende, thi vi faktisk ikke vil bringe Hinderer's formulering af OP, idet han udelukkende forholder sig til stokastiske systemer. Derimod afslutter vi dette afsnit med nogle af de kritiske bemærkninger, han har til OP og dennes relation til RL.

(Hinderer 1970) gengiver, som de fleste andre i OP regi, Bellman's princip. Derefter opstilles 6 punkter, der belyser problemer ved princippet. For det første belyses betegnelsen "princip". For, som han siger, "princip" skal formentlig indikere, at der er tale om et statement, som er gyldig for en stor klasse af problemer, men hvor gyldighedsområdets nøjagtige rækkevidde ikke kan formuleres uden videre:

> "This implies however that the principle needs a proof for any well-defined model under consideration."
> (Hiderer 1970 s.14)

Det andet han ser på, er sentensen "a proof by contradiction is immediate". Til dette svarer Hinderer:

> "This is true for deterministic models (...) and simple stochastic models. But already the model considered in this chapter requires a little thought (...) and the general case needs the rather heavy measure-theoretic apparatus developped by Blackwell, Strauch and others (...)."
> (Hinderer 1970 s.14)

Det tredie problem, Hinderer fatter om, er relationen mellem OP og RL:

> "The importance of the principle does not rest so much on the fact that it furnishes a necessary condition for the optimality of a policy but in the fact that it is often regarded as a convenient tool for deriving the optimality equation (OE) (...), which on its part is the starting point for many investigations in dynamic programming. How-

ever, to the best of our knowledge there has never been given a rigorous proof of the OE in the general case by means of the principle though the proofs of the OE and of the principle show som similarities."
(Hinderer 1970 s.14)

Det, der kaldes OE er RL. Det skal understreges, at Hinderer's øjne primært hviler på stokastiske processer, hvor problemerne omkring relationen mellem OP og RL øjensynlig er størst. De resterende tre kritikpunkter hos Hinderer er intimt forbundet med stokastiske processer og med stofområdet, der har netop hans interesse. Derfor undlader vi at referere disse.

4.4. DP's teoribygning.

Hensigten i det følgende er at stikke en finger i jorden og vejre et par af DP's matematisk teoretiske bevægelsesretninger. Når DP-processer bliver formaliserede, er det interessant at se, hvad formaliseringerne bringer med sig af teoriudvikling. Men det viser sig, at de fleste generelle formaliseringer ikke implicerer resultater, der rækker meget videre end til at reflektere over grundlagsspørgsmål som f.eks. OP's validitet. Den vigtigste undtagelse fra dette faktum er nok Iwamoto, der i en serie artikler forsøger at stable en teori for duale dynamiske programmer på benene (1977a,1979,1981). Men Iwamoto's formalisering er også - som det ses i afsnit 4.2. - relativ højt struktureret.

Nærværende afsnit er ikke en dybtgående analyse af de mange matematisk-faglige retninger i DP, der forskes i. Vi vil blot give et antydningspræget billede af visse veje. Det viser sig, at megen af den nuværende forskning bygger på tidligere opstillede funktionalligninger, hvor der er lagt en del struktur og betingelser på beslutningsrum, tilstandsrum og især involverede funktioner. En tendens synes at være et ønske om at ville generalisere de opstillede ligninger samt at fastlægge betingelser for deres løsbarhed. En følge heraf er, at DP - lidt afhængig af sammenhængen - i denne tendens "reduceres" til funktionalanalyse. Man afklarer sjældent modelsituationen ved som introduktion at opstille grundlæggende og generelle formaliseringer. I stedet gås der direkte i kødet på en bestemt funktionalligning. Det er nogle af disse træk, vi vil se lidt nærmere på.

En ligning lanceret af Bellman i midten af 1950'erne har tilsyneladende fundet fodfæste i litteraturen. Selv udvikler Bellman ligningen ved først at betragte en N-trins allokeringsproces. Det kommer ud på, at dele ud af en ressource x i to enheder, nemlig i forholdet y og x-y. Afkastet forbundet hermed er g(y) og h(x-y), hvor g, h er antaget kontinuerte med g(0)=0 og h(0)=0. Der er også antaget et tab ved allokeringen. Dvs., at der tænkes at være ay+b(x-y) tilbage ved næste allokering. Han får på denne baggrund opstillet følgende rekursive funktionalligning:

$$(1):\quad f_N(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f_{N-1}(ay+b(x-y))\},\ f(0)=0.$$

At løse denne ligning vil blot sige, at danne de funktionsfølger $(f_N(x))_{N\in \mathbb{N}}$, der for givne funktioner g og h er defineret ved (1) for alle N. Man kan dernæst tænke sig allokeringsprocessen fortsætte ad infinitum. Bellman forestiller sig så, at man kan vise, at $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod en funktion f, så der i grænsen kan opnås følgende ligning:

$$(2):\quad f(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f(ay+b(x-y))\},\ f(0)=0.$$

At bestemme en løsning til (2) er at bestemme f.

Bellman viser følgende sætning:

<u>**Sætning:**</u> Det antages, at

a) g(x) og h(x) er kontinuerte funktioner af x for $x \ge 0$ og g(0)=h(0)=0.

b) Hvis $m(x)=\max_{0\le y\le x}\max\{|g(y)|,|h(y)|\}$ og $c=\max\{a,b\}$, så er $\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x) < \infty$ for alle $x \ge 0$.

c) $0 \le a < 1$ og $0 \le b < 1$.

Da findes netop en løsning til (2), som er kontinuert og har værdien 0 i x=0. Denne løsning opnås som uniform grænsefunktion af følgen $(f_N)_N$.

Betingelsen a) implicerer, at f_N er kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$. Dette viser Bellman dog ikke (vi henviser til bilag I for et fuldstændigt bevis for sætningen).

Bellman arbejder selv videre med (2). F.eks. undersøger han løsningsforholdene under den yderligere antagelse, at g og h er konvekse eller konkave. I tilfældet konvekse vil løsningen f(x) ligeledes være konveks, og for hver værdi af x vil politikken y være lig 0 eller x. Er derimod g og h strengt konkave funktioner af x, da vil løsningen f(x) også være strengt konkav, og den tilhørende optimale politik y vil være entydig: Der er kun en politik. Betragter vi korrespondencen

$$\tilde{F} : [0,\infty) \to 2^{[0,\infty[}$$

givet ved

$$\tilde{F}(x) = \{y \in [0,x] \mid f(x) = g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))\}$$

for alle $x \in [0, \infty)$, da vil det sidstnævnte resultat (strengt konkavitet) implicere, at $\tilde{F}(x)$ er en singleton for givet x.

Kasparski har i (1980)-altså ca. 25 år efter Bellman - studeret (2) i den lidt mere generelle udgave

$$f(x) = \max_{y \in [0,x]} \{g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))\}, \quad f(0) = 0$$

hvor g, h: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ er givne konkave (altså ej strengt konkave) funktioner med $g(0)=h(0)=0$. Det er pointeret af Bellman (Bellman 1957), at det oftest er mere interessant at studere egenskaber hos de optimale politikker i $\tilde{F}$, fremfor de optimale værdier selv, dvs. $f(x)$. Det har muligvis foranlediget Kasparski til at undersøge differentiabilitetsforholdene af $\tilde{F}$. Dette er lidt interessant, da det ikke er umiddelbart at en optimal politik er kontinuert i modsætning til den optimale værdi $f(x)$. Vi vil ikke studere disse differentiabilitetsforhold nærmere her, men blot føje til, at resultatet behøver yderligere restriktioner på g og h nemlig, at de er C^1. I en senere artikel (Kasparski 1981) studerer han (1) udfra tilsvarende generalisationer. Hans hensigt er at undersøge konvergensforholdene af politikfølgen $(y_n(x))_n$.

Ovenstående beskrivelse har til opgave at give en smagsprøve på, hvilke sager man går efter. Vi kan nævne flere eksempler (se listen i slutningen af afsnittet) på funktionalligninger (både statiske og rekursive), som Bellman og andre har opstillet på baggrund af allokerings- eller andre processer. Funktionalligninger, som andre matematikere tager op til videre behandling sidenhen. Ved den slags opgaver er programmet gerne, at gøre (de) givne betingelser svagere og samtidig opnå tilsvarende resultater (listen bag i afsnittet).

Det er muligt at konstruere generaliserede funktionalligninger, som der også kan udsiges relevante ting om. F.eks. studerer Bellman ligningen

$$(3): \quad f(p) = \sup_q \{g(p,q) + h(p,q) f(T(p,q))\}, \quad p \neq 0 \quad \text{[Bellman 1957]}$$

hvor $p \in D \subseteq \mathbb{R}^M$, $T = \{T_q\}$ er en mængde af transformationer med egenskaben at for $p \in D \Rightarrow T_q(p) \in D$ for alle $q \in S$, hvor S er en mængde (kan
kan være endelig, tællelig eller overtællelig eller sammensat af disse). Med en stribe betingelser på g,

p, h og T opstiller Bellman en eksistens- og entydighedssætning, som han også giver et bevis for. Opgaver for eftertiden kunne være at vise en analog sætning, hvor betingelserne på de indgående størrelser blev svækkede.

Bhakta & Mitra (Bhakta & Mitra 1984) gør lignende sager. Deres ligning er næsten tilsvarende, men der er knap så megen struktur på beslutnings- og tilstandsrum (som er Banachrum). Særegent for dem er, at de viser eksistens- og entydighedssætningen på grundlag af en først vist kontraktionssætning.

Vi blænder dette afsnit ned med et eksempel fra en noget anden boldgade. Vi nævnte, at Iwamoto har skabt noget, der kunne kaldes en dual formulering af DP. Det essentielle indhold i teorien er, at man meget groft sagt kan se "omvendt" på en givet DP-optimeringsproblem.

Lad to operatorer T og S være givet ved

$$T(f;g)u(c) = \max_{\substack{x,y \geq 0 \\ g(x;y) \leq c}} f(x;u(y))$$

$$S(g;f)v(c) = \min_{\substack{x,y \geq 0 \\ f(x;y) \geq c}} g(x;v(y))$$

hvor f, $g \in C^0(\dot{R}^2_+, \dot{R}_+)$ og u, v $C^0(\dot{R}_+, \dot{R}_+)$. Under nogle monotonicitetsbetingelser på f, g og u og v samt, hvis u er den inverse til v, da er T(f;g)u den inverse funktion til S(g;f)v, og omvendt. Dette er i hovedsagen den inverse DP. I praksis vil det sige, at hvis problemet er

$$\text{maximer } f(x_1,\ldots,x_N)$$

med betingelsen $\quad g(x_1,\ldots,x_N) \leq c$

Da er det inverse problem

$$\text{minimer } g(y_1,\ldots,y_N)$$

med betingelsen $\quad f(y_1,\ldots,y_N) \geq c$ (Iwamoto, 1977a).

Det er svært at afgøre, hvilken indflydelse teoremet giver anledning til, idet vi ikke har set andre end Iwamoto alene eller i selskab med Wang bruge teoremet. Og det primært i forbindelse med at eftervise gammelkendte uligheder fra sandsynlighedsregningen (Iwamoto 1977b, Iwamoto & Wang 1983,1986).

Eksempler på artikler i DP's teoriudviklingen

(Kieltyka 1981) studerer lign. (2) mht. differentiabilitetsforhold af løsning.

(Puterman & Brumelle 1979) studerer konvergensteori for politikiteration.

(Fisher 1974, 1975b) beskæftiger sig med en funktionalligning opstillet af Bellman i 1970. Han giver en eksistenssætning.

(Kapoor & Reingold 1985) undersøger en klasse af rekursive ligninger, bl.a. mhp. løsningers konkavitet.

(Pachpatte 1975) undersøger Bellman's lemma ved at gøre generaliserende bemærkninger til det.

(Kardos 1981) giver generel løsning til en generaliseret udgave af en ligning opstillet af Bellman i 1965.

(Belbas & Mayergoyz 1984) gør bemærkninger (fixpunktsbetragtninger) til en ligning opstillet af Bellman.

(Baston 1978) studerer en generaliseret udgave af en ligning opstillet af Bellman.

KAPITEL 5

5.1. Konklusion på problemformuleringerne.

Vi har for nærværende til hensigt at diskutere de i afsnit 3.7. opstillede problemer P.I., P.II. og P.III. på baggrund af analyseresultaterne i kap. 4. Det gør vi lige på og hårdt og starter med P.I.

Diskussion af P.I.:
Der er øjensynlig foretaget en del forsøg på at indlejre DP i forskellige matematiske universer. De fleste forsøg er gjort med bestemte forsæt. Nogle (f.eks. Karp & Held (1967), Elmagraphy (1970)) har drejet formaliseringsknappen hen på sager, der umiddelbart vil kunne omsættes til netværksbetragtninger. Andre (f.eks. Sniedovich (1978,1986), Morin (1982)) ville diskutere DP i et formelt regi. Endnu andre har helt specielle matematiske hensigter. I denne sidste gruppe hører Iwamoto, som egentlig har to målsætninger, hvoraf det at formulere det til DP duale "inversteorem" er det væsentligste. Det andet target har nærmest karakter af DP-legitimation, idet han (bl.a. sammen med Wang) ville vise klassiske uligheder. Cambini er en anden i denne gruppe. Hans hensigt med den topologiske formalisering af DP er at vise en "eksistenssætning" for et relativt højt struktureret,men generelt DP-problem. De her udvalgte eksempler har fællestrækket - iøvrigt i hånd med Bellman - at deres formaliseringer af DP er præget af en høj grad af struktur i forhold til de fleste andre formaliseringer, vi har studeret.

En konklusion på den førstnævnte gruppes formaliseringer har tilsyneladende den fælles egenskab "blot" at få indlejret DP i matematiske universer, altså at få oversat de grundlæggende DP-begreber til matematik. Konsekvenserne af de lavt strukturerede formaliseringer er få, i sammenhængen at få stærke resultater til DP- (eller anden) teoriudvikling.

En anden og lige så vægtig konsekvens af analysen i afsnit 4.2. er, at det ikke er muligt endnu at indfange samtlige DP-processer med en bestemt formalisering. Det er ikke muligt at indlejre DP i eet bestemt matematisk univers. Lige så snart der er hæftet matematiske objekter på få af DP's ingredienser brydes - en muligvis ønsket? - generalitet ned. De behandlede formaliseringer dækker hver især over bestemte DP-procestyper og udelukker samtidig andre procestyper.

Sammenfattende kan siges, at forsøg på høj generalisation (dvs. lav struktur) kommer til kort over for de højtstrukturerede mere processpecifikke formaliseringer, når det handler om at få reelt brugbare resultater.

Diskussion af P.II.
Grunden til, at vi to gange har citeret Bellman's optimalitetsprincip i afsnit 4.3., er, at der optræder et flertals s to gange i 1954-udgaven, som ikke forekommer i den senere 1957-udgave. Vi undrede os lidt over dette, men fandt, at i 1954 var teorien forholdsvis ufuldstændig, hvorfor s'erne formentlig havde egenskab af at skulle dække flere processituationer ind. Siden har det vist sig at være et overflødigt forbehold.

Man kan spørge om, hvilke fordele en formalisering af OP har. Eller det samme: Hvad er udbyttet ved at indlejre OP i matematiske universer? Det, som tydeligst giver spor af et svar, er, at man generelt set søger at sikre RL's gyldighed gennem et formaliseret OP. OP betragtet isoleret er, som Bellman selv har fastslået, blot en påstand. Det væsentligste i DP-sammenhæng er den rekursive funktionalligning. OP kan så optræde som dynamo i opstillingen af RL, men ikke direkte som problemløser eller som problemformulerer.

På trods af at Bellman, som ophav til OP, gentagne gange har lagt vægt på ikke at formalisere OP, er det altså forekommet i adskillige sammenhænge - og ikke uden resultater. Fælles for de fleste OP-formaliseringer, vi har studeret, er, at man giver betingelser på objektfunktionerne (gerne monotonicitetsbetingelser) således, at det i sammenhængen formaliserede OP implicerer RL. Det er (næsten) klart - som det også er fremgået af afsnit 4.3. - at OP-formaliseringerne er nært knyttede til de enkelte procestyper, der har artikelforfatternes interesse. Derfor er det praktisk talt umuligt at udrede forskelle og/eller ligheder blandt de givne OP-udgaver. Endnu er der ikke set en helt generel formalisering af OP endsige - som (Hinderer 1970) var inde på - en generel bevisførelse for relationen OP$\Rightarrow$RL.

Det største spørgsmål i dette projekts sammenhæng er, om DP er levedygtig kun i kraft af OP? Og det spørgsmål må vi endnu lade ligge...

Diskussion af P.III.:
At DP er optaget under to rubrikker - en vedr. anvendt DP og en vedr. teoretisk DP - i AMS, tyder på, at der blandt nogle matematikere hersker en tro på dets fortsatte eksistens som en art matematisk disciplin. Det er dog karakteristisk, at den væsentligste mængde af publikationer indenfor DP-området hører til i den højt strukturerede ende af AMS-listen. Altså der, hvor sagerne primært handler om konkrete modeller og behandlinger af dem.

I afsnit 3.3. opstillede vi en måde at betragte den indholdsmæssige side af en matematisk disciplin. Vi vil nu søge en afgrænsning af DP - som disciplin - ud fra dette. Den mere præcise afgrænsning af de tre opstillede forudsætninger i afsnit 3.3. afhænger til en vis grad af de enkelte formaliseringer. Vi har søgt at samle afgrænsningen af DP i to skemaer. Det første tager udgangspunkt i Karp & Held's formalisering og de formaliseringer, der kan samles i denne forbindelse. Her tænkes hovedsaglig på Elmagrahby (1970), Ibaraki (1973), Morin (1982) og til en vis grad Sniedovich (1978,1986). Det andet omhandler sager, der ikke drejer sig så meget om egentlig formalisering, men mere er rettet DP's teoriudvikling.Her tænkes bl.a. på Iwamoto (1977a,1979,1981), Bellman (1957) og Cambini (1974). Disse undersøger højt strukturerede systemer. Begge skemaer opsummerer kun visse hovedtendenser.

Første skema: Karp & Held sporet.

Objekt afgrænsning og relationer	Mængdelære(specielt endelige mængder; tilstandsrum,beslutningsmængder). Relationer og funktioner(objektfunktioner med værdier i **R**. **N** i trinbegreb). (Matematisk-logik og grundlag (03),mængdelære(04), kombinatorik(05)).
Spørgsmål	Hvor få og simple krav kan man stille til strukturen ovenfor, især af objektfunktionen, for at kunne udlede OP/RL ? Når det er besvaret, hvad kan man opnå af generelle resultater om diskrete beslutningsprocesser m.m. Endvidere stilles alle mulige særspørgsmål afhængig af den generelle ramme, der arbejdes indenfor.
Metoder	De grundlæggende regler for omgang med mængdelære, relationer, funktioner, tal.

Andet skema: Sporet med højt **strukturerede** systemer.

Objekt afgrænsning og relationer	Højt strukturerede topologiske rum (å la delmængder af **R**). (Halv-) kontinuerte funktioner. Funktionalligninger.
Spørgsmål	Eksistens og entydighed af løsninger til funktionalligninger. Egenskaber ved løsninger; f.eks. er de kontinuerte, konvekse, konkave. Approximation af løsninger (succesive approximation). Dualitet mellem løsninger (i betydning optimale værdier) og optimale politikker; studier over politikkernes egenskaber.
Metoder	Klassisk analyse (kontinuerte funktioner på kompakte mængder, uniform konvergens og kontinuitet, uendelige rækker, differentabilitet, konveksitet, osv. Lidt mere specielt: moderne analyse (kontraktioner i metriske rum, funktionalanalyse m.m.)

Nu har vi ikke arbejdet med den stokastiske side af DP. Det gør selvfølgelig, at vi må være beskedne i vores udsagn om positionen af den indholdsmæssige side af DP's udvikling og status. Det er derfor med forbehold, at vi vil konkludere, at DP stadig er i en udviklingsfase og ikke færdig etableret som en fuldt afklaret matematisk disciplin.

5.2. Aspekter af dynamisk programmerings sociologi.

I vores undersøgelse af DP har vi lagt vægt på den indholdsmæssige side. I kapitel 3 beskrev vi en angrebsmåde til undersøgelse af en matematisk emnekreds/disciplin, der også indeholdt sociologiske aspekter. En sådan synsvinkel vil vi stadig fastholde relevansen af. Den vil give et bredere billede af en matematisk disciplin/emnekreds i forbindelse med en videnskabsteoretisk og -historisk undersøgelse - specielt, når det drejer sig om et så forholdsvist ungt område som dynamisk programmering. Vi har desværre været nødt til at lade denne side ligge. Men den sociologiske side af DP vil være et naturligt aspekt at undersøge, hvis andre skulle have lyst til at fortsætte, hvor vi har sluppet. Visse iagttagelser af sociologisk art har vi dog foretaget. Specielt har vi i afsnit 3.5. "Rids af dynamisk programmerings historie", omtalt nogle sociologiske aspekter. Her skal yderligere et par iagttagelser gøres.

Den første iagttagelse er, at siden 1979/80 har dynamisk programmering eksisteret som kategori i AMS's klassifikation af matematikken. Opstillingen af DP i AMS's klassifikation kan opfattes på følgende måde: DP nyder den anseelse blandt matematikere, at det er et område, hvor der foregår matematisk forskning.DP har altså en slags godkendelses stempel inden for (dele af) det matematiske samfund.

Et væsentligt punkt i den sociologiske side af en matematisk disciplin/emnekreds er de kommunikationsstrukturer, der eksisterer mellem forskerne. Specielt vigtig er, hvilke typer tidsskrifter der skrives i, fordi tidsskrifter udgør en central kilde til udveksling af information af ny viden forskerne imellem. Da vi har indsamlet omkring 200 artikeloverskrifter (og anskaffet nogle af disse), har vi bemærket, hvor artiklerne har været offentliggjort. Herved aftegner sig et billede; en betydelig del har været offentliggjort i Journal of Mathematical Analysis and Applications, og en anden betydelig del har været offentliggjort i ikke særligt kendte tidsskrifter, men hvis navne tyder på en anvendelsesorienteret retning i indholdet. Begge kategorier må nok siges hovedsaglig at være rettet mod anvendelsesorienterede forskermiljøer, og knap så meget mod grundforskningsmiljøer. Kun få artikler har været at finde i mere matematisk grundforskningsmindede tidsskrifter, heriblandt nogle af Bellman's tidlige artikler. En ikke ubetydelig del af artiklerne synes også at stamme fra indlæg forskellige konferencer.

Meget tyder på, at J.Math. Anal. Appl. er et særlig centralt tidsskrift for offentliggørelse af artikler vedr. DP. Men dette forhold kan være en afspejling af vores fremgangsmåde. I hvert fald tyder en del på, at anvendelsesorienterede tidsskrifter er den væsentligste kilde til offentliggørelse af DP artikler. I denne sammenhæng er det nok relevant at huske på, at anvendelsesorienterede miljøer/tidsskrifter er forholdsvis relative størrelser.

En anden opdagelse, vi har gjort af sociologisk art, er mhp. DP-dyrkernes placering på læreanstalter/universiteter og private institutioner. Dette har vi observeret ud fra de artikler , vi har fremskaffet m.fl. Ofte indeholder artiklerne informationer om, hvor forfatterne er beskæftigede. Det første, der springer i øjnene er, at langt de fleste artikelforfattere er ansat på universiteter, højskoler o.lign., dvs. institutioner af offentligt tilsnit. Kun få har været tilknyttet en forskningsafdeling i en privat virksomhed. Pudsigt nok var Bellman (sammen med andre tidlige DP-folk), da han offentliggjorde de tidligste artikler og bøger omkring DP, netop tilknyttet en privat institution, nemlig RAND Corporation. Men den ansættelsesmæssige tilknytning til private virksomheder er kun noget, der ses i den tidlige udvikling af DP, siden hen er de fleste ansat ved universiteter o.lign.

Man kan gå videre i undersøgelsen af, hvor artikelforfatterne er ansat. Vi har set på, hvilke type institutter, de er ansat på: Er det hovedsaglig matematiske grundforsknings institutioner eller er der tale om anvendelsesorienterede miljøer. Også her tegner der sig et tydeligt billede. De fleste er ansat på institutioner, hvor anvendelsesaspektet formodentlig er fremherskende. Disse institutter dækker meget brede områder, f.eks. institutter for anvendt matematik og fysik, datalogi, økonomi og tekniske/ingeniørorienterede institutter. Kun få af artikelforfatterne har været ansat på "rene" matematik/grundforsknings institutter.

Endelig er det vigtigt at fremhæve, at disse sociologiske iagttagelser er gjort på baggrund af vores udvalg af artikeloverskrifter. Det er svært at udtale sig om, hvor repræsentative disse artiklers forfattere er. Selvom vi således kan stille en række spørgsmålstegn ved de sociologiske bemærkninger, vi har gjort her og projektet igennem, mener vi, at den tætte tilknytning til anvendelsesorienterede matematiske miljøer er typisk for DP. Spørgsmålet rejser sig så, om dette har haft indflydelse på dynamisk programmerings teoriudvikling. Dette kan vi ikke med vores baggrund udtale os om. Spørgsmålet vil vi overlade til andre, der kunne tænkes at tage den tråd op, vi hermed slipper.

5.3. Opsummering af arbejdet.

Under vort arbejde med dynamisk programmering har vi fået en ikke ubetydelig indsigt i, hvordan et anvendt matematisk emneområde har set dagens lys og siden vokset sig større. Inden vi startede på udredningsarbejdet kendte ingen af os til begrebet dynamisk programmering. Endsige andre optimeringsmetoder. Derimod havde vi nogle overordnede retningslinjer at spadsere efter. Vi ville sætte lup på et matematisk emne, der havde en vis grad af anvendelser udenfor den matematiske verden; emnet skulle være relativt nutidigt; det skulle ikke være for simpelt, men ej heller for avanceret i dets internt matematiske forhold, så vi ikke kunne nå at absorbere det, og endelig skulle det helst ikke være 'overstuderet' i forvejen. Med bl.a. vejleders receptuelle indblanden i processen blev valget hurtigt specificeret i retning af optimering. En følge heraf blev, at vi gik i lag med en studiekredspræget gennemgang af diverse optimeringsdiscipliner; lige fra optimering under bibetingelser over klassisk variationsregning til optimal kontrolteori. Overvejelser i mellemlagene udmøntedes i beslutningen om dynamisk programmering.

Vi må sige, at samtlige vore indledende ønsker er blevet tilgodeset. Mens arbejdet er skredet frem, er der naturligvis formuleret nye krav - og af dem er ikke alle blevet lige opfyldt. Efterhånden som det blev klart, at problemstillingen i brede vendinger skulle være, at undersøge DP's historiske udvikling fra dets bardom til nu, skabtes ideer om, at få kortlagt "alt" om DP. Dvs. vi antog, at både de sociologiske, de indre matematiske, ja, sågar også de anvendelsesmæssige aspekter af DP, kunne reflekteres over en kam og give anledning til et totalt billede af DP. Men som altid er problemer større jo dybere man graver i dem. Og samtidig handler det her om at respektere et uddannelsesmæssigt krav om "videnskabsteori/-historie", hvorfor internt matematiske grundlagsforhold synes nærliggende. Derfor er der altså visse af vore subjektive behov der er gået fløjten, mens vi bl.a. har fået væsentligt indsigt i ting, vi ikke på forhånd havde forestillet os. Af mere generelle sager kan nævnes det at se, hvorledes processen at oversætte ord til matematisk formalisme forløber. I den forbindelse har vi også set adskillige eksempler på virkelighedsnære problemer blive modelleret matematisk i DP-regi.

*

LITTERATUR.

Andersson, G (1969): Forskningspolitik i USA, i Ambjörnsson, R et al: Forskning och politik i Sverige, Sovjet och USA. Bokförlaget Aldus/Bonniers, Stockholm, 1969.

Baston, V.J (1978): On a Functional Equation of Bellman. J. Math. Anal. Appl., 63, p. 416-421, 1978.

Belbas, S.A. & Mayergoyz, S.D.: Applications des méthods du point fixe aux équations de Bellman discrétes et des inéquations quasi variationelles discrétes. C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 299, no. 7, p. 233-236, 1984.

Bellman, R (1952): On the Theory of Dynamic Programming. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, p. 716-719, 1952.

Bellman, R. (1954 a): The Theory of Dynamic Programming. Bull. Amer. Math. Soc., 60, p. 503-516, 1954.

Bellman, R. (1954b): Dynamic Programming and a new formalism in the Calculus of variations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40, p. 231-235, 1954.

Bellman, R. (1957): Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

Bellman, R. & Angel, E. (1972): Dynamic Programming and partiel differential equations, Academic Press, New York, 1972.

Bellman, R. & Dreyfus, S.E. (1962): Applied Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

Bellman, R. & Lee, S. (1978): Functional Equations in Dynamic Programming. Aequationes Mathematicae, 17, p. 1-18, 1978.

Bhakta, P.C. & Mitra, S. (1984): Some Existence Theorems for Functional Equations Arising in Dynamic Programming. J. Math. Anal. Appl., 98, p. 348-362, 1984.

Blomhøj, M. et al. (1984): Matematikundervisningen i fremtidens gymnasium. - case: Lineær programmering. IMFUFA TEKST, nr. 75, Roskilde Universitetscenter, 1984.

Cambini, A. (1974): Functional Aspects and Validity of Dynamic Programming Method. Symposia Mathematica, 19, convegno April 1974, Academic Press, 1976, p. 123-133.

Capuzzo, D.I. (1983): On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming. Appl. Math. Optim., 10, p. 367-377, 1983.

Dernado, E. (1982): Dynamic Programming (models and applications). Prentice-Hall, Inc. Englewood Clitts, New Jersey, 1982.

Devlin, K. (1985): The golden age of mathematics. New Scientist 18 april, p. 3o-33, 1985.

Dreyfus, S.E. (1960): Dynamic Programming and the Calculus of Variations. J. Math. Anal. Appl.,1, p. 228-239, 1960.

Elmaghraby, S.E. (1970): The Concept of "State" in Discrete dynamic Programming. J. Math. Anal. Appl., 29, p. 523-557,1970.

Fischer, P. (1974): On Bellman's Functional Equation. J. Math. Anal. Appl., 46, p. 212-228, 1974.

Fischer, P. (1975a): On Bellman's Functional Equation - II. J. Math. Anal. Appl., 49, p. 786-794, 1975.

Fischer, P. (1975b): On a Functional Equation of Dynamic programming. J. Math. Anal. Appl., 51, p. 176-187, 1975.

Hinderer, K. (1970): Foundations of non-Sta-tionary Dynamic Programming with Discrete Time parameter. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 33, Springer-Verlag, 1970.

Ibaraki, T. (1973): Solvable Classes of Discrete Dynamic programming. J. Math. Anal. Appl., 43, p. 642-693, 1973.

Iwamoto, S. (1977a): Invers theorem in Dynamic Programming I. J. Math. Anal. Appl., 58, p. 113-134, 1977.

Iwamoto, S. (1977b): Dynamic Programming Approach to Inequalities. J. Math. Anal. Appl., 58, p. 687-705, 1977.

Iwamoto, S. (1979): Some Operations on Dynamic Programmings with One-dimentional state Space. J. Math. Anal. Appl., 69, p. 263-282, 1979.

Iwamoto, S. (1981): Inversion of Dynamic Programs and its Applications to Allocation Processes. J. Math. Anal. Appl., 81, p. 474-496, 1981.

Iwamoto, S. & Wang, C-L. (1983): Continuous Dynamic Programming Approach to Inequalities, I. J. Math. Anal. Appl., 96, p. 119-129, 1983.

Iwamoto, S. & Wang, C-L. (1986): Continuous Dynamic Programming Approach to Inequalities, II. J. Math. Anal. Appl., 118, p. 279-286, 1986.

Kapoor, S. & Reingold, E.M. (1985): Recurrence Relations Based on Mimmization and Maximization. J. Math. Anal. Appl., 109, p. 591-604, 1985.

Kardos, P. (1981): On generalized Bellman´s Functional Equation. Metrika., 28, p. 139-149, 1981.

Karp, R.M. & Held, M. (1967): Finite-State processes and Dynamic Programming. SIAM J. Appl. Math., 15, p.693-718, 1967.

Kasperski, A. (1980): The Structure of the set of optimal Strategies For certain Functional Equation of the Dynamic Programming in case of the concave Function. Demonstr. Math., 13, p. 597-611, 1980.

Kasperski, A. (1981): On the convergence of the sequence of Optimal Strategies for a certain Functional Equation of the Dynamic Programming. Demonstr. Math., 14, p. 605-619, 1981.

Kieltyka, S. (1981): On differentiability of the solution of some Functional Equation of Dynamic Programming. Demonstr. Math., 14, p. 669-686, 1981.

Mirică, S. (1985): Optimal Feedback Control for a Class of Bottleneck Problems. J. Math. Anal. Appl., 112, p. 221-235, 1985.

Mitten, L.G. (1964): Composition Principles for synthesis of Optimal multistage Processes. Operations Res., 12, p. 610-619, 1964.

Morin, T.L. (1982): Monotonicity and the principle of Optimality. J. Math. Anal. Appl., 88, p. 665-674, 1982.

Murray, D.H. & Yakowitz, S.J. (1984): Differential Dynamic Programming and Newton's method for Discrete Optimal control problems. J. Optim. Theory Appl., 43, p. 395-414, 1984.

Nemhauser, G.L. (1966): Introduction to Dynamic Programming. John Wiley and sons, Inc, 1966.

Niss, M. (1984): Kritisk matematikundervisning - nødvendig men vanskelig. IMFUFA TEKST, nr.84, p. 43-56, Roskilde Universitetscenter 1984.

Niss, M.: Upublicerede noter om ""Matematik i dag".

Pachpatte, B.G. (1975): On some generalisations of Bellman's Lemma. J. Math. Anal. Appl., 51, p. 141-150, 1975.

Pontryagin, L.S. et al (1962): The Mathematical Theory of Optimal Processes. John Wiley and Sons, Inc. 1962.

Puterman, M.L. (ed) (1978): Dynamic Programming and its applications. Academic Press, Inc. New York, 1978.
Proceedings of the International Conference on Dynamic Programming and its Applications, University of British Columbia, Vancouver, Canada April 14 - 16, 1977.

Puterman, M.L. & Brumelle, S.L. (1979): On the Convergence of policy iteration in stationary Dynamic Programming. Math. Oper. Res., 4, p. 60-69, 1979.

Sniedovich, M. (1978): Dynamic Programming and Principles of Optimality. J. Math. Anal. Appl., 65, p. 586-606, 1978.

Sniedovich, M. (1986): A new Look at Bellman's Principle of Optimality. J. Opt. Theory Appl., 49, p. 161-176, 1986.

Sugiyama, H. (1986): Principle of Dynamic Programming as a Natural Law Doscovered by Richard Bellman. J. Math. Anal. Appl. 119, p. 55-71, 1986.

Vestergaard, P.D. (1984): Løste og uløste matematiske problemer. Ålborg Universitetscenter, 1984.

Vinter, R.B. (1984): Dynamic Programming for Optimal Control problems with terminal constraints.
Recent Matematical Methods in Dynamic Programming (Rome 1984). Lec. Notes in Math., 1119, p.190-202, Springer 1985.

Wang, C-L. (1986): The Principle and Models of Dynamic programming. J. Math. Anal. Appl., 118, p.287-308, 1986.

White, D.J. (1969): Dynamic Programming.
Olive & Boyd (Edinburgh) and Holden-Day, Inc., San Francisco, 1969.

White, D.J. (1975): Dynamic Programming and Duality in linear Programming. J. Math. Anal. Appl., 51, p. 695-705, 1975.

BILAG I

Bevis for Theorem 1 i Bellman: Dynamic Programming. Kap. 1 §9, p. 12 ff.

Det, sætningen udtaler sig om, er kontinuiteten af løsningen til funktionalligningen

$$f(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y)) \}, \tag{1}$$

der er dannet som konsekvens af en uendeligtrins proces. For at vise sætningen, der bliver præsenteret nedenfor, er vi nødsaget til først at gøre nogle overvejelser vedrørende n-trins processen. Der er iøvrigt tale om en allokeringsproces. n-trinsprocessen er et rekursivt forløb (næste trin bygger på det just "værende"). Rekursionsligningen ser således ud:

$$\begin{cases} f_1(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) \} & (2) \\ f_{n+1}(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f_n(ay + b(x-y)) \}. & (3) \end{cases}$$

Hvis vi kan vise 1°) at alle f_n er kontinuerte, 2°) at (f_n) konvergerer uniformt, 3°) at $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ er kontinuert, samt 4°) at f løser (1), vil vi have godtgjort eksistensen af en kontinuert løsning til (1). Derefter skal det blot efterses om dette f er den eneste, der duer. Det er en sætning fra analysen, at $1° \wedge 2° \Rightarrow 3°$, så vi skal "blot" vise 1°, 2° og 4° samt entydigheden. Vi er nu klar til at opstille teoremet og vise det:

THEOREM 1. Antag, at

(a) g, h er kontinuerte funktioner af x for $x \geq 0$ med $g(0) = h(0) = 0$,

(b) hvis

$$m(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \max(|g(y)|, |h(y)|)$$

og $c = \max\{a, b\}$, da vil $\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x) < \infty$ for alle $x \geq 0$

og (c) $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < 1$,

da findes netop én løsning til

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} T(f, y),$$

hvor $T(f, y) = g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))$,

som er kontinuert med $f(0) = 0$.

Bevis. Først vil vi vise, at hvis g, h og k er kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (dvs for $x \geq 0$), så er funktionen

(4) $$\varphi(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + k(ay + b(x-y))\}$$

også kontinuert. Når dette er gjort kan vi nemlig ved induktion vise, at det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at f_n er kontinuert. Lad nu $x_0 \geq 0$ og et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Vi vælger et kompakt (afsluttet & begrænset) interval at bevæge os i: $[0, x_0 + 1]$. Da g, h og k er kontinuerte på et kompakt interval er de også uniformt kontinuerte. Vi kan således vælge et $\delta \in]0, 1[$ således, at

(5) $$|g(z_1) - g(z_2)| < \varepsilon/3,$$

(6) $$|h(z_1) - h(z_2)| < \varepsilon/3$$ og

$$(7) \qquad |k(z_1) - k(z_2)| < \varepsilon/3$$

for alle $z_1, z_2 \in [0, x_0 + 1]$, når $|z_1 - z_2| < \delta$.

Vi betragter nu et $\overset{\text{vilkårligt}}{x_1}$, hvor $|x_0 - x_1| < \delta$. Da

$$|x_0 - x_1| < \delta \iff -\delta < x_0 - x_1 < \delta$$

$$\Rightarrow x_1 < x_0 + \delta < x_0 + 1$$

er x_1 element i $[0, x_0+1]$. Af (4) fås nu, at

$$\varphi(x_0) = \max_{0 \le y \le x_0} \{ g(y) + h(x_0 - y) + k(ay + b(x_0 - y)) \}$$

$$(*) \qquad \ge g(y) + h(x_0 - y) + k(ay + b(x_0 - y)) \quad \text{for alle } y \in [0, x_0]$$

$$= g(y) + h(x_1 - y) - h(x_1 - y) + h(x_0 - y) + k(ay + b(x_1 - y))$$
$$- k(ay + b(x_1 - y)) + k(ay + b(x_0 - y)) \quad \text{for alle } y \in [0, x_0]$$

$$= g(y) + h(x_1 - y) + k(ay + b(x_1 - y))$$
$$+ (h(x_0 - y) - h(x_1 - y)) + (k(ay + b(x_0 - y)) - k(ay + b(x_1 - y)))$$
$$\text{for alle } y \in [0, x_0].$$

Vi har, at både $x_0 - y$, $x_1 - y$, $ay + b(x_0 - y)$ og $ay + b(x_1 - y)$ tilhører $[0, x_0 + 1]$, idet

$$0 \le \begin{cases} x_0 - y \le x_0 \\ x_1 - y \le x_1 \end{cases} < x_0 + 1,$$

og

$$0 \le \begin{cases} ay + b(x_0 - y) = (a-b)y + bx_0 \\ ay + b(x_1 - y) = (a-b)y + bx_1 \end{cases}$$

For $a \ge b$ er

$$\begin{cases} (a-b)y + bx_0 \le (a-b)x_0 + bx_0 = ax_0 < x_0 < x_0 + 1 \\ (a-b)y + bx_1 \le (a-b)x_0 + b(x_0 + 1) = ax_0 + b < x_0 + b < x_0 + 1 \end{cases}$$

For $a < b$ er

$$\left\{\begin{matrix}(a-b)y+bx_0\\(a-b)y+bx_1\end{matrix}\right. < \left\{\begin{matrix}bx_0\\bx_1\end{matrix}\right. \leq b\max\{x_0,x_1\} \leq b(x_0+1) < x_0+1.$$

Endvidere har vi, at

$$|(x_0-y)-(x_1-y)| = |x_0-x_1| < \delta$$

og

$$|(ay+b(x_0-y))-(ay+b(x_1-y))| = |b(x_0-x_1)| = b|x_0-x_1| < |x_0-x_1| < \delta,$$

hvorfor vi ifølge (6) og (7) har

$$|h(x_0-y)-h(x_1-y)| < \varepsilon/3$$

og

$$|k(ay+b(x_0-y))-k(ay+b(x_1-y))| < \varepsilon/3,$$

og dermed, at

$$(8) \qquad \varphi(x_0) \geq g(y)+h(x_1-y)+k(ay+b(x_1-y))-\varepsilon/3-\varepsilon/3$$

for alle $y \in [0,x_0]$. Hvis $x_1 < x_0$ gælder (8) selvfølgelig også for alle $y \in [0,x_1]$. Er $x_1 > x_0$, vil vi gerne slutte, at en ulighed à la (8) også gælder for alle $y \in [0,x_1]$.
For $y = x_0$ har vi ifølge (7), at

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &\geq g(x_0)+h(x_0-x_0)+k(ax_0+b(x_0-x_0))\\
&= g(x_0)+h(x_0-x_0)+k(ax_0+b(x_0-x_0))+g(y)-g(y)\\
&\qquad + h(x_1-y)-h(x_1-y)+k(ay+b(x_1-y))-k(ay+b(x_1-y))\\
&= g(y)+h(x_1-y)+k(ay+b(x_1-y))\\
&\qquad + (g(x_0)-g(y))+(h(x_0-x_0)-h(x_1-y))\\
&\qquad + (k(ax_0+b(x_0-x_0))-k(ay+b(x_1-y)))\\
&\geq g(y)+h(x_1-y)+k(ay+b(x_1-y))-\varepsilon/3-\varepsilon/3-\varepsilon/3\\
&= g(y)+h(x_1-y)+k(ay+b(x_1-y))-\varepsilon\end{aligned}$$

idet

$$|x_0 - y| \le |x_0 - x_1| < \delta$$

og $$|(x_0 - x_0) - (x_1 - y)| = |-(x_1 - y)| = |x_1 - y| \le |x_1 - x_0| < \delta$$

og $$|(ax_0 + b(x_0 - x_0)) - (ay + b(x_1 - y))| = |a(x_0 - y) - b(x_1 - y)|$$

Nu er $a(x_0 - y) \le 0$ og $-b(x_1 - y) \le 0$, hvorfor

$$|a(x_0 - y) - b(x_1 - y)| = -(a(x_0 - y) - b(x_1 - y))$$
$$= b(x_1 - y) + a(y - x_0)$$
$$< \begin{cases} b(x_1 - y) + b(y - x_0) = b(x_1 - x_0) < x_1 - x_0 < \delta & \text{for } b \ge a \\ a(x_1 - y) + a(y - x_0) = a(x_1 - x_0) < x_1 - x_0 < \delta & \text{for } a \ge b. \end{cases}$$

Derfor har vi altså, ved brug af (5), (6) og (7), at

$$\varphi(x_0) \ge g(y) + h(x_1 - y) + k(ay + b(x_1 - y)) - \varepsilon$$

for alle $y \in [0, x_1]$, $(x_1 > x_0)$. Men så vil også

$$\varphi(x_0) \ge \max_{0 \le y \le x_1} \{g(y) + h(x_1 - y) + k(ay + b(x_1 - y))\} - \varepsilon$$
$$= \varphi(x_1) - \varepsilon \quad \text{for alle } x_1 \text{ med } |x_0 - x_1| < \delta.$$

På analog måde kan det godtgøres, at

$$\varphi(x_1) \ge \varphi(x_0) - \varepsilon,$$

hvorfor

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_1) \ge -\varepsilon \ \wedge \ \varphi(x_0) - \varphi(x_1) \le \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |\varphi(x_0) - \varphi(x_1)| \le \varepsilon \quad \text{for alle } x_1 \text{ med } |x_0 - x_1| < \delta,$$

og dermed er φ kontinuert i x_0. Da x_0 var vilkårligt valgt er φ kontinuert.

For k lig med nulfunktionen indses, at

$$f_1(x) = \max_{0 \le y \le x} \{g(y) + h(x - y)\}$$

er kontinuert.

Antag så, at f_{n-1} er kontinuert. Da er

$$f_n(x) = \max_{0 \le y \le x} \{g(y) + h(x-y) + f_{n-1}(ay + b(x-y))\}$$

kontinuert (idet vi har sat $k = f_{n-1}$). Hermed har vi vist, at f_n er kontinuert for alle n, ved induktion.

Næste skridt er at vise, at f_n konvergerer uniformt. Betragt da de rekursive ligninger

(8) $$f_{n+1}(x) = \max_{0 \le y \le x} \{g(y) + h(x-y) + f_n(ay + b(x-y))\} = \max_{0 \le y \le x} T(f_n, y)$$

(9) $$f_{n+2}(x) = \max_{0 \le y \le x} \{g(y) + h(x-y) + f_{n+1}(ay + b(x-y))\} = \max_{0 \le y \le x} T(f_{n+1}, y)$$

og lad y_n og y_{n+1} være de y, der giver maximum i (8) hhv. (9), dvs.

$$f_{n+1}(x) = T(f_n, y_n) \quad \text{og} \quad f_{n+2}(x) = T(f_{n+1}, y_{n+1})$$

Da y_n og y_{n+1} ikke nødvendigvis giver maximum i (9) hhv (8) fås

$$f_{n+1}(x) = T(f_n, y_n) \ge T(f_n, y_{n+1})$$

og

$$f_{n+2}(x) = T(f_{n+1}, y_{n+1}) \ge T(f_{n+1}, y_n),$$

hvoraf

$$f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) = T(f_n, y_n) - T(f_{n+1}, y_{n+1})$$
$$\ge T(f_n, y_{n+1}) - T(f_{n+1}, y_{n+1})$$

og

$$f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) = T(f_n, y_n) - T(f_{n+1}, y_{n+1})$$
$$\le T(f_n, y_n) - T(f_{n+1}, y_n).$$

Dvs, der gælder

$$|f_{n+1}(x)-f_{n+2}(x)| \le \max\{|T(f_n,y_{n+1})-T(f_{n+1},y_{n+1})|, \\ |T(f_n,y_n)-T(f_{n+1},y_n)|\}$$

Vi definerer nu, at

$$(10) \qquad u_n(x) = \max_{0\le z\le x} |f_n(z)-f_{n+1}(z)| \quad , n=1,2,\ldots$$

dvs, at

$$(11) \qquad u_{n+1}(x) = \max_{0\le z\le x} |f_{n+1}(z)-f_{n+2}(z)|$$

Af definitionen på T følger, at

$$|T(f_n,y_{n+1})-T(f_{n+1},y_{n+1})| = |g(y_{n+1})+h(x-y_{n+1})+f_n(ay_{n+1}+b(x-y_{n+1})) \\ -g(y_{n+1})-h(x-y_{n+1})-f_{n+1}(ay_{n+1}+b(x-y_{n+1}))|$$

$$= |f_n(ay_{n+1}+b(x-y_{n+1}))-f_{n+1}(ay_{n+1}+b(x-y_{n+1}))|$$

og tilsvarende:

$$|T(f_n,y_n)-T(f_{n+1},y_n)| = |f_n(ay_n+b(x-y_n))-f_{n+1}(ay_n+b(x-y_n))|.$$

Med $c=\max\{a,b\}$ har vi, at

$$(12) \quad \begin{cases} ay_{n+1}+b(x-y_{n+1}) \le cy_{n+1}+c(x-y_{n+1}) = cx \\ ay_n+b(x-y_n) \le cy_n+c(x-y_n) = cx. \end{cases}$$

Af (11) følger nu, at

$$u_{n+1}(x) \le \max_{0\le z\le x}\Big(\max\{|T(f_n(z),y_{n+1}(z))-T(f_{n+1}(z),y_{n+1}(z))|, \\ |T(f_n(z),y_n(z))-T(f_{n+1}(z),y_n(z))|\}\Big)$$

$$= \max_{0\le z\le x}\Big(\max\{|f_n(ay_{n+1}(z)+b(z-y_{n+1}(z))) \\ -f_{n+1}(ay_{n+1}(z)+b(z-y_{n+1}(z)))|, \\ |f_n(ay_n(z)+b(z-y_n(z))) \\ -f_{n+1}(ay_n(z)+b(z-y_n(z)))|\}\Big)$$

Ved brug af (12) fås nu, at

$$u_{n+1}(x) \le \max_{0\le z\le x}\left(\max\{|f_n(cz)-f_{n+1}(cz)|, |f_n(cz)-f_{n+1}(cz)|\}\right)$$

$$= \max_{0\le z\le x} |f_n(cz)-f_{n+1}(cz)|$$

$$\le \max_{0\le z\le x}\left(\max_{0\le v\le cx} |f_n(v)-f_{n+1}(v)|\right)$$

$$= \max_{0\le z\le x} u_n(cx)$$

$$= u_n(cx).$$

Desuden har vi, at

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)\}$$

$$= g(y_0)+h(x-y_0) \ge g(y_1)+h(x-y_1)$$

og

$$f_2(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)+f_1(ay+b(x-y))\}$$

$$= g(y_1)+h(x-y_1)+f_1(ay_1+b(x-y_1))$$

$$\ge g(y_0)+h(x-y_0)+f_1(ay_0+b(x-y_0))$$

p.gr.a. definitionen af y_0 og y_1. Vi finder nu, at

$$f_1(x)-f_2(x) = g(y_0)+h(x-y_0)-g(y_1)-h(x-y_1)-f_1(ay_1+b(x-y_1))$$

$$\le g(y_0)+h(x-y_0)-g(y_0)-h(x-y_0)-f_1(ay_0+b(x-y_0))$$

$$= -f_1(ay_0+b(x-y_0))$$

$$\le |f_1(ay_0+b(x-y_0))|$$

og

$$f_1(x)-f_2(x) \ge g(y_1)+h(x-y_1)-g(y_1)-h(x-y_1)-f_1(ay_1+b(x-y_1))$$

$$= -f_1(ay_1+b(x-y_1))$$

$$\ge -|f_1(ay_1+b(x-y_1))|$$

hvoraf

$$|f_1(x)-f_2(x)| \le \max\{|f_1(ay_0+b(x-y_0))|, |f_1(ay_1+b(x-y_1))|\}$$
$$\le \max |f_1(cx)|$$
$$= |f_1(cx)|$$
$$= \max_{0\le z\le cx} \{g(z)+h(cx-z)\}$$
$$\le \max_{0\le z\le cx} \left(2\max\{|g(z)|,|h(z)|\}\right)$$
$$= 2\max_{0\le z\le cx}\left(\max\{|g(z)|,|h(z)|\}\right)$$
$$= 2m(cx).$$

Derfor er

$$u_1(x) = \max_{0\le z\le x} |f_1(z)-f_2(z)|$$
$$\le \max_{0\le z\le x} 2m(cz)$$
$$= 2m(cx),$$

idet m er en voksende funktion. Da

$$u_1(x) \le 2m(cx)$$

er ved induktion også

$$u_2(x) \le u_1(cx) \le 2m(c^2x)$$

etc. ... $\quad u_n(x) \le 2m(c^n x)$

Da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x)$ er konvergent ifølge sætningens forudsætning (b) for alle $x\ge 0$ er $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uniformt konvergent på ethvert interval $[0,x_0]$, hvor x_0 er vilkårlig. Og når dette er tilfældet er også (f_n) uniform konvergent, idet (f_n) er en uniform Cauchy-følge og at R er fuldstændig. Det ses af, at

$$\max_{0\le z\le x_0} |f_{n+k}(z)-f_n(z)| = \max_{0\le z\le x_0} |f_{n+k}(z)-f_{n+k-1}(z)+f_{n+k-1}(z)-\dots$$
$$-f_{n+1}(z)+f_{n+1}(z)-f_n(z)|$$

$$\leq \max_{0\leq z\leq x_0}\left\{\left|f_{n+k}(z)-f_{n+k-1}(z)\right|+\left|f_{n+k-1}(z)-f_{n+k-2}(z)\right|+\cdots\right.$$

$$\left.+\left|f_{n+1}(z)-f_n(z)\right|\right.$$

$$\leq \max_{0\leq z\leq x_0}\left|f_{n+k}(z)-f_{n+k-1}(z)\right|+\cdots+\max_{0\leq z\leq x_0}\left|f_{n+1}(z)-f_n(z)\right|$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\max_{0\leq z\leq x_0}\left|f_{n+i+1}(z)-f_{n+i}(z)\right|$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}u_{n+i}(x_0)\quad,\ k\geq 1$$

Til et givet $\varepsilon'\in\mathbb{R}_+$ kan vi finde et $n_0\in\mathbb{N}$ således, at der for $n\geq n_0$ gælder

$$\sum_{i=0}^{k-1}u_{n+i}(x_0)<\varepsilon\quad,\quad k\geq 1$$

hvilket viser, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er uniform konvergent mod en grænsefunktion f på $[0,x_0]$. Da x_0 var vilkårlig er f kontinuert på $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$.

Vi mangler nu, at efterse at $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ virkelig løser funktionalligningen. Af rekursionsligningen

$$f_n(x)=\max_{0\leq y\leq x}\{g(y)+h(x-y)+f_{n-1}(ay+b(x-y))\}$$

sluttes, at

$$f(x)=\sup_{0\leq y\leq x}\{g(y)+h(x-y)+f(ay+b(x-y))\}.$$

Lad nemlig $\varepsilon''>0$ være givet. Da findes et $n_1\in\mathbb{N}$ således, at $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon/2$ for alle $n\geq n_1$. For $n\geq n_1+1$ har vi så, at

$$f(x)\geq f_n(x)-\varepsilon/2=\max_{0\leq y\leq x}\{g(y)+h(x-y)+f_{n-1}(ay+b(x-y))\}-\varepsilon/2$$

$$\geq\sup_{0\leq y\leq x}\{g(y)+h(x-y)+f(ay+b(x-y))-\varepsilon/2\}-\varepsilon/2$$

$$= \sup_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f(ay+b(x-y))\} - \varepsilon$$

Og på helt tilsvarende måde opnås, at

$$f(x) \le \sup_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f(ay+b(x-y))\} + \varepsilon \, ,$$

men så er

$$f(x) = \sup_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f(ay+b(x-y))\} .$$

Og da f er kontinuert er

$$f(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + f(ay+b(x-y))\}$$

Endelig skal det vises, at f er den eneste funktion, der løser funktionalligningen. Og det gør bogen udmærket.

Bilag II

Angel, E: From Dynamic Programming to Fast Transform, J. Math. Anal. Appl., 119, s. 82-89, 1986.

Assaf, D.: Invariant problems in Discounted Dynamic Programming, Advances Appl. Probab., 10, s. 472-490, 1978

Assaf, D.: Invariant Problems in Dynamic Programming - Average Reward Criterion, Stochastic Processes Appl., 10, s. 313-322, 1980.

Balder, E.J.: A New Look at the Existence of p-optimal Policies in Dynamic Programming, Math. Oper. Res., 6, s. 513-517, 1981.

Baldwin, J.F. & Pilsworth, B.W.: Dynamic Programming for Fuzzy Systems with Fuzzy Environment, J. Math. Anal. Appl., 85, s. 1-24, 1982.

Bartmann, D: Reduction of State Space in Dynamic Programming with Integrated Forecasting, Operations Research and economic theory, s. 183-193, Springer, 1984.

Belbas, S.A.: A Remark on Dynamic Programming with Final State Constraints, Syst. Control Lett., 4, s. 343-346, 1984.

Bellman, R.: Some Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, s. 1077-1082, 1953.

Bellman, R.: Dynamic Programming and Lagrange Multipliers, Proc. Nat. Acad. USA, 42, s. 767-769, 1956.

Bellman, R.: Adaptive Control Processes - A guided Tour. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961.

Bellman, R.: Dynamic Programming and Inverse Optimal Problems in Mathematical Economics, J. Math. Anal. Appl., 29, s. 424-428, 1970

Bellman, R.: Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming XVI: An Equation Involving Iterates, J. Math. Anal. Appl., 30, s. 592-595, 1970.

Bellman, R.: Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming XVII: Policies Dependent on Critical State Variables, J. Math. Anal. Appl. 33, s. 231-233, 1971.

Bellman, R.: Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming XVIII: Minimum Convolutions and Green's Functions, J. Math. Anal. Appl., 33, s. 497-499, 1971.

Bellman, R.: Nonlinear Equations and Dynamic Programming; Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., 2, s. 509-511, 1978.

Bellman, R.: Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations and Dynamic Programming, Comput. Math. Appl., 9, s. 547-548, 1983

Bellman, R. & Karush, R.: Dynamic Programming: A Bibliograhy of Theory and Application, Rand Corp. Memorandum, RM-3951- PR, 1964.

Bellman, R. & Roosta, M.: A Technique for the Reduction of Dimensionality in Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 88, s. 543-546, 1982.

Bellman, R. et al.: Splines via Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 38, s. 471-479, 1972.

Bellman, R. et al: Dynamic Programming and Bicubic Spline Interpolation, J. Math. Anal. Appl., 44, s. 160-175, 1973.

Bertelé, U. & Brioschi, F.: A Theorem in Nonserial Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 29, s. 351-353, 1970.

Beutler, F.J. & Ross, K.W.: Optimal Policies for Controlled Markov Chains With a Constraints, J. Math. Anal. Appl., 112, s. 236-252, 1985

Bistritskas, W.: Decision Method of Dynamic Programming Equations, Lith. Math. J., 17, s. 448-454, 1978; oversat fra Litov. mat. Sbornik, 17, s. 21-29, 1977.

Blair, C.E: Axioms and Examples Related to Ordinal Dynamic Programming, Math. Oper. Res., 9, s. 345–347, 1984

Brandstatter, J.J.: Dynamic Programming and Eikonal Equation for Anisotropic Media, J. Math. Anal. Appl., 46, s. 312–316, 1974.

Byers, T. & Waterman, M.S.: Determining All Optimal and Near optimal Solutions When Solving Shortest Path Problems by Dynamic Programming, Oper. Res., 32, s. 1381–1384, 1984

Cangpu, W.: Multi-Criteria Dynamic Programming, Sci. Sin., 23, s. 814–822, 1980.

Capuzzo, D.I. & Ishii, H.: Approximate Solutions of the Bellman Equations of Deterministic Control Theory, Appl. Math. Optim., 11, s. 161–181, 1984.

Clement, M.F.: Categorical Axiomatics of Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 51, s. 47–56, 1979.

Collins, D.C.: Reduction of Dimensionality in Dynamic Programming via the Method of Diagonal Decomposition, J. Math. Anal. Appl. 30, s. 223–234, 1970

Collins, D.C.: State Dynamic Programming: Quadratic Costs, Linear Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 31, s. 235–253, 1970.

Collins, D.C.: Terminal State Dynamic Programming for Differential-Diffeence Equations, J. Math. Anal. Appl., 31, s. 487-503, 1970.

Collins, D.C. & Lew, A.: Dimensional Approximation in Dynamic Programming by Structural Decomposition, J. Math. Anal. Appl., 30, s. 375-884, 1970.

Daniel, T.W.: Splines and Efficiency in Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 54, s. 402-408, 1976.

Denardo, E.V. & Rothblum, U.G.: Affine Structure and Invariant Policies for Dynamic Programs, Math. Oper. Res., 8, s. 342-365, 1983.

Distefano, N.: Dynamic Programming and the Optimization of Two-Point Boundary Value Systems, J. Math. Anal. Appl., 52, s. 142-151, 1975.

Dreyfus, S.E.: Dynamic Programming and discrete maximum principle, Symp. Math., 19 Program. Mat. Appl., Convego, 1974, s. 301-312, (1976).

Ellis, D.: An Abstract Setting for the Notion of Dynamic Programming, Rand Corporation, P. 783, 1955.

Elster, K.-H. & Patzer, H.: Zur dynamischen Optimierung unendlichstufiger Prozesse in nicht-autonomen Systemen, Ekonom-mat. Obzor, 14, s. 284-296, 1978.

Elster, K.-H. & Patzer, H.: Zur dynamischen Optimierung unendlichstufiger Prozesse bei speziellen Problemstellungen, Ekonom-mat.-Obzor, 14, s.297-307, 1978

Esogbue, A.O.: Dynamic Programming, fuzzy sets, and the Modelling of R&D. Management Control Systems, IEEE trans. Systems Man. Cybernet., 13, s.18-30, 1983.

Esogbue, A.O. & Bellman, R.: Fuzzy Dynamic Programming and Its Extensions, Fuzzy sets and decision analysis, TIMS Stud. Manage. Sci., 20, s.147-167, 1984

Evlanov, L.G. & Trubitsin, O.N.: Dynamic Programming with Qualitative Estimates of the Criterion Functional, Autom. Remote Control, 41, s.748-754, 1980

Flynn, J.: On Optimality Critieria for Dynamic Programs with Long Finite Horizons, J. Math. Anal. Appl., 76, s.202-208, 1980

Focke, J. & Klötzler, R: Zur Grundkonzeption der diskreten Dynamischen Optimierung, Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-naturw. R27, s.447-467, 1978.

Fox, B.L.: Finite-State Approximations to Denumerable-State Dynamic Programs, J. Math. Anal. Appl., 34, s.665-670, 1971

Giannessi, F.: Functional Aspect of Dynamic Programming. General Results.
Control Cybernetics, 2(1973), no. 3/4, s. 31-42, 1974.

Gilmore, P.C.: Cutting Stock, Linear Programming Knapsacking Dynamic Programming and Integer Programming, Some Interconnections,
I. Ann. Discrete Math., 4, s. 217-235, 1979.

Gluss, B.: An Optimum Policy for Detecting a Fault in a Complex System,
Oper. Res., 7, s. 468-477, 1959

Grey, D.R.: Nonnegative Matrices, Dynamic Programming and a Harvesting Problem,
J. Appl. Probab., 21, s. 685-694, 1984.

Guari, E.M. & Sudborough, I.H.: Improved Dynamic Programming Algorithms for Bandwidth Minimization and the MINCUT Linear Arrangement Problems, J. Algorithms, 5, s. 531-546, 1984

Haneveld, W.K.K.: On the Behavior of the Optimal Value Operator of dynamic programming,
Math. Oper. Res., 5, s. 308-320, 1980.

Hartl, R. & Sethi, S.P.: Optimal Control of a Class of Systems with Continuous Lags: Dynamic Programming Approach and Economic Interpretations,
J. Optim. Theory Appl., 43, s. 73-88, 1984

Hartley, R.: A Simple Proof of Whittle's Bridging Condition in Dynamic Programming, J. Appl. Probab., 17, s. 1114-1116, 1980.

Hartwig, A.: Recursive Branch and Bound, Optimization, 16, s. 219-228, 1985.

Haymond, R.E.: Discontinuities of Optimal Return in Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 30, s. 639-644, 1970

Hee, K.M.v. & Wal, J.v.d.: Strongly Convergent Dynamic Programming: some results, Bonner Math. Schriften, 98, s. 165-172, 1977.

Helman, P. & Rosenthal, A.: A Comprehensive Model of Dynamic Programming, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 6, s. 319-334, 1985.

Henig, M.I: Vector-Valued Dynamic Programming, SIAM J. Control Optim., 21, s. 490-499, 1983.

Hinderer, K.: Estimates for Finite-Stage Dynamic Programs, J. Math. Anal. Appl., 55, s. 207-239, 1976.

Hinderer, K.: Does the Value Iteration for Finite-Stage Discrete Dynamic Programs Hold "Always"?, Bonner Math. Schriften, 98, s. 41-56, 1977.

Hinderer, K.: On approximate Solutions of Finite-Stage Dynamic Programs, Dynamic Programming and Its Applications, Proc. Int. Conf., Vancouver, s. 289-317, 1978

Hinderer, K. & Hübner, G.: On Approximate and Exact Solutions for Finite Stage Dynamic Programs, Markov Decis. Theory, Proc. adv. Semin., Amsterdam, 1976, s. 57-76, 1977.

Hoffmann, A.: Sufficient Conditions for Optimality of a Control Problem with Discrete Time, Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math. Naturwiss. Tech., nr. 2N, s. 357-360, 1981.

Hordijk, A.: On the Convergence of the average Expected Return in Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 46, s. 542, 1974

Hordijk, A. & Tijms, H. C.: A Counterexample in Discounted Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 39, s. 455-457, 1972

Iwamoto, S.: Inverse theorem in Dynamic Programming. II., J. Math. Anal. Appl., 58, s. 249-279, 1977.

Iwamoto, S.: Inverse Theorem in Dynamic Programming. III., J. Math. Anal. Appl., 58, s. 439-448, 1977.

Iwamoto, S.: Reversed Control Processes, Bull. Math. Stat., 19, s. 1-11, 1980

Iwamoto, S.: Inverse Functional Equations for Bellman's Allocations Process, Bull. Inf. Cybern, 20, s. 57-68, 1983.

Iwamoto, S.: A Dynamic Inversion of the Classical Variational Problems, J. Math. Anal. Appl, 100, s. 354-374, 1984.

Iwamoto, S. et. al.: Some Theorems on Reverse Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 119, s. 282-299, 1986.

Johnson, D.S. & Niemi, K.A.: On Knapsacks, Partitions, and a New Dynamic Programming Technique for Trees, Math. Oper. Res., 8, s. 1-14, 1983.

Kertz, R.P. & Nachman, D.C.: Persistently Optimal Plans for nonstationary Dynamic Programming: The Topology of weak convergence case, Ann. Probab., 7, s. 811-826, 1979

Klein, M.: Complementary Slackness and Dynamic Programming, SIAM Rev., 25, s. 249-253, 1983

Kokame, H.: On Some Aspects in Stochastic Dynamic Programming J. Math. Anal. Appl., 65, s. 638-660, 1978.

Kolonko, M.: Bounds for the Regret Loss in Dynamic Programming under adaptive control, Z. Oper. Res. Ser. A-B, 27, s. 17-37, 1983.

Kondrat'ev, V.V. et al.: Optimization of Discrete-time Control by Successive Approximations, Autom. Remote Control, 41, s. 777-784, 1980.

Krikorian, K.V. & Leondes, C.T.: Dynamic Programming Using Singular Perturbations, J. Optimization Theory Appl., 38, s. 221-230, 1982.

Lehnerdt, M.: On the Structure of Discrete Sequential search Problems and of Their Solutions, Math. Operationsforch. Stat., Ser. Optimization, 13, s. 523-557, 1982.

Levary, R.R.: Dynamic Programming Models with Goal Objectives, Internat. J. Systems Sci., 15, s. 309-314, 1984.

Lewis, R.M.: A Supporting Hyperplane Derivation of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation of Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 75, s. 41-58, 1980.

Lindberg, P.O.: Parametrizing the Value Functions In Dynamic Programming, System Modeling and Optimization, Proc. 11th. IFIP Conf. (Copenhagen, 1983), Lecture Notes in Control and Information Sci., 59, s. 228-236, Springer, 1984.

Martelli, A. & Montanai, U: Nonserial Dynamic Programming: On the Optimal Stategy of Variable Elimination of the Rectangular Lattice, J. Math. Anal. Appl., 40, s. 226-242, 1972, Miele, A. & Cappellari, Jr. J.O.: Topics in Dynamic Programming for Rockets, Aerodynamics Report A-58 (unclassified) seccurity information. 1958.

Mine, H. & Ohne, K.: Decomposition of Mathematical Programming Problems by Dynamic Programming and Its Application to Block-Diagonal Geometric Programs, J. Math. Anal. Appl., 32, s. 370-385, 1970

Mine, H. & Tabata, Y.: A New Optimality Criterion for Discrete Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 37, s. 118-129, 1972.

Mine, H. et al.: Multilevel Decomposition of Nonlinear Programming Problems by Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 53, s. 7-28, 1976

Mine, H. et al.: Decomposition of Nonlinear Chance-Constrained Programming Problem by Dynamic Programming, J. Math. Anal. Appl., 56, s. 211-223, 1976.

Osborn, H.: On the Foundations of Dynamic Programming, Journal of Mathematics and Mechanics, 8, s. 867-873, 1959

Overton, R.S. & Wilson, T.G.: A Comparison of the minimum principle and differential Dynamic Programming, Numerical Optimization of Dynamic Systems, s. 75-100, 1980.

Ozden, M.: A new algorithm for Multidimensional Dynamic Programming Problems, Oper. Res. Lett., 2, s. 84-89, 1983.

Pachpatte, B.G.: On Some Integral Inequalities Similar to Bellman-Biheri Inequalitees, J. Math. Anal. Appl., 49, 1975.

Perevozchikov, A.G.: Dynamic Programming in multistep Vector Optimization Problems, Engrg. Cybernetics, 22, s. 21-24, 1985.

Porteus, E.: Conditions for Characterizing the Structure of Optimal Strategies in infinite-Horizon Dynamic Program, J. Optimization Theory Appl., 36, s. 419-432, 1982.

Puterman, M.L. & Brumelle, S.L.: The Analytic Theory of Policy Iteration, Dynamic Programming and Its Applications, Proc. Int. Conf., Vancouver, 1977, s. 91-113, (1978).

Quelle, G.: Dynamic Programming of Expectation and Variance, J. Math. Anal. Appl., 55, 1976.

Rojo, O.: On an Optimization Problem of Bellman, J. Math. Anal. Appl., 61, s. 208-216, 1977

Romanowsky, I.V.: On the Solvability of Bellman's functional Equation for a Markovian Decision Process, J. Math. Anal. Appl., 42, s. 485-498, 1973.

Rosen, R.: Optimality in Biology and Medicine, J. Math. Anal. Appl., 119, s. 203-222, 1986

Rosenthal, A.: Dynamic Programming is Optimal for Certain Sequential Decision Processes, J. Math. Anal. Appl., 73, s. 134-138, 1980

Rosenthal, A. & Helman, P.: First Steps Toward a New Theory of Dynamic Programming, Seventheenth Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing (Marticello, Ill., 1979), s. 509-514, Univ. Illinois, Urbana-Champaign, Ill. 1979.

Rupnik, Viljem: Stability Conditions on Continuous Dynamic Linear Programming, J. Math. Anal. Appl., 119, s. 171-181, 1986.

Sancho, N.G.F.: Routing Problems and Markovian Decision Processes, J. Math. Anal. Appl., 105, s. 76-83, 1985.

Saxe, J.B.: Dynamic Programming Algorithms for Recognizing Small-Bandwidth graphs in polynomial time, Ref. se Rosenthal, A. & Helman, P.

Schweitzer, P.J.: On the Solvability of Bellman's Functional Equations for Markov Renewal Programming, J. Math. Anal. Appl., 96, s. 13-23, 1983.

Schäl, M.: Estimation and Control in Finite State Discounted Dynamic Programming, Optimization theory and Algorithms (contolant, 1981), s. 239-253, Lecture Notes in Pure and Applied Math., 86, Dekker N.Y., 1983.

Schäl, M.: Stationary Policies in Dynamic Programming Models Under Compactness Assumptions, Math. Oper. Res., 8, s. 366-372, 1983.

Sebastian, H.-J.: Dynamic Programming for Problems with Time-Dependent Parameters, Differential Equations, 14, s. 242-249, 1978 (Translation from Differecial'nye Uravnenija, 14, s. 345-355, russian).

Sieber, N. & Sebastian, H.-J.: Einige Aspekte zur Entwicklung der Theorie der Optimalen Steuerung von Prozessen, Wiss. Z., Tech. Hochsch. Leipz. 3, s. 235-240, 1979.

Sladky, K.: Bounds on discrete dynamic Programming Recursions I: Models with non-negative Matrices, Kybernetika, 16, s. 526-547, 1980

Sladky, K.: Bounds on discrete dynamic Programming II: Polynomial Bounds on Problems with Block-triangular Structure, Kybernetika, 17, s. 310-328, 1981.

Sniedovich, M.: Some Comments on Preference Order Dynamic Programming Models, J. Math. Anal. Appl., 79, s. 489-502, 1981.

Sniedovich, M. & Smart, J. S.: Dynamic Programming: An Interactive Approach, J. Math. Anal. Appl., 86, s. 208-221, 1982.

Sobiezek, W.: On the Functional Equations of the Dynamic Programming with a Singular Point, Commentationes Math., Warszawa, 19 (1976-1977), s. 373-380, 1977.

Stidham, S. jun.: On the Convergence of successive approximations in Dynamic Programming with non-zero Terminal Reward, Z. Oper. Res., Ser. A25, s. 57-77, 1981.

Trynkin, V. V.: On the Smoothness of the Bellman Function, Vestn. Mosk. Univ., Ser. I, 1981, No. 1, s. 7-11, (Russian; English summery).

Tyndall, W. F.: On two Duality Theorems for Continuous Programmering Problems, J. Math. Anal. Appl., 31, s. 6-14, 1970.

Villarreal, B. & Karwan, M. H.: Multicriteria Dynamic Programming with an Application to the Integer Case, J. Optimization Theory Appl., 38, s. 43-69, 1982.

Villarreal, B. & Karwan, M.H.: An Interactive Dynamic Programming Approach to Multicriteria Discrete Programming, J. Math. Anal. Appl., 81, s. 524-545, 1981.

Vinter, R.B.: Dynamic Programming: A Global Approach to Determining Necessary and Sufficient Conditions of Optimality, Proc. 1978, IEEE Conf. on Decision and Control, incl. 17th. Symp. on Adaptive Processes, San Diego, Calif. 1979, s. 911-914, 1979.

Vinter, R.B & Lewis, R.M.: A Verification Theorem which Provides a Nessessary and Sufficient Conditions for Optimality, IEEE. Trans. Autom. Control AC-25, s. 84-89, 1980.

Waldmann, K.-H.: On Bounds for Dynamic Programs, Math. Oper. Res., 10, s. 220-232, 1985.

White, D.J.: Dynamic Programming, Markov Chains and the Method of Successive Approximations, J. Math. Anal. Appl., 6, s. 353-365, 1963.

White, D.J.: Dynamic Programming and Systems of Uncertain Duration: A Markov Model, J. Math. Anal. Appl., 29, s. 419-423, 1970.

White, D.J.: A Multi-Objective Version of Bellman's Inventory Problem, J. Math. Anal. Appl., 87, s. 219-228, 1982.

White, D. J.: Monotone Value Iteration for Discounted Finite Markov Decision Processes, J. Math. Anal. Appl., 109, s. 311-324, 1985.

Whitt, W.: Approximations of Dynamic Program: I, Math. Oper. Res., 3, s. 231-243, 1978.

Whitt, W.: Approximations of Dynamic Program: II, Math. Oper. Res., 4, s. 179-185, 1979.

Whittle, D.: Stability and Characterisation Conditions in Negative Programming, J. Appl. Probab, 17, s. 635-645, 1980.

Wu, C. P.: Optimal Control Problems with Non-scalar Valued Performance Criteria and Dynamic Programming, Control Science and Technology for the Progress of Society, 2 (Kyoto, 1981), s. 1472-1484, IFAC Proc. Ser., IFAC Laxenburg, 1982.

Zalmai, G. J.: Optimality Conditions and Lagrangian Duality in Continuous-Time Nonlinear Programming, J. Math. Anal. Appl., 109, s. 426-452, 1985.

Zhernak, A. N.: Analytic Solution of a Class of Optimization Problems, Math. USSR, Sb. 47, s. 391-394, 1984.

Zijm, W.H.M.: Continuous-Time Dynamic Programming Models, Fourth Formator Symposium on Mathematical Methods for the Analysis of Large-Scale Systems (Liblice, 1982), s. 589-602, Sympos. ČSAV, Academia, Prague, 1983.

Zolezzi, T.: Generalized Dynamic Programming, Nonlinear Variational Problems, Int. Workshop, Elba/Italy 1983, Res. Notes Math., 127, s. 123-124, 1985.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen,
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978.
Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. lo
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Billmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSES-TEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."

Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderõn Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach

Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"

- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"

redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor