

TEKST NR 15

1979

LEIF S. STRIEGLER

**STRUKTUREL
STABILITET**

OG

KATASTROFER

i systemer i og udenfor
termodynamisk
ligevægt

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss
- 3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og
videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.
- 6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik,
og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.
- 12/79 "Lineære differentiaalligninger og differentiaalligningssystemer"
Mogens Brun Heefelt.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "Books about Mathematics: History, Philosophy, Education, Models, System
Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup.

Forord.

Denne tekst er en besvarelse af en fire ugers specialeopgave til naturvidenskabelig embedseksamen ved Københavns Universitet.

Opgavens formulering lyder:

"Strukturel stabilitet og katastrofer i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt.

Der ønskes en redegørelse for fysiske og biologiske anvendelser af René Thom's teori for strukturel stabilitet og katastrofer. Specielt ønskes en belysning af forbindelsen til klassiske termodynamiske teorier for faseovergange og spontan udvikling med en redegørelse for det fysiske indhold i katastrofeteorien's ordens- og kontrolparametre."

Besvarelsen kan betragtes som inddelt i tre hovedafsnit.

Det første introducerer den kvalitative teori for dynamiske systemer. Herefter følger et afsnit, der indfører de mest elementære begreber fra differentialtopologien for at give begrebet strukturel stabilitet en stringent og intuitiv forståelig betydning.

Det bliver derved muligt at give begrebet en plads i en fysisk sammenhæng, hvor det kan bruges til at præcisere og udvide diskussionen af klassisk termodynamiske systemer. Dette har vi forsøgt at belyse med eksempler.

Disse to afsnit rundes af med en præsentation af Thom's klassifikationsteorem med henblik på en formulering af den elementære katastrofeteori, hvori klassifikationsteoremet er sammenkoblet med teorien for dynamiske systemer.

For at orientere den elementære katastrofeteori mod anvendelserne, har vi foretaget denne sammenkobling med det fysiske

begreb om kvasistatiske processer.

Endelig foretager vi en kort ekskurs for at se den elementære katastrofeteoris afgrænsning i forhold til en mere generaliseret katastrofeteori.

Det sidste hovedafsnit falder i to dele. Den første omhandler en anvendelse af den elementære katastrofeteori til beskrivelse af en Van der Waal's gas i en omegn af det kritiske punkt.

Af diskussionen vil det fremgå, at en Van der Waal's gas i Gibbsrepræsentationen lader sig beskrive katastrofeteoretisk med et bestemt valg af ordensparameter, der op til en (bestemt) lokal funktion af tryk og temperatur er den relative volumenafvigelse i en omegn af det kritiske punkt.

I det sidste eksempel ser vi på reelle processer. Herved forsynes den elementære katastrofeteori med en systemdynamisk overbygning, som i grænsen, hvor systemets henfald mod ligevægt sker uendeligt hurtigt, giver de kvasistatiske processer som et specialtilfælde.

Som eksempel har vi valgt den drevne Van der Pohl oscillator, fordi den set fra et kvalitativt synspunkt kan betragtes som en analogregnemaskine for processer, der foregår langt fra termodynamisk ligevægt.

Hovedparten af figurerne er computertegninger, der er udført til formålet med en Hewlett-Packard HP 9845A/HP 9872A minicomputer.

For- og efterord til IMFUFA-udgivelsen.

Denne specialeopgave er blevet til på IMFUFA institutet på Roskilde Universitetscenter, hvortil jeg i et semester har været tilknyttet som gæstestudent og specialestuderende.

Institutets medarbejdere har ofte stået mig bi ved råd og vejledning, såvel med teoretiske vink som med praktisk hjælp til at fremstille de computertegninger, som har været en vigtig støtte for arbejdet.

Alle de, der på denne måde har været mig behjælpelig, skylder jeg en tak, som ikke mindst bør tilflyde min personlige vejleder, Peder Voetmann Christiansen.

Om selve opgavebesvarelsen vil jeg sige, at jeg har følt det som et udtalt behov at knytte en analytisk overbygning til den energibandsformalisme, der med held er blevet anvendt på et overordentligt forskelligartet udsnit af systemer i naturen. Det begrebsmæssige i energibandsformalismen fremstår i en snæver analytisk forstand som teorien for sædvanlige 1. ordens differentiaalligninger. Men mit mål har ikke været at beskæftige mig med denne teori udfra et teknisk-matematisk synspunkt, snarere tværtimod: At undersøge dynamiske systemer kvalitativt for derigennem at kunne tolke væsentlige træk ved systemerne uden eksplicit at skulle beregne problemerne.

Specielt er dette af stor interesse i det øjeblik, hvor et dynamisk system bliver ustabil, og noget uventet indtræffer.

Nyere arbejdere af matematikere, især Thom og Zeeman, har givet en enorm inspiration til at arbejde videre med disse ting; og den nærværende besvarelse skal ses som et forsøg på at løse denne opgave.

Jeg skal være den første til at sige, at det har været en meget svær opgave; endnu sværere at fremstille overfor folk, der ikke færdes hjemmevant i matematisk jargon og symboler. Så meget desto vanskeligere er det for mig at overgive denne opgavebesvarelse til publikation i IMFUFA's tekstserie, som ikke lige netop har en matematisk-fysisk inderkreds som målgruppe.

Jeg er fuldt klar over, at denne besvarelse vil virke kontroversiel på mange; måske ikke så meget på grund af indholdet; men mere på grund af formen, som jeg forventer, at den ubevæbnede læser vil møde med en vis irritation grundet på umådeholden anvendelse af matematisk jargon og definitionspedanteri, der meget vel kan minde om at skyde gråspurve med kanoner.

På den anden side forventer jeg også, at den flittige brug af illustrationer vil formilde den førstnævnte læzerskare samtidig med, at den af fagfolk vil blive tolket som en situation, der ikke er helt ulig den, som en professionel jæger må føle, når han ser en amatør gå på storvildtjagt med en luftbøsse.

Til trods for disse -berettigede indvendinger- mener jeg dog, at det ikke ville være urimeligt at håbe på, at læseren som jeg mener, at metoden er anvendelig.

Roskilde Universitetscenter i marts 1979

Leif S. Striegler

INDHOLDSFORTEGNELSE

<u>Indledning: Katastrofeteoriens berettigelse</u>	1
Katastrofers fænomenologi.....	3
Et signalement af den elementære katastrofeteori, EKT.....	4
<u>En videnskabsteoretisk forbemærkning</u>	6
Er den anvendte EKT reduktionistisk?	7
<u>Strukturel stabilitet og katastrofer</u>	11
Kvalitativ teori for dynamiske systemer i det lineære regime.....	11
Generelle dynamiske systemer.....	37
Stabilitet og strukturel stabilitet	40
Gradientsystemer.....	42
Parametriserede dynamiske systemer.....	45
<u>Differentialtopologisk 'briefing'</u>	51
Mangfoldigheder.....	51
Diffeomorfier.....	53
Generaliserede lokale koordinatskift.....	65
Urbilledteoremet.....	65
Transversalitet.....	67
Transversalitet og strukturel stabilitet.....	71
Sard's teorem og Morselemmaet.....	71
Eksempler fra fysikken: Stabilitets- diskussionen i den klassiske termody- namik.....	80
Gibbs' faseregul.....	84

<u>Thom's klassifikationsteorem</u>	88
Kvasistatiske processer.....	100
Spidskatastrofen.....	103
Ekskurs: Eksempel på en ikke-elemen- tær katastrofe.....	112
<u>Anvendelser af EKT i fysikken</u>	114
Kvasistatiske processer:Van der Waal's tilstandsligning.....	114
Reelle processer udenfor ligevægt: Dreven Van der Pohl oscillator.....	126
<u>Bibliografi</u>	B I

"Fillet of a fenny snake,
In the cauldron boil and bake,
Eye of newt, and toe of frog,
Wool of bat, and tongue of dog,
Adder's fork, and blind-worm's sting,
Lizard's leg, and howlet's wing,
For a charm of powerful trouble,
Like a hell-broth boil and bubble"

(William Shakespeare, Macbeth, Act IV, scene I)

Katastrofeteoriens berettigelse.

Det er en gammelkendt regel, (som ikke har nogen undtagelser) at der ikke gives nogen regel uden undtagelser. Det sofistiske i dette udsagn understreger nødvendigheden af at tænke i logisk adskilte lag, hvis man på bekostning af fuldstændigheden vil honorere kravet om logisk modsigelsesfrihed.

I tråd hermed synes der at være god overensstemmelse mellem vore eksperimentelle erfaringer og en lagdeling af det sprog, som vi benytter til at gøre rede for disse erfaringer: De objektive naturfænomener er selv lagdelte, således at invariante helheder på ét niveau kombineres til invariante helheder på det næste, hvis invariante byggestene så igen -ved kombination- danner nye helheder på det efterfølgende niveau etc.

En sådan erfaringsbaseret erkendelse udskiller to væsentlige træk ved videnskabsprocessens strategi: for ethvert givet beskrivelsesniveau gælder det om for det første at rette opmærksomheden mod de relationer, hvori de relativt invariante byggestene indgår; og for det andet om at undersøge, under hvilke omstændigheder disse invariansers indre lovmæssigheder undtagelsesvis sætter deres præg på disse helheder.

Opdagelsen af superfluiditet og supraledning er dramatiske eksempler på, hvorledes kvantefænomenernes lovmæssigheder sætter sig i

gennem, når man i alle makroskopiske sammenhænge skal gøre rede for fænomenerne.

Det er udfra denne synsvinkel ikke vanskeligt at forstå, at en meget høj grad af opmærksomhed må samle sig om at undersøge de betingelser, hvorunder lovmæssigheder på et beskrivelsesniveau undtagelsesvis sætter sig igennem på et andet.

Lad os meditere lidt over det indledende regel-undtagelsesparadoks. Vi kigger på en indespærret mængde gas, hvis tilstand vi kan kontrollere med et sæt passende varme- og volumenreservoirs. Ikke uden et vist mål af flegma noterer vi os, at gassen vedbliver at være en gas, indtil der for et bestemt sæt af værdier for tryk og temperatur sker noget interessant: I enhver omegn af de interessante værdier forekommer en faseovergang fra gas- og til væsketilstanden og omvendt.

Efter at have udført en lang række eksperimenter ledes vi til at indse, at vores flegmatiske sindstilstand ikke er i uoverensstemmelse med den eksperimentelle erfaring, at 'kedelige' tilstandsændringer er reglen og at de mere spændende er undtagelsen.

Men man kan i videnskabelig sammenhæng næppe stille sig tilfreds med at bekræfte/afkræfte gammeldags latinskolevisdom og deraf følgende sofistiske drillerier. Målet må være nærmere at gøre rede for hvordan den eller de regler, der specificerer reglerne og undtagelserne ser ud. Kort sagt: Det er nødvendigt med en teoretisk model, der kan rumme en beskrivelse af unormale, pludselige tilstandsforandringer.

Dette udsagn kan måske virke en anelse provokerende al den stund, at der allerede findes en række teoretiske modeller, som hver for sig er særdeles velegnede til at gøre rede for en lang række kritiske fænomener. Men de har det kedelige handicap, at de ikke kan bringes til at afspejle de slående ligheder, som den eksperimentelle praksis har påvist eksisterer ved den kritiske adfærd hos et me-

get forskelligartet udsnit af systemer.

Denne teoretiske usikkerhed hænger utvivlsomt sammen med den fænomenologiske og heuristiske karakter, som de eksisterende modeller har. Der er derfor et abstrakt behov for en generalisering. Men i samme takt, som den eksperimentelle erfaring ophober viden om nye kritiske fænomener og dertil hørende skræddersyede modeller, bliver behovet konkret.

Katastrofers fænomenologi.

Den elementære katastrofeteori, i det følgende betegnet med EKT, synes i denne forbindelse at være et bud på en lovende aheuristisk generalisering af beskrivelsen af systemers kritiske og diskontinuerte adfærd. Det er den, fordi den for det første gør det muligt at opstille kontinuerte modeller for diskontinuerte fænomener, for det andet fordi disse modeller falder i et beskedent antal kategorier og for det tredje fordi en omfattende klasse af fænomener lader sig beskrive i denne teoris régi.

En katastrofe er, som ordet antyder, en markant og pludselig tilstandsforandring i et system, der normalt opfører sig føjeligt.

En proces, der indeholder en katastrofe, vil kunne beskrives ved forløbet af følgende 'Gedankenexperiment':

Vi tænker os, at vi har en 'black box' forsynet med en trinløs kontrolknap, hvormed vi kan kontrollere outputtet. Til at begynde med sker der ikke noget bemærkelsesværdigt, når vi skruer op for vores knap. Pludselig, for en bestemt kontrolværdi, x_k , sker der et abrupt spring i outputtet. Ved at gentage forsøget en række gange finder vi, at den pludselige forandring, katastrofen, finder sted i enhver omegn af x_k , hvorimod vi i en tilstrækkelig lille omegn af et hvilket som helst andet kontrolpunkt, x_k' kan opnå, at ændringerne i systemets output kan gøres vilkårlig små. Et eksempel: Lyden fra et mikrofon-forstærker-højttaleranlæg, kan for en passende værdi af forstærkningen kobles tilbage og give anledning til en katastrofe, som viser sig ved, at anlægget i stedet for at repro-

ducere en eller anden kunstnerisk udfoldelse pludselig slår over i et umådeholdent, rindalistisk hyl.

Et signalement af EKT.

Katastrofeteorien har i de senere år tiltrukket sig en ret betydelig opmærksomhed, især fra forskere, der arbejder inden for ren og anvendt matematik. To centrale figurer i denne sammenhæng er René Thom og Christopher Zeeman. Thom formulerede i begyndelsen af 1960'erne udfra studiet af den embryologiske udvikling det kvalificerede gæt, at katastrofer -under visse generelle forudsætninger- kunne reduceres til nogle få, lokale 'arke-typer'. Sagt meget upræcist:

'Enhver singularitet, der måtte forekomme i gradientsystemer, der er styret af mindre end eller lig fire parametre, er lokalt netop én ud af syv elementære katastrofer'.

Lad os prøve at fordøje dette udsagn med en 'black box' som hjælpemiddel. Denne 'black box' udmærker sig ved at være et gradientsystem, i.e. et system, hvor outputtets stationaritet minimerer en given potentialfunktion for systemet. Men systemet er ikke bare et gradientsystem; det er et parametriseret gradientsystem, således at vi ved at styre disse fire parametre kan ændre på potentialfunktionens udseende. Der kan under vores leg med disse styringsparametre ske dette, at et lokalt minimum udarter således, at også potentialfunktionens andenordensafledede forsvinder, viz. en singularitet, hvor systemets stabilitet kollapser. Thom's teorem siger nu videre, at sådanne singulariteter lokalt kan klassificeres i syv kategorier, de elementære katastrofer¹

¹ I bevisets endelige udformning er parameterantallet udvidet til 5, og antallet af elementære katastrofer til ialt 11. Beviset krediteres en række matematikere, først og fremmest Thom og Zeeman.

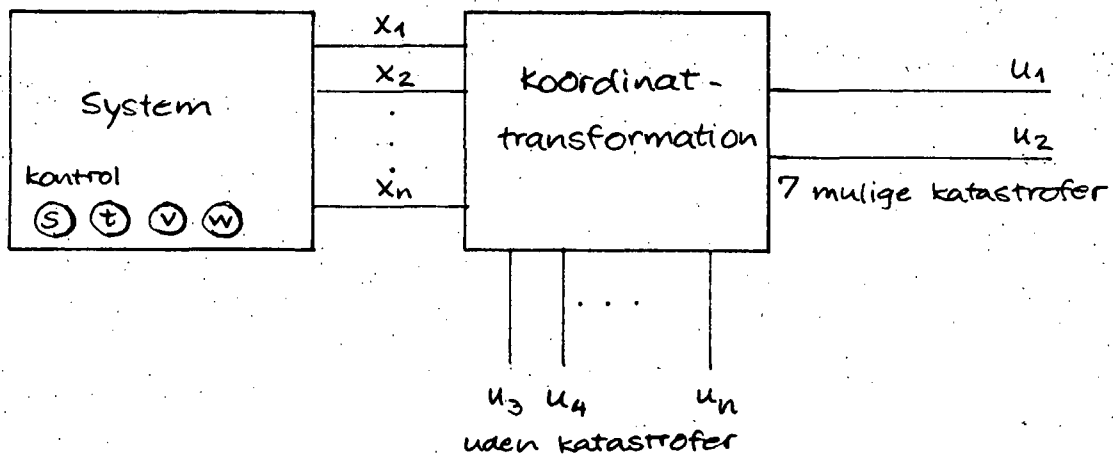
Lad os afrunde disse betragtninger med en foreløbig stramning af ovenstående 'genfortælling' af Thoms teorem:

Vi tænker os, at vi har et gradientsystem i n variable. Systemet er styret af ≤ 4 parametre. Der findes så overalt et lokalt glat koordinatskift, således at regneudtrykket for vores potentialfunktion i de nye koordinater lokalt kan udtrykkes som en sum af to bidrag, nemlig

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n; s, t, v, w) = g(u_1, u_2; s, t, v, w) + h(u_3, u_4, \dots, u_n)$$

hvor eventuelle katastrofer er indeholdt i g -bidraget og hvor h -bidraget er fuldkommen regulært og uden spidsfindigheder af nogen art.

Som det ses, vil vi højst kunne udskille to variable, for hvilke singular adfærd kan iagttages. Dette resultat kan vi vise i nedenstående figur 1:



figur 1. 'Black-box' signalement af Thom's teorem.

Det vil senere blive vist, hvad der ligger i disse 'generaliserede' koordinater. Her vil vi blot nøjes med en grov analogi: På samme måde, som man indfører de sk. normalkoordinater i en

diagonal repræsentation af et system af koblede oscillatorer er de transformationer, der her er tale om, en slags 'diagonalisering', hvorved systemets potentialfunktion bringes på en kanonisk form.

En videnskabsteoretisk forbemærkning.

Kvalitativt kontra kvantitativt.

Anvendelsen af katastrofeteoriens resultater er blevet mødt med så megen skepsis og afvisende kritik, at det her er nødvendigt at gøre rede for de forventninger, som det er rimeligt at stille til en sådan teori. Thom gør udtrykkeligt opmærksom på, at han ønsker at bruge katastrofeteorien til en kvalitativ beskrivelse af former og disse formers forandring. I sin monografi "Stabilité structurelle et morphogénèse" skriver han indledningsvis:

Descartes, med sine hvirvler, sine sammenhægtede atomer etc. forklarede alting og beregnede ingenting. Newton, med $1/r^2$ -tyngdeloven beregnede alting og forklarede ingenting. Historien har givet Newton ret og har henvist de kartesianske konstruktioner til at være fri fantasi og museumskuriositeter. Det er helt sikkert, at det newtonske synspunkt er fuldt begrundet udfra et syn, der som sit udgangspunkt har effektivitet og muligheder for forudsigelser, deriblandt om indvirkning på fænomenerne. I den samme ånd genlæser man med interesse forordet til Dirac's Principles of Quantum Mechanics, hvori forfatteren mener, at umuligheden af at give kvantemekanikkens grundlæggende begreber et intuitivt indhold kan negligeres. Men jeg er ikke sikker på, at menneskeånden ville være fuldt tilfreds med et univers, hvor alle fænomenerne var styret af en kohærent matematisk struktur, der var frataget et intuitivt indhold. (mine understregninger, L.S.S.) Ville vi da så ikke være henvist til ren magi? Frataget enhver mulighed for at gøre sig noget begribeligt, det vil sige fra at give en geometrisk tolkning af den matematiske struktur, der er givet, hvor mennesket ved hjælp af egnede billeder på trods af alt søger at begrunde den givne struktur, vil det falde tilbage til den resignerede uforståeligheds skyggetilstand, som vanens magt vil ændre til ligegyldighed. I tilfældet med gravitationen er der ikke tvivl om, at den sidst-

nævnte holdning har været fremherskende, for vi har ikke, i 1968, mindre grund til at blive forundrede over æblets fald end Newton havde. Magi eller geometri er netop det dilemma, som ethvert forsøg på videnskabelig forklaring står i. Set fra dette synspunkt vil de, der støber mod en forståelse aldrig antage den kvantitative videnskabs'isme's foragtende holdning overfor de kvalitative og beskrivende teorier hos filosoferne fra før-sokratikerne og op til Descartes ((17), p.21f.)

Dette perspektiv vil Zeeman ikke nøjes med. Han synes at mene, at katastrofeteorien bør forsynes med en overbygning af kvantitativ art, således den udover at fungere som et teoretisk forståelsesværktøj ved skrivebordet også bør være standardudstyr i ethvert laboratorium med respekt for sig selv. Ikke mindst bør den være et redskab for studiet af socioøkonomiske og psykologiske fænomener.

Navnlig på det sidste punkt har Zeeman anvendt EKT på en stærkt provokerende måde. Gennem et studie af fængselsurolighder og opstande konkluderer Zeeman (18) ved anvendelse af en katastrofeteoretisk model, at alvorlige fængselsoprør bedst kan kontrolleres og bekæmpes, dersom myndighederne benytter en 'playing it cool' -taktik. Men der er hos Zeeman så mange gætterier, ad hoc antagelser og så ringe overensstemmelse med de indsamlede data, at denne konklusion vel må siges at være en ret så fritstående konstruktion.

Men hvad enten konklusionen af andre grunde er bæredygtig eller ikke, ændrer det ikke ved den omstændighed, at Zeeman -sikkert ufrivilligt - med en matematisk-videnskabelig blåstempling støtter en bagstræberisk adfærdsteknologisk kriminalpolitik.

Det er derfor ikke uforståeligt, at katastrofeteorien har fået et dårligt ry i matematikerkredse, og at den ikke har været så meget 'in' i den seneste tid. Som følge deraf har Zeeman's mere jordnære arbejder indenfor fysik, fysiologi og biologi tilsyneladende ikke fået den opmærksomhed, de fortjener.

Er den anvendte EKT reduktionistisk?

Zeeman's mange arbejder med beskrivelse af samfundsfænomener

har utvivlsomt fremmanet reduktionismens spøgelse hos mange fagfolk i disse videnskaber. Det vil imidlertid være fejlagtigt at klistre reduktionismens etiket på katastrofeteorien af den abstrakte og trivielle grund, at katastrofeteorien -som enhver anden teoretisk model- opererer med abstrakte størrelser og begreber, der i enhver anvendelse kræver en specifik oversættelse.

Men er det alligevel ikke sådan, at en teoretisk model -konkret- via sit begrebsunivers sætter grænser for en oversættelse? Hvis svaret er ja, er det nok rimeligt at sige, at modellen er reduktionistisk. For katastrofeteorien vedkommende er det rimeligst at svare nej. Og vi skal nu se, hvorfor.

Som vi nævnte en passant er der belæg for at se grænserne mellem de forskellige videnskaber og -discipliner og de indre beskrivelsesniveauer i de enkelte fagområder som at være et udtryk for noget objektivt. Dette belæg støttes af den eksperimentelle praksis, der viser os, hvilke træk ved fænomenerne, der er invariante. Dette vil for eksempel enhver kemiker kunne overbevise sig om, når hun eller han slår op i en tilfældig lærebog i biokemi og ser, at proteinkemiens karakteristiske invarianter er 21 (!) forskellige aminosyrer og ikke de enkelte hydrogen- carbon- nitrogen- oxygen- og svovlatomer.

En grænsedragning, der forekommer historisk at være konventionel og subjektiv, synes i sidste instans at være begrundet i den materielle virkelighed selv; e.g. er den kendsgerning, at carbonatomet ved sine orbitalers egenart er i stand til at danne et antal kemiske forbindelser, der er mange, mange størrelsesordener større end 'normalt' en objektiv begrundelse for at skelne mellem organisk kemi og uorganisk ditto.

Fra et informationsteoretisk synspunkt er denne skelnen mellem forskellige beskrivelsesniveauer et resultat, der er uomgængeligt. Det er ikke muligt at reducere den information, 'mening', der

findes på ét niveau til et lavere, alene af den grund, at det er to væsensforskellige korrelationer man undersøger mellem forskellige invarianser. (2)

Selvom vi kan opstille et informationshieraki, hvori vi kan genfinde invarianser fra lavere niveauer på et højere, er det ret så meningsløst at begynde at beskrive et højt niveau med invarianser fra et lavt.

Men undertiden spiller disse invariansers egenart og indre lovmæssighed en synlig rolle. (Rent bortset fra, at disse altid lægger bånd på beskrivelsen af det højere niveau) Normalt -og det er reglen- slår disse træk ikke igennem, men undtagelsesvis gør disse lovmæssigheder sig gældende på en overraskende måde.

Disse ræsonnementer viser, at de forskellige fagområder og beskrivelsesniveauer nyder en relativ autonomi, der netop bringes istand ved, at hvert område og niveau har sine karakteristiske invarianser.

Det bliver derved klart, at et reduktionistisk projekt ikke lader sig gennemføre, hvorved enkeltdisciplinernes modvilje og overdrevne skepsis overfor brug af andre videnskaber, og især matematikken kan være en don Quixote-agtig fremfærd, som kan være en hæmsko for videnskabsprocessen.

Det skal selvfølgelig pointeres, at det ikke er alle videnskabelige problemer, der kræver forfinede kemisk-fysisk-matematiske metoder til deres løsning. Men det er oplagt, at e.g. den embryologiske udvikling rejser en række differentialgeometriske og -topologiske problemstillinger, som man ikke kan komme uden om. Det er netop i sådanne situationer, hvor matematikkens fantasifulde abstraktioner og strukturer kommer til deres ret. Det er her, hvor det matematiske sprog, eller mere præcist: den matematiske semantik er et uundværligt hjælpemiddel i problemløsningen, vel at mærke en semantik, der

er uoptræveligt indspundet i de fibre, som problematikken er vævet af. Det vil i denne snævre sammenhæng være mere rigtigt at sige, at matematikken er blevet biologisk end det ville være at sige, at biologien var blevet matematisk.

Sammenholder vi det ovenstående med anvendelsen af Newtons almene tyngdelov i sociologien som en teoretisk model for vekselvirkningen mellem to storbyer, bliver det åbenbart, at der er en artsforskelse på teoretiske modeller: Sociologien benytter en i forvejen eksisterende teori, hvis begrebsstrukturer dikterer udformningen af passende sociologiske(?) kategorier. Mens katastrofeteorien udspringer af et konglomerat af konkrete problemstillinger indenfor biologien. Disse konkrete problemer rejser derefter det teoretiske problem, der hedder: Hvordan beskriver vi en fremadskridende sekvens af former?

Det er netop den omstændighed, at katastrofeteorien udspringer af et videnskabeligt problem der gør, at den heller ikke konkret kan anses for at være reduktionistisk.

Vi bemærker her til slut, at det ikke er katastrofeteorien's problem at give svar på, hvorfor systemer med en meget høj kompleksitetsgrad lader sig beskrive i nogle få kategorier. Tværtimod: Katastrofeteorien beskæftiger sig med de dybestliggende lag i de kritiske fænomeners fremtrædelsesform udfra det postulat, at en meget stor klasse af kritiske fænomener tilhører lokale ækvivalensklasser af arketypiske former.

Vi vil i denne fremstilling følge en Zeeman-inspireret vej, selvom det ligger i sagens natur, at et sådant projekt er meget ambitiøst. Indtil videre må vi nøjes med det næstbedste: At se velkendte fænomener beskrevet og fortolket i et katastrofeteoretisk regi.

Strukturel stabilitet og katastrofer.

Kvalitativ teori for dynamiske systemer.

Differentialligningernes domæne er -set udfra et teoretisk synspunkt-et sammenkog af en mangfoldighed af matematiske discipliner. Fra et praktisk fagvidenskabeligt synspunkt er denne sejd et sine qua non for næsten alle teoretiske modeller, der beskriver et systems udvikling over tid og rum. Ifølge den Thom'ske tankegang har anvendelsen af differentialligninger først og fremmest været motiveret af ønsket om en kvantitativ forudberegning af et systems tilstand. Hvadenten en sådan ideologi har været fremherskende eller ej, er de gængse metoder i modelbygningen og modelafprøvningen ikke i uoverensstemmelse hermed: Når man konstruerer og afprøver en teoretisk model, går man i reglen frem således: Først opstiller man -udfra en række mere eller mindre eksplicitte hypoteser om systemet- et sæt differentialligninger med en række rand- og begyndelsesbetingelser. Afprøvningen af modellen sker ved ganske enkelt at beregne dette rand- og begyndelsesværdiproblem, hvis løsning eventuelt repræsenteres grafisk. Sidenhen prøver man på basis af den beregnede information at give en kvalitativ fortolkning af resultatet med henvisning til det system, som modellen har som udgangspunkt.

Det lyder nemt og ligetil; men det er så langt fra alle modeller, der er lige nemme at afprøve.

For det første er det ikke ualmindeligt, at en mere spændende hypotesedannelse munder ud i et sæt ikke-lineære differentiaalligninger, som ubehageligt ofte falder udenfor den bløde papir-blyant-tabelteknologis anvendelsesområde. For det andet må man se i øjnene, at kendskabet til rand- og begyndelsesbetingelser undertiden kan være stærkt begrænset.

Med fremkomsten af de hurtige datamater er det praktiske bereg-

ningsarbejde reduceret til den (normalt) mindre tidrøvende og betydeligt mere interessante beskæftigelse, det er at fremstille en egnet algoritme, der kan afprøves med et bredt spektrum af rand- og begyndelsesbetingelser. En sådan algoritme kan direkte udformes således, at den numeriske information i outputtet bliver repræsenteret grafisk.

På dette grundlag fortolker man så modellen, viz. opregner modellens kvalitative egenskaber som, e.g., stabilitet, periodicitet etc.

Men man vil hurtigt opdage, at al denne imponerende teknik i prosaisk forstand kun løser selve beregningsproblemet, hvortil kommer, at man ikke kan være sikker på, om den benyttede algoritme og det deraf følgende maskinelle output afspejler alle modellens væsentlige karaktertræk.

Vi står altså stadigvæk med en række problemer af principiel art: Det er nødvendigt, at modelbyggeren på forhånd må have et sæt af mere eller mindre velbegrundede gæt om, hvordan løsningerne på problemet skal se ud, således at hun eller han bliver i stand til at vurdere, hvorvidt outputtet er en bekræftelse af den datalogiske aforisme, der hedder 'grus ind = grus ud' eller ej.

Og hvordan laver man sig et kvalificeret gæt ?

Ved at løse differentiallyingningerne, naturligvis.

Mere tydelig kan denne metodologis onde cirkel næppe være.

Skal vi ud af denne cirkel, må vi fæstne os ved det principielle i sagen:

Hvordan kan vi, uden at løse et givet sæt differentiallyingninger eksplicit (hvis det da overhovedet er praktisk muligt) alligevel drage pålidelige slutninger om de kvalitative egenskaber ved løsningerne?

Denne problematik er ikke af særlig ny dato. Den blev eksempelvis angrebet af Poincaré; og en lille skare matematikere fysikere

og andre fortsatte sporadisk arbejdet indtil for et par få årtier tilbage, hvor det under navne som e.g. 'kvalitativ teori for dynamiske systemer' og 'topologisk dynamik' siden - og ikke mindst i kølvandet af kybernetikkens og datalogiens fremvækst - har været i kraftig udvikling.

Det dialektiske samspil mellem det kvalitative og det kvantitative synes netop her i lyset af de senere års teoretisk-topologiske og de praktisk-datalogiske resultater at tegne sig ganske frugtbart. Teorien om strukturel stabilitet og katastrofer kan med ret stor præcision siges at være den seneste fremspiring af et forsøg på at give en på én gang stringent og intuitiv forståelig redegørelse for de underliggende strukturer, som den topologiske dynamik hviler på, kort sagt et projekt, hvis mål er at forsyne den nuværende hovedsageligt induktive modelbygning med et deduktivt ben.

For at give et intuitivt billede af, hvorledes EKT kan indpasses i modelbygningsprocessen, er det lettest at gå induktivt tilværks.

Vi betragter differentiaalligningen

$$\frac{d^n z}{dt^n} + f_n \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + f_2 \frac{dz}{dt} + f_1 z + f_0 = 0 \quad (1)$$

hvor f 'erne er funktioner[§] af $t, z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}}$.

med begyndelsesbetingelserne $(z(0), \frac{dz}{dt}(0), \dots, \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}}(0))$.

[§] hvor intet andet er nævnt, opererer vi i denne fremstilling med vilkårligt ofte differentiable funktioner på en åben delmængde af et euklidisk rum ind i et euklidisk rum. (Disse funktioner tilhører a fortiori mængden af glatte afbildninger $f: W \rightarrow V$, hvor $W \subset \mathbb{R}^k$ og $V \subset \mathbb{R}^l$.)

En differentiaalligning af denne type kan altid omskrives til et system af koblede differentiaalligninger ved substitutionen

$$z = x_1, \dot{z} = x_2, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} = x_n, \text{ og vi skriver}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & x_2 \\ & & & & & & x_3 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & x_n \\ & & & & & f_n x_n + f_{n-1} x_{n-1} + \dots + f_1 x_1 + f_0 \end{bmatrix}$$

Idet vi med x mener $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^{\text{mn}} \subset \mathbb{R}^{\text{mn}}$

Vi vil i det følgende benytte den forkortede skrivemåde

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (2)$$

for det ovenstående differentiaalligningssystem med begyndelsesværdierne $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ forkortet til $x(0)$.

Højresiden kan passende identificeres som en operator på $U^{\text{mn}} \subset \mathbb{R}^{\text{mn}}$.

Denne rent formelle omskrivning er meget suggestiv, som vi skal se om lidt, hvor vi vil se nærmere på det tilfælde, hvor F kan ansues som en (strengt taget en familie af) lineære operatører på et vektorrum, der er isomorft med \mathbb{R}^{mn} .

Som vi vil bemærke, er (2) en inhomogen differentiaalligning, der afhænger eksplicit af tiden. I det følgende vil vi begrænse os til at se på såkaldt autonome systemer, som er systemer, der ikke afhænger eksplicit af tiden t , viz.

$$\dot{x} = F(x) \quad \text{med } x(0) = a_0 = \text{const} \in \mathbb{R}^{\text{p}} \quad (3)$$

hvor $x \in U^P \subset \mathbb{R}^P$ og F er en operator på $U^P \subset \mathbb{R}^P$.

De simpleste ikke-trivielle operatorer er de lineære operatorer.

Vi illustrere det ovenstående med et eksempel. Differentialligningen, der beskriver en udæmpet harmonisk oscillator ser som bekendt således ud:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

Dette problem har den entydige løsning

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

hvor $\omega = \sqrt{k/m}$ og a og ϕ er bestemt udfra begyndelsesbetingelserne i (4).

Ved substitutionen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ får vi bragt (4) på den kanoniske form, som (2) udtrykker:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(k/m)x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Det bliver herved retså gennemskueligt, at vores kanoniske form tillader en simpel matematisk tolkning:

Højresiden af (6), er billedet af $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ved den lineære

operator $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & 0 \end{pmatrix}$: I og med differentialligningen (4) de-

fineres et vektorfelt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Lad os tage de fysiske briller på og prøve at se, hvad (6)

betyder. Vektoren (x_1, x_2) er jo den samme som (x, \dot{x}) , altså et sammenhørende sæt af en position og en hastighed. (6) udtrykker så den tidslige udvikling af (x, \dot{x}) i et todimensionalt rum. Dette leder os til at indføre betegnelsen tilstandsvektor for vektoren $(x, \dot{x}) (= (x_1, x_2))$ og betegnelsen tilstandsrum om det vektorrum, der udspændes af de sædvanlige basisvektorer $(1, 0)$ og $(0, 1)$, således at enhver tilstandsvektor fremtræder som en linearkombination af disse.^E

For ethvert fastholdt sæt af begyndelsesbetingelser vil tilstandsvektoren (x_1, x_2) beskrive en kurve i tilstandsrummet. Denne kalder vi for et trajektorie.

Den vektor, som vi får frem ved at operere med matricen i (6) på en vilkårlig tilstandsvektor angiver tendensen i tilstandsvektorens bevægelse på trajektoriet, eller mere præcist: den tilhører tangentrummet til trajektoriet i det betragtede punkt i tilstandsrummet.

Disse forhold gør en geometrisk repræsentation nærliggende; således ved at identificere tilstandsvektoren med et punkt i planen og ved at identificere trajektoriet med en tilsvarende kurve. Det er let at indse (vi kender jo løsningen), at trajektoriet for vores system med et fastholdt sæt begyndelsebetingelser vil være en ellipse, hvor forholdet mellem stor- og lilleaksen er bestemt ved den cykliske frekvens ω . Dette er vist på figur 2.

Hvis vi i ethvert punkt i et passende udvalg af punkter på trajektoriet afsætter den ved (6) definerede vektor med fodpunkt i et sådant fastholdt punkt, får vi et geometrisk billede af et udsnit af vore tangentvektorer, viz. en geometrisk repræsentation af det tangentbundt, der er knyttet til vores trajektorie. Dette er vist på figur 3. (med en bekvem ensartet skalering)

^EVi bruger her helt bevidst disse betegnelser for ikke at skabe sprogforbistring, idet navne som 'faserum' bør være forbeholdt situationer i en Hamilton'sk kontekst.

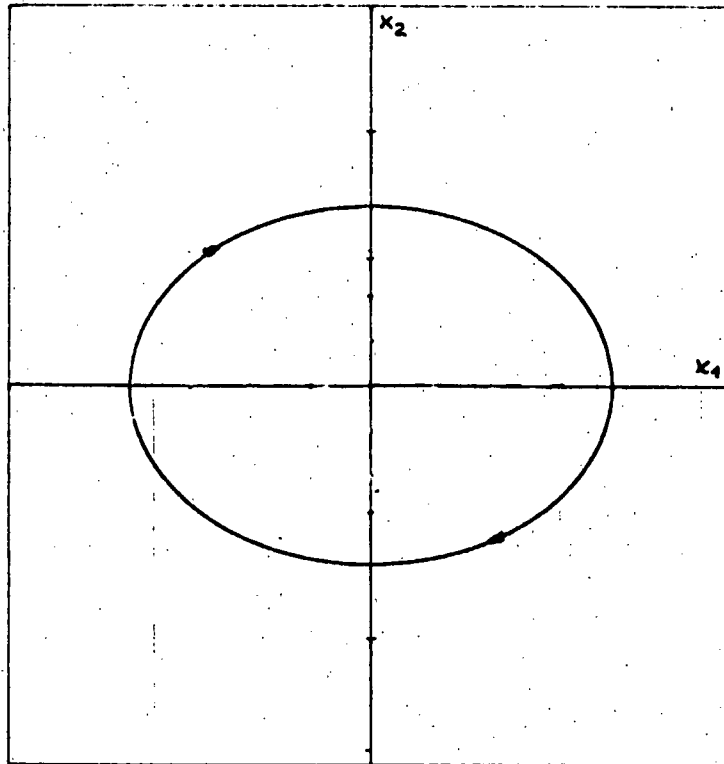


fig.2: Trajektoriet af (6) med $\omega^2 = .5$
 $x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$.

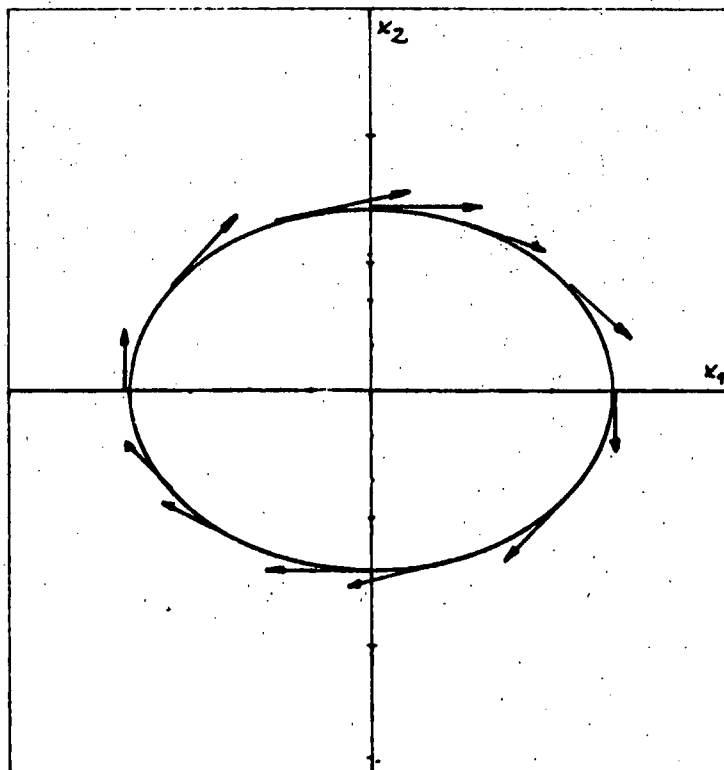


fig.3: Trajektoriet af (6) med et ud-
 snit af de tilhørende tangentvektorer.

For et mangfoldigt sæt af begyndelsesbetingelser kan vi gentage denne procedure og får så et overblik over, hvad der sker, når vi varierer disse. Det resulterende billede, som vi her vil kalde for trajektoriebilledet, kan så tolkes kvalitativt.

Trajektoriebilledet af vores oscillator vil så blive en skare af koncentriske ellipser som vist på figur 4.

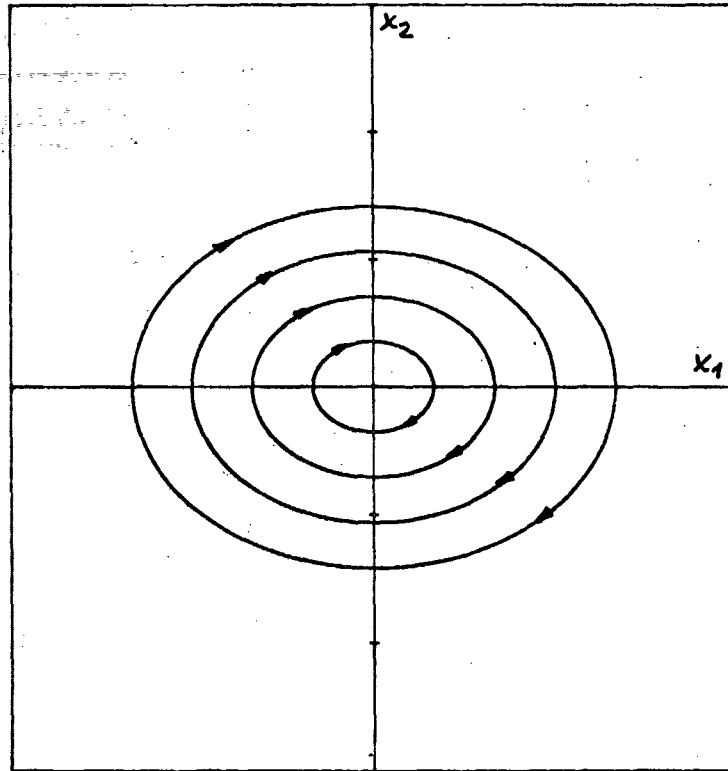


fig.4: Trajektoriebilledet af (6)

Som man måske har bemærket, har vi i dette eksempel brugt kendskabet til den fuldstændige løsning som basis for vores trajektoriebillede.

Problemet er nu, om vi uden eksplicit at løse problemet kvantitativt alligevel kan danne os et kvalitativt indtryk af, hvorledes trajektoriebilledet må se ud. Svaret er bekræftende: Fidusen ligger i, at (6) giver oplysning om den generelle sammenhæng mellem en tilstandsvektor (repræsenteret ved et punkt i planen) og den korresponderende tangentvektor til trajektoriet gennem det pågældende punkt.

Vi kan simpelthen vælge et repræsentativt udvalg af tilstandsvektorer (punkter i R^2): For ethvert sådant punkt afsættes billedet af tilstandsvektoren som en vektor med fodpunkt i det betragtede punkt, kort sagt: vi afbilder vektorfeltet ved (6). Dette er gjort i figur 5.

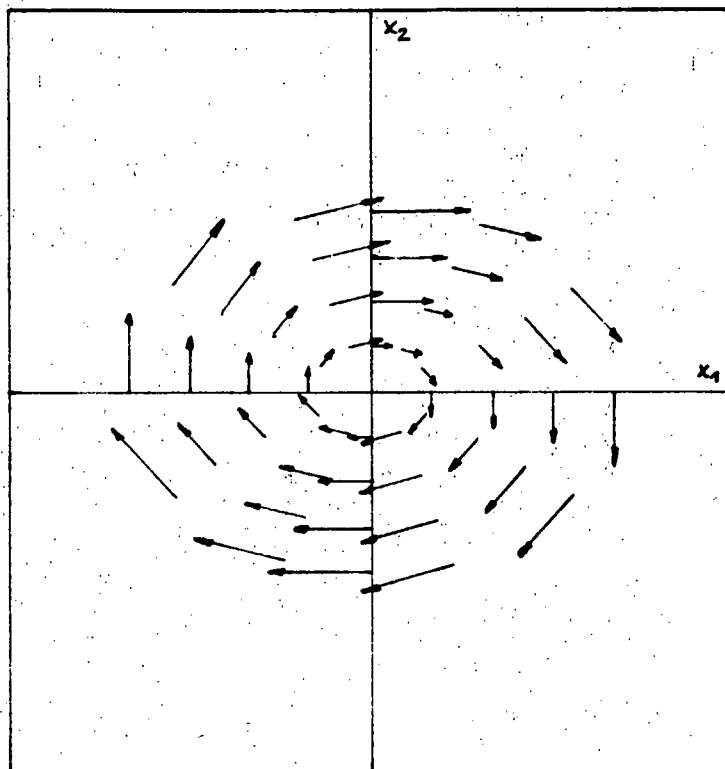


fig.5. Vektorfeltet af den harmoniske oscillator i (6).

Vi kan så visuelt gætte på løsningskurverne, i.e. trajektorierne svarende til vores system og evt forfine vores udvalg af repræsentative punkter i en omegn af en kurve, som vi gætter er en mulig løsning. Når vi på denne måde får sjusset os frem til en skare kvalificerede gæt, kan vi finde en parameterfremstilling for disse og derefter, ved indsættelse i regneudtrykket for systemet bevise at de rent faktisk må være løsninger på vores problem.

Hvilke oplysninger kan vi få ved at inspicere et trajektoriebillede? Vi tager vor oscillator igen: Vi ser, at trajektorierne er

lukkede kurver, hvilket får os til at gætte på, at løsningerne er periodiske.

Men trajektoriebilledet giver ikke oplysning om, hvilken eventuel periode, der er tale om.^E Vi ser endvidere, at $(0,0)$ er et særligt punkt: Systemet forbliver i $(0,0)$ til evig tid, hvis det starter her.

Dette leder os til at definere et hvilepunkt som et punkt, hvor vektorfeltet forsvinder.

Lad os gå videre med endnu et par eksempler. Vi vil nu se på en harmonisk oscillator med dæmpning:

Denne beskrives ved den velkendte differentialligning

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

som skrevet på kanonisk form bliver

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & -(\gamma/m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Vi går nu frem som det er skitseret ovenfor. Vi afbilder først vektorfeltet. Når dette er gjort, gætter vi så på trajektorierne. Denne procedure afspejles i figur 6 og 7, hvor vi har 'snydt' lidt, idet trajektoriebilledet skyldes en computerberegning af (7). Men filosofien i fremgangsmåden turde være klar.

^EOm et lukket trajektorie repræsenterer en periodisk løsning eller ej er ikke noget trivielt problem. Dette vil vi tage stilling til senere.

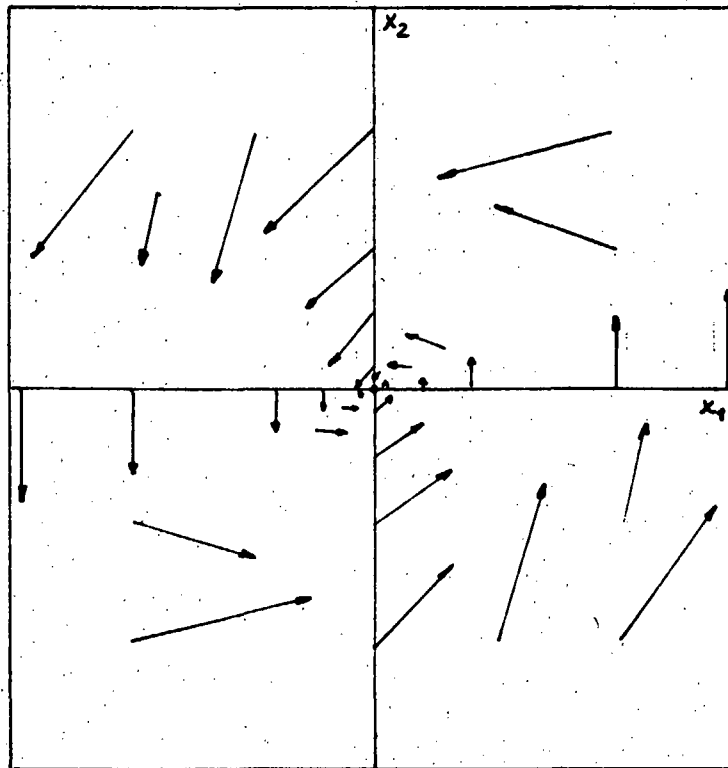


fig.6 . Vektorfeltet svarende til (7)
med $k/m = .5$ og $\gamma = .38$

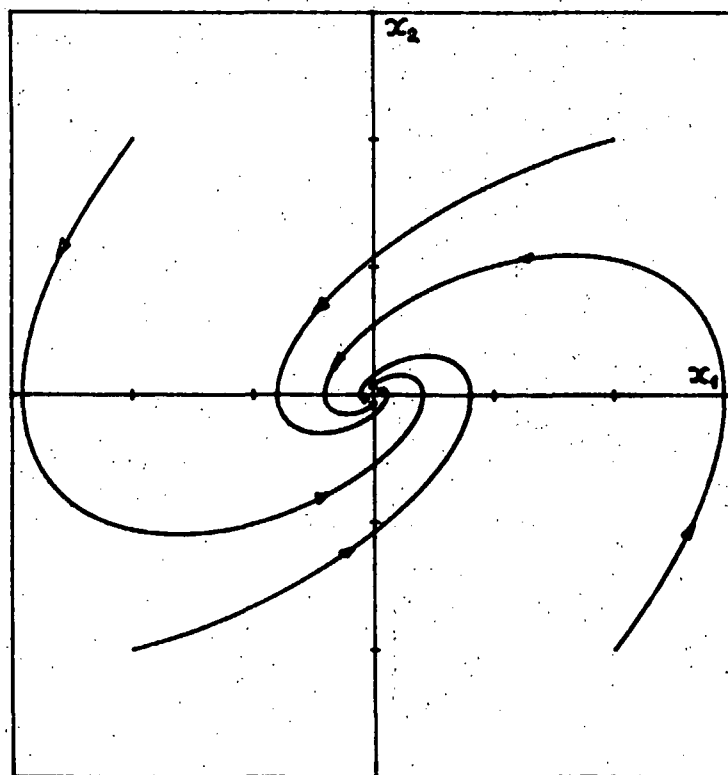


fig.7: Trajektoriebilledet af (7)

Ved at se på trajektoriebilledet konstaterer vi, at ikke alle er $(0,0)$ et hvilepunkt for systemet, men også at alle trajektorier søger mod dette punkt.

Et hvilepunkt af denne type kaldes for en punktattraktor for systemet. Det er forholdsvis let at indse, at det for alle begynderesværdier i R^2 vil gælde, at systemet bevæger sig mod $(0,0)$.

Mængden af de punkter, der har $(0,0)$ som punktattraktor kaldes naturligt nok for bassinet hørende til den pågældende punktattraktor.

Hvis vi i (7) skifter fortegn på højresiden, vil trajektoriebilledet forblive uforandret på nær trajektoriernes orientering.

Hvilepunktet $(0,0)$ er nu en såkaldt punktrepellor for systemet.

Naturligvis er et sådant system -set udfra en global betragtning- ufysisk, men som vi senere skal se, kan vi udmærket have en lokal punktrepellor i et system, der globalt respekterer krav om energibevarelse.

Det er vigtigt at slå fast, at et hvilepunkt ikke behøver at være en punktattraktor eller en punktrepellor for et system. For den udæmpede harmoniske oscillator ser vi, at intet trajektorie søger mod $(0,0)$.

Hertil kommer det vigtige tilfælde, hvor hvilepunktet er et såkaldt saddelpunkt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Trajektoriebilledet svarende til (8) kaldes for en saddel og er vist på figur 8 :

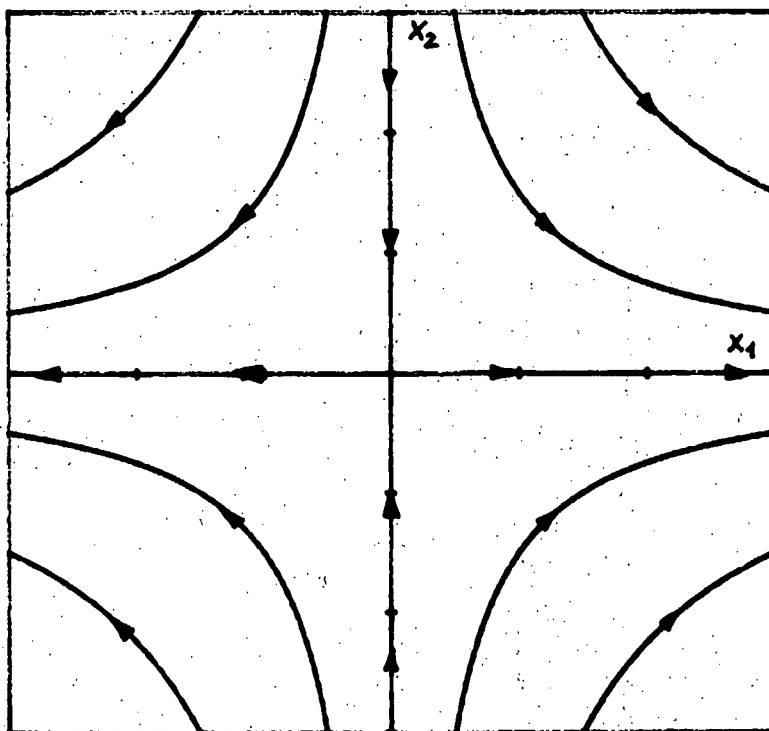


fig.8: Trajektoriebillede af sad-
len i (8), hvor $a > 0$

Disse få spredte eksempler antyder det frugtbare perspektiv, at vi kan benytte den ovenfor skitserede grafiske metode selv i de tilfælde, hvor en analytisk løsning ikke findes.

Men én ting er kvalificerede gæt foretaget med papir og blyant; en anden ting er at begrunde disse gæt med et stringent analytisk værktøj.

Dette stringente apparat er i det lineære tilfælde let at pege på, nemlig de lineære afbildningers teoribygning, eller kort og godt: Lineær algebra.

Problemet, som vi formulerede i (3) p.14 får i det lineære tilfælde følgende udseende:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad x(0) = x_0 \quad (9)$$

hvor $A \in L[\mathbb{R}^n]$, mængden af lineære operatorer på \mathbb{R}^n .

I almindelighed vil (9) være et system af koblede differentiaalligninger, men eftersom differentialoperatoren d/dt kommuterer med lineære operatorer, vil (9) kunne skrives på formen

$$\frac{d}{dt}(Qx) = (QAQ^{-1})(Qx), \quad (Qx)(0) = Qx_0. \quad (10)$$

Hvor Q er en ikke-singulær lineær operator.

Hvis vi sætter $y = Qx$ og $QAQ^{-1} = B$, $Qx_0 = y_0$, har vi

$$\dot{y} = By, \quad y(0) = y_0$$

Skrivemåden i (10) leder naturligt tanken hen på diagonalrepræsentationer af vores vektorfelt, idet e.g. et diagonaliseret problem spalter op i afkoblede, selvstændige differentiaalligninger af typen $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$, der har løsningen $x_i = \exp(\lambda_i t)$ multipliceret med en konstant, der er givet ved begyndelsesværdierne.

I almindelighed er det lovligt optimistisk at bilde sig ind, at (8) skulle være diagonaliserbart. Men det er der råd for.

I den lineære algebra bevises det, at man for en vilkårlig lineær operator på \mathbb{R}^n kan finde en kanonisk repræsentation, der med henblik på at løse problemet (9) er særlig simpel. Denne kanoniske form kaldes for S + N -opspaltningen:

For enhver lineær operator $T \in L[\mathbb{R}^n]$ findes der entydige operatorer $S, N \in L[\mathbb{R}^n]$ således at $T = S + N$, $SN = NS$, hvor S er diagonaliserbar over \mathbb{C} og N er nihilpotent[§] (4).

[§] N er nihilpotent (af orden m) hvis der findes et positivt heltal m , således at $N^m = 0$.

Vi vil ikke gå i detaljer, men nøjes med at mærke os, at T på denne måde spalter op i blokmatricer (elementære Jordan-former), som så kan analyseres hver for sig. Vi giver som illustration et eksempel fra (6) :

Lad T være en lineær operator på \mathbb{R}^3 givet ved

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi analyserer T med henblik på at løse begyndelsesværdiproblemet

$$\dot{x} = Tx \quad \text{med} \quad x(0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

Det karakteristiske polynomium er $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$, således at egenverdierne er -1 (med multiplicitet 2) og $+1$ (med multiplicitet 1).

Det generaliserede 2-dimensionale egenrum hørende til -1 er $\text{Ker}(T + I)^2$, som udspændes af $(0, 1, 0)$ og $(1, 0, 0)$. Tilsvarende findes $\text{Ker}(T - I)$ udspændt af vektoren $(0, 2, 1)$.

T spalter så op i $S + N$, hvor S i basen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ er diagonal, viz.

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For at finde S i den oprindelige (sædvanlige) basis har vi så $S = P^{-1}S_1P$, hvor P^{-1} fås ved at danne matricen med de fundne basisvektorer for de generaliserede egenrum som søjler, viz.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heraf findes

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = T - S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $x_0 \exp(tT) = x_0 \left(I + tT + \frac{1}{2!} (tT)^2 + \dots + \frac{1}{k!} (tT)^k + \dots \right)$ er den eneste løsning til vores begyndelsesværdiproblem $\dot{x} = Tx$ med $x(0) = x_0$ har vi

$$x_0 \exp(tT) = x_0 \exp(tS + tN) = x_0 \exp(tS) \exp(tN)$$

hvor vi har benyttet, at S og N kommuterer.

Diagonalformen af S_1 gør det bekvemt at udregne $\exp(tS)$, idet

$$\exp(tS) = P^{-1} \exp(tS_1) P$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{pmatrix} P$$

§ Det vises i analysen, at $\exp(A)$, hvor A er en operator på et normeret vektorrum V konvergerer absolut i den inducerede ligelige norm på $L[V]$.

$$= \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & -2\exp(-t) + 2\exp(t) \end{pmatrix}$$

Eftersom N er nihilpotent af 2. orden, viz. $N^2 = 0$, bryder maclaurinrækken for $\exp(tN)$ af ved andengradsleddet, og vi får

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tilbage er der så at multiplicere de to matricer sammen, og den fuldstændige løsning på problemet bliver

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t) & t\exp(-t) & -2\exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) & -2\exp(-t) + 2\exp(t) \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

Imidlertid er det ikke helt simpelt at anskue løsningen ovenfor geometrisk, i.e. ved trajektorier i tilstandsrummet. Her er Jordan-blokmatricerne et bekvemt hjælpemiddel, som det efterfølgende vil vise. I dette tilfælde er det nemt at indse, at T kan bringes på formen

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ved et passende lineært koordinatskift.

T spalter nu op i $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ og (1) , således, at vi kan behandle disse hver for sig. Koordinatskiftet giver de gamle x 'er i nogle nye, som vi skriver som e.g. $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Kort sagt: Vi betragter det transformerede problem

$$\dot{y} = T'y \quad (11)$$

Restriktionen af operatoren T' til planerne $y_3 = \text{const.}$ er

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hvis korresponderende trajektoriebillede er vist på fig.9.
 Dette karakteristiske billede kaldes for en uegentlig knude.

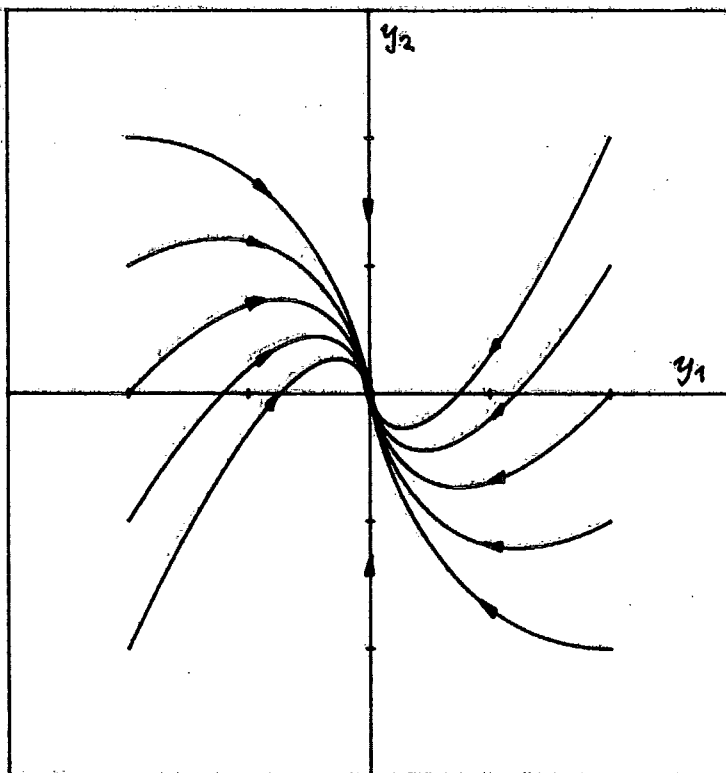


fig.9: Trajektoriebilledet af T' 's restriktion til planerne $y_3 = \text{const.}$, en såkaldt uegentlig knude.

På figur 10 og 11 viser vi et snit af trajektoriebillederne i de to koordinatplaner $y_1 = 0$ og $y_2 = 0$.

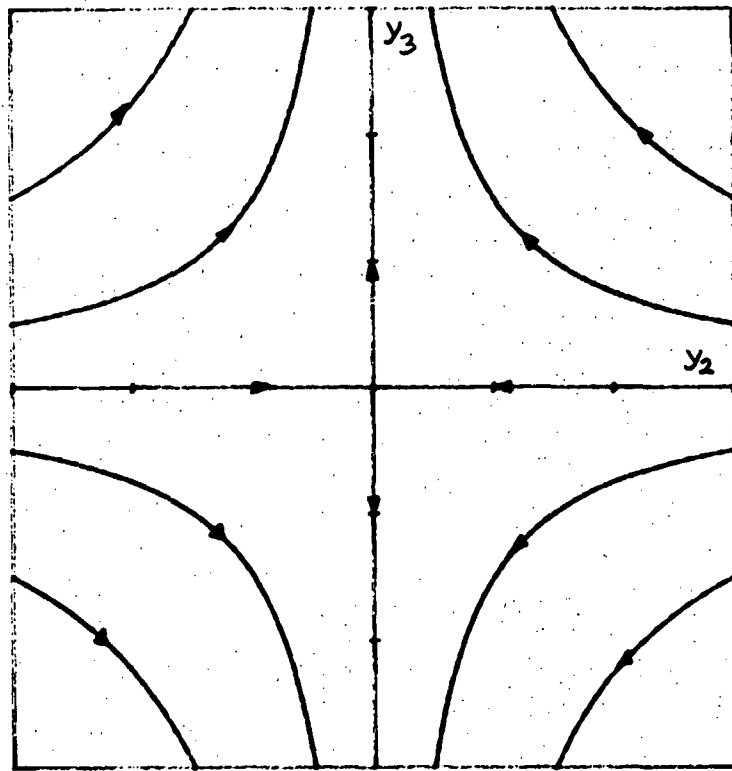


fig.10: Trajektoriebilledet af (11), $y_1=0$

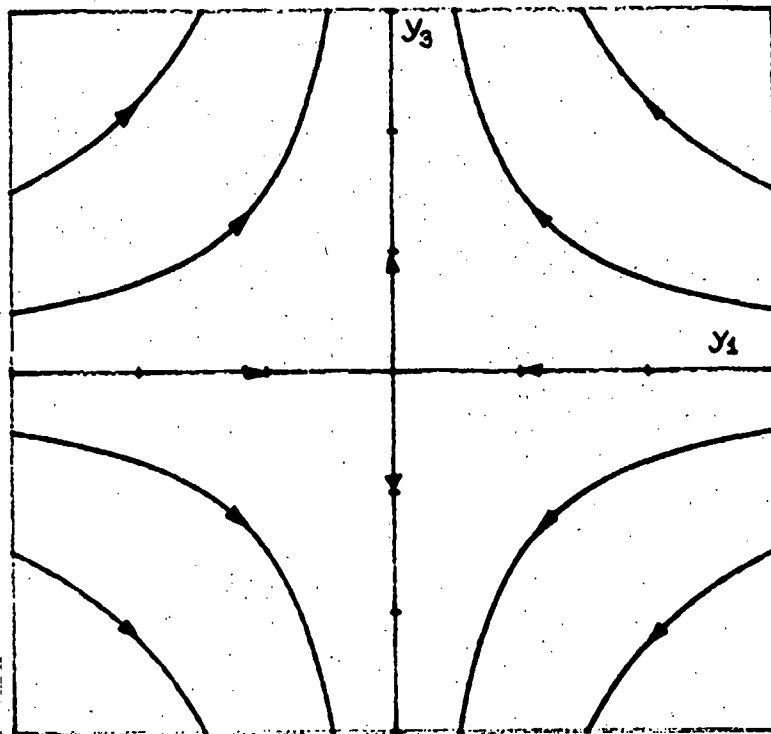


fig.11: Trajektoriebilledet af (11), $y_2=0$

Det turde være klart, at trajektoriebilledet i de oprindelige (sædvanlige) koordinater ikke adskiller sig kvalitativt fra de ovenfor givne: De fremgår af hinanden ved en ligedannethedstransformation. Vel er det oprindelige trajektoriebillede dilateret og roteret i forhold til den kanoniske udgave, men hvilepunktet, som ved alle lineære vektorfelter er origo, vil uanset dilatation og rotation stadigvæk være et hvilepunkt, som i eksemplet ovenfor træffende kan ses som et ugentligt knudepunkt overlejret med to saddelepunkter.

Det foregående er en illustration af den generelle fremgangsmåde, som man kan benytte, når man vil vide noget om trajektoriebilledet i det régi, der omhandler lineære differentiaalligninger.

Givet en lineær operator T , finder man den kanoniske Jordanform, hvor T spaltes op i elementarblokke af typen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & \lambda_1 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

eller

$$\begin{pmatrix} D & O & \dots & O \\ I & D & \dots & O \\ O & I & \dots & O \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ O & O & & I & D \end{pmatrix}$$

med $D = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hvis $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ er en kompleks egen værdi for T .

Denne blokopsplætning gør det relativt nemt at overskue vektorfeltets - og dermed trajektoriebilledets udseende.

Pointen er her, at vi med et kvalitativt mål for øje ikke behøver at bestemme den matrix, der formidler overgangen til de koordinater hvor T har den kanoniske form. Hvis vi ønsker os en fuldstændig beregning, er det S + N opsplætningen der skal bringes i spil.

Vi afrunder nu det lineære univers med en diskussion af de vigtigste lineære vektorfelter på R^2 , en diskussion, der meget let lader sig generalisere til højere dimensioner, når elementarblokkene er så elskværdige at være 2 x 2 matrixer.

Vi betragter problemet

$$\dot{x} = Ax, \text{ hvor } A \text{ er en lineær operator på } R^2$$

Tilfælde 1.0 : A kan ikke diagonaliseres.

Iflg. det foregående findes der et ikke-singulært koordinat-skift, således, at A har den kanoniske form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Trajektoriebilledet er vist på fig.12.

Tilfælde 1.1 : A kan diagonaliseres, A har reelle egenverdier.

Lad os kalde disse egenverdier for λ og μ . Der findes en ikke-singulær lineær transformation således at A får udseendet

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

For et repræsentativt udsnit af fortegnskombinationer er trajektoriebillederne vist på figurerne 13,14,15 og 16.

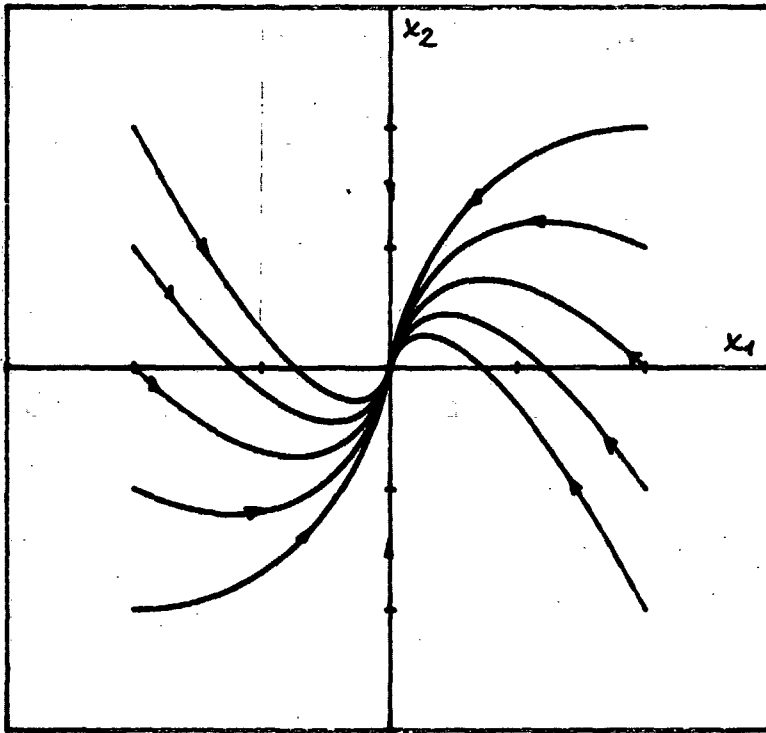


fig.12: uegentlig knude, $\lambda < 0$

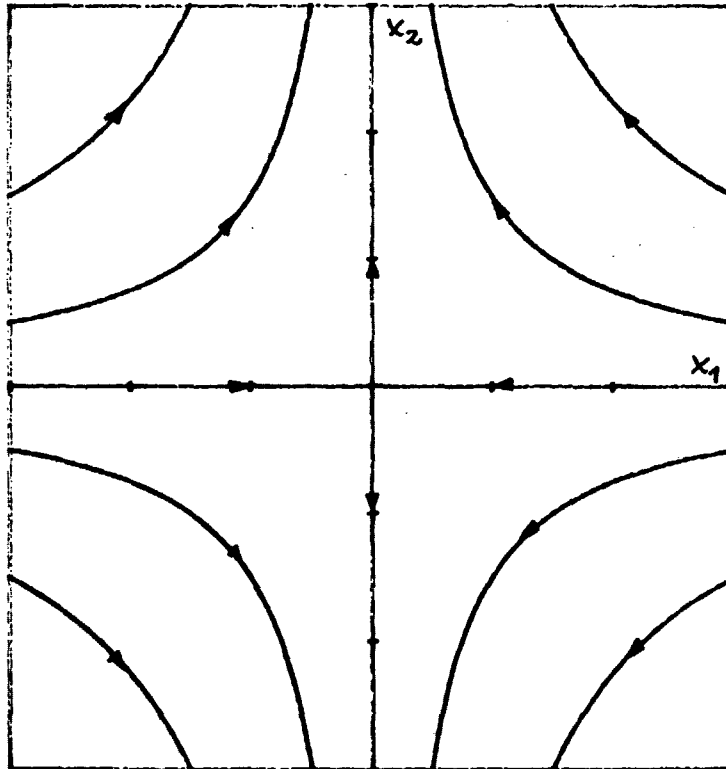


fig. 13: Sattel, $\lambda < 0 < \mu$.

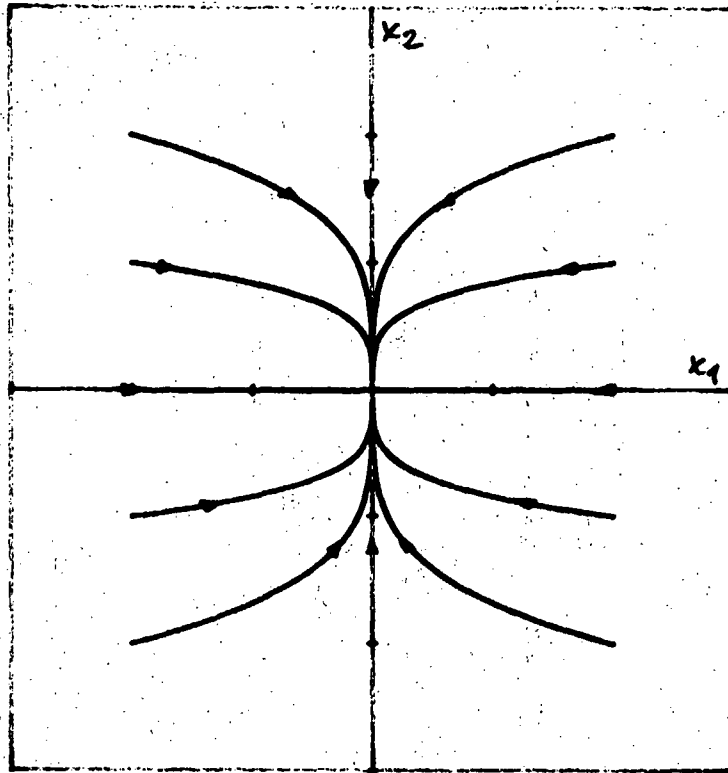


fig.14: egentlig knude, $\lambda < \mu < 0$

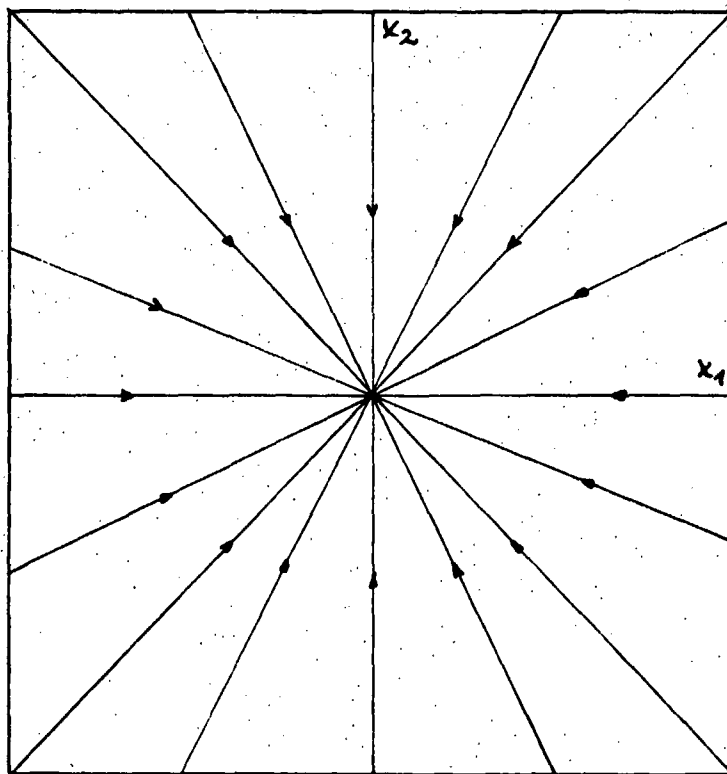


fig.15: fokus, $\lambda = \mu < 0$

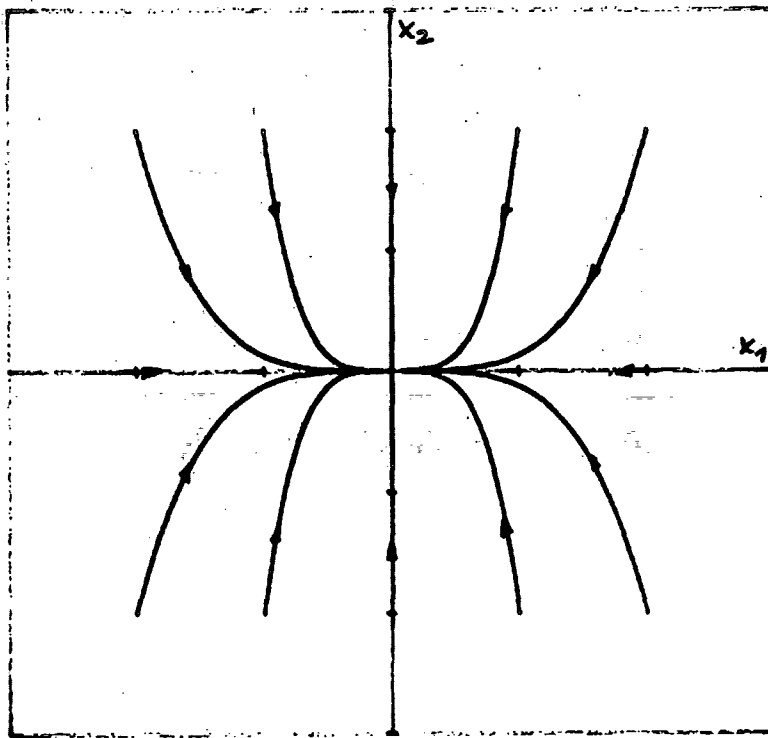


fig. 16: egentlig knude, $\mu < \lambda < 0$

Tilfælde 1.2 : A har komplekse egenverdier. A har da følgende kanoniske repræsentation:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hvor } \beta \in \mathbb{R} - \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

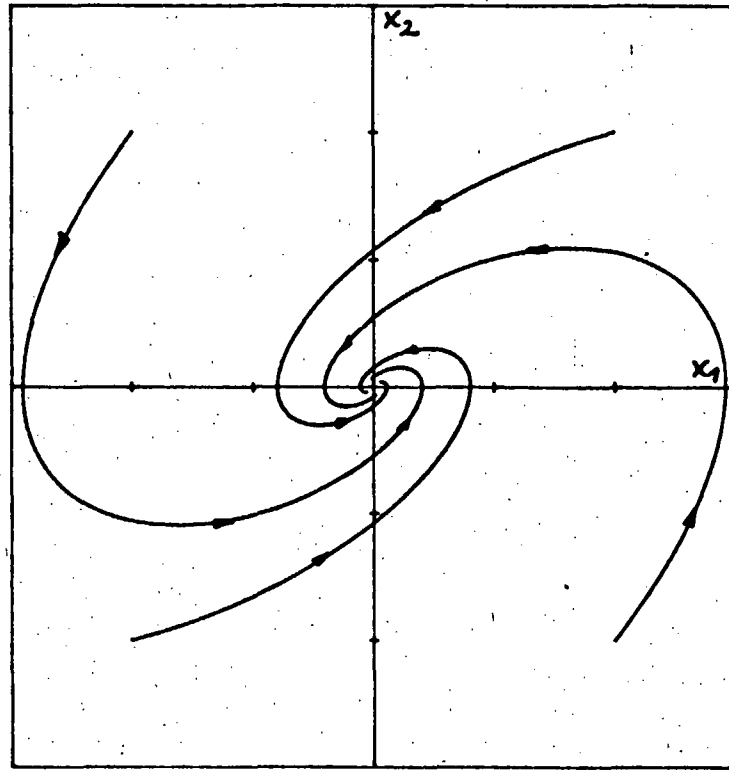
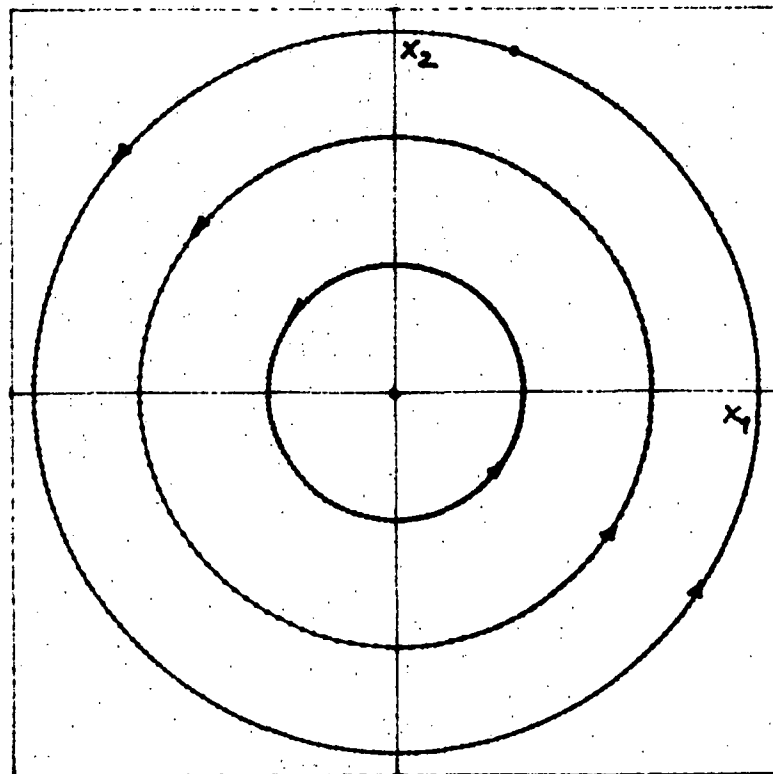
Vi har nu, for $\alpha < 0$ en såkaldt spirallæk, vist på fig.17.

For $\alpha = 0$ sker der det interessante, at punktattraktoren i origo forsvinder, og vi får et såkaldt center, fig.18.

Vi kan sammenfatte det diagonaliserbare tilfælde i diskussionen af egenverdiproblemet for A . Egenverdierne er bestemt udfra ligningen

$$\lambda = \frac{1}{2} [\text{Tr}A \pm ((\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A)^{\frac{1}{2}}]$$

Hvilket let kan overskues grafisk i en afbildning af $\text{Det}A$ mod $\text{Tr}A$ på fig.19.

fig.17: spirallæk, $\alpha < 0$ fig.18: Center, $\alpha = 0$

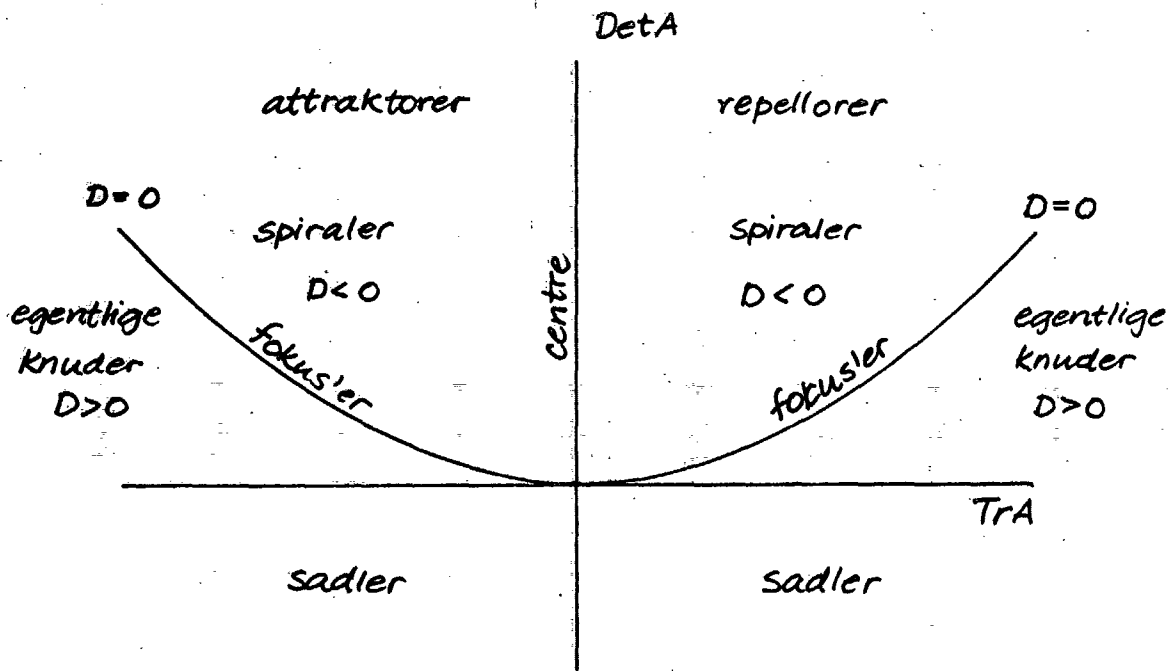


fig. 19. grafisk repræsentation af egenværdidiskussionen for matricen A i det tilfælde, hvor A kan diagonaliseres over C . D står for egenværdiligningens diskriminant.

Figur 19 er meget nyttig, når vi i det følgende skal beskæftige os mere indgående med begrebet strukturel stabilitet.

Resumé af de lineære systemer.

Vi har nu set, at vi i det lineære tilfælde kan koge analysen ned til at bestemme egenværdierne for vores operatorer og til at bestemme - udfra rent algebraiske procedurer - hvordan den kanoniske Jordanform for problemet ser ud. Hvis vi udover den rent topologiske information ønsker at få numeriske resultater skal vi til at løse lineære ligningssystemer for at finde de relevante overgangsmatricer. Fra et kvalitativt synspunkt har den numeriske information kun kosmetisk interesse.

Vi kan formulere denne filosofi i abstrakte termer:

Vektorfelterne er bestemt op til en lineær, ikke-singulær koordinattransformation. Eller sagt på en anden måde: Et fabeldyr, hvis syn ikke kunne skelne dilaterede og roterede koordinatsystemer, ville i mangfoldigheden af lineære vektorfelter på R^2 kun kunne se de former, der er skitseret ovenfor.

Det er præcis denne filosofi, der går igen i katastrofeteorien: Vi skal prøve at sætte os i et provinsielt og astigmatisk fabeldyrs sted og med dette handicap (?) beskrive fænomenerne.

Generelle dynamiske systemer.

Lad os et kort øjeblik glemme, at der er noget der hedder differentiaalligninger og forestille os, at vi kigger på et eller andet tilstandsrum S . Lad os videre antage, at vi har en familie af funktioner φ_t , $t \in R$, som er defineret overalt på S , og som for hvert $x \in S$ bestemmer, hvor x befinder sig t sekunder senere. Med andre ord: Systemets tilstandsvektor x kan forudberegnes til tidspunktet t ved hjælp af vores φ_t . Da φ_t er defineret for negative t , vil vi også kunne udtale os om, hvor x var for t sekunder siden.

Vi kan forestille os, at vi en varm sommerdag ser på et fastfrosset billede af fronten af en brudt bølge, der dovent kryber op ad en let skrånende strandbred. Vi kan så ved hjælp af vores φ_t beregne, hvorledes et fastfrosset billede af vandfronten ser ud t sekunder senere.

Denne betragtningsmåde er en global, sammenfattende synsvinkel, der netop modsvarer vores grafiske trajektoriebillede, som resumerer hele systemets bevægelse.

Disse overvejelser munder ud i følgende definition:

Et dynamisk system på S er en familie af funktioner $\varphi_t: S \rightarrow S$, hvor $t \in \mathbb{R}$ og S er åben i \mathbb{R}^n om hvilken det gælder, at

(a) $\varphi_0: S \rightarrow S$ er identiteten på S

(b) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, hvor \circ symboliserer sammensætning af afbildninger.

Det er klart, at et dynamisk system giver anledning til en differentiaalligning på S, hvis vi definerer

$$\dot{x} = F(x) \equiv \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0}$$

hvor højresiden netop er tangentvektoren til trajektoriet gennem x for $t = 0$, viz. højresiden definerer gennem vores φ_t et vektorrum, $F: S \rightarrow E$, altså et vektorfelt på S.

Omvendt giver sætningen om eksistens og entydighed af løsninger til differentiaalligninger af den ovennævnte type anledning til en sådan familie af funktioner, φ_t , hvis restriktion til et maksimalt åbent løsningsinterval $U \times W$ i $\mathbb{R} \times S$ netop er mængden af trajektorier. Funktionen $\varphi|_{U \times W}$ kaldes for strømningen af differentiaalligningen.

Denne globale betragtning vil ligge til grund for det efterfølgende, hvor vi tillader os at benytte begreberne sædvanlig differentiaalligning, vektorfeltet tilhørende en sædvanlig differentiaalligning og dynamisk system synonymt.

Det, der kendetegner et dynamisk system af typen

$$\dot{x} = G(x) \tag{12}$$

hvor G nu er en ikke-lineær funktion, er lokale egenskaber. Vi er i den ikke-lineære verden tvunget ind i en nærsynet

referensramme, hvor vi i almindelighed kun kan udtale os om egenskaber i en vis omegn af en mængde af punkter.

Men lad os forinden vi går videre, fæstne os ved et vigtigt globalt resultat, der følger af eksistens og entydighed af en strømning på $W \subset \mathbb{S}$:

Trajektorierne kan intetsteds skære hinanden eller sig selv endsige at forgrene sig. De eneste tilladte trajektorier er åbne og lukkede. Dette er vist på fig. 20 og 21.

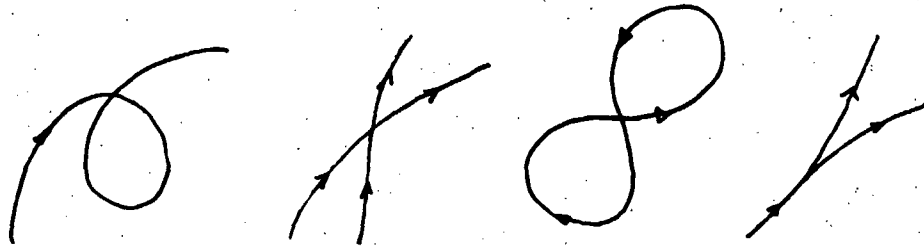


fig.: 20: Eksempler på forbudte trajektorier (\mathbb{R}^2)

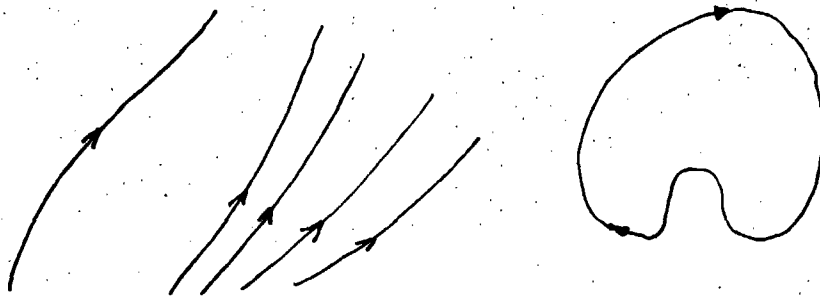


fig.: 21: De eneste tilladte typer af trajektorier for et dynamisk system som i (12) (\mathbb{R}^2)

Set gennem fysiske briller svarer dette topologiske resultat til den klassiske fysik, hvor et konservativt system vil udvikle sig fuldstændigt deterministisk.

Et konservativt system bestående af n punktformede partikler er fuldstændigt karakteriseret ved et sæt generaliserede koordinater og impulser som et punkt i faserummet. Systemets tidslige udvikling er bestemt fuldstændigt entydigt ved den tilhørende Hamiltonfunktion som et trajektorie i faserummet.

Hvis trajektoriet skærer sig selv, er der grund til at formode, at der virker ydre kræfter på systemet.

Stabilitet og strukturel stabilitet.

Løst sagt er et hvilepunkt for et dynamisk system stabilt, dersom trajektorierne i en tilpas omegn holder sig tæt ved hvilepunktet. Dette præciserer vi:

Lad \bar{x} være et hvilepunkt for (12), i.e. $G(\bar{x}) = 0$.

- (a) Hvis det for en vilkårlig omegn U af \bar{x} , hvor $U \subset W$ kan lade sig gøre at bestemme en omegn V af \bar{x} med $V \subset U$ således, at ethvert trajektorie, der starter i V vil forløbe fuldstændigt i U , siges \bar{x} at være et stabilt hvilepunkt for (12).
- (b) Hvis yderligere $x(t) \rightarrow \bar{x}$ for $t \rightarrow \infty$, siges \bar{x} at være asymptotisk stabil.

Denne mundfuld er let at omsætte i et billede, således som det er vist på figur 22. Vi bemærker, at klassen af punktattraktorer er asymptotisk stabile og omvendt.

Det er imidlertid ikke så let at give algebraiske stabilitetskriterier, der er brugbare i en kvalitativ sammenhæng.

Problemet er dog i princippet løst af den russiske ingeniør Liapounoff, hvis teorem vi lige nævner af hensyn til det efterfølgende. Kriteriet, som Liapounoff formulerede, har den fordelagtige egenskab, at det kan bruges uden at bestemme løsningerne til (12). Det lyder:

Lad \bar{x} være et hvilepunkt for (12). Lad endvidere $L:U \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, defineret i en omegn $U \subset W$ af \bar{x} , differentiabel i $U - \{\bar{x}\}$ således at

$$(a) \quad L(\bar{x}) = 0 \text{ og } L(x) > 0 \text{ for } x \neq \bar{x}$$

$$(b) \quad L(x) = \langle \text{grad}_x(L), \dot{x} \rangle \leq 0 \text{ i } U - \{\bar{x}\}$$

så vil \bar{x} være et stabilt hvilepunkt. Hvis der yderligere gælder skarpt ulighedstegn i (b) ovenfor, er \bar{x} asymptotisk stabilt.

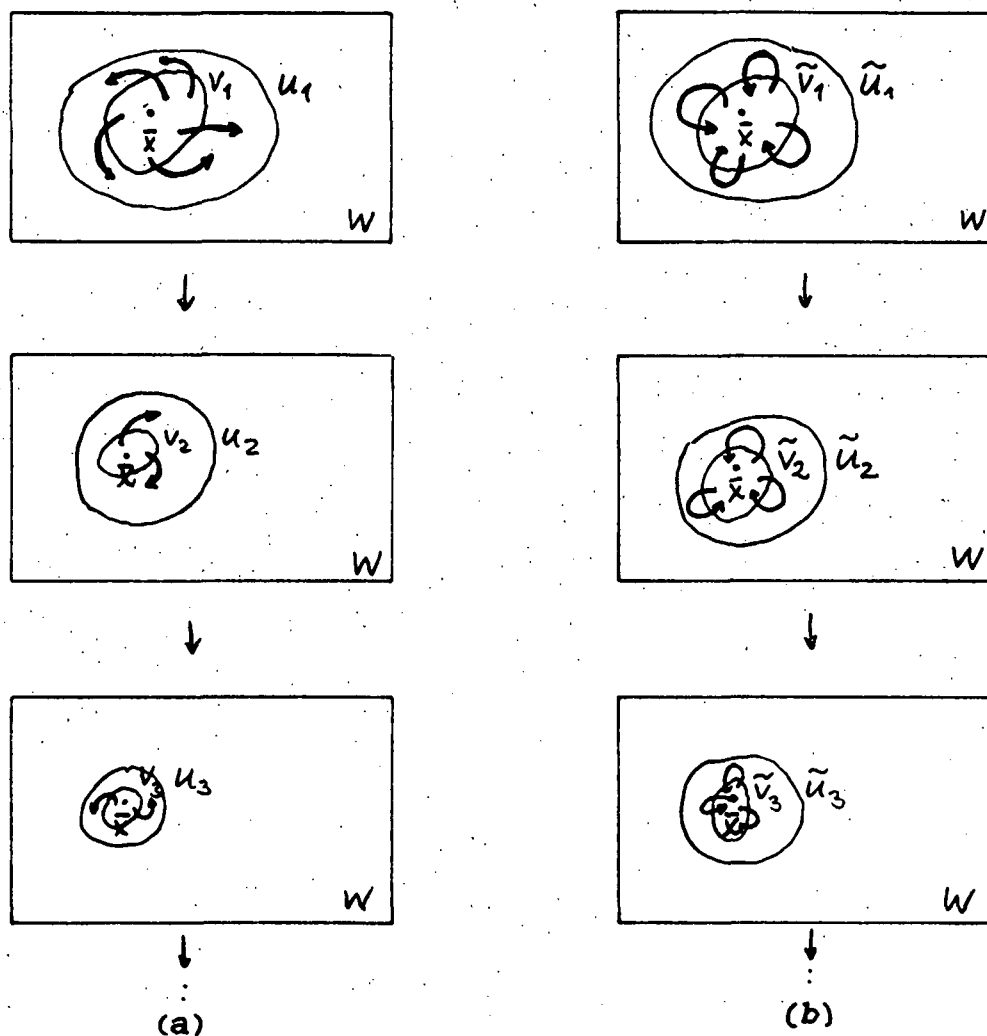


fig. 22: Illustration af stabilitetsdefinitionen side 40.

Der findes desværre ikke nogen standardopskrift på, hvordan man finder Liapounoff-funktioner for et givet problem. Man er hvert enkelt tilfælde overladt til sin egen fantasi og opfindsomhed. Det overraskende ved Liapounoff's stabilitetskriterium er, at den fundne Liapounoff-funktion ikke behøver at have noget med systemet at gøre, rent bortset fra, selvfølgelig, at den opfylder (a) og (b) på side 41.

Gradientsystemer.

De såkaldte gradientsystemer er systemer af typen

$$\dot{x} = -\text{grad}_x(V(x)) \quad (13)$$

hvor V er en funktion $V:U \rightarrow \mathbb{R}$ og

$$\text{grad}_x(V(x)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (13.1)$$

har for ethvert hvilepunkt en oplagt Liapounoff-funktion, nemlig $V(x) - V(\bar{x})$.

Gradientsystemer er, som det blev nævnt indledningsvis, råmateriale i Thom's teorem. Vi vil ikke gennemføre stabilitetsanalysen her, fordi den i katastrofeteoretisk sammenhæng kræver en differentialtopologisk 'briefing', som vi udskyder lidt endnu.

Når vi indtil dette øjeblik har anvendt sprogbrogen en punktattraktor/repellor, er det for at understrege, at en attraktor/repellor ikke behøver at være et enkelt punkt.

Til de mere generelle attraktorer hører de såkaldt cykliske attraktorer (-repellorer), som bla.a. kendetegner en række kemiske reaktioner langt fra termodynamisk ligevægt.

Vi ser nu på et klassisk eksempel, den såkaldte Van der Pohl-oscillator, der bruges i laserfysikken til at beskrive de for Rubinlaseren karakteristiske relaksationssvingninger.

En let forenklet udgave af denne oscillator beskrives ved den ikke-lineære Van der Pohl ligning:

$$\ddot{y} + (3y^2 - \epsilon)\dot{y} + y = 0 \quad (14)$$

Vi bringer denne på kanonisk form:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - (3x_1^2 - \epsilon)x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x) \quad (15)$$

En tegning af vektorfeltet, vil afsløre, at (15) har et lukket trajektorie som løsning, og at origo er en punktrepellor, såfremt $\epsilon < 0$. Det kan vises, at (15) netop har én sådan entydig cyklisk attraktor, med bassin i hele planen undtagen $(0,0)$. Et repræsentativt trajektoriebillede for $\epsilon < 0$ er vist med computerplot på figur 23.

Vi kan nu skyde os ind på en definition af attraktorbegrebet. Først definerer vi en såkaldt ω -grænsemængde for et fastholdt x i W som mængden af punkter y i W om hvilken det gælder, at trajektoriet gennem x har y som grænseværdi i.e. $x(t) \rightarrow y$ for $t \rightarrow \infty$. Ved at erstatte ∞ med $-\infty$ får vi defineret en ny grænsemængde, løst sagt, 'der hvor punktet kom fra uendelig langt tilbage i tiden', præcist: en α -grænsemængde. (α og ω er henholdsvis første og sidste bogstav i de græske alfabet)

For vores oscillator i (15) er den 'superelliptiske' cyklus (cf. fig.23) ω -grænsemængde for alle punkter i planen undtagen origo, og ethvert punkt indenfor 'superellipsen' har repelloren $(0,0)$ som α -grænsemængde.

Vi kan nu rykke ud med en definition af en attraktor:

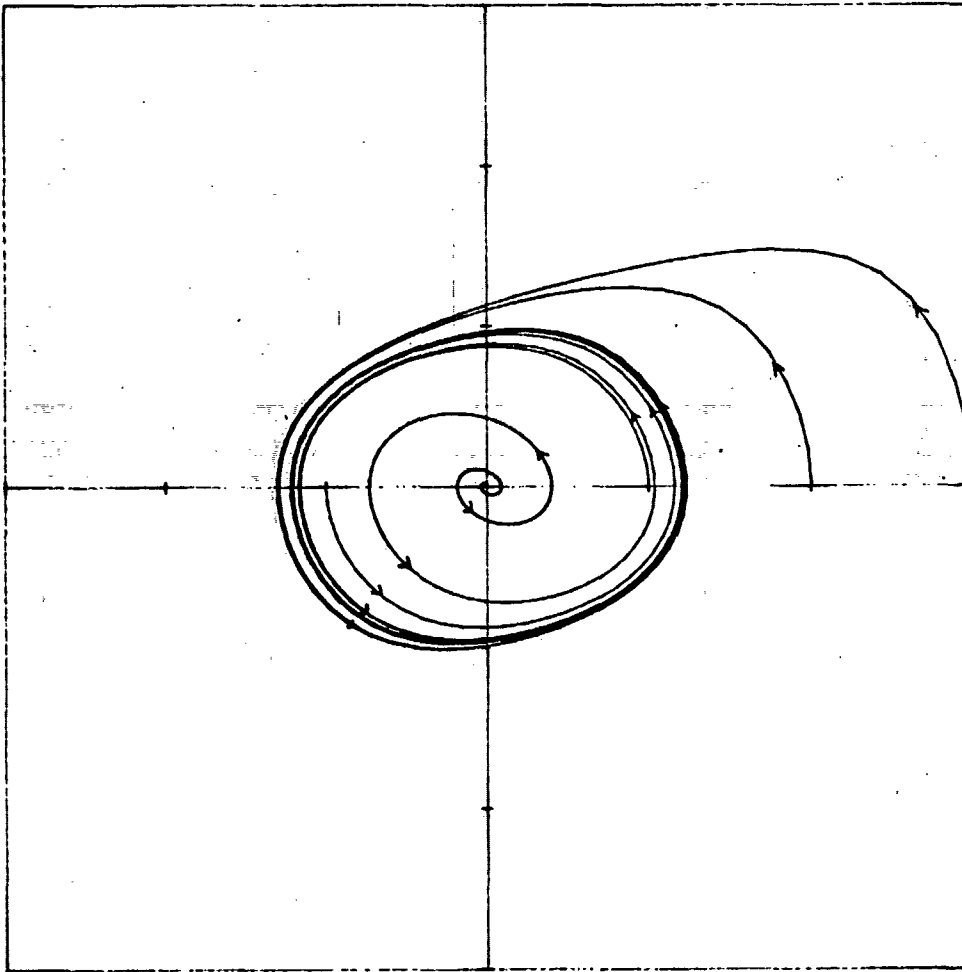


fig. 23: Van der Pohl oscillator med $\varepsilon < 0^{\varepsilon}$

. En attraktor A for et dynamisk system er en afsluttet mængde i W , som er invariant i tiden (i.e. bevaret under strømmingen) og som opfylder tre kriterier:

- (a) Der findes en tidsuafhængig åben omegn S af A , således at alle punkter i S har A som sin ω -grænsemængde.
- (b) Ethvert trajektorie, der starter i A forbliver i A .
- (c) A er sammenhængende.

Ved at erstatte ω med α i ovenstående fås definitionen på en repellor.

^{ε} cf. fodnote p.112

Det er klart, at interessen må samle sig om undersøgelsen af attraktorernes (hvis der er nogen) topologiske egenskaber. Som en støtte for de geometrisk-intuitive overvejelser nævner vi det berømte Poincaré-Bendixson teorem:

En ikke-tom kompakt[§] grænsemængde (α - eller ω -), som ikke indeholder hvilepunkter vil være et lukket trajektorie.

Dette teorem er et særdeles vigtigt og ikke-trivielt resultat. Hvis vi ser på en ideel harmonisk oscillator, er det klart, at løsningskurverne er ellipser med centrum i origo.

Men vi kan rent faktisk ikke vise, at løsningerne er trajektorier for systemet med en endelig periode uden at løse problemet eksplicit. Det kan vi nu med Poincaré-Bendixson.

Parametriserede dynamiske systemer.

Begrebet strukturel stabilitet knytter sig til diskussionen af parametriserede dynamiske systemer. Et parametriseret dynamisk system er en familie af vektorfelter, $G_\sigma: W \rightarrow E$, hvor $\sigma \in M$, således at der til enhver værdi af σ i M svarer netop ét vektorfelt. Vores σ kan træffende ansues som en ydre kontrol for et dynamisk system, forstået således at vi ved at skrue op og ned for vores kontrolknap, hvormed vi regulerer σ , kan påvirke forløbet af systemets trajektorier.

Vi tager et eksempel: Linear, dæmpet harmonisk oscillator. Vi skriver

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

[§] En mængde X i et topologisk rum T siges at være kompakt, dersom enhver foreningsmængde af åbne mængder, der rummer X (en sk. overdækning af X), kan udtyndes til en endelig overdækning af X . En cirkel i planen er kompakt, mens den samme cirkel med et punkt fjernet fra periferien ikke er.

Ved at lade σ gennemløbe alle mulige værdier (reelle) opnår vi et parametriseret dynamisk system. Hvad sker der nu med trajektoriebilledet, når vi lader σ gennemløbe den reelle akse? Vi vælger at gå fra $+\infty$ og til $-\infty$. Vi bruger figur 19 igen:

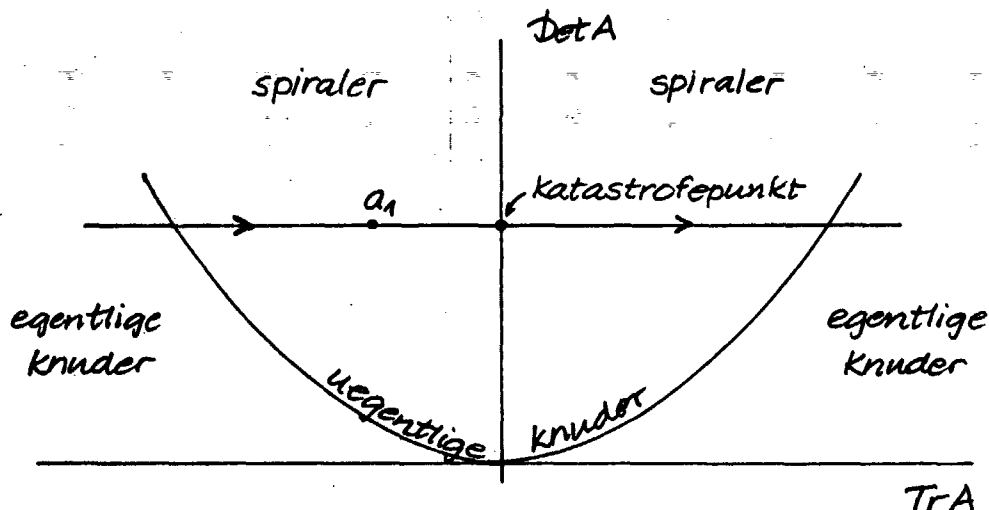


fig. 24: Sporet af rejseruten $+\infty, -\infty$ for en parameterstyret oscillator (16) i $TrA, DetA$ -planen fra fig. 19.

Da TrA , (hvor A er matricen i (16)) er lig $-\sigma$, betyder det, at vi begynder vores rejse til venstre på fig. 24. Her vil trajektoriebillederne være egentlige knuder, lige indtil vi passerer parabelbuen $D=0$. Her skal vi passe på, for trajektoriebilledet er ikke et fokus. Fig. 19 bygger på den udtrykkelige forudsætning, at A er diagonaliserbar over \mathbb{C} . For $\sigma = \pm 2\omega$ er A netop ikke diagonaliserbar, for i så tilfælde ville A 's udseende i alle ligedannede repræsentationer være diagonal.

Dette må betyde, at vi for $\sigma = \pm 2\omega$ har en uegentlig knude som trajektoriebillede. (oscillatoren er kritisk dæmpet).

Mellem den venstre parabelbue og $DetA$ -aksen oscillerer (16) dæmpet, med origo som attraktor. Men når vi passerer $TrA = 0$ for $\sigma = 0$, sker der noget drastisk. Origo ændrer sig fra at være en attraktor (pæn dæmpet svingning) til for $\sigma = 0$ at

forsvinde identisk (udæmpede svingninger) og endelig for $\sigma < 0$ at blive til en repellor (opblæsende oscillationer).

Hvis vi holder os væk fra $\sigma = 0$, e.g. mellem den venstre parabelbue og DetA-aksen og betragter trajektoriebilledets ændringer i en lille omegn af et fastholdt punkt, e.g. σ_1 på fig 24, ser vi at de må være små. Lidt mere præcist: Vi vælger et nabopunkt σ_2 til σ_1 . Hvis vi kræver, at den største afstand mellem trajektoriet svarende til σ_1 hhv. σ_2 skal være mindre end et i forvejen opgivet lille $\varepsilon > 0$, er det let at se, at vi kan bestemme et $\delta > 0$ således, at det for alle σ_2 i denne δ -omegn af σ_1 vil gælde, at trajektoriet svarende til σ_2 vil forløbe i en afstand fra trajektoriet svarende til σ_1 , der er mindre end ε gældende for ethvert fastholdt begyndelsespunkt. Kort sagt: ved at styre på vores σ i områderne udenfor det kriminelle punkt, kan vi få trajektoriebillederne til at fremgå kontinuert af hinanden, og vi siger, at så længe σ er forskellig fra 0, vil systemet være strukturelt stabilt. Punktet $\sigma = 0$ kan vi passende kalde for et katastrofepunkt.

Lad os nu betragte samtlige vektorfelter på W , $V[W]$ under eet. $V[W]$ er et reelt vektorrum med punktvis addition og punktvis skalær multiplikation. Vi siger nu, at to vektorfelter, $G, H \in V[W]$ er ækvivalente, såfremt der findes en homeomorfi^E af W , som afbilder trajektorierne for G og H på hinanden. Vi kan så give følgende præcise definition af begrebet strukturel stabilitet:

Et vektorfelt G er strukturelt stabilt eller lokalt perturbationsinvariant, dersom der findes en åben omegn U_G af

^E En homeomorfi er en kontinuert funktion, der har en invers funktion, der også er kontinuert.

G i $V[W]$, således at hvis $H \in U_F$, så er G ækvivalent med H .

Vi siger, at en attraktor A er strukturelt stabil (lokalt perturbationsinvariant), hvis der for ethvert vektorfelt \bar{G} tilstrækkelig tæt på G i $V[W]$ findes en attraktor \bar{A} for \bar{G} og en lokal homeomorfi $h:W \rightarrow W$ således, at $h(A) = \bar{A}$, og h afbilder G 's trajektorier på \bar{G} 's trajektorier.

Når vi vil præcisere, hvilken type ækvivalens, der er tale om, benytter vi udtrykket ' G er lig med H op til en homeomorfi'.

Løst sagt betyder strukturel stabilitet dette, at små, dvs. lokale perturbationer ikke ændrer trajektoriebilledets udseende på en afgørende måde.

Det er nemt at se, at den udæmpede harmoniske oscillator er strukturelt ustabil, for selv den mindste perturbation af vektorfeltet vil få trajektoriebilledet til at blæse op eller snøre sig sammen. Dette kan i den topologiske analyse formuleres lidt mere elegant: Eftersom en homeomorfi bevarer topologiske egenskaber, vil billedet af en kompakt mængde under en homeomorfi vedblive at være kompakt. Da trajektorierne for en udæmpet oscillator er kompakte, og da trajektorierne i en vilkårlig lille omegn er åbne, kan vi slutte, at der ikke findes nogen homeomorfi, der sender trajektorierne ind i hinanden og vice versa. Konklusion: Den udæmpede harmoniske oscillator er strukturelt ustabil.

Fra et modelbyggerens synspunkt og fra et matematikersynspunkt synes det at være en god tommelfingerregel, at de modeller, som man konstruerer af virkeligheden bør være strukturelt stabile, og at strukturel stabilitet bør være reglen og strukturel ustabilitet bør være undtagelsen. I topologisk forstand bør de mængder af punkter, for hvilke et system er strukturelt stabilt være, hvad vi her vil kalde for fede: en fed mængde er en mængde, der indeholder en åben og tæt[§] delmængde.

Hvis strukturel stabilitet er gyldig på fede mængder, kan vi i en vilkårlig lille omegn af et strukturelt ustabil system finde et strukturelt stabilt system, der tilnærmer det ustabile system med en vilkårlig nøjagtighed.

Dette harmonerer i og for sig godt med de overvejelser, som det er relevant at knytte til fysiske eksperimenters reproducerbarhed. Strukturel stabilitet er et udtryk for, at to identiske måleopstillinger vil give samme måleresultater op til en statistisk måleunøjagtighed uanset hvor og hvornår de udføres.

Den underforståede strukturelle stabilitet ligger i den løse sprogbrug "identisk", fordi vi strengt taget burde sige, at de to måleopstillinger er ens op til en lokal perturbation.

Det er værd at bemærke, at de systemer, der optræder i den klassiske mekanik, viz. de hamiltonske systemer ikke er strukturelt stabile, cf. den udæmpede harmoniske oscillator. Ikke desto mindre er et pendul et reproducerbart fænomen. Dette hænger selvfølgelig sammen med, at de hamiltonske systemer er idealisationer. Noget andet er, at det ofte er mest praktisk at starte med det uperturberede system og så derefter at modificere Hamiltonfunktionen for systemet med små perturbationer. Et fuldstændigt isoleret system er kvalitativt forskelligt fra et system, der vekselvirker med omgivelserne. Men hvis vekselvirkningen er kendt, kan man i tilstandsrummet indføre de ekstra dimensioner, der er nødvendige for, at trajektorierne ikke skærer hinanden, og under denne forudsætning opnå, at et ikke-autonomt system kan gøres autonomt ved at blive indlejret i et tilstandsrum med flere dimensioner.

\$ En delmængde A af et topologisk rum X siges at være tæt i $B \subset X$, hvis det om ethvert punkt b i B og enhver omegn af b i B gælder, at den indeholder punkter af A , i.e., at er indeholdt i A 's afslutning.

Det viser sig, at strukturel stabilitet er en egenskab, som det er frugbart at knytte til modeller af dissipative systemer, hvor vi med en løs sprogbrug ofte siger, at det er dissipationen, der stabiliserer systemerne. Men ligegyldigt hvilket sprog vi bruger, er det ikke desto mindre en kendsgerning, at vi i naturen observerer fænomener, som det er rimeligt at beskrive som strukturelt stabile, hvilket jo strengt taget er en egenskab ved modellerne.

Dette understreges af de vanskeligheder, der idag behersker den gren af matematikken, der beskæftiger sig med dynamiske systemers strukturelle stabilitet. Der findes e.g. ikke nogen analog sætning til Poincaré-Bendixson teoremet gældende for dynamiske systemer i rum, der har dimension større end 2.

Men sagen er til dels afklaret for gradientsystemers vedkommende: Mængden af strukturelt stabile gradientvektorfelter på enhedskuglen i \mathbb{R}^n , $n < \infty$ er fed, viz. næsten alle gradientvektorfelter er strukturelt stabile. Det er netop denne egenskab, der gør det muligt for EKT at stille spørgsmålet: Hvad med resten?

For at forstå dette, må vi kravle endnu et abstraktionstrin op: Tiden er inde til en differentialtopologisk briefing.

Differentialtopologisk 'briefing'.

Thom's sætning om de syv elementære katastrofer har et skær af mystik omkring sig, ikke mindst fordi det kan være svært for en ikke-professionel overhovedet at begribe, hvorfor Thom's teorem gælder.

Det er ikke formålet her at give blot et rudimentært 'bevis' for sætningen, men at anskueliggøre den referensramme, der knytter sig til sætningens semantiske og geometrisk-intuitive omgivelser.

Vi vil i dette afsnit give det minimum af forudsætninger, der skal til for at kunne færdes nogenlunde oprejst i katastrofeteoriens verden, nemlig mangfoldighedsbegrebet og transversalitetbegrebet. Disse to konstruktioner gør det relativt nemt at forstå generelle egenskaber ved de førnævnte gradientssystemer, egenskaber der er ret centrale for et stort udsnit af de systemer, vi møder i fysikken.

Mangfoldigheder.

En mangfoldighed er en 'ting', der overalt ligner et euklidisk rum. Dette signalement udspringer eksempelvis af, at overfladen af en glat kugle, en terning med glatte flader, en glat dobbeltkegle og en glat torus har noget tilfælles: Disse overflader er alle todimensionale 'ting', som vist på fig. 25.

Men der er en ret så afgørende forskel mellem disse flader. Lad os prøve at forestille os en nærsynet mariehøne, der kravler rundt på disse. Mariehønen har fået til opgave at rapportere, hvorledes der ser ud i disse todimensionale verdener.

Den ville i al sin nærsynethed mene, at kuglen og torussen overalt ligner et stykke fladt euklidisk rum, R^2 , mens den derimod efter en udmattende ekspedition på kubussen og på dobbeltkeglen ville rapportere, at der var landskaber af enestående art. Ligegyldigt hvor nærsynet vores mariehøne

måtte være, ville den rapportere, at kubusoverfladen havde skarpe hjørner og kanter og at dobbeltkeglens toppunkt var helt ulig de landskaber, den var vant til.

Dette leder os til en naturlig klassifikation af samtlige todimensionale flader, nemlig de, der overalt ligner todimensionale euklidiske rum, og de, der ikke gør det.

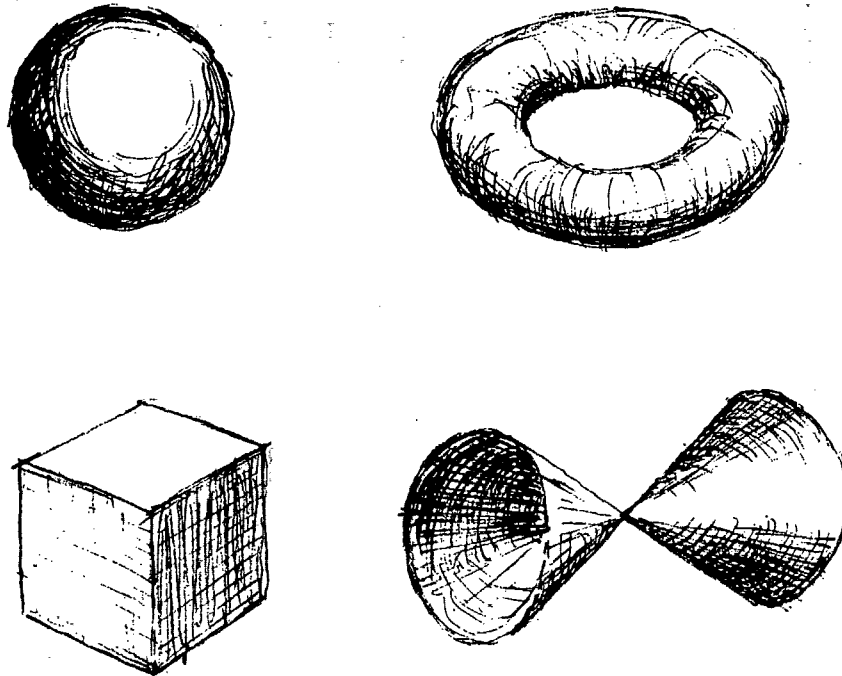


fig. 25.: eksempler på todimensionale flader i \mathbb{R}^3

Den førstnævnte klasse falder ind under de topologiske objekter, som vi kalder for glatte mangfoldigheder.

Inden vi giver en præcis definition på en glat mangfoldighed, vil vi introducere begreberne en glat afbildning og en diffeomorfi:

En afbildning $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, hvor X er en vilkårlig delmængde af \mathbb{R}^k siges at være glat i x_0 , dersom der findes en åben omegn, $U_{x_0}^k \subset \mathbb{R}^k$ af $x_0 \in X$ og en vilkårligt ofte differentiabel funktion $F: U_{x_0}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ således at F 's restriktion til $U_{x_0}^k \cap X$ er lig med f .

Hvis dette gælder for alle $x \in X$, siges f at være glat på X .

Vi bemærker, at ovenstående definition er en generalisation, der gør det muligt at tale om differentiability på geometriske objekter, der er indlejret i større rum, e.g. en kurve i det euklidiske rum, \mathbb{R}^3 .

Diffeomorfier: 'ideelle gummiabildninger'.

Lad X og Y være vilkaarlige delmængder af \mathbb{R}^k og \mathbb{R}^m respektive. En glat afbildning $f: X \rightarrow Y$ er en diffeomorfi, dersom f^{-1} også er glat, viz. en tovejs glat funktion.

Glat mangfoldighed.

En glat m -dimensional mangfoldighed M^m er et topologisk rum, der i ethvert punkt har en relativt åben omegn, der er diffeomorf med en åben delmængde af det euklidiske rum, \mathbb{R}^m .

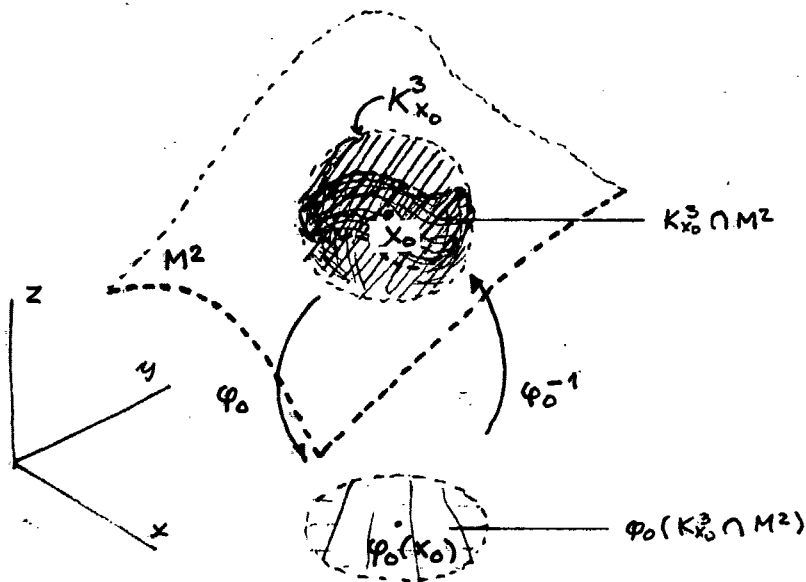
Det er på fig. 26 vist, hvorledes definitionen virker. Vi tager i eksemplet på fig. 26 først en åben kugle, $K_{x_0}^3$ omkring x_0 på M^2 og bestemmer en vilkårligt ofte differentiabel funktion $\Phi: K_{x_0}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. På figur 26 har vi som vores Φ valgt den kanoniske projektion fra \mathbb{R}^3 på \mathbb{R}^2 , e.g. $\Phi: (x, y, z) \rightarrow (x, y)$. Derfter snitter vi M^2 med vores åbne kugle $K_{x_0}^3$ og får dermed bestemt Φ 's restriktion til snittet $K_{x_0}^3 \cap M^2 = \varphi_0$. φ_0 af-

bilder nu snittet $K^3 \cap M^2$ diffeomorft på en åben omegn af $\varphi_0(x_0)$ i planen R^2 , som vist på figur 26.

Hvis dette kan lade sig gøre for alle M^2 's punkter (og det har vi forudsat i fig. 26) så er M^2 en glat manifoldighed af dimension 2. Læg mærke til, at definitionen af en glat manifoldighed er lokal, således at globale egenskaber ligger en tak højere i abstraktionshierakiet.

Generelt kalder vi en sådan lokal diffeomorfi φ_0 for en koordinatfunktion omkring x_0 , eller slet og ret et lokalt koordinatsystem på M^2 . Den inverse φ_0^{-1} kaldes for en lokal parametrisering (omkring x_0)

Hvis X er en glat manifoldighed og φ_i er et lokalt koordinatsystem omkring x_i , så kalder vi φ_i taget under eet med snittet $U \cap X$'s billede for et lokalt kort (omkring x_i) på X .



figur 26. Eksempel på en glat manifoldighed af dimension 2 i det euklidiske rum.

En samling af sådanne kort $\{\phi_i(U_{x_i} \cap X) \mid x_i \in X\}$ hvor

$\{U_{x_i}\}_{x_i \in X}$ er en åben overdækning af X kalder vi for et atlas på X .

Vi føjer lige endnu en definition til: Hvis X og Y er mangfoldigheder i \mathbb{R}^n og $X \subset Y$, siges X at være en delmangfoldighed af Y .

Med mindre andet er angivet, vil vi i det efterfølgende bruge ordet mangfoldighed synonymt med glat mangfoldighed.

Eksempel: Et atlas på en 2-dimensjonal torus i \mathbb{R}^3 .

Selvom vi i det følgende ikke får brug for begreberne kort og atlas, er det alligevel meget instruktivt at se dem anvendte. Grunden hertil er, at man bør have disse begreber i baghovedet når vi vil anvende generelle udsagn om mangfoldigheder i fysiske sammenhænge.

Vi laver en passende åben overdækning af torus med åbne parallelpipeda, hvorved snittet af denne overdækning med torusoverfladen bliver en relativt åben overdækning af sidstnævnte. Ethvert af disse åbne 'rektangler' kan med et passende valg af koordinatfunktion bredes ud i planen, men ethvert forsøg på at brede hele torusfladen ud vil gøre vold på torusfladens globale topologiske egenskaber: Vi bliver nødt til at klippe den op, hvis vi vil have bredt den ud.

Det resulterende atlas kan vi repræsentere som en klasse af åbne rektangler i planen som vist på fig.27.

Denne klasse af kort betragtet under et giver os oplysning om, hvorledes torusoverfladen globalt er skruet sammen, e.g. at A_1 og C_7 er billedet af det samme punkt på torusfladen ved de respektive koordinatfunktioner. På fig.27 har vi ved hjælp af pile antydnet, hvorledes vi identificerer de områder, der overlapper i vores overdækning.

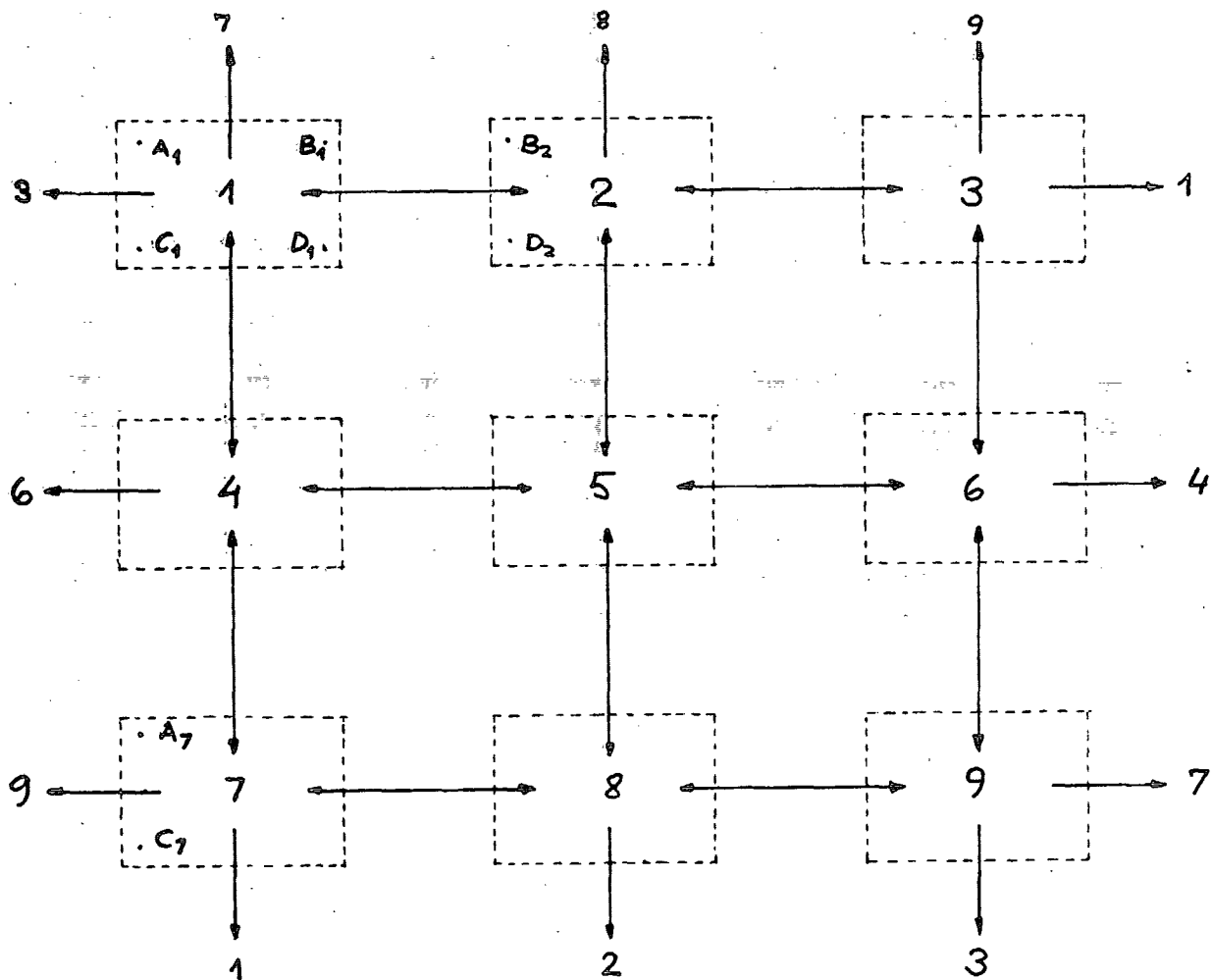


fig.: 27: Et atlas på torus. Atlasset er forsynet med en forskrift, der tillader rekonstruktion.

Vi ser nu tydeligt forskellen mellem den lokale og den globale beskrivelse af torusfladen. Fra et lokalt synspunkt er en torus blot et stykke euklidisk plan, mens den fra et globalt synspunkt er en struktur i mængden af kort, viz. et struktureret atlas. Atlasset for en kugleflade og atlasset for en torusflade kan se ens ud: forskellen fremgår af den måde, som disse atlas er struktureret på.

I eksemplet med torusfladen er strukturen på atlasset givet som en forskrift, ved hjælp af hvilken vi kan rekonstruere vores torusoverflade. Dette er antydnet på fig.28.

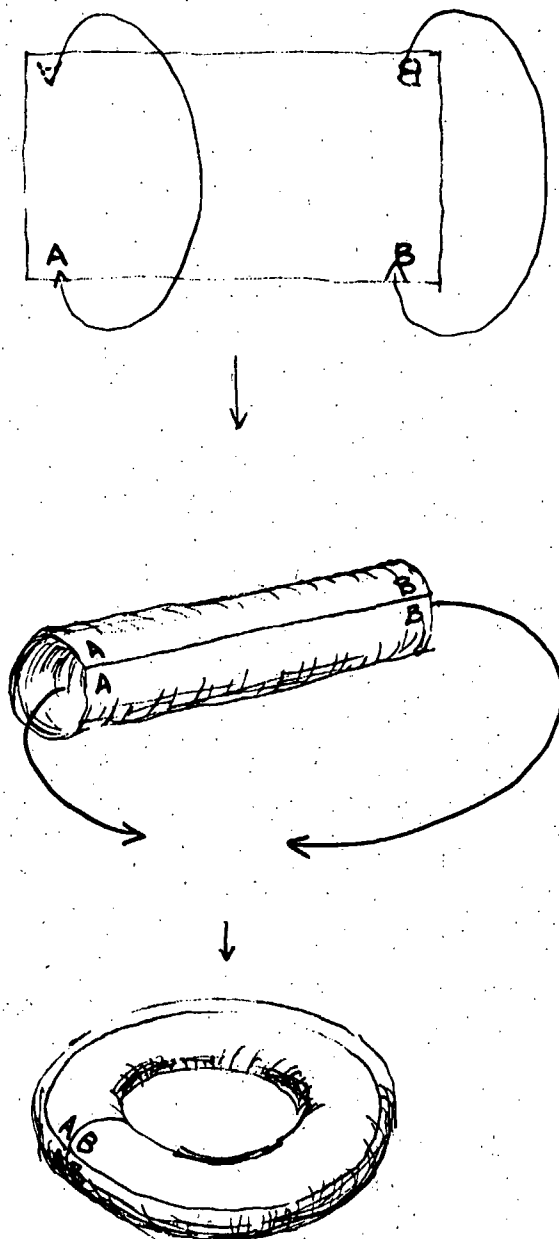
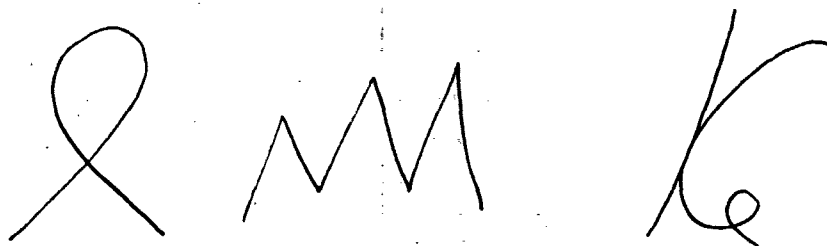
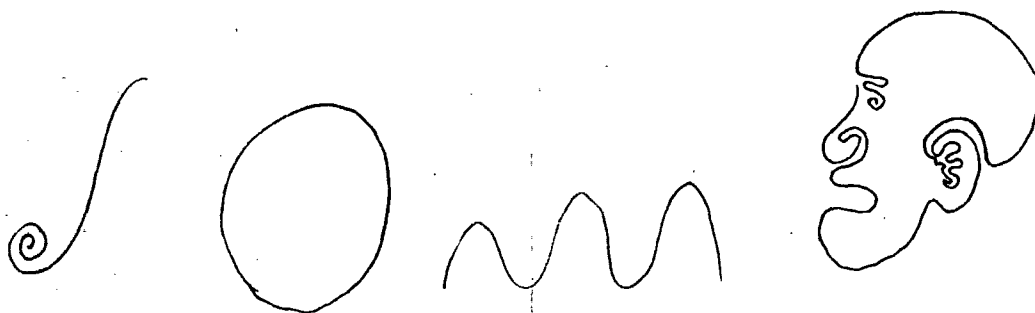


fig.28.: Rekonstruktion af torusfladen udfra forskriften på fig.27.

Det er forholdsvis nemt for 1- og 2-dimensionale geometriske objekter at afgøre, om de er mangfoldigheder eller ikke. Vi giver på fig.29 et par eksempler i flæng:



ikke mangfoldigheder



mangfoldigheder

fig. 29.: Eksempler på 1-dimensionale kurver i \mathbb{R}^2 .

Når vi ved mangfoldigheder underforstår glatte sådanne, er det fordi vi i anvendelserne ofte stiller krav om differentiability.

Normalt fortolkes en differentialkvotient i fysiske anvendelser som en størrelse, der angiver, hvor meget en afhængig variabel vokser, når den uafhængige variable forøges med et vist beløb.

Hvis vi i stedet opfatter differentialkvotienten af en funktion f i 0 som den bedste lineære tilnærmelse til f i 0 , betyder dette, at vi kan bygge bro til den lineære algebra og på denne måde få udtrykt topologiske egenskaber i lineær-algebraiske termer.

Det medfører nu, at vi kan bruge differential'kvotienter'

til at finde det lineære rum, der bedst tilnærmer en mangfoldighed M i punktet x . Lad os antage, at M sidder i \mathbb{R}^n , og at $\alpha:U \rightarrow M$ er en lokal parametrisering, hvor U er åben i \mathbb{R}^k . Vi antager for nemheds skyld, at $\alpha(0) = x$ ($0 \in \mathbb{R}^k$). Den bedste lineære tilnærmelse til $\alpha:U \rightarrow M$ i x er afbildningen $h_\alpha: u \rightarrow \alpha(0) + d\alpha_0(u) = x + d\alpha_0(u)$.

Derved findes tangentrummet til M i x som billedet af \mathbb{R}^k ved $d\alpha_0(\mathbb{R}^k)$: Tangentrummet, som vi skriver som $T_x(M)$ bliver så et underum i \mathbb{R}^n , hvis translaterede $x + T_x(M)$ er den plane tilnærmelse, der ligger tættest på M gennem x .

Nu kan vi konstruere den bedste lineære tilnærmelse til en glat funktion $f:M \rightarrow N$, hvor M og N nu er mangfoldigheder af dimension k resp. j .

Dette kan gøres ved hjælp af lokale koordinater og kort. Idet $f(x_0) = y_0$, vil df_{x_0} være en lineær afbildning af tangentrummet til M i x_0 ind i tangentrummet til N i y_0 ($=f(x_0)$). Lad ϕ og ψ være lokale koordinatfunktioner således at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^k \supset U & \xrightarrow{h} & V \subset \mathbb{R}^j \end{array} \quad h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

kommuterer^s. Af dette diagram afledes så

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}(M) & \xrightarrow{df_{x_0}} & T_{y_0}(N) \\ d\phi_0 \downarrow & & \downarrow d\psi_0 \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dh_0} & \mathbb{R}^j \end{array}$$

Som også er kommutativt. Eftersom $d\phi_0$ og $d\psi_0$ begge er isomor-
fier gælder $df_{x_0} = d\psi_0^{-1} \circ dh_0 \circ d\phi_0$.

Invers funktionssætning.

Den fra den reelle analyse så velkendte sætning får i dif-
ferentialtopologiens regi en central placering. Den er også
central for vores formål, fordi den præcist specificerer den
type ækvivalens, som katastrofeteorien arbejder med. Den ly-
der i en differentialtopologisk kontekst således:

Hvis $f: M \rightarrow N$ er en glat afbildning, hvis afledede df_x i x
er en isomorfi, så vil f være en lokal diffeomorfi i x .

Bemærk, at sætningen kun gælder, hvis mangfoldighederne M
og N har samme dimension.

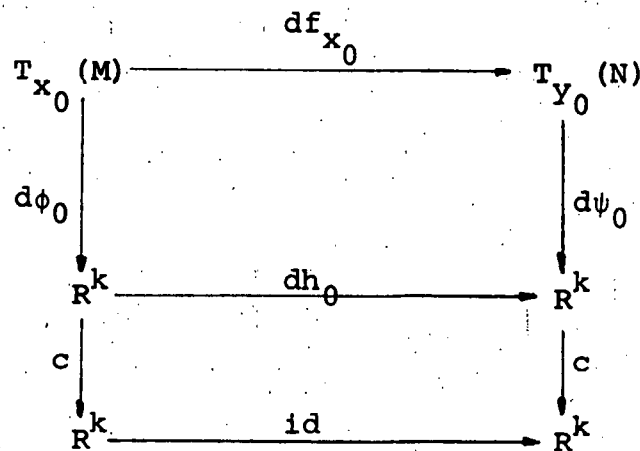
Som det fremgår af det forrige kommutative diagram, så
kan spørgsmålet om, hvorvidt en glat afbildning afbilder en
omegn af x_0 diffeomorft på en omegn af $f(x_0) = y_0$ besva-
res meget simpelt: df_{x_0} er en isomorfi netop hvis dh_0 er det.
Og dh_0 , som går mellem euklidiske rum, er en isomorfi netop
hvis Jacobianten er ikke-singulær i 0: Problemet kan koges
ned til at udregne determinanten af Jacobianten af dh_0 .

Hvis determinanten er forskellig fra 0 i 0, så afbilder
 f en omegn af x_0 diffeomorft på en omegn af $y_0 = f(x_0)$!

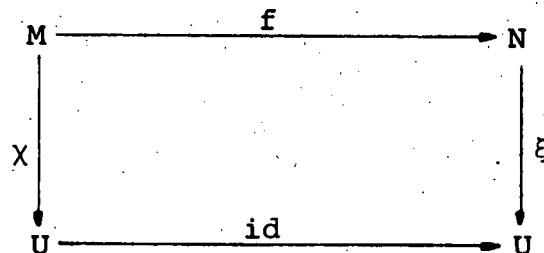
Dette resultat vil vi nu udnytte. Vi husker fra den line-
ære algebra, at en isomorfi kan udtrykkes som identiteten
ved et passende ikke-singulært koordinatskift (=isomorft).

Vi konstruerer så et nyt kommutativt diagram:

\$ Et diagram af afbildninger er kommutativt, hvis to vilkår-
lige følger af sammensatte afbildninger starter samme sted
og slutter samme sted.

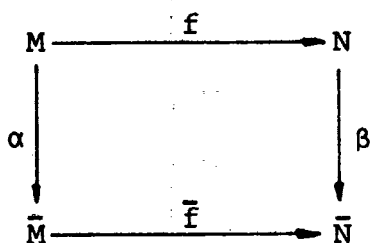


Vi har så identiteten $= id = c \circ d\psi_0 \circ df_{x_0} \circ d\phi_0^{-1} \circ c^{-1}$ og får så det smukke resultat, at der findes diffeomorfier χ og ξ således at f lokalt er den identiske afbildning, viz. nedenstående diagram kommuterer(!):



Vi har så følgende: To glatte afbildninger $f: M \rightarrow N$ og $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ siges at være ens op til en diffeomorfi eller af samme diffeotype, hvis der findes diffeomorfier α og β således at diagrammet (side 62) kommuterer lokalt.

Vi får så på denne måde spaltet samtlige glatte afbildninger af mangfoldigheder ind i mangfoldigheder op i lokale ækvivalensklasser.



Submersjoner.

De funktioner, der har størst interesse for os er sådanne, som afbilder fra et stort (meget stort) rum ind i et lille, som e.g. $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, alias gradientfunktioner. Det mest restriktive krav, vi kan stille til en glat afbildning $f: M \rightarrow N$, hvor $\dim M \geq \dim N$ er lokal surjektivitet af den afledede df .

En sådan fyr, hvis afledede i alle punkter i M er surjektiv (en afbildning på) kaldes for en submersion. Ved den kanoniske submersion forstås naturligt nok den funktion, der sender $(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)$ til (x_1, x_2, \dots, x_j) , hvor $\dim M = k$ og $\dim N = j$. Invers funktionssætning har i tilfældet med submersjoner en analog:

Hvis $f: M \rightarrow N$ er en submersion, så findes der lokale koordinatsystemer således at f er lig den kanoniske submersion.

Et eksempel. Gradientfunktioner.

Vi har en gradientfunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. At f 's afledede er surjektiv i x_0 betyder i mere borgerlige vendinger, at vektoren $\text{grad} f$ taget i x_0 er forskellig fra nulvektoren. Submersionssætningen ovenfor siger nu, at der findes lokale koordinatfunktioner (y_1, y_2, \dots, y_n) ($y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for $j = 1, 2, \dots, n$, hvor x_1, x_2, \dots, x_n er de 'gamle' koordinater) således beskafne, at

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1.$$

Vi går videre med et helt konkret eksempel. ((14), p.84).

Vi ser på funktionen $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$g: (x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2^2 \quad (17)$$

Vi har så

$$\text{grad } g : (x_1, x_2) \rightarrow (1, 2x_2) \neq (0, 0)$$

for alle x_1 og x_2 i planen, hvor x_1 og x_2 er sædvanlige kartesiske koordinater.

Hvis vi indfører nye koordinater $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$\begin{aligned} y_1 &: (x_1, x_2) \rightarrow x_1 - x_2^2 \\ y_2 &: (x_1, x_2) \rightarrow x_2 \end{aligned} \quad (17.1)$$

sender g sættet (y_1, y_2) til $y_1 + y_2^2$, der viderebefordrer sættet (x_1, x_2) til x_1 , i.e.

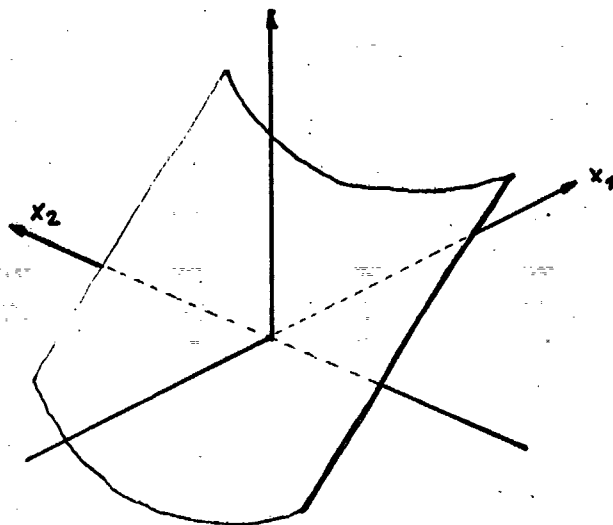
$$f: (x_1, x_2) \rightarrow x_1 \quad (17.2)$$

hvor $f = g \circ y$ er den kanoniske submersion.

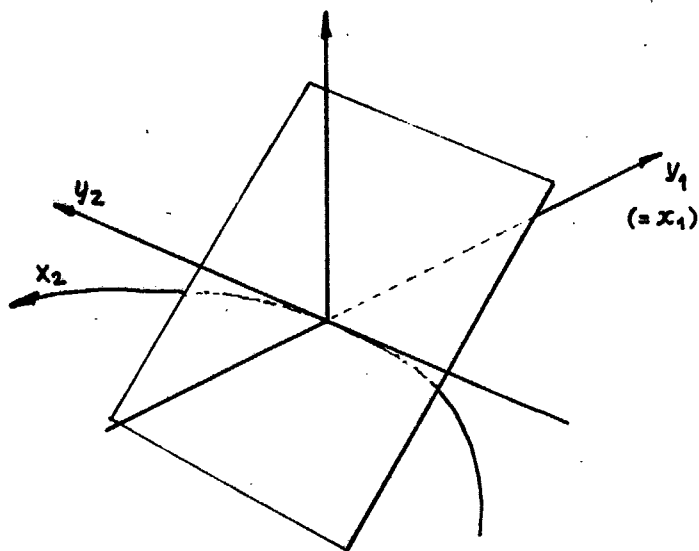
Dette kan vi illustrere grafisk. Lad os kalde x_1 og x_2 for de gamle koordinater. Overgangen fra de nye og til de gamle er iflg. submersionssætningen diffeomorf, således at grafen af g er en mangfoldighed. g er endda så elskværdig, at vi kan bruge de samme koordinatfunktioner overalt. Vi kan så frit vælge, hvilken af de to repræsentationer vi vil arbejde i, (17) eller (17.2).

På figur 30 og 31 er grafen vist i den originale resp. den diffeomorfe repræsentation.

Vi ser visuelt, at vi ved at "krumme" x_2 -aksen passende, altså ved at deformere det euklidiske rum \mathbb{R}^3 efter opskriften i (17.1) kan opnå, at g 's graf bliver plan!



figur 30.: Grafen af g i (17)



figur 31.: Grafen af f i (17.1)
i de nye koordinater y_1 og y_2

Generaliserede lokale koordinatskift.

Vi har nu set, hvad der ligger i de generelle, lokale koordinatskift, som vi omtalte indledningsvis i signalet af Thom's teorem. De kan meget vel betragtes som en generalisation af de lineære koordinatskift, som vi ofte møder i fysikken, for nu at være helt præcise: de affine koordinatstransformationer.

Det er bla. a. sådanne transformationer, der fører til bevarelsessætningerne i fysikken: Hvis et system er karakteriseret ved en Hamiltonfunktion, der er ufølsom overfor translationer i tiden, vil systemets totale energi være bevaret. På lignende måde følger sætningerne om impuls- og impulsmomentbevarelse når man konstaterer, at Hamiltonfunktionen er ufølsom overfor forskydninger resp. rotationer i rummet. Når man i Hamiltonformalismen arbejder i generaliserede koordinater er det fordi bevægelsesligningerne antager kanoniske former, der er bekvemme; al den detaljerede information om sammenhængen mellem stedvektorer, hastigheder og impulser er 'gemt væk' i de generaliserede koordinater.

Filosofien er her den samme. Ved de generaliserede koordinatskift opnår vi her at kunne hellige os studiet af de mere generelle topologiske egenskaber, der er ufølsomme overfor lokale perturbationer i koordinaterne. Vi får al den uvæsentlige information 'gemt væk' i koordinatfunktionerne og nøjes med at betragte en typisk repræsentant for en ækvivalensklasse, således som vi har set det med submersionerne.

Urbilledteoremet.

Et meget vigtigt teorem i forbindelse med submersioner vedrører følgende hyppigt forekommende problem:

Vi står med en gradientfunktion, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vi søger nu de punkter i \mathbb{R}^n , hvor funktionen er lig en eller anden konstant, c (ækvipotentialflader i \mathbb{R}^3 i elektrostatikken e.g.), viz. originalmængden til $c \in \mathbb{R}$, eller som vi her foretrækker at sige: urbilledet af c betegnet med $f^{-1}(c)$.

Hvordan kan vi uden at beregne disse 'hyperækvipotentialflader' alligevel sige noget fornuftigt om det geometriske objekt, som urbilledet er? Det er langt fra sikkert, at det arter sig vel. Vi kan give et algebraisk kriterium for, at urbilledet opfører sig ordentligt.

Men først en enkelt definition.

For en glat afbildning $f: M \rightarrow N$, hvor M og N er mangfoldigheder siges et punkt $y \in N$ at være en regulær værdi for f såfremt f 's restriktion til urbilledet $f^{-1}(y)$ er en submersion.

Deraf følger:

Hvis $y \in N$ er en regulær værdi for $f: M \rightarrow N$ vil urbilledet $f^{-1}(y)$ være en delmangfoldighed af M , og der gælder

$$\underline{\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N}$$

Dette betyder eksempelvis, at ækvipotentialflader ikke kan skære sig selv, hvis den elektriske feltvektor er egentlig.

Hvis det, e.g. gælder om en reel funktion af 3 variable, at gradienten ikke forsvinder i urbilledet af en konstant, så vil funktionen udskære en todimensional mangfoldighed af \mathbb{R}^3 , som det let ses ved at bruge dimensionsformlen ovenfor.

Transversalitet.

Ordet 'transversalitet' stammer fra latin og betyder sådan noget som 'at skære hinanden egentligt', e.g. vil to kurver i planen skære hinanden transversalt, hvis de mødes i et punkt, hvis nærmeste omegn ligner bogstavet 'X', hvorimod to kurver i planen ikke vil mødes transversalt, hvis de netop tangerer hinanden i et eller flere punkter.

Imidlertid ligger der langt mere i transversalitetsbegrebet end ovenstående løse formuleringer antyder. Begrebet hører til de vigtigste i differentialtopologien og er ikke mindst vigtigt i anvendelserne.

Transversalitetsbegrebet er et naturligt produkt af en generalisation af det problem, som urbilledteoremet gav svar på:

Vi løser nu det bånd, at f 's restriktion til en delmængde af M tilfredstiller $f(x) = y$ og spørger om, hvornår urbilledet $f^{-1}(L)$, hvor L er en delmangfoldighed af N er et rimeligt geometrisk objekt. Svaret er følgende teorem:

$f^{-1}(L)$ vil være en delmangfoldighed af M , hvis billedrummet $\text{Im}(df_x)$ udspændt af $df_{x'}$, hvor x er et vilkårligt fastholdt punkt i urbilledet $f^{-1}(L)$ og tangentrummet $T_y(L)$, taget i punktet $y=f(x)$ tilsammen udspænder hele tangentrummet $T_y(N)$ til N i punktet y , viz.

$$\underline{\text{Im}(df_x) + T_y(L) = T_y(N)} \quad (18)$$

Når dette er opfyldt, siges f at være transversal til delmangfoldigheden L af N .

Altså: hvis f er transversal til $L \subset N$, er urbilledet

$f^{-1}(L)$ en delmangfoldighed (!) af M , og der gælder dimensionsformlen

$$\dim M - \dim f^{-1}(L) = \dim N - \dim L \quad (18.1)$$

Dette betyder specielt, at hvis $y \in N$ er et enkelt punkt, hvorom det gælder, at f er transversal til y , har vi $\dim L = 0$ i (18.1), hvilket er ensbetydende med

$$\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N$$

Hvilket er dimensionsformlen for urbilledteoremet, som så passende kan ses som et specialtilfælde af det ovenstående teorem, som vi vil kalde for transversalitetsteoremet.

Sprogbrugen ' f er transversal til y i N ' er altså det samme som at sige ' y i N er en regulær værdi for f '.

Ofte ønsker man at udtrykke, hvor meget en delmangfoldighed $M \subset N$ 'fylder' i N . Dette gøres med begrebet codimension, som defineres som

$$\text{codim } M = \dim N - \dim M$$

Den geometrisk lettest anskuelige situation opstår ved inklusionen af en delmangfoldighed $M \subset N$ med en anden delmangfoldighed $L \subset N$. At sige, at x ligger i urbilledet af L under inklusionsafbildningen er det samme som at sige, at x ligger i snittet $M \cap L$. Den afledede af inklusionsafbildningen er blot inklusionen af tangentrummet til M i x i tangentrummet N i x . Inklusionsafbildningen er transversal til L netop hvis

$$T_x(M) + T_x(L) = T_x(N)$$

hvoraf

$$\text{codim } (M \cap L) = \text{codim } M + \text{codim } L \quad (19)$$

Hvor vi ved at bruge codimensionsbegrebet har udtrykt helt præcist, at transversalitet afhænger af det omgivende rum, som mangfoldighederne sidder i. Eksempelvis vil to 1-dimensionale mangfoldigheder i \mathbb{R}^2 mødes transversalt i et mængde af codimension 2 i \mathbb{R}^2 , viz. i en mængde af dimension 0, i.e. i isolerede punkter. (bemærk, at transversal skæring også omfatter det tilfælde, hvor mangfoldigheder aldrig skærer hinanden). Hvis vi nu lægger de to 1-dimensionale mangfoldigheder ind i det tredimensionale rum, har vi iflg. (19), at de mødes i en mængde af codimension 4 i \mathbb{R}^3 , hvilket betyder, at de her mødes i en mængde af dimension -1.

De kan åbenbart kun mødes transversalt ved aldrig at mødes! Dette er ret let at forestille sig, for hvis to kurver i \mathbb{R}^3 skærer hinanden, vil det altid være muligt at finde en vektor, der står vinkelret på tangentvektorerne til de to kurver i skæringspunktet, viz. tangentvektorerne kan aldrig udspænde hele \mathbb{R}^3 , og opfylder altså ikke kriteriet i (18).

Et par figurer vil gøre transversalitetsbegrebet geometrisk letforståeligt og let at forestille sig, så længe vi arbejder i rum, hvis dimension ikke overstiger 3. Se figur 32.

Vi skal senere i en illustration af transversalitetsbegrebet i mange dimensioner se, at det skitserede analytiske værktøj, som kan rummes i transversalitetsteoremet er overordentligt nyttigt, for ikke at sige uundværligt.

Det vil være meget træffende at sige, at transversalitetsbegrebet er for vor gummigeometriske verden, hvad ortogonalitetsbegrebet er for det retlinede hjemmевante univers.

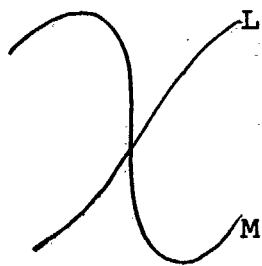
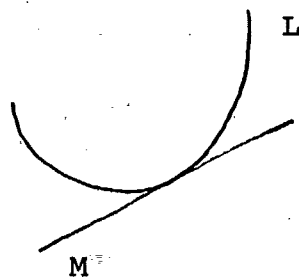
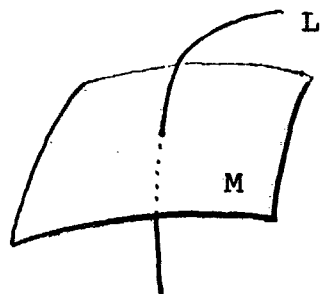
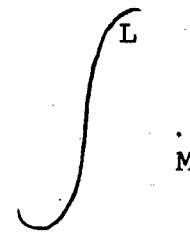
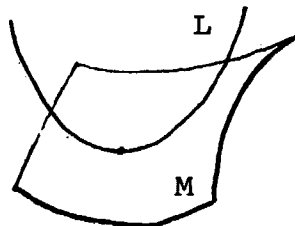
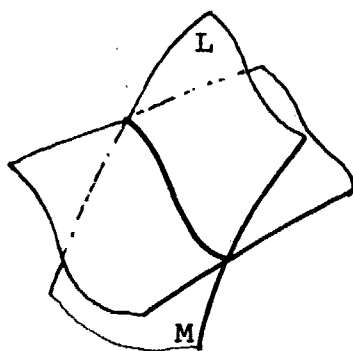
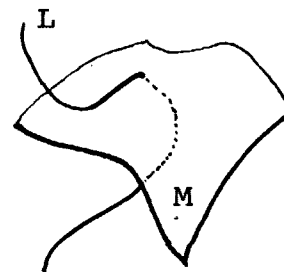
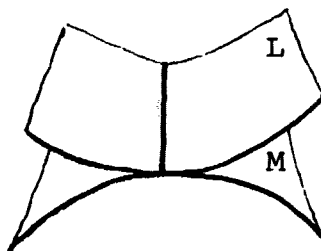
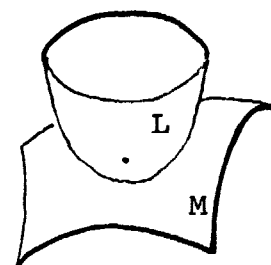
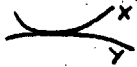


transversal i R^2 ikke-transversal i R^2 transversal i R^3 ikke-transversal i R^3 transversal i R^3 ikke-transversal i R^3 

fig. 32.

Transversalitet og strukturel stabilitet.

Disse meget generelle udsagn om transversalitet giver en ekstra dimension i den strukturelle stabilitets kontekst. Man kan måske allerede nu fornemme at transversalitet er en strukturelt stabil egenskab, der er typisk i den forstand, at egenskaben holder på fede parametermængder, således at et ikke-transversalt snit som e.g.  i \mathbb{R}^2 ved en vilkårlig lille perturbation kan gøres transversal:  eller: .

Dette vil vi udpensle lidt, idet vi holder os til i det følgende kun at se på gradientsystemer.

I det ovennævnte eksempel er det forholdsvist let at indse, at en deformation af den ene af de to mangfoldigheder kan repræsenteres som en familie af mangfoldigheder, e.g. X_c , $c \in U_{\bar{c}}$, hvor X_c lige netop tangerer Y , når c antager værdien \bar{c} . I en åben omegn af \bar{c} , $U_{\bar{c}}$, vil X_c skære Y transversalt. Det er klart, at hvis $U_{\bar{c}}$ er åben i \mathbb{R} , vil de $c \in U_{\bar{c}}$ for hvilke transversal skæring finder sted, i. e. $U_{\bar{c}} - \{\bar{c}\}$ være en åben og tæt mængde og således, a fortiori, fed.

Det kan vises, at transversalitet faktisk er strukturel stabil, og ovenikøbet at det er en typisk egenskab for gradientfunktioner: Hvis en gradientfunktion er transversal til en delmangfoldighed M i N , så vil en lille perturbation af gradientfunktionen også være transversal til M i N ; hvis den ikke er transversal, så vil selv den mindste perturbation være det.

Sard's teorem og Morsefunktioner.

Den ovenstående diskussion knytter an til en af de mere overraskende sætninger i differentialtopologien:

Hvis $f: X \rightarrow Y$ er glat, X og Y er mangfoldigheder, så vil næsten alle punkter i Y være en regulær værdi for f (Sard).

Eller sagt på en anden måde: De ikke-regulære, kritiske værdier for f har målet 0 i Y .

Hvis vi ser på gradientfunktioner, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, så medfører Sard's teorem, at det for næsten alle $c \in \mathbb{R}$ vil gælde, at $f^{-1}(c)$ vil være en mangfoldighed af codimension 1 i \mathbb{R}^n .

Hvis $n = 2$, vil niveaukurverne (= ækvipotentialflader af dimension 1) næsten altid være 1 -dimensionale mangfoldigheder, viz. glatte kurver, der aldrig skærer sig selv!

Eksempel.

Vi ser på en gradientfunktion, hvis graf i \mathbb{R}^3 ser ud som på fig. 33:

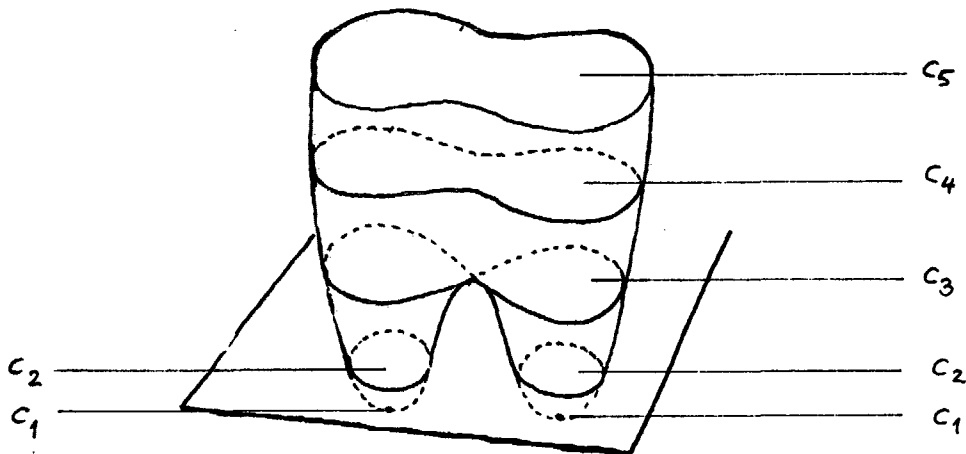


fig.33: Deformeret kravledragt

Vi kan forestille os grafen som den nederste del af en let deformeret kravledragt. Ved at snitte denne med en skære af planer $z = \text{const.}$ fås de tilsvarende niveaukurver på

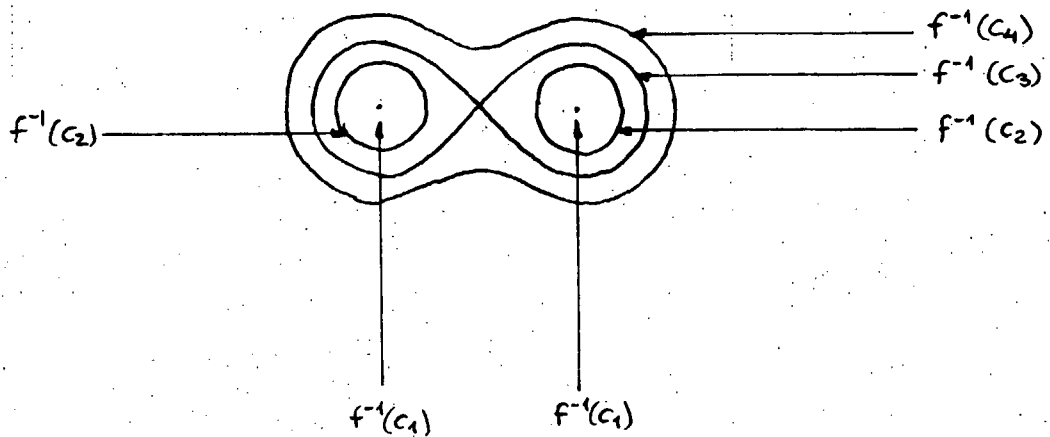


fig.34: Niveaukurver hørende til fig.33.

fig.34, for værdierne $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Det umiddelbart iøjnespringende ved fig.34 er det liggende 8-tal, $f^{-1}(c_3)$ og de to isolerede punkter svarende til $f^{-1}(c_1)$. Dette er en illustration af det kontrapositive Urbilledteorem, således at hvis $f^{-1}(c)$ ikke er en delmangfoldighed af dimension 1 i \mathbb{R}^2 , så vil f ikke være transversal til c i \mathbb{R} .

Det er vigtigt at gøre sig klart, at betingelsen ' c er en regulær værdi for f ' kun er tilstrækkelig for, at Urbilledet $f^{-1}(c)$ er en delmangfoldighed af definitionsmængden for f .

Eksempelvis er Urbilledet af 0 ved gradientfunktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f: (x_1, x_2) \rightarrow x_2^2$$

x_1 -aksen, som er et nydeligt eksempel på en 1-dimensional mangfoldighed i \mathbb{R}^2 , cf. fig. 35.

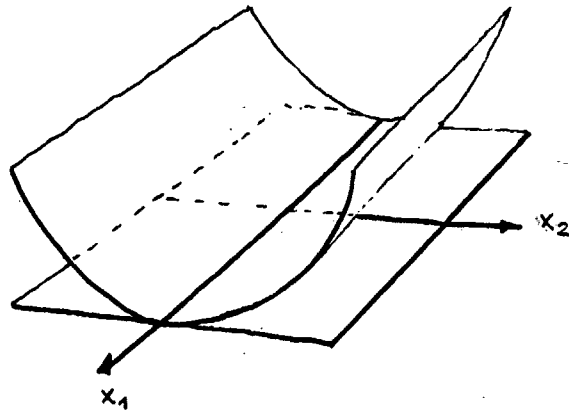


fig.35. Modeksempel, der viser, at urbilledteoremet kun er et tilstrækkeligt kriterium.

Ovenstående modeksempel understreger, at en undersøgelse af de kritiske værdier for en gradientfunktion rummer træk, der er væsentlige for vores formål.

Hvis vi kigger igen på $f: (x_1, x_2) \rightarrow x_2^2$, ser vi, at grad f er lig med $(0, 2x_2)$ og at $d(\text{grad } f)$ bliver til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

som har determinant 0, med andre ord, den andenordensafledede er singular!

Sammenligner vi modeksemplet med eksemplet på fig 33, tegner sig et svagt omrids af en klassifikation af gradientfunktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Hvis vi lægger den restriktion på f , at f , når som helst gradienten forsvinder vil have en ikke singular 2. ordens

afledede (i modsætning til eksemplet på fig. 35), så følger det berømte Morse lemma:

Hvis a er et ikke-singulært kritisk punkt[§] for gradientfunktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, så findes der et lokalt koordinatskift $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\xi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_n(x_1, \dots, x_n))$$

således at f i en omegn af a kan skrives eksakt som

$$f = f(a) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \xi_i \xi_j \quad (20)$$

Vi kalder gradientfunktioner af den ovennævnte type for morsefunktioner.

En umiddelbar konsekvens af lemmaet er, at de kritiske punkter for en morsefunktion er isolerede.

Dette er meget let at indse. Lad os definere $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ved $g = \text{grad } f$. Så gælder der at $df(b) = 0$ netop hvis $g(b) = 0$. Når vi så forudsætter, at f er en morsefunktion, så følger det, at $d^2f(b)$ i ethvert kritisk punkt er ikke-singulær, i. e. at $dg(b)$ er en isomorfi. Iflg. invers funktionssætning vil g så afbilde en omegn af b diffeomorft på en omegn af 0 , kald disse omegne resp. U og V .

I U er $\text{grad } f \neq 0$, når $b \neq 0$, altså for alle y , der ligger i $V - \{0\}$ vil y være en regulær værdi for f ; der findes så ikke andre kritiske punkter i U .

[§] caveat lector: et kritisk punkt ligger i urbilledet af en kritisk værdi for f .

Dette medfører så, at de dynamiske systemer, der styres af morsefunktioner har isolerede hvilepunkter, således at attraktorer, repeller eller sadler altid vil være punkter; her til kommer, at bassinerne altid vil være åbne områder.

Det følger generelt, at gradientsystemer aldrig vil oscillere, fordi den 2.ordensafledede af f er reel og symmetrisk.

Nu kan det vises at morsefunktioner er typiske, viz. næsten alle funktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er morsefunktioner og at morsefunktioner er strukturelt stabile: De typiske attraktorer i et gradientsystem er punkttattraktorer.

Men hvad så med resten? i.e. de f , hvor $\text{grad } f(a) = 0$ og $\text{Det}(d(\text{grad } f(a))) = 0$? Det er ikke svært at se, at Jacobianen for f , viz. matrixrepræsentationen for $d^2f(a)$ ($=d(\text{grad } f(a))$) er en reel symmetrisk matrix, der altid er diagonaliserbar over \mathbb{R} . Matricen for $d^2f(a)$ fremtræder som en $n \times n$ matrix, der i passende koordinater er diagonal med positive, negative og forsvindende diagonalelementer.

Iflg. Sylvester's lov er antallet af positive, negative og forsvindende diagonalelementer en invariant for en given symmetrisk matrix.

Lad nu f være en gradientfunktion, om hvilken det gælder, at $\text{grad } f(a) = 0$, og at $f(a) = 0$ (af bekvemmelighedsgrunde). I passende koordinater kan vi ved at lade os inspirere af Sylvester's lov skrive Taylorudviklingen af f udfra a som

$$f = \eta_1^2 + \dots + \eta_k^2 - \eta_{k+1}^2 - \dots - \eta_j^2 + o^3(\eta)$$

hvor $j \leq n$. Matricen for 2. ordensleddet i η -koordinaterne er en nydelig blokmatrix, med en $k \times k$ enhedsmatrix, en $j \times j$ minusenhedsmatrix og en $n-k-j$ 'te ordens nulmatrix.

Hvis $j=0$, er vores matrix ikke-singulær, og Morselemmaet sikrer os nu, at f i en omegn kan skrives eksakt som på side 76. Hvis d^2f er singulær, bliver vi nødt til at se på de højereordens led i Taylorudviklingen, hvilket vi vender tilbage til i forbindelse med redegørelsen for Thom's teorem.

For at se, hvor sagen snerper hen, diskuterer vi samtlige homogene polynomialfunktioner på R^2 . Denne diskussion er meget illustrativ i diskussionen af termodynamisk stabilitet, en diskussion, vi vil gennemføre om lidt.

Men lad os først se på homogene kvadratiske funktioner i to variable ((14), p.18ff.):

$$f: (x,y) \rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 \quad (21)$$

med $(a,b,c) \in R^3$.

(21) er identisk med sin egen Taylorudvikling udfra $(0,0)$, så vi kan i lyset af det foregående finde et lineært koordinatskift, således at f kan skrives som en af de nedenstående seks former:

$$\begin{array}{lll} (u,v) & \rightarrow & u^2 + v^2 & (i) \\ (u,v) & \rightarrow & u^2 - v^2 & (ii) \\ (u,v) & \rightarrow & -u^2 - v^2 & (iii) \\ (u,v) & \rightarrow & u^2 & (iv) \\ (u,v) & \rightarrow & -u^2 & (v) \\ (u,v) & \rightarrow & 0 & (vi) \end{array}$$

Graferne for disse seks muligheder viser vi på fig.36. De tre øverste, (i), (ii) og (iii) er alle morsefunktioner, de tre nederste er singulære, enkeltsingulære som i (iv) og (v), og dobbeltsingulær som i (vi). For nærmere at se, hvornår de seks 'arketyper' antager formerne (i), ..., (vi) diskuterer vi egenverdiproblemet for den kvadratiske form i (21):

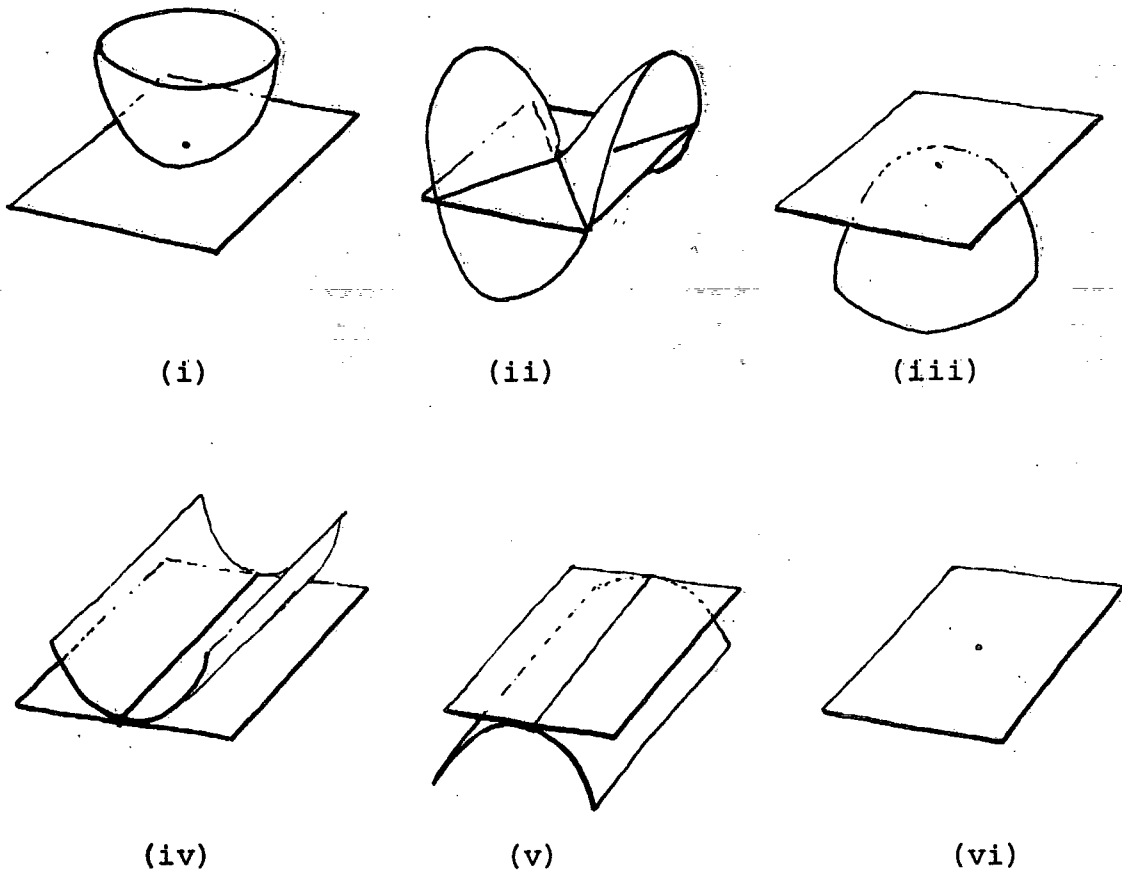


fig.36: Diskussion af (21)

$$f = (x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^t A x$$

f er en morsefunktion, netop hvis $\text{Det}A \neq 0$, i.e. for de (a,b,c) i \mathbb{R}^3 for hvilke $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$.

Nulmængden for $ac - \frac{b^2}{4}$ udskærer en dobbeltkegle i \mathbb{R}^3 , der har $a=c$ som symmetriakse og a -aksen som frembringer. Dette har vi vist på fig.37, hvor (i) er det indre af keglen i de to oktanter, hvor $c > 0$ og $a > 0$; (ii) er det ydre af dobbeltkeglen i rummet; (iii) er det indre af keglen i de bagerste oktanter, viz.

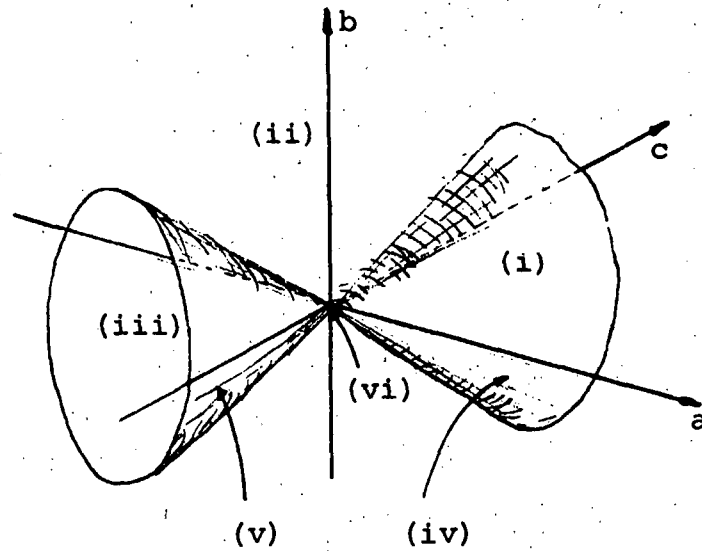


fig.37. Sammenfatning af diskussionen af (21).

$c < 0$ og $a < 0$. Den positivt semidefinitte 'tagrende' (iv) ligger på den højre kegleflade; (v) ligger på den venstre kegleflade og endelig afbildes det dobbeltsinglere tilfælde (vi) i origo.

Morselemmet siger nu, at såfremt det om en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ med $df(0) = 0$ gælder, at punktet

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \right)$$

ikke ligger på dobbeltkeglens flade, så findes der lokale koordinater $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ således at f ser præcis ud som (i), (ii) eller (iii).

Eksempel: Stabilitetsdiskussionen i den klassiske termodynamik.

Vi betragter et isoleret eenkomponentsystem med den indre energi U , volumen V og partikelantal N . I dette system kigger vi på et lille, men stadig makroskopisk delsystem, karakteriseret ved et fastholdt lille partikelantal N_1 , altså lille i forhold til omgivelserne, i.e. $N_1 \ll N - N_1$.

Lader vi $s_1, s_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ betegne de molære ekstensive størrelser for hhv. undersystemet og dets omgivelser, har vi, idet $N_2 = N - N_1$:

$$U = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

og da systemet (det totale) er isoleret gælder

$$0 = N_1 du_1 + N_2 du_2 \quad (22)$$

Da V og S er konstante gælder

$$0 = N_1 dv_1 + N_2 dv_2 \quad (23)$$

$$0 = N_1 ds_1 + N_2 ds_2 \quad (24)$$

En virtuel overførsel af entropi og volumen til undersystemet giver anledning til en ændring i den totale energi for systemet, som vi skriver som en Taylorudvikling:

$$\Delta U = N_1 \left(\delta u + \frac{1}{2} \delta^2 u + \dots + \dots \right) + N_2 \delta u_2 \quad (25)$$

Hvor vi for omgivelsernes vekommende har tilladt os at se bort fra de højere ordens led, og hvor vi af nemhedsgrunde har droppet subskriptet for undersystemet.

Idet $du_1 = T_1 ds_1 - P_1 dv_1$ og $du_2 = T_2 ds_2 - P_2 dv_2$, giver (22), (23) og (24) det resultat, at systemet -som stiltiende forudsat- er homogent, viz. i global termodynamisk ligevægt.

Hvis vi derudover forlanger, at systemet skal være stabil, må $\Delta U = (1/2)N_1 \delta^2 u$ være større end nul, hvilket er det samme som at kræve, at følgende homogene kvadratiske form er positiv definit:

$$0 < \frac{1}{2} \delta^2 u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta s & \delta v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ss} & u_{sv} \\ u_{sv} & u_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta v \end{pmatrix}$$

hvor

$$u_{ss} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{T}{c_v}$$

$$u_{sv} = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} = \frac{\alpha T}{\kappa c_v}$$

$$u_{vv} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \frac{c_p}{v \kappa c_v}$$

Dette krav kan iflg. det foregående koges ned til at forlange, at samhørende værdier for u_{ss} , u_{sv} og u_{vv} skal ligge inden i den positive del af dobbeltkeglen, som vist på figur 38.

Kravet om termodynamisk stabilitet betyder så, at systemets varmekapacitet, c_v , skal være positiv såvel som kompressibiliteten κ .

Matricen hørende til den kvadratiske form ovenfor kan med fordel opfattes som en stivhedsmatrix, der relaterer generaliserede termodynamiske kræfter, δT , $\delta(-P)$ til forskydningerne δs og δv .

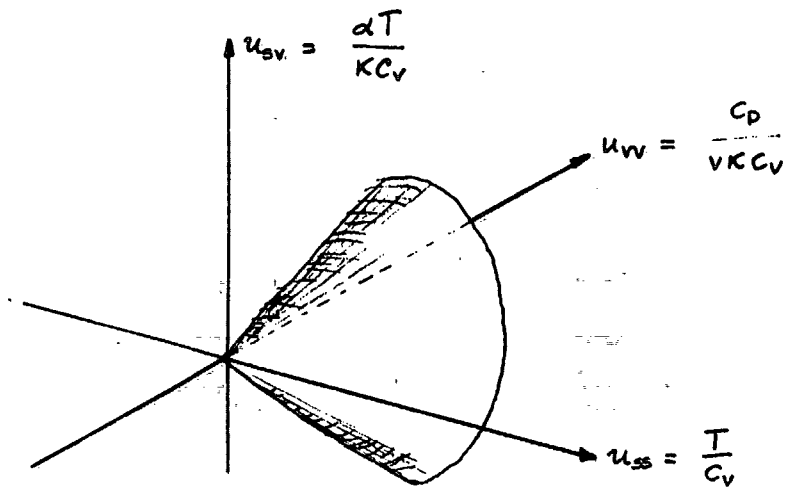


fig. 38: Stabilitetsdiskussion i termodynamikken ved hjælp af fig.37.

Idet

$$\text{grad } u = (T, -P)$$

bliver

$$d^2u = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial s} & \frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{\partial (-P)}{\partial s} & \frac{\partial (-P)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hvoraf

$$\begin{pmatrix} \delta T \\ \delta (-P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial s} & \frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{\partial (-P)}{\partial s} & \frac{\partial (-P)}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta v \end{pmatrix}$$

Nu er systemet termodynamisk stabilt, dersom stivhedsma-

trixen er positiv definit. Dette antager vi er tilfældet: Stivhedsmatricen kan så inverteres (determinant $\neq 0$), således at vi får udtrykt forskydningerne δs og δv ved kræfterne δT og $\delta(-P)$:

$$\begin{pmatrix} \delta s \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ss} & u_{sv} \\ u_{vs} & u_{vv} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta(-P) \end{pmatrix}$$

Det kan let vises, at stivhedsmatricens inverterede er den 2.ordens afledede af den molære Gibbs' fri energi (på et fortegn nær):

$$\begin{pmatrix} \delta s \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{TT} & g_{TP} \\ g_{TP} & g_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta(-P) \end{pmatrix}$$

Denne matrix kalder vi 'føjelighedsmatricen' (i den engelske litteratur om emnet 'compliance matrix')

Forudsætningen for, at 'føjelighedsmatricen' er defineret er, at stivhedsmatricen er ikke-singulær. Det er den iflg. det foregående, altså, hvis systemet er stabilt.

Morselemmaet er 'begrundelsen' for, at vores responsefunktioner (stivheds- og 'føjelighed's-matrix) er gode approksimationer overalt hvor systemet er termodynamisk stabilt.

I lyset af det ovenstående bliver det klart, at en lineær responseteori bryder sammen i det øjeblik, at systemet udarter, som det vil ske, når vi får manipuleret responsefunktionerne ud på keglefladen i fig. 38, hvor systemet bliver uendelig føjeligt.

Gibbs' faseregul.

Som et eksempel på anvendelse af transversalitetetsbegrebet og den omstændighed, at transversalitet er en typisk strukturel stabil egenskab, vil vi udlede Gibbs' faseregul med vores differentialtopologiske værktøj.

Gibbs' faseregul udtaler sig om antallet af frihedsgrader i et termodynamisk system bestående af r komponenter fordelt på m forskellige faser. Den lyder:

$$\text{Antal frihedsgrader} = F = r - m + 2$$

Lad os arbejde i Gibbs'-repræsentationen, hvor den termodynamiske fundamentalrelation er bestemt udfra T, P og $m(r - 1)$ molbrøker.

Fra et analytisk synspunkt er Gibbs' fri energi en glat afbildning, $G: V \rightarrow \mathbb{R}$, hvor V står for den åbne mængde

$$V = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 1)^{m(r-1)} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m(r-1)}$$

Vi bruger skrivemåden x_j^k for molbrøken af stof nr. j i fase nr. k og bruger forkortelsen

$$x = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m; \dots; x_{r-1}^1, x_{r-1}^2, \dots, x_{r-1}^m)$$

Grafen af G , i.e.

$$\{(T, P, x; G(T, P, x)) \mid (T, P, x) \in V\}$$

er da en glat mangfoldighed af codimension 1 i $V \times \mathbb{R}$.

Kravet om ligevægt mht. stofudveksling mellem de forskellige faser giver ligningssystemet

$$\begin{aligned}
 \mu_1^1 &= \mu_1^2 = \dots = \dots = \mu_1^m \\
 \mu_2^1 &= \mu_2^2 = \dots = \dots = \mu_2^m \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mu_r^1 &= \mu_r^2 = \dots = \dots = \mu_r^m
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

med ialt $(m-1)r$ ligninger, hvor μ_i^k er det kemiske potential af stof nr. i i fase nr. k .

Lad os skrive det første ligningssæt i (26) lidt mere udførligt som

$$\mu^1(T, P, x^1) = \mu^2(T, P, x^2) = \dots = \mu^m(T, P, x^m)$$

hvor x^k står for

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{r-1}^k); \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Ved at parre den første ligning med hver af de øvrige ligninger i det øverste ligningssæt i (26) kan vi definere

$$f_1^j(T, P, x) \equiv \mu_1^1(T, P, x^1) - \mu_1^j(T, P, x^j)$$

og udtrykke (26)'s første ligningssæt som

$$f_1^j(T, P, x) = 0; \quad j = 2, 3, 4, \dots, m$$

Generelt kan vi definere

$$f_1^j(T, P, x) \equiv \mu_1^1(T, P, x^1) - \mu_1^j(T, P, x^j) \tag{27}$$

(26) kan nu skrives som

$$f_i^j(T, P, x) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 2, 3, 4, \dots, m \quad (28)$$

Hvert f_i^j definerer nu en glat funktion $f_i^j: V \rightarrow \mathbb{R}$, fordi μ 'erne hver for sig er glatte. Set under et kan alle disse f_i^j 'er betragtes som en enkelt glat funktion $F: V \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)r}$.

For hvert f_i^j vil -da f_i^j er glatte for alle i og j i (28) - $df_i^j(T, P, x)$ være et lineært funktionalt på tangentrummet $T_{T, P, x}(V)$ (for et fastholdt T, P, x).

Nu kan det let vises, at den afledede $dF(T, P, x)$ er surjektiv netop hvis de $(m-1)r$ lineære funktionaler $df_i^j(T, P, x)$ er lineært uafhængige.

Dette er underforstået i forudsætningen om, at vi har uafhængige komponenter og faser. Vi præciserer denne sprogbrug til at sige, at såfremt de afledede $df_i^j(T, P, x)$ er lineært uafhængige, er funktionerne $f_i^j(T, P, x)$ uafhængige i punktet $(T, P, x) \in V$.

Båndene i (28) kan nu komme under urbilledteoremets behandling: Hvis f_i^j 'erne er uafhængige i ethvert punkt, hvor de er 0, vil $F^{-1}(0)$, i.e. de (T, P, x) for hvilke alle f_i^j 'erne er 0 være en delmangfoldighed af V med codimension $(m-1)r$, i.e. en delmangfoldighed i V af dimension

$$\dim V - (m-1)r = 2 + m(r-1) - (m-1)r$$

$$= r - m + 2,$$

hvilket er Gibbs' faserregel

Bemærk, at vi har benyttet os af, at hvert f_i^j var trans-

versal til 0 i R gennem tolkningen af uafhængigheden af de enkelte faser og komponenter, således at Gibb's faseregul i denne iscenesættelse er et produkt af transversalitetbetragtninger.

Selvom det ville være rimeligt ved første øjekast at synes, at et argument som 'vi har $2 + m(r-1)$ ubekendte og $(m-1)r$ ligninger. Løsningsmængden vil da være givet som $r - m + 2$ uafhængige variable' er det rette våben i en gråspurvejagt, ligger der i det differentialtopologiske et par vigtige pointer, som ikke følger af den ovennævnte simple argumentation.

For det første får vi det eksplicitte resultat, at det objekt, der 'skæres ud' ved kravet om termodynamisk ligevægt ikke er vilkårligt, men noget så skikkelig som en mangfoldighed.

For det andet får vi det resultat, at Gibbs' faseregul er strukturelt stabil.

Sådanne egenskaber er ganske nyttige, når man tolker fase-diagrammer med flere komponenter. Dette vil vi ikke gå videre ind i her.

Thom's klassifikationsteorem.

Vi er nu parate til ganske kort at kunne gøre rede for, -intuitivt- at Thom's teorem er plausibelt. Selve det tekniske bevis for teoremet er -for at sige det blidt- ikke særligt lettilgængeligt, hvorimod teoremets udsagn er tilnærmelige.

Problemet for EKT kan ses som en generalisation af de overvejelser, der lå til grund for morsefunktionerne, hvor det fremgik, at disse er typiske og strukturelt stabile.

Hvad så med resten, viz. de gradientfunktioner, hvor den højereordens afledede (≥ 2) er singular een efter een? Kan sådanne funktioner klassificeres på en måde, der er analog til den simple klassifikation i morse- og ikke-morsefunktioner? Viz. kan de klassificeres som typisk strukturelt stabile parametriserede familier af funktioner?

Det er dette Thom's teorem svarer ja til, når blot dimensionen af parameterrummet ikke overstiger 5.

Fidusen ligger i at betragte familier af gradientfunktioner, i.e. $f_t: U \rightarrow \mathbb{R}$, U er åben i \mathbb{R}^n , $t \in \mathbb{R}^k$, eller slet og ret $f: \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ved $(t, x) \rightarrow f(t, x)$. Det kan da forekomme, at gradienten af en af disse familiemedlemmer ikke vil være transversal til $0 \in \mathbb{R}^n$, men at gradientfamilien vil være det i \mathbb{R}^n , hvor vi ved gradientfamilien vil forstå funktionerne

$$\text{grad}_x f_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} t, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} t \right) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Vi tager straks et eksempel, der er til at tegne. Vi ser på en enkeltparametriseret familie af reelle funktioner, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, på figur 39.

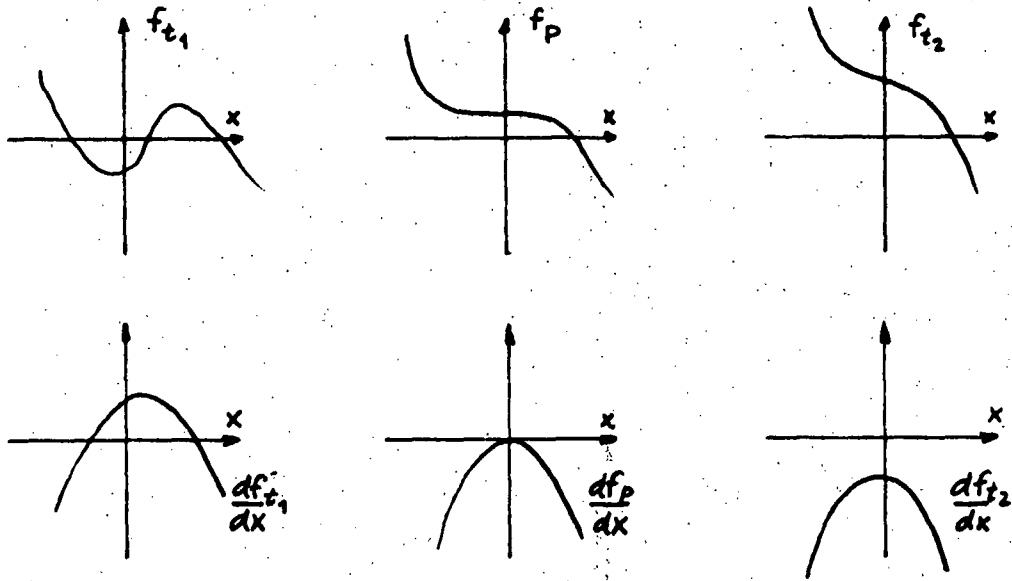


fig.39: Perturbationer af en reel funktion af 1 variabel.

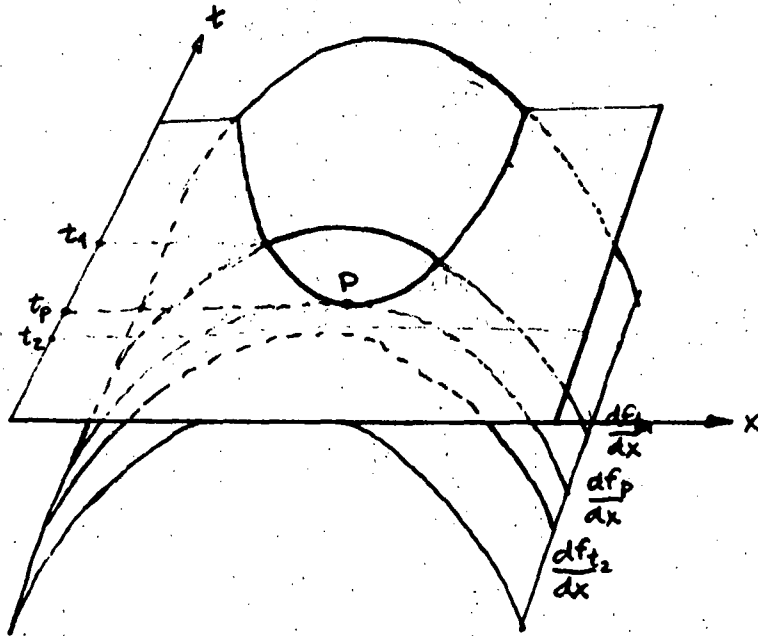


fig.40: Grafen af $\text{grad}_x f_t$ i \mathbb{R}^3

Vi ser, at den midterste graf øverst på fig. 39 ikke har gradienten transversal til 0 i R (vendetangent, der er vandret) Betragter vi derimod grafen af $\text{grad}_x f(t, x)$ i R^3 som på fig. 40, bliver det klart, at denne gradientfamilie er transversal til 0 i R . Det er netop denne transversalitet, der er typisk strukturelt stabil. I almindelighed har vi, for $f: R \times R^n \rightarrow R$ defineret den glatte afbildning $\text{grad}_x f: R \times R^n \rightarrow R^n$, og denne afbildning er typisk transversal til 0 i R^n , hvilket betyder betyder, at snittet er en glat delmangfoldighed af dimension $(n+1) - n = 1$, altså en kurve i R^{n+1} , som sidder i R^{2n+1} . §

Idet vi ser på den foregående figur 40, bliver det klart, at Urbilledet af 0 vil indeholde df 's regulære punkter og det singulære punkt, hvor d^2f også er 0.

Lad os nu arbejde i R^2 . Urbilledet af $0 \in R^2$ for $\text{grad}_x f$ er en 1-dimensional mangfoldighed i R^5 , som det er ret så vanskeligt at afbilde grafisk.

Men lad os alligevel forestille os, at vi bevæger os langs kurven $C = (\text{grad}_x f)^{-1}(0)$ i det femdimensionale euklidiske rum. Lad os parametrisere C ved s og lad os sige, at vi for $s = 0$ befinder os i et punkt P , hvor d^2f er singulær.

Omkring s kan vi Taylorudvikle f :

$$f(t(s), x_1, x_2) = \text{const.} + a(s)y_1^2 + b(s)y_1y_2 + c(s)y_2^2 + O^3(y)$$

hvor $y_1 = x_1 - x_1(s)$, $y_2 = x_2 - x_2(s)$.

Hvis vi koncentrerer os om den kvadratiske del af Taylorudviklingen, ser vi, at når s varierer vil punktet $P(s)$ på C beskrive en kurve i vektorrummet af homogene kvadratiske former i to variable, i.e. punktet $(a(s), b(s), c(s))$ vil udskære en kurve i R^3 , som vi afbilder sammen med dobbeltkeglen fra fig. 37, i fig. 40.a.

§ caveat lector: $\text{grad}_x f$'s graf er en $n+1$ -dimensional mangfoldighed, der sidder i $R^{n+1} \times R^n = R^{2n+1}$.

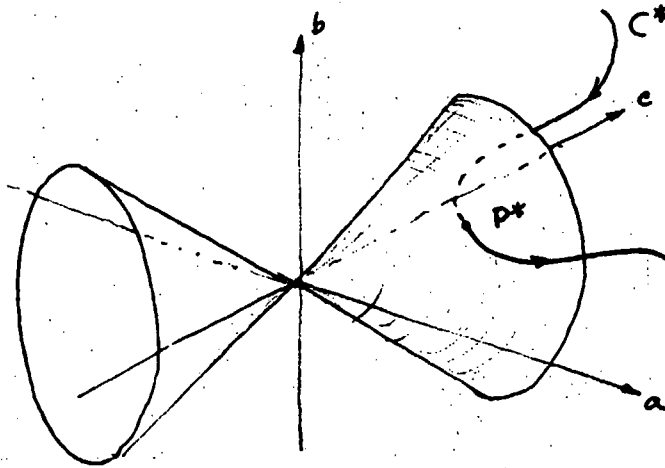


fig. 40a.: Dobbeltkegelfladen med sporet af s 's bevægelse på den reelle akse i en omegn af $s = 0$.

For at være lidt mere præcise: Når vi, ved at lade s løbe i en omegn af 0 på den reelle akse, løber $P(s)$ på C i \mathbb{R}^6 og tilsvarende løber $P^*(s)$ på C^* i (a,b,c) -rummet som vist på fig. 40a.

Så længe $s \neq 0$, er den kvadratiske del ikke-singulær, og Morselemmaet træder i funktion. Det er når $s=0$, i.e. når vi befinder os i P^* på keglen, at det begynder at blive interessant.

Kurven C^* vil typisk være transversal til dobbeltkegelfladen undtagen i $(0,0,0)$. Dette betyder, at den kvadratiske del af f ikke kan være mere udartet end 'tagrenden' på fig. 36, (iv) og (v) p.78.

I Morselemmaets ånd kan vi så finde et koordinatskift $(x_1, x_2) \rightarrow (u_1, u_2)$, således at vi omkring $s=0$ kan skrive

$$f(t, u_1, u_2) = f^*(t, u_1) \pm u_2^2$$

hvor f^* er en funktion, hvis 1. og 2. ordens afledede forsvinder i de t, u_1 , der svarer til P på C . Dette vigtige resultat kan generaliseres til R^n :

En enkeltparametriseret familie af gradientfunktioner $f: R \times R^n$ vil, for punkter, hvor $\text{Det}(d_x^2 f) = 0$ lokalt kunne skrives som

$$f(t, u_1, \dots, u_n) = f^*(t, u_1) + g_m(u_2, \dots, u_n)$$

hvor $g_m(u_2, \dots, u_n)$ er en morsefunktion i de øvrige variable.

Vi får med andre ord siet den pæne del fra i g_m -bidraget og har så den interessante del, $f^*(t, u_1)$ tilbage!

Lad os nu koncentrere os om at kigge på f^* . Vi foretager nu vores spadseretur langs C igen og rapporterer, hvad der sker med vores f^* undervejs. Vi Taylorudvikler som før:

$$f^*(t(s), u_1) = \text{const.} + p(s)v_1^2 + q(s)v_1^3 + r(s)v_1^4 + O^5(v_1)$$

hvor vi har sat $v_1 = u_1 - u_1(s)$. De afledede $p(s), q(s)$ og $r(s)$ kan findes ved at udregne differentialkvotienter.

Svarende til fig. 40a får vi spadsereturen langs C til at korrespondere med en spadseretur på en kurve C^{**} , $C^{**}(s) = \text{sporet af } (p(s), q(s), r(s))$ i et nyt rum med p, q, r koordinater. Det kvadratiske led forsvinder for $s=0$, i.e. koefficienten $p(0) = 0$. Vi går altså igennem koordinatplanen $p=0$ i dette nye rum. Dette er vist på fig.41.

C^{**} vil skære rq -planen typisk transversalt, og vil som følge heraf ikke gå igennem et fastlagt punkt; ej heller vil der forekomme skæring med r - eller q -aksen (to kurver i R^3 er transversale, hvis de aldrig mødes!). Dette betyder nu, at der, hvor 2.ordensleddet forsvinder, vil f^* se ud som

$qv_1^3 + O^4(v_1)$. Det kan let vises, at vi kan finde et koordinatskift således at f^* lokalt ser ud som u^3 .

Men hvad nu med t -afhængigheden? Her kommer det mest interessante: Det kan vises, at en vilkårlig transversal vej gennem en vilkårlig ikke-morsefunktion er den samme, op til en diffeomorfi. Dette betyder, at har vi bare fundet een transversal vej gennem f^* , vil det være en typisk vej. En transversal vej gennem $f^* = u^3$ er

$$f(t,u) = u^3 + tu$$

Dette er den simpleste af alle katastrofer: Foldkatastrofen.

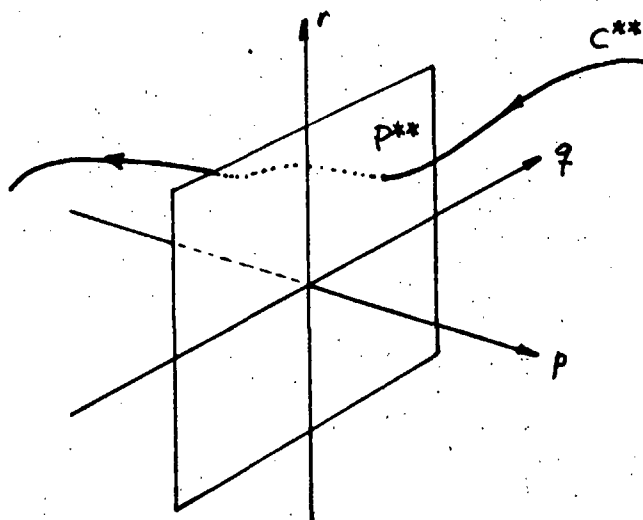


fig. 41: Sporet af s i p, q, r -rummet.

På analog måde kan vi gennemføre diskussionen af en dobbeltparametriseret familie af gradientfunktioner. Det, der så kommer ud af den anden ende, er den næstsimpleste katastrofe, spidskatastrofen, der i lokale koordinater har formen

$$t_1(u_1^4 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + g_m(u_2, \dots, u_n)$$

hvor g_m er en morsefunktion.

Lad os runde dette af med en præcis udgave af Thom's teorem:

Det er typisk for en familie af glatte afbildninger $f: R^k \times R^n \rightarrow R$, hvor $k \leq 5$ og $n < \infty$ at være strukturel stabil.

For en sådan familie findes der omkring et vilkårligt punkt $(t, x) \in R^k \times R^n$ et valg af koordinater (t_1, \dots, t_k) på R^k og (u_1, \dots, u_n) på R^n , hvor u 'erne er glatte funktioner af t , således at $f(t; u)$ har én af følgende lokale former:

Regulære:

$$u_1 \tag{29.10}$$

Kritiske og ikke singulære:

$$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 \tag{29.11}$$

hvor $0 \leq i \leq n$

Spidsagtige katastrofer:Folden:

$$u_1^3 + t_1 u_1 + g_m(u_2, \dots, u_n) \quad (29.20)$$

Spidsen:

$$t(u_1^4 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + g_m(u_2, \dots, u_n) \quad (29.21)$$

Svalehalen:

$$u_1^5 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1 + g_m(u_2, \dots, u_n) \quad (29.22)$$

Sommerfuglen:

$$t(u_1^6 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + g_m(u_2, \dots, u_n) \quad (29.23)$$

Wig-Wam'en:

$$u_1^7 + t_5 u_1^5 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1 + g_m(u_2, \dots, u_n) \quad (29.24)$$

I den fuldstændige liste følger de såkaldte 6 umbiliske katastrofer, hvor der forekommer dobbeltudartning i $d^2 f$, i.e. en dobbeltsingularitet. Dem behandler vi ikke her.

I stedet vil vi fokussere på en enkelt af de spidsagtige katastrofer, nemlig spidsen, fordi den er dels geometrisk let at forestille sig og fordi den er den elementære katastrofe, der par excellence har været hyppigst anvendt.

Vi bemærker, at i de spidsagtige katastrofer forekommer

der højst udartning i en enkelt variabel, i.e. enkeltsingularitet for d^2f , og at vi får siet alle andre variable fra ned i en ikke særligt ophidsende verden af morsefunktioner.

Det er netop den omstændighed der gør, at vi kan fæstne vores opmærksomhed på, hvad der sker med en enkelt variabel for vores system.

Thom's klassifikation af gradientfunktionerne kan nu syntetiseres med de dynamiske systemers diskurs, hvorved det bliver muligt at blæse liv i elementære katastrofer.

Vi ser på et parametriseret system af typen

$$\dot{x} = -\text{grad}_x f_a(x) \quad (30)$$

hvor vi har omdøbt parameteren t til a for ikke at sammenblende tid og parameter, selvom a i visse anvendelser (den embryologiske udvikling, e.g.) kan være en eksplicit funktion af tiden.

Indtil videre vil vi holde os til et kvasistatisk verdensbillede, hvor processerne i systemet forgår meget hurtigt i forhold til ændringerne i parametrene, i.e. parameterændringerne sker langsomt i forhold til systemets relaksationstid.

Inden vi går videre vil det være belejligt at knytte et par kommentarer til de generaliseringer, som vores differentialtopologiske 'briefing' og vores bløde 'bevis' for Thom's teorem lægger op til.

Vi bemærker, at dynamiske systemer på R^n let lader sig generalisere til dynamiske systemer på mangfoldigheder. Det er væsentligt at gøre sig klart, at strukturel stabilitet er invariant overfor generaliserede, lokale koordinatstift, der qua deres diffeomorfe egenskaber a fortiori ikke kan gøre vold på

de topologiske egenskaber ved attraktorer, vektorfelter etc., de bliver måske en smule forvrænget af vores astigmatisme, men sålænge astigmatismen lader sig korrigeres ved hjælp af en diffeomorf optik, behøver vi ikke at være bange for synsbedrag hvad angår den måde, som vores verdensbillede er skruet sammen på.

Dette betyder, at det er fuldt tilstrækkeligt at klassificere gradientsystemer efter opskriften givet i katastroferne (29.20) - (29.24) et seq.

Eksempel.

Vi vil nu vise, hvad der ligger i klassifikationsteoremets frasiqning af de uspændende variable, når vi undersøger gradientsystemer. Lad os sætte, at vi har et sådant dynamisk system med tre tilstandsvariable, og lad os antage, at vi har et dobbeltparametriseret system, i.e. $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ifølge klassifikationsteoremet vil det mest komplicerede, der overhovedet kan ske i et sådant system være en lokal spidskatastrofe. Vi kan så indføre lokale koordinater (y_1, y_2, y_3) (som er diffeomorfe funktioner af systemets oprindelige koordinater) og betragte det afledte diffeomorfe gradientsystem beskrevet ved gradientfunktionen

$$f: (a_1, a_2; y_1, y_2, y_3) \rightarrow y_1^4 + a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + y_2^2 + y_3^2$$

Som styrer vores dynamiske system på en tredimensional mangfoldighed beskrevet ved koordinatfunktionerne y_1, y_2, y_3 .

I de nye koordinater er systemet lokalt beskrevet ved $\dot{y} = -\text{grad}_y f_{a_1, a_2}(y)$, som skrevet ud i komponenter er

$$\dot{y}_1 = -4y_1^3 + 2a_2y_1 + a_1$$

$$\dot{y}_2 = -2y_2$$

$$\dot{y}_3 = -2y_3$$

hvor vi eksempelvis har valgt spidskatastrofen (29.21) med positivt fortegn.

Lad os holde parametrene a_2 og a_1 faste på hhv. -2 og 0 .

Hvilepunkterne for systemet bliver så $(-1,0,0)$, $(0,0,0)$ og $(1,0,0)$.

Jacobianterne i disse punkter er respektive

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Viz. systemet har to punktattraktorer $(-1,0,0)$ og $(1,0,0)$ da Jacobianterne i disse punkter er negativ definit. I punktet $(0,0,0)$ ligger der en sadel, hvilket man kan se ved at kaste et blik på Jacobianten i dette punkt, hvor der optræder en positiv egenværdi, nemlig egenværdien 4 .

Vi kan så straks give et bud på, hvordan trajektoriebilledet må se ud. Klassifikationsteoremets trick har diagonaliseret problemet for os, således at vi kan betragte det samlede trajektoriebillede som en simpel overvejring af restriktionerne af det dynamiske system til de respektive egenrum, således som vi beskrev det tidligere i det lineære afsnit.

Vi viser i fig.42 trajektoriebilledet i y_1, y_2 -planen.

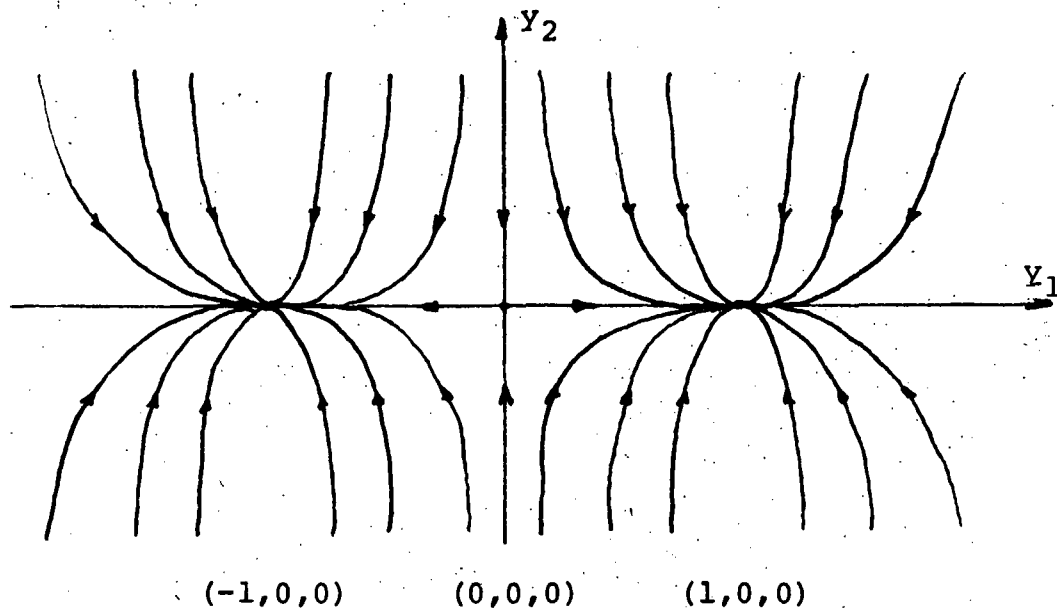


fig. 42: Kvalitativt bud på trajektoriebilledet af systemet beskrevet på p.98 set i y_1y_2 -planen.

Hvis vi så endelig vil have trajektoriebilledet i de oprindelige koordinater kan vi gå frem som beskrevet i eksemplet på p.62ff.

For at resumere: Trajektoriebilledet i de oprindelige koordinater vil være det samme op til en diffeomorfi, hvilket betyder, at vi kan tage ovenstående fig.42 med på en Tivolitur og holde det op foran de forskellige spejle i spejlkabinettet og konstatere, at selvom spejlbilledet kan se nok så pudsigt ud, ændrer det ikke ved de topologiske træk ved trajektoriebilledet.

Kvasistatiske processer.

Vi vil nu nærmere undersøge de såkaldt kvasistatiske processer. En kvasistatisk proces er den bevægelse, som systemets repræsentative punkt beskriver ved en glat ændring af styringsparametrene, når det kræves, at det repræsentative punkt skal ligge i en afstand af en attraktor, en afstand der er mindre end et foreskrevet beløb ϵ ; populært sagt foretages parameterændringerne så langsomt, at det repræsentative punkt under hele bevægelsen ligger så tæt ved attraktoren, at bevægelsen kan beskrives som attraktorens bevægelse.

Så længe attraktoren vedbliver at være den eneste attraktor for systemet, vil processen forløbe glat. Men i samme øjeblik, som attraktoren forsvinder eller der dukker en anden konkurrerende attraktor op i farvandet, hvad så?

Dette problem kræver en nøjere behandling. Først må vi definere -i en mere stringent forstand- hvad vi skal forstå ved en katastrofe i dynamiske systemer.

Det er nærliggende at opfatte en kvasistatisk proces som en afbildning P af en delmængde af parameterrummet T ind i tilstandsrummet M , således at billedet af hvert $a \in T$, $P(a)$, er en punktattraktor for det dynamiske system $\dot{x} = f_a(x)$ på M , som i almindelighed vil være en mangfoldighed. Hvis det dynamiske system ikke har nogen punktattraktorer, er P ikke defineret[§].

Vi indfører nu betegnelsen regulære punkter om de $a \in T$ om hvilket det gælder, at

[§]Naturligvis kan ovenstående indskrænkning til punktattraktorer generaliseres til attraktorer, der ikke er punkter. Men dette kræver et mere kompliceret begrebsapparat, som vi ikke vil introducere her, da vi ikke får brug for det.

(i) P er kontinuert

(ii) $P(b)$ er en strukturel stabil punktattraktor for $\dot{x} = f_a(x)$

Katastrofefunkt.

Et katastrofefunkt for en kvasistatisk proces P er et punkt $c \in T$, der ikke er regulært i ovenstående betydning.

Det kan vises, at mængden af regulære punkter er åben i T , således at mængden af katastrofefunkter, katastrofemængden, er afsluttet i T . Hvorvidt katastrofemængden også er fed i en bestemt topologi er en anden sag. For de katastrofer, vi behandler her, gælder det, at de regulære punkter er en fed mængde og at katastrofemængden ikke er det: katastroferne er atypiske, unormale begivenheder, der ikke fylder noget i mængden af processer.

Konfliktkatastrofe.

Ved en konfliktkatastrofe vil vi forstå den begivenhed, der indtræffer, når parameteren a antager en værdi for hvilken P er diskontinuert. Et sådant punkt kaldes for et konfliktkatastrofefunkt.

Forgreningskatastrofe.

En forgreningskatastrofe indtræffer i det øjeblik at parameteren a er et katastrofefunkt, der ikke er et konfliktkatastrofefunkt og som tillader mindst to forskellige kvasistatiske processer i alle omegne af dette punkt, som vi kalder for et forgreningskatastrofefunkt.

Morfologi.

Ved en morfologi vil vi forstå katastrofemængden ved en kvasistatisk proces P .

Som man vil se, er en konfliktkatastrofe løst sagt det, der sker, når en (eller flere) nye attraktorer dukker op i farvandet. Det er klart, at procesforløbet rummer en hel del frihedsgrader, som der skal noget ekstra til at få hold på. Dette ekstra er de såkaldte konventioner, som er et velvalgt ord, fordi de må afspejle de fundamentale træk ved systemerne, som vi senere skal se.

Konventioner.

Mætningskonventionen: Diskontinuiteten for den kvasistatiske proces indtræffer for det a , for hvilket den nye attraktor fødes, således at systemets repræsentative punkt øjeblikkeligt springer fra den gamle attraktor, $P(b)$ og over på $P(b')$.

Træghedskonventionen: Systemets repræsentative punkt holder sig fast på den gamle attraktor, $P(b)$ indtil denne ikke længere eksisterer og springer så øjeblikkeligt over på den nye, $P(b')$, der allerede har ventet tålmodigt et stykke tid.

Maxwellkonventionen: Diskontinuiteten for den kvasistatiske proces indtræffer der, hvor den gamle og den nye attraktor for systemet bliver lige stærke, forstået således, at systemet vælger det dybeste minimum for gradientfunktionen, i.e., det laveste potentialminimum.

I det følgende vil vi behandle konfliktkatastrofer, der er formet over de to sidstnævnte konventioner.

For at illustrere de foregående definitioner, betragter vi nu lokale kvasistatiske processer på spidskatastrofen. Som vi ræsonnerede tidligere, kan vi tillade os at se bort fra de øvrige (ikke-singulære) variable og koncentrere os om een enkelt.

Spidskatastrofefotentialet er lokalt givet ved

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

hvor vi har droppet subskripterne af bekvemmelighedsgrunde.

Dette definerer et vektorfelt på den reelle akse ved

$$-\text{grad}_x V(x) = -x^3 - ax - b$$

Hvilepunkterne for dette eendimensionale vektorfelt findes ved at sætte $\text{grad}_x V(x) = 0$. Et samlet overblik over de mulige vektorfelter fås ved at undersøge nulmængden for $\text{grad}_x V(x)$ (urbilledet af 0 ved $\text{grad}_x V(x)$) i det tredimensionale rum, der udspændes af (a, b, x) i sædvanlige koordinater i \mathbb{R}^3 .

$$\text{Vi har nu } d^2V(x) = -d(\text{grad}_x V(x))$$

$$= -\left(\frac{\partial(\text{grad}_x V)}{\partial a}, \frac{\partial(\text{grad}_x V)}{\partial b}, \frac{\partial(\text{grad}_x V)}{\partial x}\right)$$

$$= -(x, 1, 3x^2)$$

som for ethvert fastholdt sæt af (a, b, x) er forskellig fra nulvektoren i \mathbb{R}^3 . Med andre ord: Nulvektoren $(0, 0, 0)$ er en regulær værdi for $\text{grad}_x V(x)$, hvilket blot gengiver den udvidede transversalitetsegenskab for de parametriserede gradientfunktioner.

Urbilledet af nulvektoren er altså en glat todimensional mangfoldighed M af codimension 1, vist på figur 43.

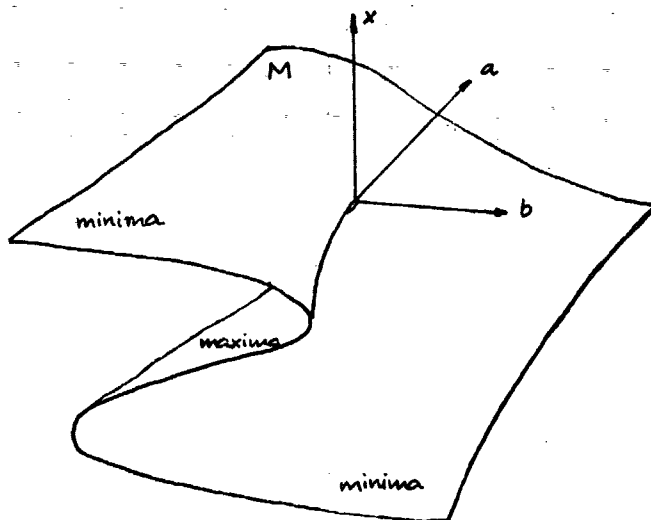


fig.43: Spidskatastrofen.

Fladen M kalder vi for katastrofemangfoldigheden.

På fig.43 er det angivet, hvor på M vi har maksima og minima for vores potentialfunktion.

Vi vil nu analysere denne med henblik på at skaffe os et overblik over hvilepunkterne for systemet. Vi projicerer M ned i a, b -planen, den såkaldte kontrolplan, hvor den indtegnede kurve på fig.44 er projektionen af de to 'tæppekanter', som er de a, b for hvilke $4b^3 + 27a^2 = 0$, viz. der, hvor den andenordens afledede af potentialet med hensyn til x forsvinder.

Denne kurve kalder vi for forgreningsmængden, der som det ses på fig 44 har form som en spids, deraf navnet spidskatastrofe.

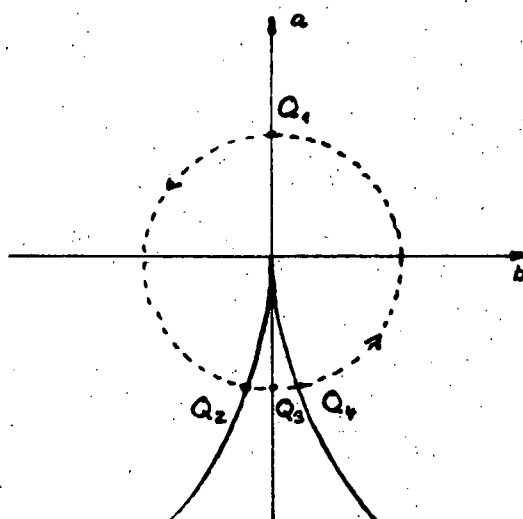


fig.44: Forgreningsmængden af spidskatastrofen.

Lad os foretage en rejse langs den stiplede cirkel på fig.44 og rapportere, hvad der sker; lad os starte i Q_1 , e.g. Da Jacobianten (her en 1×1 matrix) = $-(x^2 + b)$ er negativ for alle kontrolpunkter i området udenfor spidsen og da tredjegradslikningen $x^3 + ax + b$ i dette område har netop een reel løsning, slutter vi, at denne løsning må være en attraktor for systemet.

I punktet Q_2 , hvor $4b^3 + 27a^2 = 0$ har vi to reelle løsninger, hvoraf den ene (den største) er en attraktor og den anden hverken er en attraktor eller en repellor. For Q_3 mellem Q_2 og Q_4 , i.e. i området indenfor spidsen, har vi tre reelle løsninger, hvor den største og den mindste er en attraktor og den mellemste en repellor. I Q_4 har vi samme situation som i Q_2 . Vi viser et udpluk af de korresponderende vektorfelter på fig.45.

Det er illustrativt at betragte disse eendimensionale vektorfelter under eet ved at afbilde et repræsentativt udsnit af disse over kontrolplanen sammen med katastrofemangfoldigheden, fig.46.

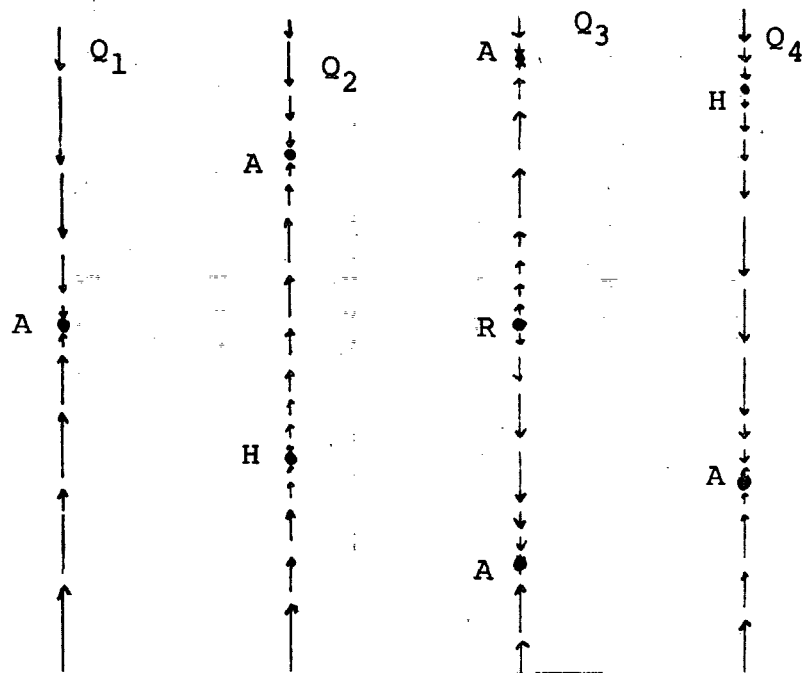


fig.45: Et udpluk af vektorfelter over spidskatastrofen svarende til 'rejsen' $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$. A=attraktor, H=hvilepunkt og R=repellor.

Hvis vi betragter et af disse vektorfelter, ser vi klart dynamikken repræsenteret: En vilkårlig fluktuation i x vil henfalde eksponentielt og entydigt sålænge vi er udenfor det kriminelle område på og indenfor spidsen. Hvis vi er på forgreningsmængden og vi, e.g. er ovenpå den øverste del af M , vil en vilkårlig lille fluktuation blæse op og henfalde til et nyt x på den nederste del af M . For de resterende kontrolpunkter inden i spidsen afhænger fluktuationshenfaldet af, hvor stor den oprindelige fluktuation er.

Det bliver således klart, at alle kvasistatiske processer, der forløber i området udenfor forgreningsmængden er regulære

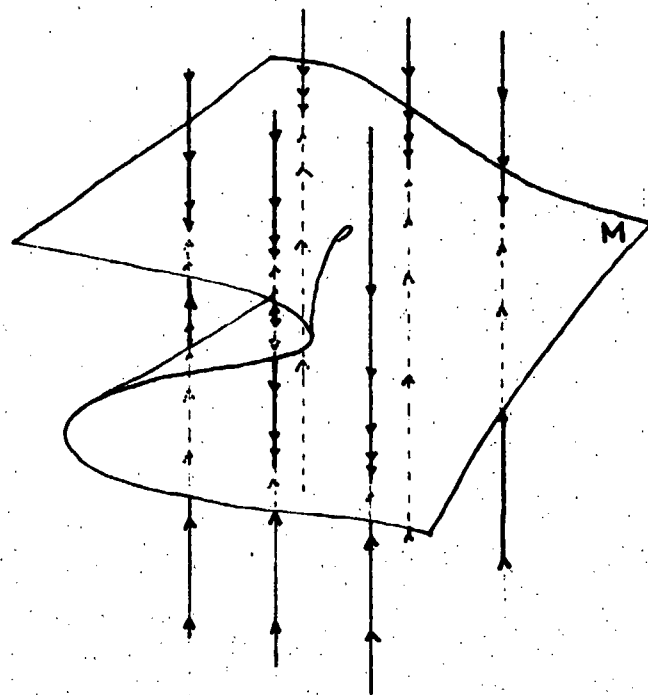


fig.46. Spidskatastrofen vist med et udpluk af 1-dimensionale vektorfelter over denne.

og at katastrofemængden bliver forgreningsmængden plus det område, der ligger indenfor denne.

Lad os nu prøve at illustrere de morfologier, der følger forskellige kvasistatiske processer.

En proces, der køres igennem spidsen vil i overensstemmelse med det foregående være en forgreningskatastrofe, fordi vi i enhver omegn af $(a,b) = (0,0)$ vil have mulighed for to processer, nemlig een, der kører videre på den øvre del af M og een, der fortsætter på den nedre del af M. Alt dette er illustreret på fig. 48 og 47.

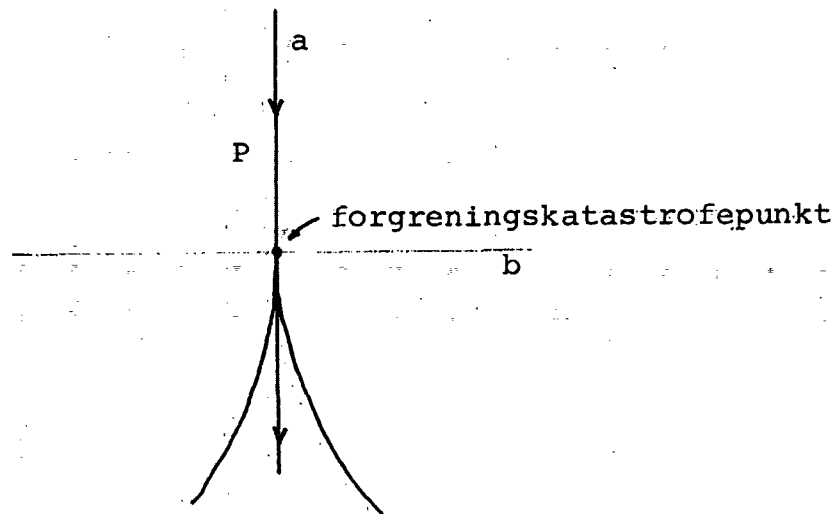


fig.47: En forgreningskatastrofe.

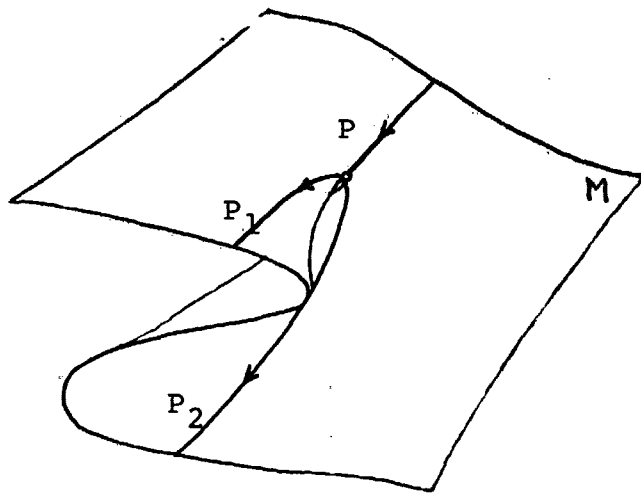


fig.48: Forgreningskatastrofe med to mulige processer på M, P_1 og P_2 .

Hvis vi som før kører langs den stiplede cirkel som på fig.44, vil vi få en konfliktkatastrofe, der alt efter hvilken konvention vi lægger på vil få sin egenartede morfologi.

Med de tre konventioner på p.102 får vi tre forskellige morfologier på spidskatastrofen, hvilket vi har sat sammen til figur 49 på næste side.

Det er værd at bemærke, at de to første konventioner beskriver konfliktkatastrofen som en hysteres, således at en frem-skrivning af systemets tilstand foruden opgivelse af a og b tillige kræver en oplysning om systemets aktuelle tilstand x. Hysteresen er vist på fig. 50.

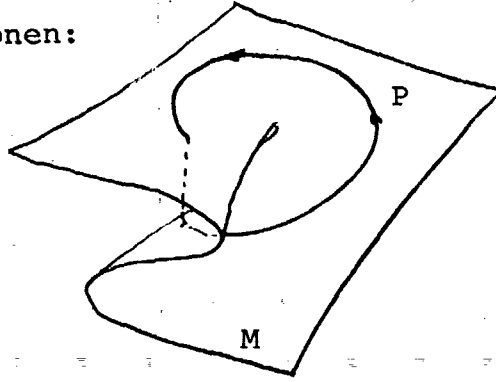
Maxwellkonventionen fastlægger systemets tilstand entydigt i området med den ikke-positive akse prikket ud. Det ville være rart at se, hvilke værdier for potentialet vi får frem, når vi beregner dette for de kritiske punkter på M.

Afbildet sammen med kontrolparametrene a og b giver dette en selvskærende flade, som vi viser på figur 51.

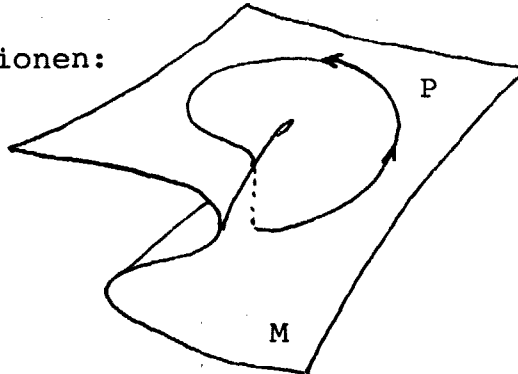
Maxwellkonventionen betyder, at processen hele tiden forløber således, at potentialet for disse tilstande antager det dybeste minimum. Dette medfører, at relationen mellem V, a og b bliver funktional, som vist på fig. 52, hvor vi fra fig.51 har klippet svalehalen af og syet fladen sammen i det nederste spor.

Vi runder denne gennemgang af spidskatastrofen af med at foretage en kort ekskurs:

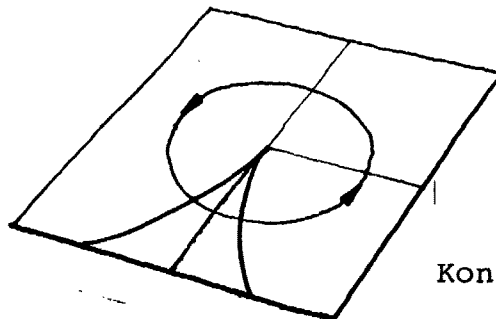
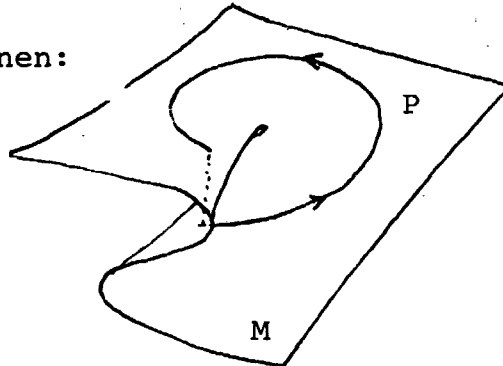
Mætningskonventionen:



Træghedskonventionen:



Maxwellkonventionen:



Kontrolplan

fig.49: Morfologier svarende til en spidskatastrofe, vist med tre forskellige konventioner.

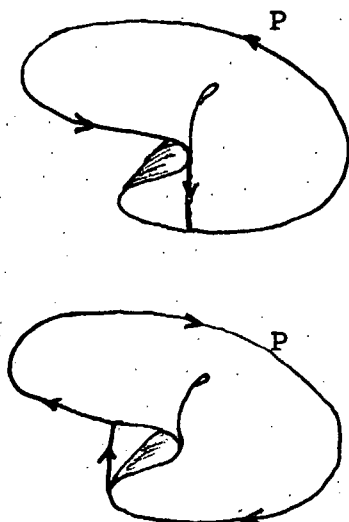


fig. 50: Hysterese ved trægthedskonventionen.

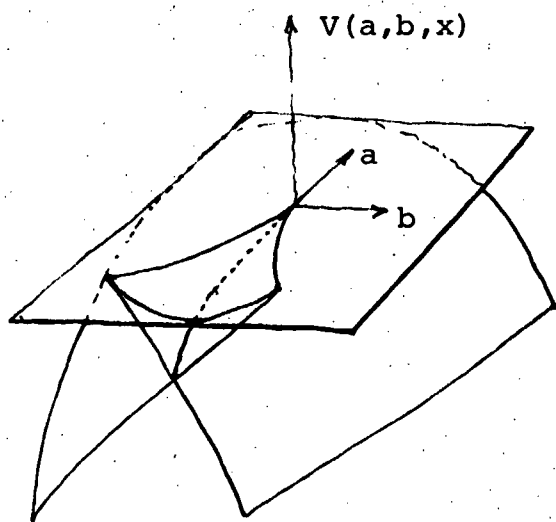


fig.51: Relationen mellem værdierne for potentialet og a og b

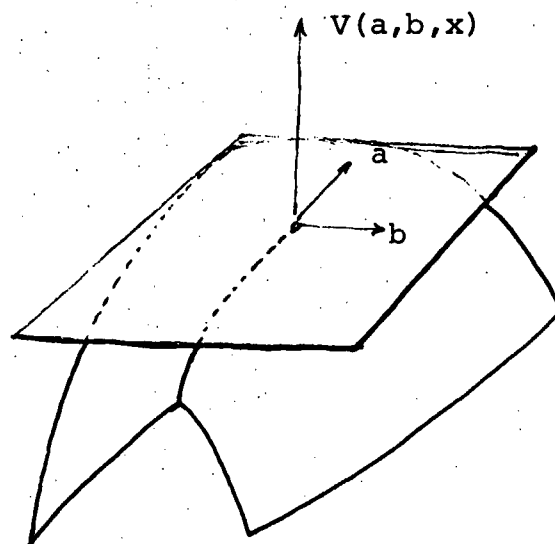


fig.52: Samme relation med Maxwellkonvention.

Ekskurs: Ikke-elementær katastrofe.

For at illustrere, at EKT er en afgrænset teori, viz. at der findes andre kritiske fænomener, der ikke er elementære katastrofer, henter vi vores Van der Pohl oscillator frem igen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - (3x_1^2 - \varepsilon)x_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Højresiden af (15) kan vi nu opfatte som et parametriseret vektorfelt, der er styret af parameteren ε . Da Jacobianten af højresiden i (15) altid er usymmetrisk, er det klart, at (15) ikke er noget gradientsystem.

For $\varepsilon < 0$ er (15) strukturel stabil, med origo som en strukturel stabil punktattraktor. Når $\varepsilon = 0$, forsvinder attraktoren, og så snart ε bliver positiv, fødes en cyklisk attraktor med en punktrepellor i origo.

Hvis vi udvider definitionerne p.101, ser vi, at vi står med en (generaliseret) forgreningskatastrofe, en såkaldt Hopf forgrening (Abzweigung, bifurcation).

Hopf forgreningen sker for $\varepsilon = 0$, hvor systemets strukturelle stabilitet kollapser.

Hvis vi kører (15) på computer,[§] får vi med forskellige værdier af ε en række trajektoriebilleder, som er gengivet på figurerne 53a - 53d. Læg mærke til, at computeren har svært ved at bestemme sig for $\varepsilon = 0$, hvor forgreningskatastrofen sker.

[§] Af computertekniske og andre grunde er (15) kørt i det duale tilstandsrum, hvor tilstandsvektoren er $(z, x) = (y, \int y dt)$. (cf. p.128, hvor vi i en ny sammenhæng tager Van der Pohl oscillatoren op igen.)

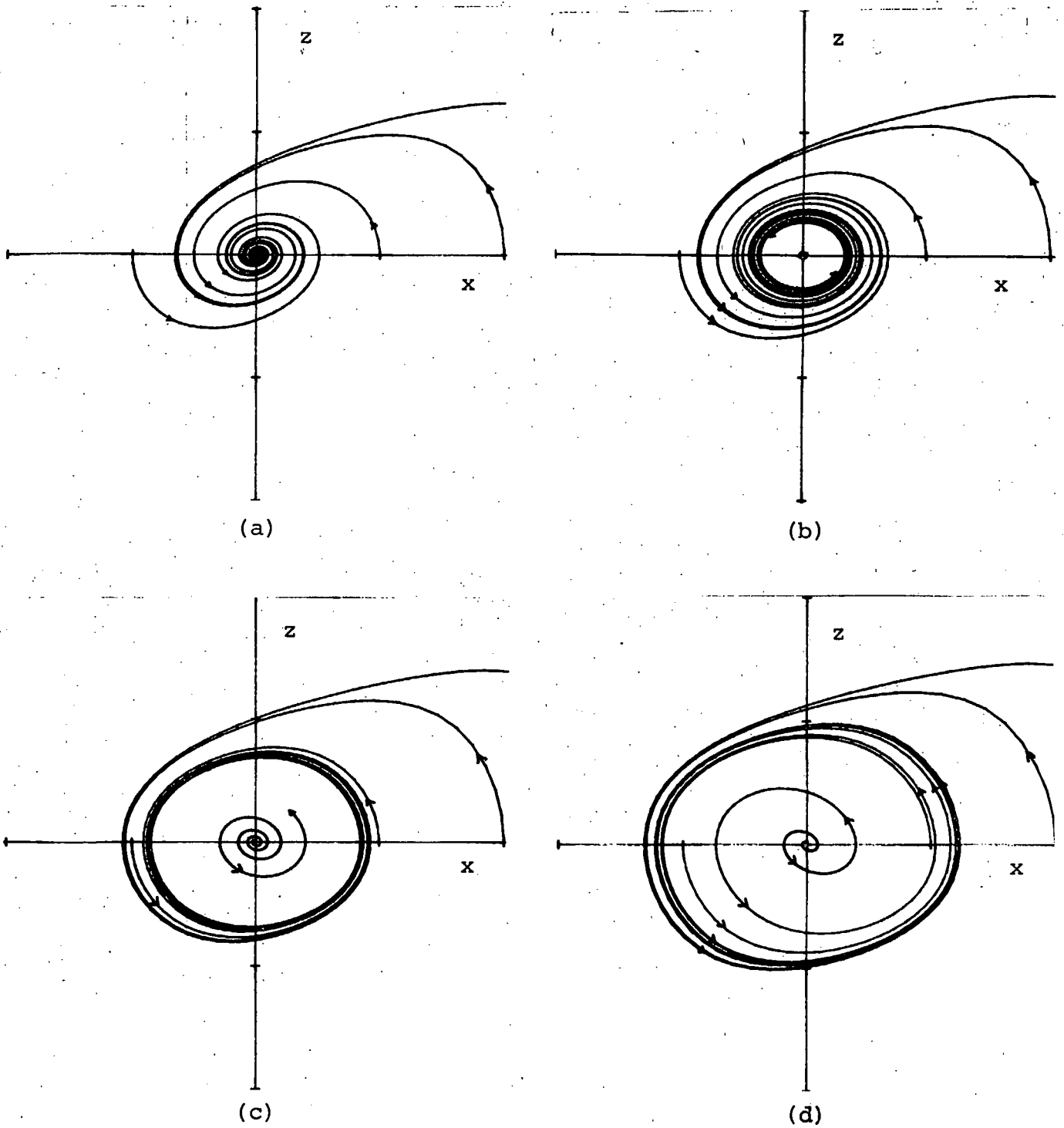


fig. 53: Hopf forgrening i Van der Pohl oscillator vist med: (a): $\varepsilon < 0$, (b): $\varepsilon = 0$, (c) $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, (d) $\varepsilon = \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$.

Anvendelser af EKT i fysikken.

Kvasistatiske processer: Van der Waal's Tilstandsligning.

Anvendelsen af EKT i fysikken er langt fra problemfri, sådan som vi skal se det om lidt. Dette hænger utvivlsomt sammen med, at EKT har et ømfindeligt punkt, når det drejer sig om anvendelser: Thom's teorem er en eksistenssætning, der netop ikke foreskriver, hvordan vi finder det relevante koordinatskift, der bringer vores ligninger på formen i (29).

Man må, med andre ord, i enhver anvendelse, der kræver pålidelige udsagn af mere kvantitativ art bestemme dette koordinatskift eksplicit.

Dette vil fremgå af diskussionen af den klassiske Van der Waal's tilstandsligning. Denne ligning er et -historisk set- velbegrundet gæt, der sigter mod at beskrive de afvigelser fra idealitet, der optræder i en omegn af det kritiske punkt, hvor gassen kan bringes til at kondensere til væske.

Van der Waal's tilstandsligning lyder:

$$\left(P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - bN) = NkT \quad (31)$$

Tilstandsligningen (31) beskriver ikke alene afvigelser fra idealitet i gasfasen, men giver også en empirisk meget rimelig beskrivelse af faseovergangen mellem gas og væske i en ret stor omegn af det kritiske punkt.

Hvis vi betragter en skare isotermer i et PV-diagram, er det ikke overraskende, at det set med katastrofeteoretiske briller ser meget suggestivt ud, som vist på fig. 54.

Det vil være nærliggende at antage, at systemet lod sig beskrive med en spidskatastrofe i en omegn af det kritiske punkt.

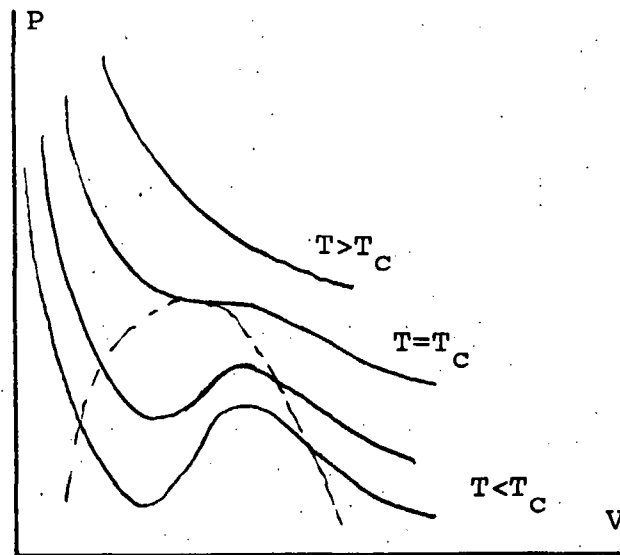


fig.54: PV-isotermer for en Van der Waal's gas.

Et af de første forsøg skyldes D. Fowler (3). Udelukkende på basis af (31) vil han vise, at såvel 1. som 2.ordens faseovergange er elementære katastrofer, respektive en konfliktkatastrofe med Maxwellkonvention og en forgreningskatastrofe med spidskatastrofen som katastrofemangfoldighed.

Han starter med at finde det kritiske punkt, hvor $\frac{dP}{dV}$ og $\frac{d^2P}{dV^2}$ forsvinder (for fastholdt $T=T_c$ og N). Dette giver efter en simpel udregning:

$$(P_c, T_c, V_c) = \left(\frac{a}{27b^2}, \frac{8a}{27bk}, 3bN \right)$$

hvorved (31) kan skrives som

$$\left(\frac{P}{P_c} + \left(\frac{V}{V_c} \right)^{-2} \right) \left(\frac{V}{V_c} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c} \quad (31.1)$$

Fowler indfører nu

$$p_F = \frac{P}{P_C} - 1, \quad t_F = \frac{T}{T_C} - 1$$

og definerer ordensparameteren

$$x = \frac{V - V_C}{V_C}$$

således at det kritiske punkt falder i origo i de nye koordinater. (31.1) kan da let omskrives til

$$x^3 + \frac{1}{3}(8t_F + p_F)x + \frac{2}{3}(4t_F - p_F) = 0 \quad (31.2)$$

Ved i (31.2) at identificere a med koefficienten til x og b med konstantleddet får han så

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (31.3)$$

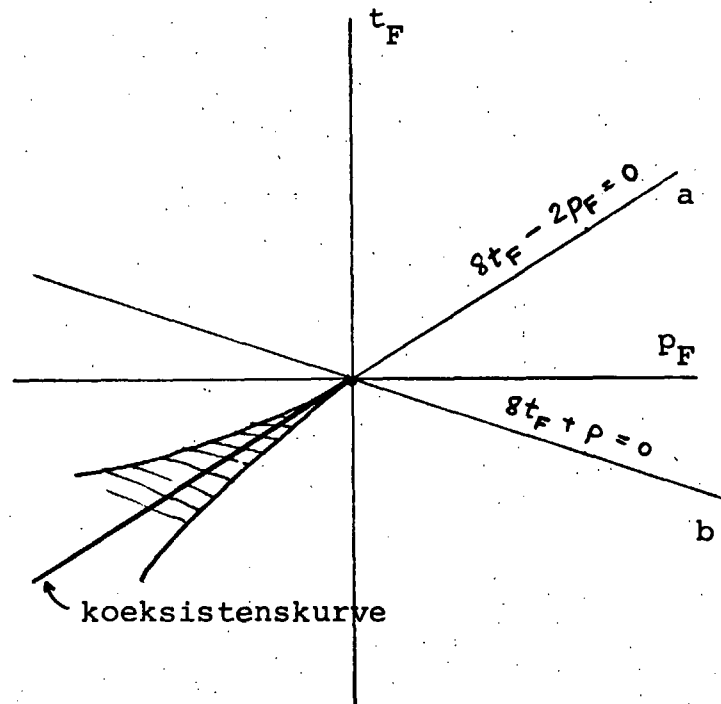
som er den lokale kanoniske form for katastrofemangfoldigheden for en spidskatastrofe.

Det er jo simpelt og ligetil: Det diffeomorfe koordinatskift, der skal til at bringe (31) på en kanonisk form er noget så banalt som en affin afbildning, viz. en translation og en lineær transformation!

Dette koordinatskift med den tilhørende forgreningsmængde er vist på figur 55.

Potentialfunktionen hørende til (31.3) er så bestemt på nær en funktion af a og b , viz.

$$V_F(a,b;x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + v(a,b) \quad (31.4)$$



Koeksistenskurven bestemmes af (31.3) med Maxwellkonvention til at være $b=0$, hvilket i de oprindelige koordinater svarer til linien $8t_F - 2p_F = 0$ i den åbne 3. kvadrant af figur 55.

Det er klart, at det ekstra led i (31.4) ikke kan ændre koeksistenskurvens beliggenhed. Funktionen $v(a,b)$ kan allerhøjest deformere potentialet vist på fig.51 i V-retningen.

I fysikken bestemmes koeksistenskurven ved hjælp af Maxwell's vægtstangsregel, eller kort: vægtstangsreglen. Den går ud på følgende:

For et bestemt $T_1 < T_C$ ønsker vi at finde det korresponderende tryk P_1 , der svarer til 1.ordens faseovergangen fra gas til væske.

For isoterme svarende til T_1 bestemmes P_1 ved at snitte denne isoterm med en linie L parallel med V_1 -aksen således, at der fremkommer tre skæringspunkter, A, B, C ; og således, at det areal, der ligger under L mellem A og B er lige så stort som det, der ligger over B og C . Dette er vist på fig. 56.

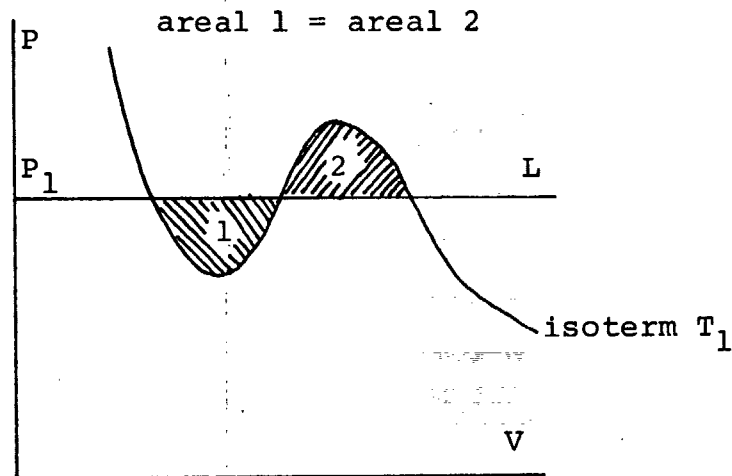


fig.56: Maxwell's vægtstangsregel.

At sige, at vægtstangsreglen gælder, er fuldkommen det samme som at sige, at den molære Gibbs' fri energi har absolut minimum.

Dette punkt vil vi omtale lidt mere udførligt. Hvis vi kender en tilstandsligning, kan vi fastlægge den termodynamiske fundamentalrelation (den molære) i Gibbsrepræsentationen på nær en funktion af temperaturen ved at benytte Gibbs-Duhem relationen

$$du = -sdT + vdP \quad (32)$$

hvor s og v er hhv. den molære entropi og molarvoluminet.

Da relationen mellem v og P er bestemt ved Van der Waal's isotermerne, kan vi integrere (32) langs en skare fastholdte isotermer og derved få afbildet relationen mellem den molære Gibbs' fri energi g og temperatur og tryk på nær en funktion af temperaturen.

Resultatet af en sådan integration giver en figur, der er topologisk ækvivalent med vores 'svalehale' på figur 51 side 111. Kravet om termodynamisk ligevægt og stabilitet medfører nu, at vi må bortoperere 'svalehalen' og nøjes med en sammensyet

flade, der er topologisk ækvivalent med fig 52.

Denne entydige fastlæggelse af g som funktion af T og P (på nær en funktion af T) sker netop ved anvendelse af vægtstangsreglen: Gælder vægtstangsreglen, så ser g ud som på fig. 52, og vice versa. Vi husker så på, at fig. 52 fremkom entydigt ved at benytte Maxwellkonventionen fra EKT. Det er i denne diskussion vigtigt at mærke sig, at vægtstangsreglen giver resultater, der stemmer ganske godt med eksperimentet.

Vi afbilder nu Fowler's koeksistenskurve og den udfra vægtstangsreglen bestemte koeksistenskurve i samme diagram, fig.56:

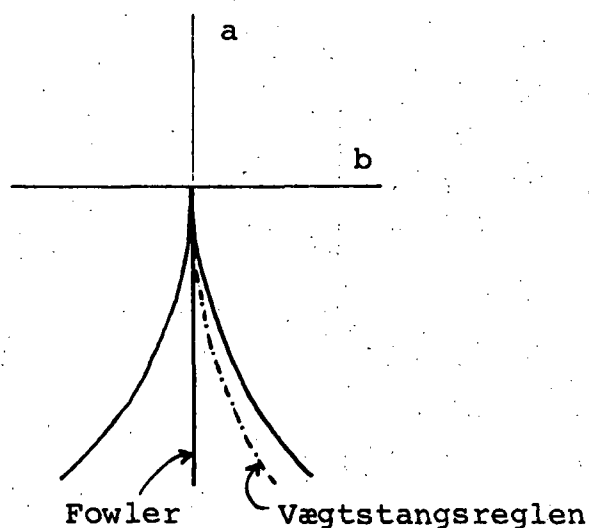


fig. 56: Koeksistenskurver

Det er klart, at der her er noget galt.

Vi husker på, at vi ser lokalt på sagen, viz. i en tilpas lille omegn af det kritiske punkt. Men ligegyldigt hvor lille denne omegn vælges, vil de korresponderende billeder se ud som på fig. 56. Der er altså ikke tale om en lille lokal afvigelse mellem de to kurver, der er noget fundamentalt galt i sagen.

Vi resumerer:

1. Maxwell's vægtstangsregel er ækvivalent med EKT's Maxwell-konvention anvendt på den molære Gibbs' fri energi.
2. Dette er ensbetydende med en entydig koeksistenskurve.
3. Fowler's koeksistenskurve bestemt udfra anvendelse af EKT er lokalt forskellig fra den ved vægtstangsreglen fastlagte.

Fowler er udmærket klar over, at der er noget, der lyder falsk. Han foreslår som løsning, at der vælges en ny (en til situationen skræddersyet) EKT-konvention, der får koeksistenskurven til at ligge rigtigt; en slags mellemting mellem Maxwell-konventionen og mætningskonventionen.

Men det er klart, at dette ikke løser problemet på en tilfredsstillende måde, hvilket også Thom og Zeeman gør opmærksom på ((18); p. 615ff.)

Problemet er blevet grundigt undersøgt af Lavis og Bell (10), som dér konkluderer, at EKT har nogle principielle svagheder der gør, at Van der Waal's tilstandsligning ikke altid kan repræsenteres som en spidskatastrofe: Hvis man arbejder i Gibbs-repræsentationen går man galt i byen, men hvis man derimod benytter den grand kanoniske repræsentation går det glat.

Set med EKT's øjne virker det ejendommeligt al den stund, at der ikke udfra et klassisk termodynamisk synspunkt skulle være grund til at foretrække én energirepræsentation frem for en anden.

Lavis og Bell's (L&B) hovedargument består i et bevis for, at Fowler's potential (31.4) ikke er Gibbs' fri energi

Taylorudviklet i en omegn af det kritiske punkt: Taylorudviklingen af det korrekte Gibbs'ske potential omkring det kritiske punkt indeholder et ikke-forsvindende tredjegradsled.

Selvom Fowler's potential bevisligt er ukorrekt, er det ikke noget argument for, at én termodynamisk repræsentation i katastrofeteoretisk øjemed er at foretrække frem for en anden. Vi vil i det følgende vise, at L&B's konklusion er fejlagtig for så vidt angår dette punkt og i medfør heraf tilbagevise deres tese om, at Maxwellkonventionen og vægtstangsreglen skulle være forskellige.

Udviklingen af det termodynamisk korrekte potential i hhv. Gibbsrepræsentationen og den grand kanoniske kan let gennemføres med de ekstra oplysninger, at varmekapaciteten $c_v = \frac{3}{2}Nk$ udenfor koeksistensområdet og at entropien i tilstrækkeligt fortyndede gasser er givet ved Sackur - Tetrodeligningen. Denne udledning svarer fuldkommen til at regne baglæns i Landau og Lifshitz's udledning af Van der Waal's gaslov ((9), p 222f).

Dette giver så Helmholtz' generaliserede fri energi, som ved Legendretransformationen $G = F + PV$ bliver det generaliserede Gibbs' potential for fasholdt N:

$$G(T, P; V) = PV - NkT \ln \left(\frac{1}{V_Q} \left(\frac{V}{N} - b \right) \right) - \frac{aN^2}{V^2} - NkT \quad (33)$$

hvor V_Q er kvantevoluminet

$$V_Q = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kTm} \right)^{3/2}$$

Med L&B indfører vi ordensparameteren

$$x = \frac{V - V_c}{V_c} \quad \text{og sætter } p = \frac{P}{P_c} \quad \text{og } t = \frac{T}{T_c}$$

indfører vi dette i (33) og sætter, med L&B

$$V(t, p; x) = \frac{2}{3} \frac{1}{P_c V_c} (G(T, P; V) - G(T, P, V_c)) \quad (34)$$

får vi et udtryk, som er bekvemt. Det giver, efter nogen regninger:

$$V(t,p;x) = \frac{16}{9} t \ln\left(\frac{2+2x}{2-x}\right) - 2x\left(1 + \frac{1}{3(1+x)}p\right) \quad (34)$$

Sammenholder vi Taylorudviklingen af (34) udfra det kritiske punkt (1,1,0) til og med 4.orden

$$V(t,p;x) \approx \frac{1}{12}(8p-5t)x^4 + \frac{2}{3}(t-p)x^3 + \frac{2}{3}(p-t)x^2 + \frac{2}{3}(4t-p-3)x \quad (35)$$

med Fowler's potential (31.4) §

$$V_F(t,p;x) \approx \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}(8t+p-9)x^2 + \frac{2}{3}(4t-p-3)x \quad (36)$$

vil man se, at (35) i modsætning til (36) indeholder et ikke-forsvindende tredjegradsled.

L&B nævner, at det har været forsøgt at fjerne tredjegradsledet i (35) ved at substituere

$$x' = x + (p-t)(8p-5t)^{-1} \quad (37.1)$$

i (35) (sic!)

Og de siger videre -helt korrekt- at denne procedure er forkert; for substitutionen skal foretages i (34) før vi giver os til at rækkeudvikle. Hvis dette gøres med substitutionen (37.1), får man et udtryk, der ligner (35) med et ikke-forsvindende tredjegradsled.

Men den omstændighed, at substitutionen (37.1) ikke virker efter hensigten betyder jo ikke, at alle andre substitutioner er forkerte. Det er netop dette punkt, som L&B overser, og som gør, at deres konklusion bliver fejlagtig.

§

Vi har udtrykt Fowler's potential i der herværende koordinater.

Vi vil nu bevise, at der findes netop en substitution

$$x'' = x + q(t, p) \quad (37.2)$$

som indsat i (34) giver en Taylorudvikling uden tredjegradsled.

For ethvert fastholdt $r = r(t, p)$ gælder

$$\begin{aligned} V(t, p; x) = & V(t, p; r) + \frac{1}{1!} V'_x(t, p; r) (x-r) + \frac{1}{2!} V''_x(t, p; r) (x-r)^2 \\ & + \frac{1}{3!} V^{(3)}_x(t, p; r) (x-r)^3 \\ & + \frac{1}{4!} V^{(4)}_x(t, p; r) (x-r)^4 + O^5(x-r) \end{aligned} \quad (38)$$

Vi koncentrerer os om tredje- og fjerdegradsleddene i (38). Vi får efter nogle simple regninger resultaterne

$$\begin{aligned} V_x^{(3)}(t, p; r) = & \frac{32}{9} t ((1+r)^{-3} + (2-r)^{-3}) \\ & - ((1+r)^{-3} + r(1+r)^{-4}) 4p = W(t, p; r) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} V_x^{(4)}(t, p; r) = & \frac{32}{3} t (- (1+r)^{-4} + (2-r)^{-4}) \\ & + ((1+r)^{-4} - r(1+r)^{-5}) 16p = W'_r(t, p; r) \end{aligned} \quad (40)$$

hvor mærkerne betyder differentiation mht. variabelen i subskriptet.

Idet vi sætter $(t, p; r) = (1, 1, 0)$ får vi

$$W(1, 1, 0) = 0 \quad \text{og} \quad W'_r(1, 1, 0) \neq 0$$

Vi kan så bruge implicit funktionssætning, (der er et specialtilfælde af urbilledteoremet) der siger, at vi lokalt, viz. i en om-

egn N af $(1,1)$ kan finde en entydig funktion g således at $g(1,1) = 0$ og at $W(t,p;g(t,p))$ er identisk 0 for alle (t,p) i N .

Vi sætter så $g(t,p) = r(t,p) = -q(t,p)$ og får så den ønskede substitution (37.2).

$$\text{Hvis vi sætter } U(t,p,x) \equiv V(t,p;x) - V(t,p,-q(t,p)) \quad (41)$$

får vi følgende Taylorudvikling udfra $(1,1,0)$ til og med 4.orden:

$$U(t,p;x) \approx U_x'(t,p,0)x + \frac{1}{2}U_{xx}''(t,p,0)(x)^2 + \frac{1}{4!}U_{xxx}^{(4)}(t,p,0)(x)^4 \quad (42)$$

uden det berygtede tredjegradsled.

Som vi ser, er (41) lig med (35) på nær en funktion af t og p . Koeksistenskurven er, som vi tidligere har vist, invariant overfor en sådan transformation.

Det kunne være interessant at se, hvordan vores $q(t,p)$ ser ud. Imidlertid er udtrykket, der implicit bestemmer q en ubehagelig tredjegradslikning; men vi kan bestemme Taylorudviklingen af q med implicitte metoder. Resultatet bliver til og med 2. orden i $t-1$ og $p-1$ følgende:

$$q(t,p) \approx -\frac{2}{3}(t-1) + \frac{2}{3}(p-1) + \frac{4}{9}(t-1)^2 - \frac{8}{9}(t-1)(p-1) + \frac{2}{9}(p-1)^2 \quad (43)$$

L&B viser videre, at i den grand kanoniske repræsentation vil Taylorudviklingen af

$$\Phi(T,\mu;N) \equiv \frac{1}{kT_c N_c} (\Omega(T,\mu;N) - \Omega(T,\mu,N_c))$$

med ordensparameteren

$$y = \frac{N - N_c}{N_c}$$

udfra (T_c, μ_c, N_c) indtil og med 4. orden give et udtryk af formen

$$\Phi(\bar{T}, \bar{\mu}, y) \approx f(T, \mu)y + g(T)y^2 + h(T)y^4 \quad (44)$$

hvor vi med stregerne over symbolerne har antydnet en passende skalering.

(44) er jo unægtetelig mere simpel end (42), idet ordensparameteren y i modsætning til " x " er mere fysisk umiddelbar.

L&B fortsætter (fejlagtigt) med at vise, at den grand kanoniske repræsentation er at foretrække, når det drejer sig om at ansue faseovergange i en gittergas i 0'te ordens approksimationen.

Her træder implicit funktionssætning igen ind i billedet og sikrer eksistensen af en gyldig substitution, der kan fjerne tredjegradsleddet på en korrekt måde.

At det i dette tilfælde er smartest² at arbejde i den grand kanoniske repræsentation ændrer, som vi nu har set det, ikke ved det principielle i sagen: Op til en funktion af Tog P giver Gibbsrepræsentationen en spidskatastrofe i ordensparameteren x " med Maxwellkonvention.

²I tilfældet med en ferromagnet ((7), p.303f) i middelfeltapproksimationen er Helmholtzrepræsentationen den smarteste, idet den direkte giver den nydeligste spidskatastrofe, i.e. en forgreningskatastrofe for fastholdt feltstyrke og $T \rightarrow T_c$ ovenfra.

Reelle processer.

Som et enkelt eksempel på anvendelse af EKT udenfor termodynamisk ligevægt betragter vi igen vores Van der Pohl oscillator.

Inden vi går videre med dette eksempel, vil vi ganske kort gøre nogle vigtige principielle overvejelser.

Det nye, der kommer ind i billedet er, at vi nu betragter reelle processer og ikke kvasistatiske. Som vi så det tidligere, var de kvasistatiske processer kendetegnet derved, at tilstandsvektoren i tilstandsrummet lå så tæt op ad vores attraktor, at den sagtens kunne følge med, når vi ændrede langsomt på vores kontrolparametre.

Denne betragtningsmåde vil vi -inspireret af Zeeman-nu forlade og i stedet se på det tilfælde, hvor vores attraktor ligger fast.

Hvis vi et øjeblik vender tilbage til vores lineære diskussion og betragter vores egentlige knude på fig.16,p.34, ser vi, at jo større μ numerisk er i forhold til λ numerisk, desto mere lodrette vil trajektorierne forløbe. Løsningerne på problemet er $x_1 = \text{const.}_1 \exp(-\lambda t)$ og $x_2 = \text{const.}_2 \exp(-\mu t)$ viser, at når $\mu \gg \lambda$, vil x_2 henfalde næsten øjeblikkeligt, mens x_1 henfalder langsomt.

Lad os rekapitulere vores dynamiske system fra figur 16:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -Ky \\ \dot{x} &= -x\end{aligned}$$

hvor vi af bekvemmelighedsgrunde har indført nye symboler, $y = x_2$, $x = x_1$ og $\mu = -K$, hvor $K \gg 1$; λ er sat til værdien 1.

Dette system kan vi skrive som

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\dot{y} &= -y \\ \dot{x} &= -x\end{aligned}\tag{46}$$

Hvis vi nu ser på systemet og sammenligner med (46)

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\dot{y} &= -(y + x) \\ \dot{x} &= -x\end{aligned}\tag{47}$$

Så ved vi, at de fra et topologisk synspunkt har samme strømning. Men fra et modelbyggerens synspunkt er (47) i modsætning til (46) et system med feed-back. Denne feed-back bliver især interessant i det ikke lineære tilfælde, som vi skal se.

Lad os betragte en mere generel udgave af (47):

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\dot{y} &= -F(y, x) \\ \dot{x} &= -x\end{aligned}\tag{48}$$

Det er intuitivt klart, at jo større K er, jo mere lodret vil trajektorierne forløbe indtil de når i nærheden af $F(x, y) = 0$, hvorefter de langsomt vil bøje af og bevæge sig roligt mod origo. Vi antager nu, at 0 er en regulær værdi for F , og kalder det fremkomne urbillede for den langsomme mangfoldighed.

Vi har så følgende:

Den hurtige differentiaalligning bestemmer den langsomme mangfoldighed, og den langsomme differentiaalligning bestemmer så, hvordan systemet bevæger sig på denne mangfoldighed. Dette er filosofien bag den lidt bagvendte skrivemåde med K .

Vi kan generalisere (48) en lille tak til og se på

$$\frac{1}{K} \dot{y} = -F(x, y) \quad (49)$$

$$\dot{x} = -G(x, y)$$

hvor vi antager, at 0 også er en regulær værdi for G. Dette betyder igen, at $G^{-1}(0)$ er en mangfoldighed af dimension 1 i \mathbb{R}^2 , hvilket den langsomme mangfoldighed, $F^{-1}(0)$ også er. Eftersom glatte mangfoldigheder af dimension 1 typisk mødes i isolerede punkter, har vi noget, vi kan bruge.

Lad os betragte mangfoldigheden $F^{-1}(0)$ isoleret. Vi kan lægge en omegn omkring denne og så spadsere en tur, og derved afsløre, hvilke dele af den, der er attraktorer, repellerer eller blot hvilepunkter. Eftersom vektorfeltet varierer glat, er det klart, at næsten alle punkter på mangfoldigheden vil være en attraktor eller en repellor. Dette ræsonnement kan gennemføres for hver mangfoldighed for sig, således at de isolerede hvilepunkter for (49) typisk vil være punktattraktorer, punktrepellerer eller sadler.

Med disse tanker i baghovedet vender vi tilbage til vores Van der Pohl oscillator.

I sin tid skrev vi den som

$$\ddot{y} + (3y^2 - \epsilon)\dot{y} + y = 0$$

hvilket egentlig er en forsimplet udgave af

$$\ddot{z} + K(3z^2 - \epsilon)\dot{z} + z = 0 \quad (50)$$

Lad os nu se på, hvad der sker, når oscillatoren bliver kraftigt dæmpet, i.e. K bliver stor.

Vi benytter Zeeman's trick ((18), p.294 f.): Vi betragter (50) i det duale tilstandsrum udspændt af tilstandsvektoren

$$(z, x) = (z, \int_0^t z(t') dt')$$

Lad os sige, at vi har begyndelsesværdierne z_0 og \dot{z}_0 . Sætter vi nu

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{K} \int_0^t z(t') dt'$$

har vi $\dot{x} = \frac{1}{K} z$, som vi indsætter i (50) og får

$$\ddot{z} + K(3z^2 \dot{z} - \varepsilon \dot{z} + \dot{x}) = 0 \quad (51)$$

Ved at integrere (51) får vi så

$$\dot{z} + K(z^3 - \varepsilon z + x) = \dot{z}_0 + K(z_0^3 - \varepsilon z_0 + x_0) \quad (52)$$

Vi kan så sætte integrationskonstanten x_0 til

$$x_0 = -z_0^3 + \varepsilon z_0 + \frac{1}{K} \dot{z}_0$$

hvorved højresiden i (52) bliver 0, og vi får så det dynamiske system skrevet som

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -K(z^3 - \varepsilon z + x) \\ \dot{x} &= \frac{1}{K} z \end{aligned} \quad (53)$$

Nu har vi jo forudsat, at K er stor, viz. vi har et system som i (48), parametriseret ved ε . For $\varepsilon=0$ sker der, som tidligere om-

talt en Hopf forgrening.

Den langsomme manifold kender vi jo. Det er vores gamle bekendt, spidskatastrofemangfoldigheden, således at (53) er et dynamisk system bygget ovenpå en spidskatastrofe. Dette er vist på fig 57.

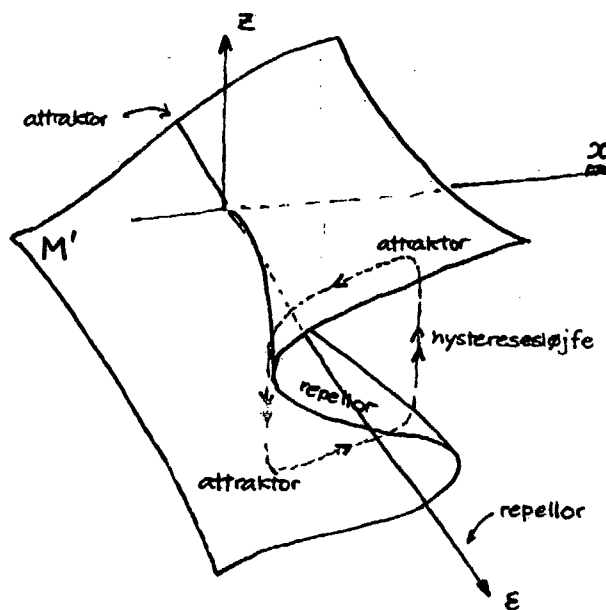


fig. 57: Van der Pohl oscillator med kraftig dæmpning set som et dynamisk system på en spidskatastrofemangfoldighed.

Vi bemærker, at $R \times G^{-1}(0)$ og $F^{-1}(0)$ mødes typisk transversalt. $R \times G^{-1}(0)$ er planen $z=0$, som er en repellor for $\epsilon > 0$ og en attraktor for $\epsilon < 0$. Tilsvarende består M' i halvplanen $\epsilon < 0$ af en attraktor, mens den i halvplanen $\epsilon > 0$ er en repellor i det mellemste lag og en attraktor på det øverste og det nederste lag, som vist på fig. 57. De to manifoldigheder mødes transversalt i ϵ -aksen, som

så for $\epsilon < 0$ er en attraktor og for $\epsilon > 0$ en repellor. Denne skæring er typisk og vil være topologisk uforandret for svagt perturberede udgaver.

På figur 58 og 59 har vi vist to computertegnede trajektoriebilleder i xz -planen. Det er tydeligt at se hvad der sker, når dæmpningen forøges.

For at illustrere forskellen mellem det hurtige og det langsomme forløb, er der ved computerberegningen anvendt konstant skridtlængde: Det hurtige forløb kan så let aflæses ved, at skriveren bevæger sig i ryk henover papiret, mens den lidt langsommere proces er mere jævn. Vi har på computerbillederne indtegnet det hurtige forløb med en dobbeltpil, mens det langsomme er indikeret med enkeltpil.

Disse ujævne oscillationer (i grænsen hysterese) kaldes i fysiklitteraturen for relaksationssvingninger, og er gode modeller til beskrivelse af rubinlaseren, for bilers blinklys og for hjer-teslaget ((18)p.81).

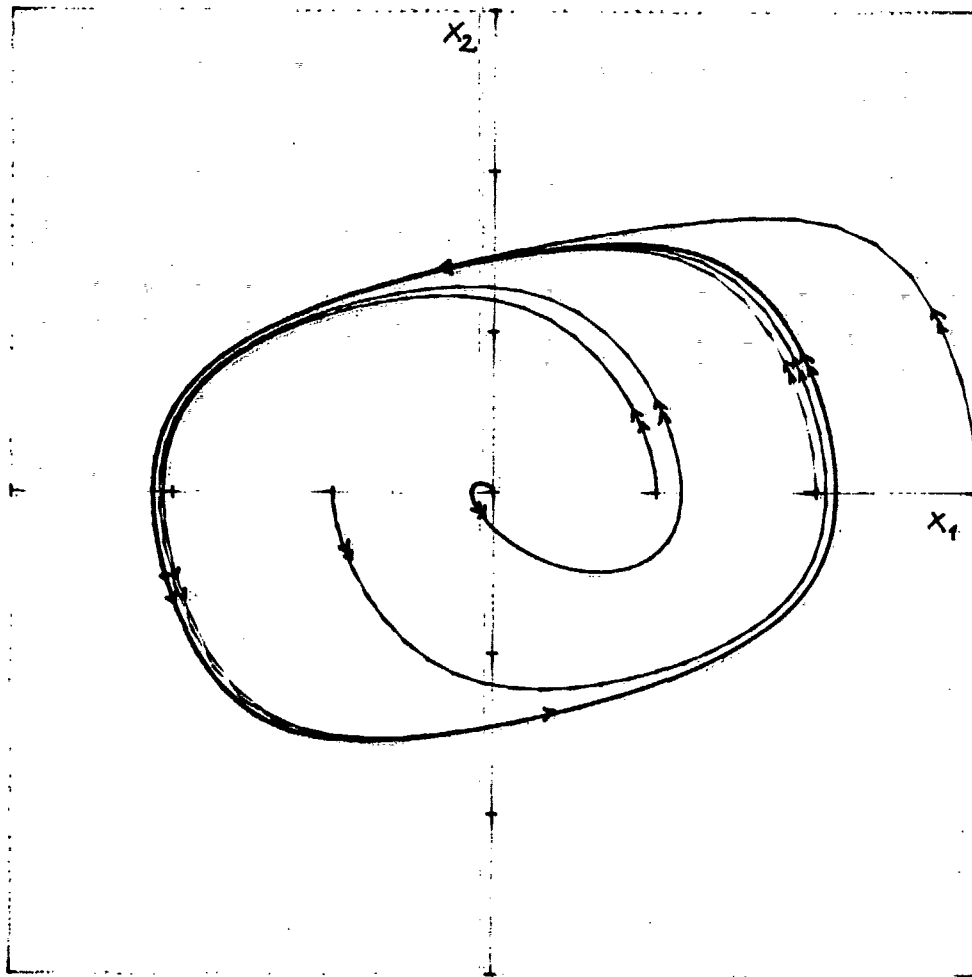


fig. 58: Van der Pohl oscillator svarende til moderat stor dæmpning i det duale tilstandsrum. Spiren til en hysteresesløjfe er ved at vise sig.

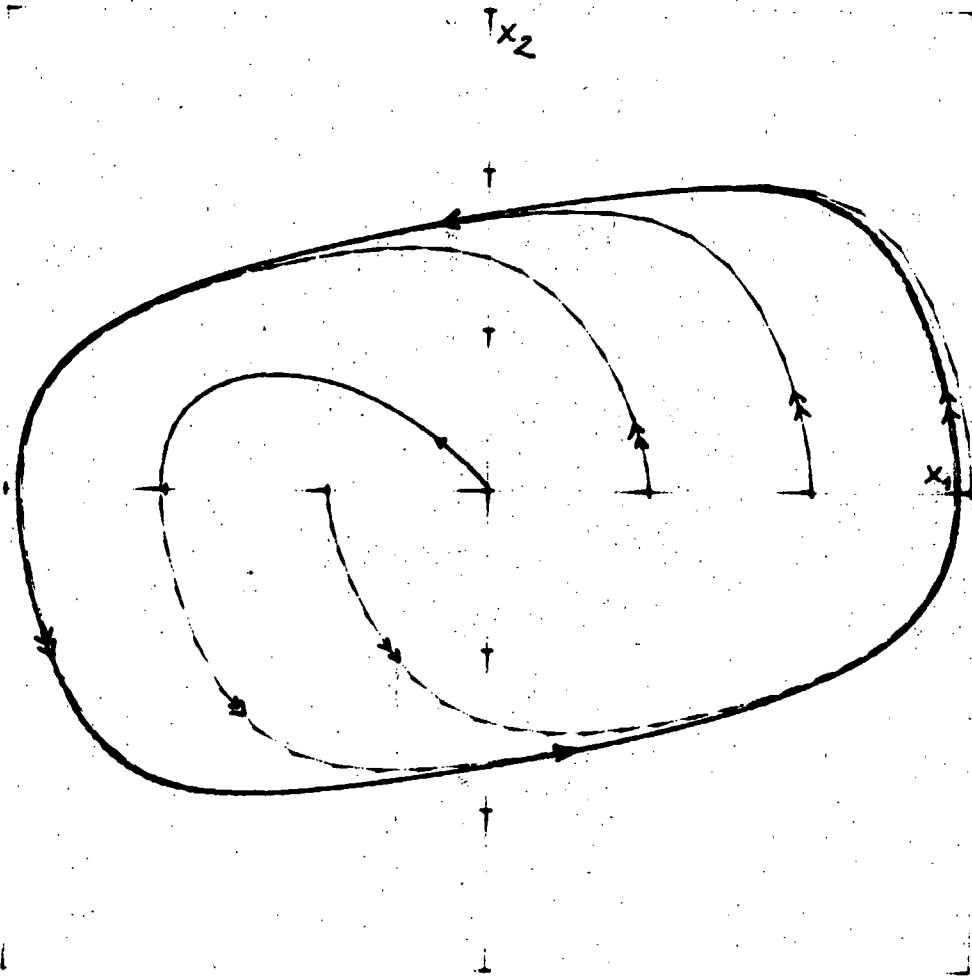


fig.59: Van der Pohl oscillator med kraftig dæmpning i det duale tilstandsrum.

Slutbemærkning.

Som man vil se, rejser der sig problemer af vigtighed for anvendelser af EKT. Givet en eller anden reel proces, der kan modelleres på en elementær katastrofe eller en kvasistatisk proces i et gradientsystem kan vi så bestemme de virkelige kontrolparametre, som e.g. temperatur, magnetfelter, kemiske aktiviteter etc.?

Svaret er ikke opmuntrende:

EKT kan ikke give andet svar end det vi tidligere har set demonstreret i den måske lidt arrogante vending 'op til en diffeomorfi'.

Men der er alligevel lyspunkter. EKT udsiger, at hvis vi vælger at beskrive et system som et gradientsystem med mindre end eller lig 5 parametre, så vil der være grænser for, hvor komplicerede modellerne lokalt kan være, eller rettere hvor komplicerede, vi kan forvente, at de er.

Det vil være passende her til slut at give ordet til Thom selv. I en replik til Zeeman i en diskussion af katastrofeteoriens aktuelle tilstand (1974) og fremtidige perspektiver skriver han:

"In no case has mathematics any right to dictate to reality. The only thing one might say is that, due to such and such a theorem one has to expect that the empirical morphology will take such and such a form. If reality does not obey the theorem - that may happen - this proves that some unexpected constraints cause some lack of transversality, which makes the situation all the more interesting." ((18), p.636)

B I

- (1) Callen, H.B. Thermodynamics, Wiley, New York 1960
- (2) Christiansen, P. Voetmann: Information, entropi og udvikling,
Forelæsningsnoter, København 1971.
- (3) Fowler, D.H. : 'The Riemann Hugoniot Catastrophe and Van der
Waal's Equation', p.1ff i Towards a Theoretical
Biology, C.H. Waddington ed. Edinburgh Universi-
ty Press, Edinburgh 1972.
- (4) Guillemin, V. and Pollack A. : Differential Topology, Prentice
Hall, New Jersey, 1974.
- (5) Haken, H.: 'Synergetics - Toward a New Discipline', p.363 i
Cooperative Phenomena, H.Haken & M. Wagner ed. Springer,
Berlin 1973.
- (6) Hirsch, M.W. and Smale, S.: Differential Equations, Dynamical
Systems and Linear Algebra, Academic
Press, London 1974.
- (7) Kittel, C.: Thermal Physics, Wiley, New York 1969.
- (8) Kopell, N. and Howard, L.N.: 'Pattern Formation in the Belousov
Reaction', Lectures on Math. in the
Li. Sciences, 7, p.201, 1974.
- (9) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.: Statistical Physics, Pergamon,
2nd Imp., Oxford 1970.
- (10) Lavis, D.A. and Bell, G.M.: 'Thermodynamic Phase Changes and
Catastrophe Theory', Bulletin of
The Institute of Mathematics and
its Applications, Southend-on-Sea,
February 1977.

B II

- (11) The Hopf Bifurcation and Its Applications, J. Marsden and M. McCracken ed. Springer, New York 1976.
- (12) Mathiasen, Gert: Den reaktionære biologi, Stencil, København 1972
- (13) Poston, T.: On Deducing the Prescence of Catastrophes, Stencil, Batelle, Geneve 1978.
- (14) Poston, T. and Stewart, I.N.: Taylor Expansions and Catastrophes, Pitman Publishing, London 1976.
- (15) Schulman, L.S. and Revzen, M.: 'Phase Transitions as Catastrophes', Collective Phenomena, 1, 1972 p.43 - 49, London, 1972.
- (16) Schulman, L.S.: 'Tricritical Points and Type-Three Transitions', Phys. Rev. B, 7, p. 1960 - 1969.
- (17) Thom, R.: Stabilité Structurelle et Morphogénese, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.
- (18) Zeeman, E.C.: Catastrophe Theory, Selected Papers 1972-1977, Addison-Wesley, New York, 1977.

Liste over nogle hyppigt
anvendte symboler.

\subset : er en delmængde af, indeholdt i
 \supset : er en overmængde af, indeholder
 \in : tilhører, er et element af (i)
 \times : Det kartesiske produkt af, e.g.
 $A \times B$ = mængden af ordnede par, hvor
 $a \in A$ og $b \in B$
 \cup : foreningsmængde
 \cap : fællesmængde

U : åben omegn

\mathbb{R} : de reelle tal, den reelle talakse
det eendimensionale euklidiske rum

\mathbb{R}^k : = $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, k faktorer : det k -
dimensionale euklidiske rum.

K_x^k : den åbne enhedskugle i \mathbb{R}^k omkring $x \in \mathbb{R}^k$

M^k : glat mangfoldighed af dimension k

\mathbb{C} : de komplekse tal

\langle , \rangle : indre produkt i et vektorrum

$\text{Im}T$: Billedet ved en lineær afbildning T

$\text{Ker}T$: Urbilledet af nulvektoren ved en li-
near afbildning, T

$\text{Tr}A$: Sporet af matricen A

$\text{Det}A$: Matricen A 's determinant