TEKST NR 143 1987

KURSUSMATERIALE

til

MATEMATIK

på

NAT-BAS

(Mogens Brun Heefelt)

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

Kursusmateriale til matematik på NAT-BAS

af: Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 143/87   127 sider   ISSN 0106-6242

ABSTRACT.

Dette kursusmateriale er udarbejdet til et matematikkursus på den naturvidenskabelige basisuddannelse. Kurset forudsætter, at de studerende har bestået en matematisk-fysisk studentereksamen eller tilsvarende. Dette materiale vil i kursusforløbet blive suppleret med opgaver til gruppearbejde samt evalueringsopgaver.

Indholdsfortegnelse

5. DIFFERENTIALLIGNINGER

1 LINEÆRE RUM OG LINEÆRE AFBILDNINGER

1.1 Lineære rum (vektorrum)

De regneregler, man kender for vektorer i planen (og rummet) kan let generaliseres, således at de kan være aksiomer for det, vi vil kalde et lineært rum, eller fordi det udspringer af vektorerne - et vektorrum.

Vi betragter en mængde L, og på L er defineret en "addition", + således at for alle $u,v \in L$ er også $u + v \in L$, videre skal gælde, at

(i1)	$u + v = v + u$	for alle $u,v \in L$
(i2)	$(u + v) + w = u + (v + w)$	for alle $u,v,w \in L$
(i3)	der findes et nulelement σ så	
	$u + \sigma = u$	for alle $u \in L$
(i4)	til hvert $u \in L$ findes ét $u' \in L$, så	
	$u + u' = \sigma$ (dvs. u' er det inverse til u).	

På L er tillige defineret en "multiplikation med tal", således at for alle $\alpha \in R$*) og for alle $u \in L$ er også $\alpha \cdot u \in L$ (eller αu); videre skal gælde, at

(ii1)	$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$	for alle $\alpha,\beta \in R$, $u \in L$
(ii2)	$1 \cdot u = u$	for alle $u \in L$
(ii3)	$0 \cdot u = \sigma$	for alle $u \in L$
(ii4)	$\alpha \cdot \sigma = \sigma$	for alle $\alpha \in R$

Endelig bliver de to regneregler sammenknyttet gennem betingelserne

(iii1)	$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$	for alle $\alpha,\beta \in R$, $u \in L$
(iii2)	$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$	for alle $\alpha \in R, u,v \in L$

---

*) Man kan bruge andre tallegemer, fx vil vi senere se lineære rum over C , de komplekse tals legeme.

<u>En mængde $(L, +, R)$, der opfylder betingelserne (i1) - (i4), (ii1) - (ii4) og (iii1) - (iii2) kaldes et lineært rum.</u>

<u>Eksempel:</u> Betragter vi mængden af alle reelle taltripler

$R^3 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in R\}$,

og sætter vi

$x = (x_1,x_2,x_3)$ og $y = (y_1,y_2,y_3)$,

indfører vi addition og multiplikation med tal som

$$x + y = (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$
$$\alpha x = (\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3) .$$

Man ser ret let, at (i)-(iii) vil være opfyldt, idet jo regnereglerne kontrolleres på hver "plads" (koordinat) for sig. Fx. er triplet $(0,0,0)$ nulelement og for hver (x_1,x_2,x_3) findes det inverse af

$$(x_1,x_2,x_3) + (-x_1,-x_2,-x_3) = (0,0,0) .$$

<u>Eksempel:</u> Et mere interessant eksempel, som netop viser betydningen af disse aksiomer, fremkommer, når vi betragter mængden $F(J)$ af alle reelle funktioner på et interval J . Vi definerer addition og multiplikation med tal ved

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

dvs. at $f + g$ er den funktion, som fremkommer ved for hvert $t \in J$ at tilordne værdien af $f(t) + g(t)$, og tilsvarende er αf den funktion, som har værdien $\alpha f(t)$ i t . Ud fra reglerne for regning med reelle funktioner eftervises (i)-(iii) let. Nulelementet i dette rum vil være nulfunktionen, dvs. den funktion σ , hvor

$$\sigma(t) = 0 \quad \text{for alle} \quad t \in J$$

1.2 Underrum.

Er M en delmængde af L, og er for alle $u,v \in M$ og $\alpha \in R$

(u1) $u + v \in M$

(u2) $\alpha u \in M$

kaldes M et underrum af L. Man kan let indse, at M selv er et lineært rum, idet reglerne (i1)-(i2), (ii1)-(ii4) og (iii1)-(iii2) gælder for alle elementer i L, da vil de også gælde i M. Tilbage er altså (i3) og (i4), men da $\alpha u \in M$ for alle $u \in M$ og $\alpha \in R$, vil specielt $\sigma = 0 \cdot u \in M$ og $-u = (-1) \cdot u \in M$.

Betydningen af begrebet underrum skulle gerne fremgå af eksemplerne nedenfor.

Eksempel: Idet $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ definerer vi M som

$M = \{x \in R^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

Vi undersøger nu $x + y$ og αx, hvor $y = (y_1, y_2, y_3)$. Hvis $x, y \in M$, er

$(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) + (x_3+y_3) =$

$(x_1+2x_2+x_3) + (y_1+2y_2+y_3) = 0 + 0 = 0$

dvs. $x + y \in M$. Tilsvarende fås, at

$(\alpha x_1) + 2(\alpha x_2) + (\alpha x_3) =$

$\alpha(x_1+2x_2+x_3) = \alpha \cdot 0 = 0$

dvs. $\alpha x \in M$, når $x \in M$ og $\alpha \in R$.
I rummet svarer M til en plan gennem begyndelsespunktet.

Eksempel: Betragter vi nu mængden $C^n(J)$ - mængden af alle n gange (kontinuerte), differentiable funktioner på J - så er den en delmængde af $F(J)$. Da nu summen af to n gange differentiable funktioner igen er n gange differentiabel, og da en konstant gange en n gange differentiabel funktion atter er n gange differentiabel, får vi med $\alpha \in R$ og $f,g \in C^n(J)$, at

$$f + g \in C^n(J)$$
$$\alpha f \in C^n(J)$$

dvs. $C^n(J)$ er et underrum i $F(J)$.

Eksempel: Vi så før, at fx. $C^2(J)$ er et vektorrum, og vi undersøger nu, om mængden

$$M = \{f \in C^2(J) \mid f'' + pf' + qf = 0\}$$

vil være et underrum. Mængden M er jo mængden af løsningsfunktioner til differentialligningen

$$(*) \qquad f''(t) + p(t)f'(t) + q(t)f(t) = 0 \ .$$

Det, vi altså skal undersøge, er, om vi med f og g som løsninger til $(*)$ og $\alpha \in R$ vil få, at også $f+g$ og αf er løsninger til $(*)$. Da

$(f+g)''(t) + p(t)(f+g)'(t) + q(t)(f+g)(t) =$
$(f''(t)+p(t)f'(t)+q(t)f(t))+(g''(t)+p(t)g'(t)+q(t)g(t))$
$= 0 + 0 = 0$

og da

$(\alpha f)''(t)+p(t)(\alpha f)'(t)+q(t)(\alpha f)(t) =$
$\alpha(f''(t)+p(t)f'(t)+q(t)f(t)) = \alpha \cdot 0 = 0$

får vi, at

$f+g \in M$ og $\alpha f \in M$,

dvs. M er et underrum.

1.3 Basis og dimension.

For vektorer i rummet (eller planen) ved vi, at enhver vektor på én og kun én måde kan skrives som linearkombination af tre (to) basisvektorer. Dette vil vi søge at generalisere til vilkårlige, lineære rum. En mængde $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ af n elementer i L kaldes lineært afhængig, hvis der findes tal $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in R$, som ikke alle er nul, og som opfylder, at

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \sigma$$

Negeres dette udsagn, fås, at en mængde af elementer er <u>lineært uafhængig</u>, hvis vi af ligningen

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \sigma$$

kan slutte, at $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Hvis et element $u \in L$ kan skrives som

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$, siges u at være en <u>linearkombination</u> af elementerne $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Vi kan da vise en central sætning om lineært afhængige elementer.

<u>Sætning:</u> $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis mindst en af dem er linearkombination af de øvrige.
"$\Rightarrow$" Da de er lineært afhængige, findes tal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ så

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \sigma$$

og hvor mindst et tal, fx. $\lambda_n \neq 0$.

Da er $$v_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1}$$

altså er v_n linearkombination af de øvrige.

"$\Leftarrow$" Er fx. v_1 linearkombination af de øvrige, dvs.

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n$$

bliver

$$-1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n = \sigma$$

dvs. elementerne er lineært afhængige, da mindst koefficienten til v_1 er forskellig fra nul.

<u>Eksempel:</u> Elementerne $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ og $w = (2,-1)$ udgør en lineær afhængig mængde i R^2, da

$$\begin{aligned} -2u+v+w &= (-2,0) + (0,1) + (2,-1) \\ &= (0,0) = \sigma . \end{aligned}$$

Til gengæld vil $\{u,v\}$ være lineært uafhængige, idet

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \sigma \Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \ .$$

<u>Eksempel:</u> Funktionerne $f_1(t) = 1, f_2(t) = \sin t, f_3(t) = \sin^2 t$ og $f_4(t) = \cos 2t$ vil i rummet $F(]-\pi,\pi[)$ være lineært afhængige, da jo

$$\cos 2t = 1-2\sin^2 t$$

eller

$$-f_1(t) + 0\cdot f_2(t) + 2\cdot f_3(t) + f_4(t) = 0$$

Derimod er $\{f_1,f_2,f_3\}$ lineært uafhængige, idet der for alle $t \in J$ skal gælde

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin t + \lambda_3 \sin^2 t = 0 \ ,$$

da specielt også for

$$t = 0 \ : \ \lambda_1 = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \ : \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \ : \ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Har vi nu, at ethvert element $u \in L$ kan skrives som linearkombination af elementerne $v_1, v_2, \dots, v_n$, siges elementerne at <u>udspænde</u> L . I almindelighed vil det samme element u kunne opskrives som linearkombination på flere måder, fx.

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_n v_n$$

og

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots\dots + \beta_n v_n \ .$$

Subtraheres de to udtryk, er

$$\sigma = u-u = (\alpha_1-\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n-\beta_n)v_n \ .$$

Er imidlertid $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineært uafhængige, kan vi slutte, at

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \;, \quad \alpha_1 - \beta_2 = 0 \;, \ldots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0$$

eller

$$\alpha_1 = \beta_1 \;, \quad \alpha_1 = \beta_2 \;, \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n \;,$$

dvs. at u har en éntydig fremstilling som linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Det er derfor nærliggende at definere, at en basis for et lineært rum L er en lineært uafhængig, endelig mængde, som udspænder L .

Videre kan man vise, at alle lineære rum har en basis, og at to forskellige baser vil have samme antal elementer. Dette fælles antal af basiselementer kaldes rummets dimension.

Dette sidste om antal basiselementer og rummets dimension har naturligvis kun mening, når vi taler om rum, som udspændes af endelig mange elementer.

Eksempel: Vi ved, at differentialligningen $f'(t) = \lambda f(t)$ har den fuldstændige løsning $f(t) = ae^{\lambda t}$, $a \in R$.

$$L = \{f \in C^1(R) \mid f' - \lambda f = 0\}$$

har $\dim L = 1$, da $e^{\lambda t}$ kan vælges som basiselement.

Ved at indsætte $f_1 = \cos$ og $f_2 = \sin$ i differentialligningen $f'' + f = 0$ kan man indse, at både f_1 og f_2 er løsninger. Man kan også let se, at f_1 og f_2 er lineært uafhængige; senere vil vi tillige se, at f_1 og f_2 vil udspænde

$$M = \{f \in C^2(R) \mid f'' + f = 0\}$$

dvs. at $\dim M = 2$.

1.4 Lineære afbildninger.

I dette afsnit skal vi introducere begrebet en lineær afbildning samt vise dens sammenhæng med matricer, men først skal vi kort repetere lidt om afbildninger i almindelighed. En afbildning F fra en mængde A til en mængde B er en relation mellem elementer i A og elementer i B, således at der til hvert element i A svarer højst ét element i B. Vi vil bruge notationen

$$F : A \rightsquigarrow B$$

og med $x \in A$ og $y \in B$ skrive, at

$$y = F(x).$$

Vi vil kalde mængden af de elementer i A, som ved F har et (billed-) element i B, for definitionsmængden D(F). Som regel vil vi dog have, at $A = D(F)$. Videre vil de elementer i B, som ved F er billede af et element i D(F), udgøre afbildningens værdimængde V(F).

Har afbildningen F den egenskab, at to forskellige elementer i A aldrig har samme billede i B, da kaldes F injektiv. Ved negation af udsagnet fås, at en betingelse for injektivitet er

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Hvis F er injektiv og tillige $B = V(F)$, kaldes F bijektiv.

Er F injektiv, vil også en relation mellem et element fra V(F) til et element i D(F) være en afbildning, som kaldes den til F inverse afbildning, og vi skriver F^{-1}.

Er A,B og C mængder, og har vi afbildningerne

$$F : A \rightsquigarrow B \quad \text{og} \quad G : B \rightsquigarrow C$$

defineres den sammensatte afbildning

$$G \circ F : A \rightsquigarrow C$$

ved

$$\forall x \in A : \quad (G \circ F)(x) = G(F(x)) .$$

For vilkårligt tre afbildninger F,G og H gælder, at

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

dvs. at sammensætningen af afbildninger associativ.

Er L og M lineære rum (over R) kaldes afbildningen

$$F : L \rightsquigarrow M$$

<u>lineær</u> netop når

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$$

for alle $u,v \in L$ og $\alpha,\beta \in R$.

Vi vil nu også vise, at er F injektiv og lineær, er også <u>F^{-1} lineær</u>, samt at med F og G lineære, er også <u>$G \circ F$ lineær</u>.

Er nu F injektiv, og er

$$F(u_1) = v_1 \quad \text{og} \quad F(u_2) = v_2$$

bliver

$$u_1 = F^{-1}(v_1) \quad \text{og} \quad u_2 = F^{-1}(v_2)$$

Da F er lineær, er

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

og da F er injektiv, er

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = F^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

eller

$$\lambda_1 F^{-1}(v_1) + \lambda_2 F^{-1}(v_2) = F^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) .$$

dvs. F^{-1} er lineær.

Endnu lettere ses, at $G \circ F$ er lineær, idet

$$(G \circ F)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = G(F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) =$$
$$G(\lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2)) = \lambda_1 G(F(u_1)) + \lambda_2 G(F(u_2)) =$$
$$\lambda_1 (G \circ F)(u_1) + \lambda_2 (G \circ F)(u_2) .$$

<u>Eksempel:</u> Er C^∞ rummet af alle vilkårligt ofte differentiable funktoner fra R til R, kaldes afbildningen $D : C^\infty \rightsquigarrow C^\infty$, der er defineret ved

$$Df(t) = f'(t) ,$$

en <u>differentialoperator</u>. Tilsvarende defineres $D^n : C^\infty \rightsquigarrow C^\infty$ ved

$$D^n f(t) = f^{(n)}(t) .$$

Af

$$D(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)'(t) =$$
$$\lambda f'(t) + \mu g'(t) = \lambda Df(t) + \mu Dg(t)$$

ses, at D er en lineær afbildning.

Tilsvarende vil enhver afbildning

$$f_n D^n + f_{n-1} D^{n-1} + \ldots + f_1 D + f_0 D^0 : C^\infty \rightsquigarrow C^\infty$$

være lineær, (hvor D^0 er den identiske afbildning, dvs. $D^0 f(t) = f(t)$).

Vi skal nu definere <u>nulrummet</u> $N(F)$ for den lineære afbildning $F : L \rightsquigarrow M$, som den mængde af elementer i L, der ved F afbildes i nulelementet $\Theta \in M$, dvs.

$$N(F) = \{u \in L \mid F(u) = \Theta\} .$$

Vi skal indse, at $N(F)$ er et underrum af L. Er nu $u_1, u_2 \in N(F)$, er $F(u_1) = \Theta$ og $F(u_2) = \Theta$, og derfor er $F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2) = \lambda_1 \Theta + \lambda_2 \Theta = \Theta$

dvs.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in N(F) .$$

Vi vil nu vise den centrale sætning, at <u>en lineær afbildning er injektiv, hvis og kun hvis</u>

$$\underline{F(u) = 0 \Rightarrow u = \sigma}$$

"$\Rightarrow$" For enhver lineær afbildning vil $F(\sigma) = \Theta$, idet $F(0\cdot u+0\cdot v) = \Theta$. Da F er injektiv, kan intet $u \neq \sigma$ afbildes i Θ , dvs. kun σ vil blive afbildet i Θ .

"$\Leftarrow$" Er nu $F(u) = F(v)$, er dette ensbetydende med

$$1\cdot F(u) + (-1)\cdot F(v) = \Theta$$

eller
$$F(u-v) = \Theta$$

og ifølge forudsætningen er da

$$u - v = \sigma \quad \text{dvs.} \quad u = v$$

og derfor er F injektiv. Da σ er det eneste element i $N(F)$, kan vi omformulere sætningen.

<u>En lineær afbildning F er injektiv, hvis og kun hvis</u>
$$\underline{N(F) = \{\sigma\}}$$

Af hensyn til det følgende skal vi vise, at $V(F)$ er et underrum af M .

Er $v_1 = F(u_1)$ og $v_2 = F(u_2)$, dvs., $v_1, v_2 \in V(F)$, viser

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2) = F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) ,$$

at

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V(F) ,$$

dvs. $V(F)$ er et lineært underrum af M .

Har vi nu en basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ for $L = D(F)$, og er F en lineær, injektiv afbildning, vil vi undersøge, om sættet $\{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$ vil være en basis for $V(F)$.

Vi vil vise, at $\{F(u_1), \ldots, F(u_n)\}$ er lineært uafhængig.

Af

$$\lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2) + \ldots + \lambda_n F(u_n) = \Theta$$

fås

$$F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n) = \Theta$$

og da F er injektiv, er

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \sigma$$

Da imidlertid $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ var en basis og derfor lineært uafhængig, er $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, som skulle vises. Vi mangler nu at vise, at $\{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$ vil udspænde hele $V(F)$.
Da der til ethvert $v \in V(F)$ findes ét u så $v = F(u)$, og da $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ er basis for $D(F)$, findes netop et talsæt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ så

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n .$$

Derfor vil

$$\begin{aligned} v &= F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \\ &= \alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2) + \ldots + \alpha_n F(u_n) \end{aligned}$$

dvs. $\{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$ vil også udspænde $V(F)$.
Da der i de to baser $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ og $\{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$ er lige mange elementer, har vi

$$\underline{\dim D(F) = \dim V(F)}$$

når F er injektiv. Generelt vil der gælde følgende dimensionssætning

$$\underline{\dim D(F) = \dim V(F) + \dim N(F)},$$

som bevises efter omtrent samme opskrift som før.

1.5 Matricer.

Vi vil nu gå over til at belyse sammenhængen mellem et lineært ligningssystem og en lineær afbildning. Vi betragter en lineær afbildning $F : L \rightarrow M$, hvor $\dim L = n$ og $\dim M = p$, hvor $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ er basis i L og $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_p\}$ er basis i M .
Bemærk, at vi herefter bruger notationen $\underline{u}$, og at vi fremover kalder elementerne for vektorer. Vektor $\underline{u}$'s koordinater er $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i forhold til basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$, dvs. at

$$\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2 + \ldots + u_n\underline{e}_n .$$

Når der ikke er tvivl om, hvilken basis vi arbejder i, vil vi på kort form skrive

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) .$$

Vi kan da F er lineær skrive

$$\begin{aligned} F(\underline{u}) &= F(u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2 + \ldots + u_n\underline{e}_n) \\ (*) \qquad &= u_1F(\underline{e}_1) + u_2F(\underline{e}_2) + \ldots + u_nF(\underline{e}_n) . \end{aligned}$$

Da alle $F(\underline{e}_k) \in M$ kan vi angive deres koordinater i forhold til basen $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_p\}$. Vi sætter

$$F(\underline{e}_k) = a_{1k}\underline{f}_1 + a_{2k}\underline{f}_2 + \ldots + a_{pk}\underline{f}_p$$

Er tilsvarende $F(\underline{u})$'s koordinater

$$F(\underline{u}) = v_1\underline{f}_1 + v_2\underline{f}_2 + \ldots + v_p\underline{f}_p$$

kan vi opskrive $(*)$ som

$$\begin{aligned} & v_1\underline{f}_1 + v_2\underline{f}_2 + \ldots + v_p\underline{f}_p \\ = {} & u_1(a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \ldots + a_{p1}\underline{f}_p) \\ + {} & u_2(a_{12}\underline{f}_1 + a_{22}\underline{f}_2 + \ldots + a_{p2}\underline{f}_p) \\ \vdots \; & \vdots \\ + {} & u_n(a_{1n}\underline{f}_1 + a_{2n}\underline{f}_2 + \ldots + a_{pn}\underline{f}_p) \\ = {} & (a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n)\underline{f}_1 \\ + {} & (a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n)\underline{f}_2 \\ \vdots \; & \vdots \\ + {} & (a_{p1}u_1 + a_{p2}u_2 + \ldots + a_{pn}u_n)\underline{f}_p . \end{aligned}$$

Da nu $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_p\}$ er en basis i M , vil de to sider af lighedstegnet være identiske, og derfor er

$$(\Delta) \qquad \begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \\ v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ v_p &= a_{p1}u_1 + a_{p2}u_2 + \ldots + a_{pn}u_n \end{aligned}$$

Sammenhængen mellem $\underline{u}$'s og $\underline{v}$'s koordinater er altså fastlagt af disse p lineære ligninger (at de er lineære, ses let), hvor søjlerne i talskemaet (matricen)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

netop er koordinaterne til billederne af basisvektorerne i L.

For hvert valg af basis i rummene L og M hører der til en lineær afbildning fra L til M præcis de $p \cdot n$ tal i talskemaet (matricen), således at sammenhængen mellem vektoren $\underline{u}$ og dens billedvektor $\underline{v}$ er givet ved de p lineære ligninger.

<u>Eksempel:</u> En afbildning $F : R^3 \rightsquigarrow R^3$ er fastlagt ved, at

$F(\underline{e}_1)=\underline{e}_2-2\underline{e}_3$, $F(\underline{e}_2)=-2\underline{e}_1+\underline{e}_3$, $F(\underline{e}_3)=\underline{e}_1-2\underline{e}_2$

hvor $\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3\}$ er valgt som basis i R^3.

Da er matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og det tilhørende ligningssystem bliver

$$\begin{aligned} v_1 &= -2u_2 + u_3 \\ v_2 &= u_1 - 2u_3 \\ v_3 &= -2u_1 + u_2 \end{aligned}$$

Vi skal også undersøge, hvordan sammensætningen af to lineære afbildninger $F : L \rightsquigarrow M$ og $G : M \rightsquigarrow N$ kan udtrykkes i matricer. Ligningssystemet (Δ) kan kort udtrykkes ved følgende summation

$$(\Delta) \qquad v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, u_j \qquad k = 1,2,\ldots,p$$

dvs. (Δ) er det ligningssystem, der svarer til F. Da også G er en lineær afbildning fra M (med dimension p) til N (med dimension q), således at $\underline{w} = G(\underline{v})$, kan vi opskrive det til G svarende ligningssystem.

$$(\square) \qquad w_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, v_k \qquad i = 1,2,\ldots,q\,.$$

Indføres heri ligningen for v_k fra (Δ) bliver

$$w_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, a_{kj} \right) u_j \qquad i = 1,2,\ldots,q$$

Den sammensatte afbildning $G \circ F$ kan altså skrives

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, u_j \qquad i = 1,2,\ldots,q$$

hvor

$$(*) \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, a_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,q \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

Overfører vi denne ligning $(*)$ på matricerne for de lineære afbildninger, får vi samtidig en regel for, hvordan man ganger to matricer $\underline{B}\cdot\underline{A}$; er nemlig

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & i & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & j & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

findes værdien af c_{ij} - elementet i i'te række og j'te søjle - ved at gange elementer i i'te række af $\underline{B}$ med tilsvarende elementer i j'te søjle af $\underline{A}$ og derefter addere disse produkter.

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3-2\cdot3 & -1\cdot5-2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1 \\ -2\cdot3-3\cdot3 & 2\cdot5-3\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot1 \\ 4\cdot3+1\cdot3 & -4\cdot5+1\cdot2 & 4\cdot0-1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -9 & 2 \\ -15 & 4 & 3 \\ 15 & -18 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$$

1.6 Regneregler for matricer.

Indføres videre følgende regneregler for matricer (af samme type pxn)

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & a_{p2} + b_{p2} & \dots & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots\dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots\dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \lambda a_{p2} & \dots\dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in R$$

kan man vise, at rummet af alle pxn matricer vil være et lineært rum.

Som vi så før, kan man multiplicere matricer, og man kan vise, at

$$\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C}) = (\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C} \qquad (\text{Da } F\circ(G\circ H) = (F\circ G)\circ H)$$

og

$$(\underline{A}_1+\underline{A}_2)\cdot\underline{B} = \underline{A}_1\underline{B} + \underline{A}_2\underline{B};\ \underline{A}\cdot(\underline{B}_1+\underline{B}_2) = \underline{AB}_1 + \underline{AB}_2$$

hvor $\underline{A}, \underline{A}_1, \underline{A}_2$ er af type $m \times p$, $\underline{B}, \underline{B}_1 \underline{B}_2$ af type $p \times n$ og $\underline{C}$ er af type $n \times q$.

Derimod gælder normalt, at

$$\underline{A}\cdot\underline{B} \neq \underline{B}\cdot\underline{A}$$

hvor $\underline{A}$ og $\underline{B}$ er af type $n \times n$.

<u>Eksempel:</u> Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ser vi, at matrixmultiplikation normalt ikke er kommutativ. Vi skal dog senere benytte, at fx.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bc & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

I det følgende skal vi udelukkende arbejde med matricer, som er kvadratiske, dvs. af type $n \times n$. Dette modsvarer, at vi arbejder med lineære afbildninger $F : L \to M$, hvor begge rummene L og M har dimension n . Som vi så før, kan F repræsenteres ved ligningen

$$\underline{Y} = \underline{A}\ \underline{X}$$

hvor $\underline{Y}$ og $\underline{X}$ er nxl matricer (eller vektorer). Var tilsvarende afbildningen $G : M \sim N$ beskrevet ved

$$\underline{Z} = \underline{B}\ \underline{Y}$$

så vi, at den sammensatte afbildning $G \circ F : L \sim N$ var fastlagt ved

$$\underline{Z} = (\underline{B}\ \underline{A})\ \underline{X}$$

Vi skal nu arbejde med en speciel type afbildning. Dette er en afbildning mellem to forskellige baser, en "gammel" $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ og en "ny" $\{\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \ldots, \hat{\underline{e}}_n\}$. $\hat{\underline{e}}_k$ har koordinaterne

$$(s_{1k}, s_{2k}, \ldots, s_{nk})$$

i den "gamle" basis, dvs.

$$\hat{\underline{e}}_k = \sum_{j=1}^{n} s_{jk}\underline{e}_j \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Er nu $\underline{u}$ en vektor i L, som i den "gamle" basis har koordinaterne $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og i den "nye" $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_n)$. Da er så

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k \hat{\underline{e}}_k = \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k \sum_{j=1}^{n} s_{jk}\underline{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{jk}\hat{u}_k\ \underline{e}_j$$

men da samtidig

$$\underline{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \underline{e}_j$$

og $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ er en basis, vil de to koordinatsæt for $\underline{u}$ være identiske, dvs.

$$\underline{u}_j = \sum_{k=1}^{n} s_{jk}\ \hat{u}_k \qquad j = 1,2\ldots,n$$

eller skrevet på matrixform

$$\underline{X} = \underline{S}\ \hat{\underline{X}}$$

hvor søjlerne i $\underline{S}$ netop er dé "nye" basisvektorers koordinater udtrykt i den "gamle" basis.

Vi skal i resten af dette kapitel og i noget af næste kapitel prøve at beskrive, hvordan matricen $\underline{A}$ for en afbildning F vil blive ændret, hvis vi vælger ny basis, samt hvordan vi skal vælge denne basis, således at den nye matrix bliver "pæn".

Er der givet matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p1} \cdots\cdots a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{af type} \quad pxn$$

vil matricen

$$\underline{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots\cdots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots\cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{af type} \quad nxp$$

bliver kaldt den <u>transponerende</u> matrix, dvs. for elementerne gælder, at

$$a^t_{ij} = a_{ji} \qquad \begin{matrix} j = 1,2,\dots,p \\ i = 1,2,\dots,n \end{matrix}$$

En matrix, som opfylder $\underline{A}^t = \underline{A}$, eller i elementerne, at $a_{ij} = a_{ji}$, kaldes <u>symmetrisk</u>.
Man kan endvidere vise, at

$$(\underline{BA})^t = \underline{A}^t\underline{B}^t .$$

Da elementet på plads ji i matricen $(\underline{BA})^t$ er elementet på plads ij i $\underline{BA}$ er

$$c^t_{ji} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj} .$$

Da endvidere $b^t_{ki} = b_{ik}$ og $a^t_{jk} = a_{kj}$ bliver

$$c^t_{ji} = \sum_{k=1}^{p} b^t_{ki} \cdot a^t_{jk} = \sum_{k=1}^{p} a^t_{jk} \cdot b^t_{ki} .$$

Ved <u>diagonalen</u> i en kvadrisk matrix skal forstås de elementer, som har samme række- og søjle-nummer. Er $\underline{D}$ en matrix, hvor alle elementer uden for diagonalen er 0, dvs.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j$$

da kaldes $\underline{D}$ en diagonalmatrix.

Er specielt alle elementer i diagonalen "1"-taller, kaldes matricen en enhedsmatrix og benævnes $\underline{E}$. Det kan let eftervises, at for alle $\underline{A}$ gælder

$$\underline{E}\,\underline{A} = \underline{A} \quad \text{og} \quad \underline{A}\,\underline{E} = \underline{A} \;,$$

og alle matricer $\underline{E}$, som opfylder disse betingelser, kaldes enhedsmatricer.

Hvis der til en kvadratisk matrix $\underline{A}$ findes en matrix $\underline{A}'$, således at

$$\underline{AA}' = \underline{E} \quad \text{og} \quad \underline{A}'\underline{A} = \underline{E}$$

siges $\underline{A}$ at være invertibel. Vi ser først, at der kun findes én matrix $\underline{A}'$, som opfylder betingelsen. Er nemlig både $\underline{A}'$ og $\underline{A}''$ matricer, som opfylder

$$\underline{AA}' = \underline{A}'\underline{A} = \underline{E} \quad \text{og} \quad \underline{AA}'' = \underline{A}''\underline{A} = \underline{E} \;,$$

kan vi slutte, at dels er

$$\underline{A}''\underline{AA}' = \underline{A}''(\underline{AA}') = \underline{A}''\underline{E} = \underline{A}'' \;,$$

og dels er

$$\underline{A}''\underline{AA}' = (\underline{A}''\underline{A})\underline{A}' = \underline{EA}' = \underline{A}'$$

dvs. de to matricer er identiske. Denne entydigt fastlagte matrix kaldes den inverse til $\underline{A}$ og betegnes $\underline{A}^{-1}$.

Da $\underline{A}$ er invertibel, vil $\underline{A}^{-1}$ opfylde

$$\underline{AA}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$$

og derfor vil også $\underline{A}^{-1}$ være invertibel med den inverse matrix

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}.$$

Da tillige

$$(\underline{A}^{-1})^t\underline{A}^t = (\underline{AA}^{-1})^t = \underline{E}^t = \underline{E}$$

$$\underline{A}^t(\underline{A}^{-1})^t = (\underline{A}^{-1}\underline{A})^t = \underline{E}^t = \underline{E}$$

bliver

$$(\underline{A}^t)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^t$$

Lidt mere interessant er, at da

$$(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1})\underline{AB} = \underline{B}^{-1}\underline{EB} = \underline{B}^{-1}\underline{B} = \underline{E}$$

$$\underline{AB}(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}) = \underline{AEA}^{-1} = \underline{AA}^{-1} = \underline{E}$$

fås, at

$$(\underline{AB})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$$

Er F igen en lineær afbildning, som er fremstillet af den kvadratiske matrix $\underline{A}$, skal vi vise, at <u>F er injektiv, hvis og kun hvis A er invertibel, og A^{-1} er matrix for den inverse afbildning</u>.

"⇒" Den inverse afbildning F^{-1} er givet ved matricen $\underline{B}$.
Da er den sammensatte afbildning $F^{-1}oF$ givet ved $\underline{BA}$, og da $(F^{-1}oF)(\underline{u}) = \underline{u}$ for alle $\underline{u} \in L$, fås, at

$$\underline{BA} = \underline{E}$$

Da F er bijektiv (da rummenes dimension er den samme) er også $(F \circ F^{-1})(\underline{v}) = \underline{v}$ for alle $\underline{v} \in M$, eller

$$\underline{AB} = \underline{E}$$

Dette viser, at $\underline{A}$ er invertibel, og at $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$. Derfor er matricen for F^{-1} netop $\underline{A}^{-1}$.

"⇐" Vi skal vise, at $F(\underline{u}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$ eller i matrixsprog
$\underline{Ax} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

Da $\underline{A}$ er invertibel, fås nu, at $\underline{Ax} = \underline{0} \Rightarrow \underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{0} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \underline{Ex} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}.$$

dvs. F er altså injektiv.

Har vi den afbildning, som beskriver basisbytte i rummet L, så vi, at dette på matrixform var

$$\underline{x} = \underline{S}\,\hat{\underline{x}}$$

hvor søjlerne i $\underline{S}$ var de "nye" basisvektorer, udtrykt ved de "gamle". Havde vi valgt at udtrykke de "gamle" ved de "nye", havde vi fået en matrixligning af formen

$$\hat{\underline{x}} = \underline{T}\,\underline{x}.$$

Af disse to ligninger får vi imidlertid, at

$$\underline{\hat{x}} = \underline{T}\ \underline{S}\ \underline{\hat{x}} \text{ og } \underline{x} = \underline{S}\ \underline{T}\ \underline{x}$$

for alle $\underline{\hat{x}}$ og $\underline{x}$ dvs. at

$$\underline{T}\ \underline{S} = \underline{E} \quad \text{og} \quad \underline{S}\ \underline{T} = \underline{E}$$

dvs. $\underline{S}$ er invertibel og $\underline{S}^{-1} = \underline{T}$ dvs. <u>matricen for et koordinatskift er invertibel</u>.

Vi kan nu afgøre, hvordan matricen $\underline{A}$ for en lineær afbildning F transformeres ved et basisskift fra $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ til $\{\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \ldots, \underline{\hat{e}}_n\}$ i L.

Vi forudsætter, at $F : L \to L$, og at F i den "gamle" basis har matricen $\underline{A}$ og i den "nye" matricen $\underline{\hat{A}}$.

Er afbildningen beskrevet ved

(*) $$\underline{y} = \underline{A}\ \underline{x}$$

i de "gamle" koordinater, vil den i de "nye" koordinater være

(Δ) $$\underline{\hat{y}} = \underline{\hat{A}}\ \underline{\hat{x}}$$

Da koordinat-transformationen er givet ved

$$\underline{x} = \underline{S}\ \underline{\hat{x}} \quad \text{og} \quad \underline{y} = \underline{S}\ \underline{\hat{y}}$$

får vi af (*) at

$$\underline{S}\ \underline{\hat{y}} = \underline{A}\ \underline{S}\ \underline{\hat{x}}$$

og da $\underline{S}$ er invertibel, fås

$$\underline{\hat{y}} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}\ \underline{\hat{x}}$$

Sammenholdt med (Δ) bliver altså

$$\underline{\underline{\hat{A}} = \underline{S}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{S}}\ .$$

Vores videre arbejde skal nu være at undersøge, om vi kan vælge vores basisskift, dvs. matricen $\underline{S}$ således, at $\underline{S}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{S}$ bliver en diagonalmatrix.

1.7 Determinant.

Som vi så på side 12, vil $\{F(u_1),\ldots,F(u_n)\}$ være en basis i $V(F)$ netop når F er injektiv. Oversætter vi det til matrixform, betyder det, at søjlerne i matricen $\underline{A}$ (svarende til F) vil være lineært uafhængige, da jo elementerne i en basis netop er lineært uafhængige. Dvs. vi har nu, at
F er injektiv $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ er invertibel $\Leftrightarrow$ søjlerne i $\underline{A}$ er lineært uafhængige. Man kan imidlertid indføre et regneudtryk, kaldet <u>determinanten</u> af $\underline{A}$ - det $\underline{A}$, som opfylder egenskaberne, af

$$\det\underline{A} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{A} \text{ er invertibel.}$$

Selve beviset kræver en del forberedelse og findes i bilag 1, når $\underline{A}$ er 3×3. Regnereglerne for matricer af 2×2 og 3×3 vil blive introduceret her. Med

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{er det } \underline{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Hvis

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

er

$$\det\underline{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ud fra definitionerne kan man se, at hvert led i udtrykket indeholder et og kun et element fra hver række og fra hver søjle.

Gennem direkte udregning ses, at

(1) $\det\underline{A}^t = \det\underline{A}$

så derfor kan alle resultater i det følgende, som vises for søjler i $\underline{A}$, vises analogt for række i $\underline{A}$. Vi skriver for kortheds skyld

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$$

hvor $\underline{a}_1$ står for første søjle i $\underline{A}$ osv.

Man kan nu vise, at

(2) $\det(\underline{a}_1' + \underline{a}_1'', \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \det(\underline{a}_1', \underline{a}_2, \underline{a}_3) + \det(\underline{a}_1'', \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

(3) $\det(\lambda\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \lambda\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

(4) $\det(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3) = -\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

(5) $\det(\underline{a}_2, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \det(0, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = 0$

(6) $\det(\underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_2, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

Videre kan man vise regnereglen (prøv selv ved udregning)

$$\det\underline{A} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

dvs. at en determinant kan "udvikles efter" en søjle (eller række). Indfører vi underdeterminanten D_{jk} - som den determinant, der fremkommer af $\det\underline{A}$ ved at slette j'te række og k'te søjle - kan man udtrykke regnereglen kort som

(7) $$\det\underline{A} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+k} a_{jk} D_{jk} \;; \qquad k = 1,2,3$$

eller

(7') $$\det\underline{A}^t = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{j+k} a_{jk} D_{jk} \;; \qquad j = 1,2,3$$

Eksempel: Ved brug af regnereglerne kan vi udregne determinanten af

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$

Af (6) anvendt på 2. og 3. række med $\lambda = -1$ fås

$$\det\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 0 & z-y & z^2-y^2 \end{vmatrix}$$

og anvendes (6) igen på 1. og 2. række med $\lambda = -1$ fås

$$\det\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-y & z^2-y^2 \end{vmatrix}$$

Ifølge (3) kan vi trække en fælles faktor $y-x$ i 2.række og den fælles faktor $z-y$ i 3. række ud, dvs.

$$\det\underline{A} = (y-x)(z-y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+y \end{vmatrix}$$

Til slut kan vi udvikle efter 1. søjle, hvor kun $a_{11} \neq 0$, dvs.

$$\det\underline{A} = (y-x)(z-y)\ [z+y)-(y+x)]$$
$$= (y-x)(z-y)(z-x)$$

Alle regnereglerne (1) - (7) kan generaliseres til determinanter af $n \times n$ - matricer. Derimod er selve definition af $n \times n$ determinanter mere kompliceret, men dette vil ligge uden for rammerne af dette kursus.

Man kan imidlertid vise, at en lineær afbildning $F : L \sim L$, som i en given basis modsvarer matricen $\underline{A}$, vil have skalaændringen $\det\underline{A}$, dvs. "rumfanget" af enhver "kasse" i L vil ændres med faktoren $\det\underline{A}$ ved afbildningen F. I bilag 1 kan man se et bevis for dette for $n = 3$. Har man derfor den sammensatte afbildning $G \circ F : L \sim L$ med den tilhørende matrix $\underline{BA}$, så vil $G \circ F$ have skalaændringen $\det(\underline{BA})$. Da denne ændring imidlertid kan opnås i to tempi gennem afbildningerne $F : L \sim L$ - med skalaændring $\det\underline{A}$ - og $G : L \sim L$ - med skalaændring $\det\underline{B}$ -, må det gælde, at

$$\det(\underline{B}\underline{A}) = \det\underline{B}\cdot\det\underline{A}$$

er specielt $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$ fås, da $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$, at

$$1 = \det\underline{E} = \det\underline{A}^{-1}\cdot\det\underline{A}$$

eller

$$\det\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{A}}$$

(NB: $\det\underline{A} \neq 0$ netop, når $\underline{A}$ er invertibel, dvs. når $\underline{A}^{-1}$ eksisterer).

Endelig får vi også brug for at udregne determinanten for matricen

$$\hat{\underline{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$$

(jfr. side 22)

Da er

$$\begin{aligned}\det\hat{\underline{A}} &= \det\underline{S}^{-1}\det(\underline{A}\underline{S}) \\ &= \det\underline{S}^{-1}\det\underline{A}\,\det\underline{S} \\ &= \det\underline{A}\end{aligned}$$

da jo $\det\underline{S}^{-1}\cdot\det\underline{S} = 1$

Dette viser - hvad man vel kunne forvente - at den lineære afbildning $F : L \sim L$ vil have samme skalaændring uanset valg af basisvektorer i L.

2. SPEKTRALANALYSE

2.1 Egenvektor og egenværdi.

Sigtet med dette kapitel er at fastlægge de vektorretninger i et vektorrum, som forbliver uændrede ved en lineær afbildning af rummet ind i sig selv. Vælger man dernæst disse vektorer som basisvektorer, vil man se, at den tilhørende matrix bliver meget simpel; hvilket det første eksempel nedenfor netop vil vise. Men først et par definitioner.

Er $F:L \rightsquigarrow L$ en lineær afbildning, er $\underline{u} \neq \underline{o}$ en vektor i L, og er $F(\underline{u})$ parallel med $\underline{u}$ - dvs. at der findes et $\lambda \in R$ således at

$$F(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$$

da kaldes $\underline{u}$ en <u>egenvektor</u> for F og λ kaldes den tilhørende <u>egenværdi</u>.

<u>Øvelse:</u> Vis, at også afbildningen $F^2 = F \circ F$ vil have $\underline{u}$ som egenvektor med egenværdi λ^2. Vis tillige, hvis F er injektiv, at F^{-1} vil have $\underline{u}$ som egenvektor og nu med egenværdi λ^{-1}. Fremsæt en tilsvarende hypotese for afbildningen $F^n (n \in Z)$, og bevis den.

Rummet af egenvektorer med egenværdi λ benævnes L_λ og kaldes <u>egenrummet</u> svarende til λ. Vi skal straks vise, at L_λ er et underrum. Er $\underline{u}, \underline{v} \in L_\lambda$ og $c \in R$, bliver

$$F(\underline{u}+\underline{v}) = F(\underline{u}) + F(\underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v} = \lambda(\underline{u}+\underline{v})$$
$$F(c\underline{u}) = cF(\underline{u}) = c(\lambda\underline{u}) = \lambda(c\underline{u})$$

dvs. $\underline{u}+\underline{v} \in L_\lambda$ og $c\underline{u} \in L_\lambda$, hvilket viser, at L_λ er et underrum.

<u>Eksempel:</u> I R^3 betragter vi en plan π, som indeholder $(0,0,0)$, samt den afbildning $F:R^3 \rightsquigarrow R^3$, som fører enhver vektor over i den, som ligger spejlet i forhold til π.

Enhver vektor i π vil da afbildes i sig selv, og enhver vektor vinkelret på π vil gå over i en vektor af samme længde, men modsat rettet.

Dette viser, at alle vektorer i π er egenvektorer med egenværdi 1. Da π har dimension 2 kan vi vælge to lineært uafhængige vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ så $F(\underline{u}_1) = \underline{u}_1$ og $F(\underline{u}_2) = \underline{u}_2$.

Tilsvarende er alle vektorer vinkelret på π egenvektorer med egenværdi -1, dvs. med $\underline{u}_3 \perp \pi$ er

$$F(\underline{u}_3) = -\underline{u}_3 .$$

Vælger vi $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ som basis i R^3 bliver matricen svarende til F

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Som bekendt vil enhver endelig dimensionel, lineær afbildning $F : L \rightarrow L$ kunne fremstilles af en kvadratisk matrix $\underline{A}$ i en given basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$, hvor søjlerne i $\underline{A}$ netop er billederne af basisvektorerne dvs.

$$F(\underline{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \, \underline{e}_i \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Er nu basisvektorerne egenvektorer for F med egenværdi λ_k, er

$$F(\underline{e}_k) = \lambda_k \, \underline{e}_k$$

dvs. matricen for F bliver da den simple diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vi har således, at en lineær afbildning F fremstilles i given basis ved en diagonalmatrix, hvis og kun hvis basiselementerne er egenvektorer for F, og matricens diagonalelementer er netop de tilhørende egenværdier.

Vi skal nu se på en metode til at finde eventuelle egenværdier og - vektorer for en lineær afbildning. Kender vi den til F

svarende matrix $\underline{A}$ i en given basis, kan det at søge et λ og $\underline{u} \neq \underline{0}$ således at

$$F(\underline{u}) = \lambda\underline{u}$$

oversættes til at finde vektor $\underline{x}$ således at

$$\underline{Ax} = \lambda\underline{x} \qquad ; \quad \underline{x} \neq \underline{0}$$

eller

$$\underline{Ax}-\lambda\underline{x} = \underline{0} \qquad ; \quad \underline{x} \neq \underline{0}$$

eller

(*) $$(\underline{A}-\lambda\underline{E})\underline{x} = \underline{0} \qquad ; \quad \underline{x} \neq \underline{0} \, .$$

Da dette skal være opfyldt af en vektor, som ikke er nulvektoren, kan matricen $\underline{A}-\lambda\underline{E}$ ikke være invertibel - da vil kun $\underline{0}$ afbildes i $\underline{0}$ - derfor må

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0 \, .$$

Er $\underline{A}$ en 2 x 2- eller 3 x 3-matrix, vil man få en 2.-gradsligning i λ:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda+\det\underline{A} = 0$$

eller en 3.- gradsligning i λ:

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-\sigma\cdot\lambda+\det A = 0$$

hvor

$$\begin{aligned}\sigma &= -a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32}\\ &\quad +a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}\\ &= D_{11}+D_{22}+D_{33}\end{aligned}$$

(prøv selv).
Når λ er fundet, kan man finde en tilhørende egenvektor ved at indsætte λ-værdien i (*).

<u>Eksempel:</u> Er matricen for $F : R^2 \to R^2$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{er } \det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

dvs. at $\lambda^2-\lambda-2 = 0$. Således er $\lambda = -1 \vee \lambda = 2$. Indsættes disse værdier i (*) fås for

$\lambda = -1$, at: $\qquad\qquad$ $\lambda = 2$, at:

$$4x_1+2x_2 = 0 \qquad\qquad x_1+2x_2 = 0$$

$$-2x_1- x_2 = 0 \qquad\qquad -2x_1-4x_2 = 0$$

dvs. svarende til

$\lambda = -1$ fås fx vektoren $\underline{u} = (1,-2)$, og til

$\lambda = 2$ fås fx vektoren $\underline{u} = (-2,1)$.

Disse to vektorer kan således vælges som basis i det lineære rum R^2, således at den lineære afbildning F i denne basis har

$$\underline{\hat{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vis også, at

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{S}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. at $\underline{\hat{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$.

I dette eksempel har vi altså vist, at man ved at vælge de to egenvektorer som søjler i $\underline{S}$ kan transformere den til F svarende matrix til en diagonalmatrix. Vores videre arbejde vil bestræbe sig på at undersøge, hvornår dette er muligt.

Indledningsvis vil vi se, at egenværdierne er knyttet til den lineære afbildning, og ikke til den aktuelle repræsentation på matrixform. Dette vil vi vise ved at vise, at

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = \det(\underline{\hat{A}}-\lambda\underline{E}),$$

hvor $\underline{\hat{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$ og $\underline{S}$ er en invertibel matrix. Vi har nemlig, at

$$\underline{\hat{A}}-\lambda\underline{E} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}-\lambda\underline{E} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}-\lambda\underline{S}^{-1}\underline{S}$$
$$= \underline{S}^{-1}(\underline{A}-\lambda\underline{E})\underline{S}$$

og da $\det\underline{S}^{-1}\cdot\det\underline{S} = 1$ fås, at

$$\det(\underline{\hat{A}}-\lambda\underline{E}) = \det\underline{S}^{-1}\det(\underline{A}-\lambda\underline{E})\,\det\underline{S}$$
$$= \det(\underline{A}-\lambda\underline{E}).$$

dvs. de λ'er, som er egenværdier for $\underline{\hat{A}}$, også er egenværdier for $\underline{A}$, og kun de λ'er.

Vi kan videre vise følgende om den lineære afbildning $F : L \to L$, som i en basis har matricen $\underline{A}$: <u>Findes der en basis af egenvektorer til F, og er S den matrix, hvis søjler er koordinaterne til disse egenvektorer, da er matricen</u>

$$\underline{D} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

<u>en diagonalmatrix. Er nu S en invertibel matrix, således at $S^{-1}AS$ er en diagonalmatrix, så er søjlerne i S netop egenvektorer til F.</u>

"⇒" Antager vi nu, at $\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n\}$ er den basis, hvori F fremstilles ved matricen $\underline{A}$, og at $\{\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2,\ldots,\underline{\hat{e}}_n\}$ er en <u>basis af egenvektorer</u> til F, dvs. at

$$F(\underline{\hat{e}}_i) = \lambda_i\underline{\hat{e}}_i \quad ; \qquad i = 1,2,\ldots n$$

Er sammenhængen mellem de to baser fastlagt ved

$$\underline{\hat{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\,\underline{e}_j;\ i = 1,2,\ldots,n$$

har vi fra side 18, at sammenhængen mellem koordinaterne er

$$\underline{u}_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\,\underline{\hat{u}}_j;\ i = 1,2,\ldots,n$$

eller på matrixform

$$\underline{x} = \underline{S}\,\underline{\hat{x}}.$$

Her er som vi så $\underline{S}$ invertibel, og søjlerne i $\underline{S}$ er koordinaterne for $\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2,\ldots,\underline{\hat{e}}_n$ i den "gamle" basis $\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n\}$. Er som før $\underline{\hat{A}}$ matricen for F i $\{\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2,\ldots,\underline{\hat{e}}_n\}$ er igen

$$\underline{\hat{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

og fra side 28 ved vi, at

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"⇐" Er omvendt $\underline{S}^{-1}\underline{AS}$ en diagonalmatrix, og er G den afbildning, som svarer til basisskiftet $\underline{S}$, eksisterer G^{-1}, da S er invertibel. Da kan $\underline{S}^{-1}\underline{AS}$ fremstilles af afbildningen $G^{-1}\circ F\circ G$, og da $\underline{S}^{-1}\underline{AS}$ er en diagonalmatrix, vil

$$(G^{-1}\circ F\circ G)(\underline{e}_k) = \lambda_k\underline{e}_k \qquad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

eller

$$F(G(\underline{e}_k)) = G(\lambda_k\underline{e}_k) = \lambda_k G(\underline{e}_k)$$

dvs. at

$$\hat{\underline{e}}_k = G(\underline{e}_k) \qquad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

vil være egenvektor for F. Heraf ses tillige, at søjlerne i $\underline{S}$ således vil være billederne af $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n$, og disse billeder er netop egenvektorer for F.

Endelig vil vi vise, at <u>for en lineær afbildning $F : L \to L$ med p forskellige egenværdier</u> $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ <u>vil de tilhørende egenvektorer være lineært uafhængige</u>.

Vi vil vise sætningen ved induktion. Er $\underline{v}_k$ en egenvektor svarende til λ_k, dvs.

$$F(\underline{v}_k) = \lambda_k\underline{v}_k \qquad k = 1,2,\ldots,p$$

er sætningen opfyldt for $p = 1$, da $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$. Vi antager nu, at sætningen gælder for $p = j-1$, dvs. at linearkombinationen

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_{j-1}\underline{v}_{j-1} = \underline{0}$$

giver, at

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0,$$

og vi skal vise, at sætningen gælder for $p = j$.

Vi ser altså på linearkombinationen

(*) $$\beta_1\underline{v}_1+\beta_2\underline{v}_2+\ldots+\beta_j\underline{v}_j = \underline{0}$$

Lader vi F virke på (*) får vi, at

(∇) $$\beta_1\lambda_1\underline{v}_1+\beta_2\lambda_2\underline{v}_2+\ldots+\beta_j\lambda_j\underline{v}_j = \underline{0}$$

og ganger vi (*) med λ_j får vi

(□) $$\beta_1\lambda_j\underline{v}_1+\beta_2\lambda_j\underline{v}_2+\ldots+\beta_j\lambda_j\underline{v}_j = \underline{0}$$

Subtraheres (∇) fra (□) får vi nu

$$\beta_1(\lambda_j-\lambda_1)\underline{v}_1+\beta_2(\lambda_j-\lambda_2)\underline{v}_2+\ldots+\beta_{j-1}(\lambda_j-\lambda_{j-1})\underline{v}_{j-1} = \underline{0}$$

men da $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{j-1}\}$ var lineært uafhængige, kan vi slutte, at alle koefficienterne

$$\beta_i(\lambda_j-\lambda_i) = 0 \qquad ; \quad i = 1,2,\ldots,j-1$$

men da

$$\lambda_j \neq \lambda_i \qquad ; \quad i = 1,2,\ldots,j-1$$

må

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{j-1} = 0$$

men da $\underline{v}_j \neq \underline{0}$ kan vi af (*) slutte, at også $\beta_j = 0$, dvs. $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{j-1},\underline{v}_j\}$ er lineært uafhængige, således som det skulle vises.

Heraf kan vi direkte slutte, at <u>hvis dim $L = n$ og hvis den lineære afbildning $F : L \to L$ har netop n forskellige egenværdier, findes en basis for L af egenvektorer for F.</u>

Er nemlig $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ et sæt af egenvektorer til de n forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ har vi netop vist, at sættet er lineært uafhængigt; men da sættet indeholder n elementer, kan sættet vælges som basis for L.

2.2 Diagonalisering af symmetriske matricer.

Ovenstående sætning siger (desværre) intet om, hvad der sker, hvis vi har færre end n egenværdi, fordi ligningen $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$ enten har "komplekse" rødder eller nogle rødder er rod "flere gange" i ligningen. Det kan imidlertid vises, at <u>hvis A er symmetrisk</u> (dvs. at $\underline{A}^t = \underline{A}$), <u>så vil alle egenværdier for F være reelle, og der kan findes en basis af egenvektorer for F</u>, dvs. matricen $\underline{S}$ kan altid vælges således, at

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

er en diagonalmatrix.

Vi kan tilmed vise, at matricen $\underline{S}$ kan vælges således, at $\underline{S}^{-1} = \underline{S}^t$, hvilket medfører, at

$$\det\underline{S} = \pm 1$$

Er nemlig $\underline{S}^{-1} = \underline{S}^t$, er $\underline{S}^t\underline{S} = \underline{E}$, og da $\det\underline{S}^t = \det\underline{S}$ bliver

$$(\det\underline{S})^2 = 1$$

(Dette vil vi dog ikke forfølge yderligere).

<u>Eksempel:</u> Er matricen for $F : R^3 \sim R^3$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi, at $\underline{A}$ er symmetrisk, og ifølge sætningen skal $\underline{A}$ kunne diagonaliseres. Af $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$ fås, at

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda+2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

dvs. at $\lambda = -1$ er dobbeltrod og $\lambda = 2$ er enkeltrod. Skal vi nu finde egenvektorerne svarende til egenværdierne, skal vi indsætte den aktuelle λ-værdi i

$$(\underline{A}-\lambda\underline{E})\underline{x} = 0$$

der for $\lambda = -1$ netop giver, at

$$x_1+x_2+x_3 = 0$$

Denne ligning beskriver en plan gennem $(0,0,0)$ med normalvektoren $(1,1,1)$. Da en sådan plan udspændes af to lineært uafhængige vektorer i planen, kan vi selv vælge de to vektorer, der skal optræde som søjler i $\underline{S}$.

Til bestemmelse af egenvektoren svarende til $\lambda = 2$ får vi de to ligninger

$$-2x_1+x_2+x_3 = 0$$

$$x_1-2x_2+x_3 = 0$$

der giver en egenvektor parallel med $\underline{x} = (1,1,1)$. Nu vil matricen $\underline{S}$ fx. være

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og da bliver

$$\underline{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved udregning kan man nu se, at

$$\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(prøv selv at regne efter).

2.3 Kan ikke-symmetriske matricer diagonaliseres?

Hvis $\underline{A}$ ikke længere er symmetrisk, men alligevel har n forskellige egenværdier, kan vi, ifølge sætningen i afsnit 2.1, fortsat fremstille en basis af egenvektorer til $\underline{A}$.

Er en egenværdi imidlertid multipel rod i polynomiet $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$ kan vi ikke længere være sikker på, at der til denne egenværdi findes egenvektorer "nok". Dette problem behandles om lidt. Er A ikke symmetrisk, kan der imidlertid også let opstå det problem, at der kommer komplekse rødder i polynomiet. Er fx.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi af $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$, at

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1 = 0$$

dvs. at egenværdierne er i og $-i$.

Af $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

får vi, at $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

bliver de tilhørende egenvektorer.

Da matricen $\underline{A}$ kun indeholder reelle tal, kan man vise, at hvis $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$ indeholder komplekse rødder, da vil disse rødder være parvis konjugerede; hvilket også regneeksemplet viste.

Tilmed vil også tilhørende egenvektorer være konjugerede. Dvs. er $\alpha + i\beta$ egenværdi, vil også $\alpha - i\beta$ være egenværdi, og er $\underline{v} = \underline{v}_1 + i\underline{v}_2$ egenvektor svarende til $\alpha + i\beta$, vil $\underline{v} = \underline{v}_1 - i\underline{v}_2$ være egenvektor svarende til $\alpha - i\beta$.
(Vi vil i kap.5 se, at vi på denne baggrund alligevel kan opskrive den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\underline{x}' = \underline{Ax}$$

udelukkende af reelle funktioner, selv om $\underline{A}$ har komplekse egenværdier og egenvektorer).

Vi vil nu illustrere, hvad der kan ske, når $\underline{A}$ har færre end n forskellige egenværdier. Som eksempel ser vi på matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Her er $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = -(\lambda-1)^3 = 0$ (prøv selv!)
Dvs. $\lambda=1$ er den eneste egenværdi for $\underline{A}$.
Af $(\underline{A}-\underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ får vi ligningerne

$$-x_3 = 0$$

$$x_1+x_2 = 0$$

$$x_1+x_2-x_3 = 0$$

der giver den eneste egenvektor $\underline{v}^t = (1,-1,0)$. Dvs. vi kan ikke fremstille en basis af egenvektorer for $\underline{A}$. Den metode vi da kan benytte til at fremstille en ny basis for R^3 er følgende.

Er $\underline{v}$ en egenvektor for $\underline{A}$ svarende til egenværdien λ, da vil vi finde en vektor $\underline{v}_1$ således, at

(*1) $$(\underline{A}-\lambda\underline{E})\underline{v}_1 = \underline{v} \, .$$

Har man behov for flere basisvektorer (som her fx. tre ialt), kan man dernæst finde en vektor $\underline{v}_2$ således, at

(*2) $$(\underline{A}-\lambda\underline{E})\underline{v}_2 = \underline{v}_1$$

osv. indtil vi har lige så mange lineært uafhængige vektorer, som det antal gange λ er rod i polynomiet $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$. Spørgsmålet er så, hvordan vil

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

komme til at se ud, når vi har valgt søjlerne i $\underline{S}$ efter denne metode? For at besvare spørgsmålet vil vi betragte den lineære afbildning $F : R^3 \sim R^3$, der er fastlagt ved matricen $\underline{A}$ i en given basis. Vi fandt, at $\underline{v}$ var egenvektor svarende til egenværdien $\lambda = 1$ dvs., at

(Δ) $$F(\underline{v}) = \lambda\underline{v}.$$

Videre valgte vi $\underline{v}_1$, således at (*1) gjaldt, dvs. at

$$F(\underline{v}_1)-\lambda\underline{v}_1 = \underline{v}$$

eller

(Δ1) $$F(\underline{v}_1)=\lambda\underline{v}_1 + \underline{v}$$

Tilsvarende valgte vi $\underline{v}_2$ således, at (*2) var opfyldt, dvs. at

$$F(\underline{v}_2)-\lambda\underline{v}_2 = \underline{v}_1$$

eller

(Δ2) $$F(\underline{v}_2)=\lambda\underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

Hvis vi vælger $\{\underline{v},\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ som basis i R^3, kan vi af (Δ), (Δ1) og (Δ2) fastlægge matricen for F i denne basis, nemlig

$$\hat{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vi vil nu i det aktuelle eksempel godtgøre, at man vil finde den rigtige matrix.

Benytter vi den skitserede metode til at frembringe to ekstra vektorer, får vi nu svarende til (*1) ligningssystemet

$$-x_3 = 1$$

$$x_1+x_2 = -1$$

$$x_1+x_2-x_3 = 0$$

hvor $x_3 = -1$, mens $x_1+x_2 = -1$ giver en frihed i bestemmelsen af x_1 og x_2 fx. er $\underline{v}_1^t = (-1,0,-1)$.
Af (*2) kan vi herefter opstille ligningssystemet

$$-x_3 = -1$$

$$x_1+x_2 = 0$$

$$x_1+x_2-x_3 = -1$$

hvor nu $x_3 = 1$ og $x_1+x_2 = 0$ dvs. vi fx har, at $\underline{v}_2^t = (0,0,1)$.
Vi kan altså vælge vores matrix $\underline{S}$ for basisskiftet som

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor $\det\underline{S} = -1$. Videre bliver

$$\underline{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu udregne (prøv selv!), at

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvilket altså stemmer med, hvad vi kunne forvente. Der står et 1-tal over egenværdien i diagonalen netop i de søjler, hvor $\underline{S}$ ikke har en egenvektor.

Det generelle resultat er, at $\underline{S}^{-1}\underline{AS}$ i diagonalen vil indeholde hver egenværdi netop så mange gange, som den er rod i $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$, og placeres de tilhørende egenvektorer på de tilsvarende pladser i $\underline{S}$ forfra, vil der stå et 1-tal på pladser over diagonalen i $\underline{S}^{-1}\underline{AS}$ præcis i de søjler, hvor der i $\underline{S}$ ikke står egenvektorer. Disse søjler skal være udregnet som antydet i (*1) og (*2) osv. på side 37.

Eksempel: Vi har en matrix givet ved

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Af $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = -(1+\lambda)^3 = 0$ ses, at $\lambda = -1$ er rod tre gange. Derimod giver $(\underline{A}-(-1)\underline{E})\underline{x} = 0$ ligningen (gentaget tre gange)

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

der geometrisk er en plan gennem $(0,0,0)$, og den kan da udspændes af netop to egenvektorer

fx $$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Af $(\underline{A}-(-1)\underline{E})\underline{v}_1 = \underline{v}$ får vi ligningen

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

(gentaget tre gange), der fx er opfyldt af

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(PS.: Havde vi benyttet $\underline{u}$ i stedet for $\underline{v}$, kunne vi ikke finde et $\underline{v}_1$). Vælger vi da matricen for basisskiftet som

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(prøv selv, fx ved at vise, at $\underline{S}\cdot(\underline{S}^{-1}\underline{AS}) = \underline{AS}$).

3 KOMPLEKSE TAL OG FUNKTIONER

3.1 $(M_2(R),+,\cdot)$ er et legeme.

Da vi i det foregående har indført matricer samt addition og multiplikation af matricer, vil vi arbejde lidt videre med dem. Vi skal specielt se på de 2×2-matricer, som har den enkle form

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \quad a,b \in R .$$

Denne mængde af matricer over de reelle tal vil vi betegne $M_2(R)$.

Sætter vi nu, at

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \qquad \underline{Q} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

og er $\lambda \in R$, får vi, af regnereglerne for matricer, at

$$\underline{P} + \underline{Q} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} \cdot \underline{Q} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\lambda\underline{P} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -(\lambda b) & \lambda a \end{pmatrix}$$

Dette viser, at <u>vi ved sædvanlig matrixaddition og -multiplikation samt ved multiplikation med tal forbliver inden for $M_2(R)$.</u>

Endvidere kan vi bemærke, at

$$\det \underline{P} = a^2 + b^2$$

<u>hvilket giver, at $\det\underline{P} = 0$ hvis og kun hvis $\underline{P} = \underline{0}$</u> (0-matricen).

For almindelige 2×2-matricer så vi endvidere, at multiplikationen ikke var kommutativ $(\underline{A}\cdot\underline{B} \neq \underline{B}\cdot\underline{A})$, men ved udregning - se fx på side 17 - ser vi, at i $M_2(R)$ gælder, at

$$\underline{P} \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{P}$$

dvs., inden for $M_2(R)$ er <u>matrixmultiplikation kommutativ</u>.

I det følgende vil vi vise, at $M_2(R)$ med såvel addition som multiplikation er kommutative grupper, samt at addition og multiplikation opfylder de distributive love - altså at $(M_2(R),+,\cdot)$ er et legeme. Endelig skal vi se, at $(M_2(R),+,R)$ er et vektorrum.

<u>Addition</u>

Benyttes $\underline{P}$ og $\underline{Q}$ som før, og er

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

ses af

$$(\underline{P} + \underline{Q}) + \underline{R} = \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -(b+d+f) & a+c+e \end{pmatrix} = \underline{P} + (\underline{Q} + \underline{R})$$

at addition er <u>associativ</u>.

Videre giver $\underline{P} + \underline{0} = \underline{P}$

og $\underline{P} + (-\underline{P}) = \underline{P} - \underline{P} = \underline{0}$

at $\underline{0}$ er neutralt element, og at ethvert element, $\underline{P}$ netop har ét inverst element, $-\underline{P}$. Da tillige

$$\underline{P} + \underline{Q} = \underline{Q} + \underline{P}$$

har vi, at

<u>$(M_2(R),+)$ er en kommutativ gruppe</u>.

<u>Multiplikation</u>

Af identiterne

$$(\underline{P}\cdot\underline{Q})\cdot\underline{R} = \begin{pmatrix} (ac-bd)e-(ad+bc)f & (ac-bd)f+(ad+bc)e \\ -(ad+bc)e-(ac-bd)f & -(ad+bc)f+(ac-bd)e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(ce-df)-b(de+cf) & a(de+cf)+b(ce-df) \\ -b(ce-df)-a(de+cf) & -b(de+cf)+a(ce-df) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{P}\cdot(\underline{Q}\cdot\underline{R})$$

aflæses at multiplikationen er associativ. Videre giver

$$\underline{P}\cdot\underline{E} = \underline{P}$$

at enhedsmatricen er neutralt element, og når vi skal fastlægge $\underline{P}^{-1}$, dvs. det inverse element til $\underline{P}$, fås af

$$\underline{P} \cdot \underline{Q} = \underline{E},$$

at

$$ac-bd = 1$$
$$ad+bc = 0$$

Når $a \neq 0 \vee b \neq 0$ dvs. når $\underline{P} \neq \underline{O}$ fås at

$$c = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{og} \quad d = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

dvs.

$$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{P}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\underline{P}} \underline{P}^t$$

hvor jo $\underline{P}^t$ betyder den af $\underline{P}$ transponerede matrix. Således har altså ethvert element $\underline{P} \neq \underline{O}$ i $M_2(R)$ netop ét inverst element. Da vi allerede i indledningen så, at $\underline{P} \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{P}$ er alt i alt

<u>$(M_2(R)/\{\underline{O}\}, \cdot)$ en kommutativ gruppe.</u>

<u>De distributive love.</u>

Da nu

$$(\underline{P} + \underline{Q}) \cdot \underline{R} = \begin{pmatrix} (a+c)e-(b+d)f & (a+c)f+(b+d)e \\ -(b+d)e-(a+c)f & -(b+d)f+(a+c)e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae-bd & af+be \\ -(be+af) & -bd+ae \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ce-df & cf+de \\ -(de+cf) & -df+ce \end{pmatrix}$$

$$= \underline{P} \cdot \underline{R} + \underline{Q} \cdot \underline{R} ,$$

og da såvel + som · er kommutative, fås tillige, at

$$\underline{R} \cdot (\underline{P} + \underline{Q}) = \underline{R} \cdot \underline{P} + \underline{R} \cdot \underline{Q}$$

dvs. de distributive love gælder og dermed er

<u>$(M_2(R), +, \cdot)$ et legeme.</u>

3.2 $(M_2(R),+,R)$ er et vektorrum af dimension 2.

Som vi så i indledningen, var addition og multiplikation med tal operationer inden for $M_2(R)$, og tillige så vi, at $(M_2(R),+)$ var en kommutativ gruppe. Da der endelig for $\lambda, \mu \in R$ og $\underline{P},\underline{Q} \in M_2(R)$ gælder, at

$$\lambda(\underline{P} + \underline{Q}) = \lambda\underline{P} + \lambda\underline{Q} \quad ; \quad 1\underline{P} = \underline{P}$$

$$(\lambda + \mu)\underline{P} = \lambda\underline{P} + \mu\,\underline{P} \quad ; \quad (\lambda\cdot\mu)\underline{P} = \lambda\cdot(\mu\,\underline{P})$$

bliver

$$\underline{(M_2(R),\ +\ ,\ R) \quad \text{et vektorrum}}$$

En vilkårlig matrix $\underline{P}$ kan skrives

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & o \\ o & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & b \\ -b & o \end{pmatrix} = a\underline{E} + b\underline{J}$$

hvor

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs. sættet $\{\underline{E},\underline{J}\}$ vil udspænde hele $M_2(R)$ dvs.

$$\underline{\dim M_2(R) = 2}\ .$$

Om matricen $\underline{J}$ gælder specielt, at

$$\underline{J}^2 = \begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & o \\ o & -1 \end{pmatrix} = -\underline{E}$$

Da R^2 har dimensionen 2 findes som bekendt en bijektiv lineær afbildning (en isomorfi) fra $M_2(R)$ på R^2 (og derfor også omvendt). Vi vælger at fastlægge afbildningen ved

$$F(\underline{E}) = (1,o) \quad \text{og} \quad F(\underline{J}) = (o,1)\ .$$

Da $\{\underline{E},\underline{J}\}$ er en basis i $M_2(R)$, og da $\{(1,o),(o,1)\}$ kan vælges som basis i R^2, bliver F klart injektiv, og derfor også bijektiv. Da F er forudsat lineær, bliver

$$F(\underline{P}) = F(a\underline{E} + b\underline{J}) = aF(\underline{E}) + bF(\underline{J})$$
$$= a(1,o) + b(o,1) = (a,b)$$

Ved F overføres matrixaddition og -multiplikation til en addition og en multiplikation i R^2 ved

$$F(\underline{P}) + F(\underline{Q}) = F(\underline{P} + \underline{Q})$$
$$F(\underline{P}) \circ F(\underline{Q}) = F(\underline{P} \cdot \underline{Q})$$

og derfor bliver

$$(a,b) + (c,d) = F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}\right)$$

$$= (a+c,\ b+d)$$

$$(a,b) \circ (c,d) = F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot F\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\right)$$

$$= (ac-bd,\ ad+bc)$$

Når R^2 er forsynet med denne multiplikation, betegnes den med C - den komplekse plan. Sættes for korthedS skyld

$$1 = (1,o) \quad \text{og} \quad i = (o,1)$$

bliver

$$(a,b) = a(1,o) + b(o,1) = a+ib$$

og

$$(a+ib)(c+id) = ac-bd+i(ad+bc).$$

De ting, vi udledte for $M_2(R)$, kan vi nu ved F overføre til C, fx er

$$\frac{1}{a+ib} = (a,b)^{-1} = (F(\underline{P}))^{-1} = \frac{1}{\det \underline{P}}F(\underline{P}^t) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

dvs. at

$$\underline{(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2}$$

videre bliver

$$\underline{i}^2 = F(\underline{J})\cdot F(\underline{J}) = F(\underline{J}^2) = F(-\underline{E}) = \underline{-1}$$

Eksempel: Dette sidste betyder, at man nu har fået svar på, om ligningen $x^2 = -1$ har en løsning. Svaret er altså, at inden for mængden af komplekse tal vil $x^2 = -1$ have to løsninger

$$x = i \lor x = -i$$

(idet $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)^2 \cdot i^2 = -1$).

Skal hele denne udledelse af de komplekse tal være korrekt, skal vi sikre os, at den addition og multiplikation, som vi indfører på R^2 (dvs. på C) rent faktisk stemmer overens med den addition og multiplikation, som vi benytter i de reelle tal. Dette gøres ved, at vi indlejrer R i R^2 ved at definere en afbildning $f : R \rightsquigarrow R^2$ ved

$$f(a) = (a,o)$$

hvor så R og $f(R)$ er isomorfe, og hvor addition og multiplikationen på $f(R)$ stemmer overens med addition og multiplikationen på R.

3.3 Kompleks konjugering og numerisk værdi.

Afbildningen $k : C \rightsquigarrow C$ defineret ved

$$k(a + ib) = a - ib$$

kaldes kompleks konjugering og betegnes med overstregning, sådan at man med $z \in C$ skriver $\bar{z}$ i stedet for $k(z)$.
Bemærk, at hvis $a \in R$ er $\bar{a} = a$.
Geometrisk er konjugering en spejling i den reelle akse.

Sætter vi $z = a + ib \in C$, får vi, at

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

og

$$z - \bar{z} = a + ib - a + ib = i2b.$$

Herved kan vi omvendt se, at

$$a = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ og } b = \frac{i}{2}(\bar{z} - z).$$

Bemærk, at $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

Afbildningen $n : C \rightsquigarrow R$ defineres ved

$$n(a + ib) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Denne afbildning har følgende egenskaber 1) - 4):

1) $\forall\, z \in C : n(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $\forall\, z \in C : n(z) \geqq 0$
3) $\forall\, z_1, z_2 \in C : n(z_1 z_2) = n(z_1)n(z_2)$
4) $\forall\, z_1, z_2 \in C : n(z_1 + z_2) \leqq n(z_1) + n(z_2)$.

Her fås 1) og 2) af definitionen på n, 3) indses af

$$n((a + ib)(c + id)) = n(ac - bd + i(ad + bc)) =$$

$$((ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2))^{\frac{1}{2}} =$$

$$((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))^{\frac{1}{2}} =$$

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} = n(a + ib) \cdot n(c + id).$$

mens 4) indses ved at opfatte $a + ib$ geometrisk og $n(a + ib)$ som "længden" af $a + ib$, herved vil de tre udtryk i uligheden være længden af siderne i en trekant.

Da n således opfylder de samme egenskaber som $|\,|$ for de reelle tal, kaldes funktionen n den numeriske værdi (se iøvrigt også afsnit 4.1).
Er nu $z = a + ib \in C$, vil

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$$

og dermed er

$$n(z) = \sqrt{z\bar{z}}\,.$$

Da der specielt for $x \in R$ fås $\bar{x} = x$, vil $n(x) = \sqrt{x \cdot x} = |x|$, og n vil derfor stemme overens med $|\,|$ på de reelle tal.

$n(x)$ erstattes derfor af $|x|$, altså er

$$\forall\, z = a + ib \in C : |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

<u>Øvelse:</u> Vis, at der for $z \in C \setminus \{0\}$ gælder, at

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{og} \quad |\bar{z}| = |z|.$$

3.4 Produktet af to komplekse tal.

For $z \in C \setminus \{0\}$ sætter vi

$$w = \frac{z}{|z|} \quad \text{dvs.} \quad z = |z|w.$$

hvor altså

$$|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1\,.$$

Ethvert komplekst tal kan således skrives som produkt af et reelt, ikke-negativt tal og et komplekst tal med numerisk værdi 1.

Er nu $z_1 = |z_1|w_1$ og $z_2 = |z_2|w_2$, fås

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 z_2| \cdot w_1 w_2\,.$$

Vi vil her se lidt nøjere på w_1w_2.

Når $w = x + iy$ har $|w| = 1$, er $x^2 + y^2 = 1$, og vi kan da finde et tal $\varphi \in R$, så

$$x = \cos\varphi$$
$$y = \sin\varphi ,$$

hvor φ er entydigt bestemt af (x,y) på nær multiplum af 2π. Vi kan derfor til w_1 og w_2 bestemme φ_1 og φ_2 således, at

$$w_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$$

$$w_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 .$$

Derfor bliver

$$\begin{aligned} w_1w_2 &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\quad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\cos\varphi_1) \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

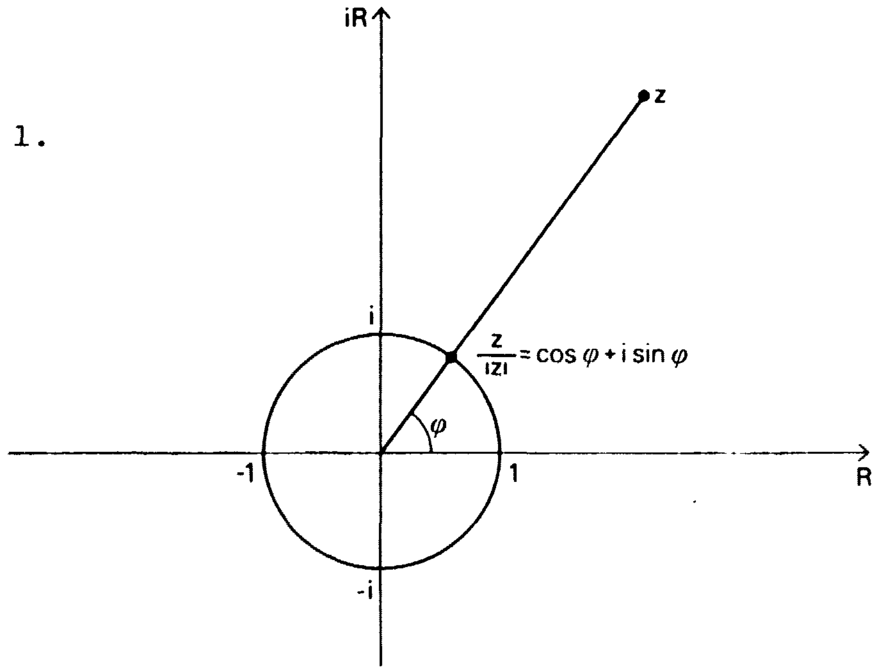
Derfor kan produktet af to vilkårlige komplekse tal

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{og}$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

udregnes til

$$z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

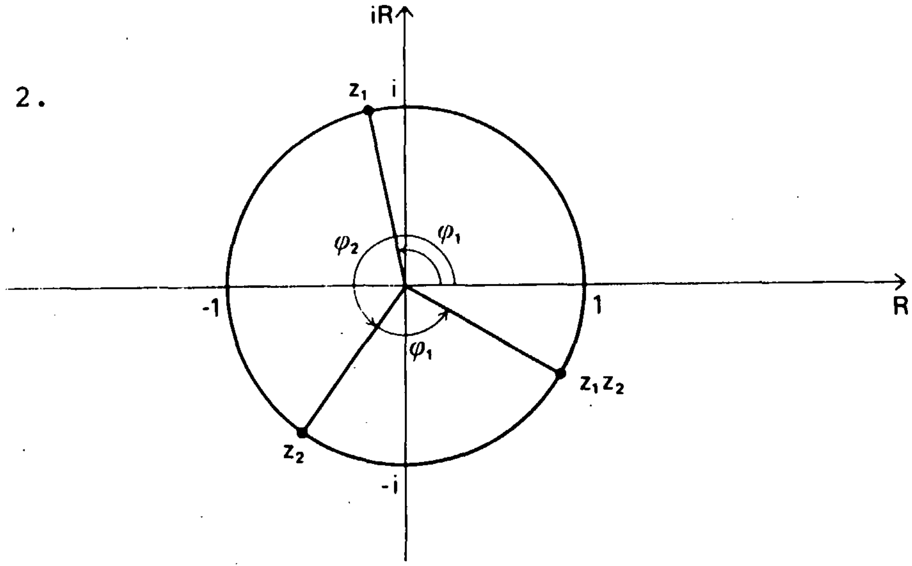
Fig. 1.



Geometrisk kan denne beskrivelse af komplekse tal opfattes sådan, at $\cos\varphi + i\sin\varphi$ er en retningsvektor i z's retning, mens $|z|$ angiver længden af vektoren z, dette fremgår af fig. 1.

Her betegnes $|z|$ modulus af z, mens hvert φ, der er løsning til ligningerne $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, betegnes et argument af z.

Fig. 2.



Vender vi tilbage til formlen for et produkt af to komplekse tal z_1 og z_2 nemlig

$$z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

kan vi se, at produktets modulus er lig produktet af de to tals modulus - dvs. $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ - og at produktets argument φ er sum af de to tals argument - dvs. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Den geometriske tolkning af dette fremgår af fig. 2.

Denne forståelse af produktet af to komplekse tal blev første gang fremsat af Caspar Wessel i bogen: Om Directionens Analytiske Betegning, Kjøbenhavn, 1797.

Såfremt $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vil man se, at

$$\bar{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) .$$

dvs. hvis z har argumentet φ, vil $\bar{z}$ have argumentet $-\varphi$, mens z og $\bar{z}$ har samme modulus, som øvelsen på side 47 viste.

Såfremt $w_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$

og $w_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$.

vil

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

$$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

Dvs. man bestemmer kvotienten mellem to komplekse tal med modulus 1 ved at subtrahere deres argumenter.

Dette viser tillige, at når $|w| = 1$ er

$$w^{-1} = \bar{w} .$$

som også følger af øvelsen på side 47.

<u>Øvelse:</u> Vis, at de Moivres formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

gælder for alle $n \in N$.

3.5 <u>Komplekse funktioner (af en reel variabel).</u>

I det følgende skal vi benytte begrebet grænseværdi (limes) for en følge af komplekse tal. Vi vil derfor vise den tilsyneladende meget rimelige sætning.

Følgen (z_n), $z_n = x_n + iy_n$ er konvergent med grænseværdi $z = x + iy$, hvis og kun hvis (x_n) og (y_n) er konvergente med grænseværdier x henholdsvis y .

Beviset for sætningen er ganske simpelt og bygger i det væsentlige på ulighederne

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x|^2 \\ \\ |y_n - y|^2 \end{array}\right\} \leqq |z_n - z|^2 \leqq |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 .$$

"$\Rightarrow$" Når $z_n \to z$ vil der til $\varepsilon > 0$, findes et $N \in \acute{N}$ således, at $|z_n - z| < \varepsilon$ for $n \geqq N$, men da

$$|x_n - x| \leqq |z_n - z| < \varepsilon$$

$$|y_n - x| \leqq |z_n - z| < \varepsilon .$$

Vil det samme N kunne benyttes for (x_n) og (y_n), og derfor vil

$$x_n \to x \quad \text{og} \quad y_n \to y .$$

"$\Leftarrow$" Når $x_n \to x$ og $y_n \to y$, vil der til $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \acute{N}$ fælles for (x_n) og (y_n) således, at $|x_n - x| < \varepsilon$ og $|y_n - y| < \varepsilon$ for $n \geqq N$.
Da nu

$$|z_n - z| \leqq \sqrt{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \varepsilon \sqrt{2} ,$$

kan vi slutte, at

$$z_n \to z .$$

Det har således mening at tale om grænseværdien for en følge af komplekse tal, hvorfor det vil kunne lade sig gøre at give en definition på kontinuitet og differentiabilitet for funktioner $f : I \sim C$, $I \subseteqq R$, som kaldes komplekse funktioner af en reel variabel. For hvert $t \in I$ kan $f(t) \in C$ skrives som

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) ,$$

hvor $f_1(t) \in R$ er realdelen og $f_2(t) \in R$ er imaginærdelen af $f(t)$. Herved er således defineret to funktioner $f_1, f_2 : I \sim R$.

Vi kan herefter give følgende definitioner:

$f : I \rightsquigarrow C$ siges at være <u>kontinuert</u> i $t_0 \in I$, hvis og kun hvis

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

og

$f : I \rightsquigarrow C$ siges at være <u>differentiabel</u> i $t_0 \in I$, hvis og kun hvis

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

eksisterer. Hvis f er differentiabel, betegner vi denne grænseværdi $f'(t_0)$.

Af den netop beviste sætning kan vi umiddelbart slutte, at såfremt $f = f_1 + if_2$ vil <u>f være kontinuert i t_0, hvis og kun hvis f_1 og f_2 er kontinuerte i t_0, og</u>

<u>f være differentiabel i t_0, hvis og kun hvis f_1 og f_2 er differentiable i t_0.</u>

Vi kan således udvide differentialoperatoren D til også at gælde for komplekse funktioner ved at sætte

$$Df = Df_1 + iDf_2 .$$

Tilsvarende kan vi sige, at en kompleks funktion g er stamfunktion til f, hvis $Dg = f$, og man indser tillige, at $g = g_1 + ig_2$ er stamfunktion til $f = f_1 + if_2$, hvis og kun hvis g_1 er stamfunktion til f_1 og g_2 er stamfunktion til f_2 .

Vi betragter nu differentialligningen

$$(*) \qquad f' - if = 0 .$$

Sætter vi $f = f_1 + if_2$, har vi altså

$$f' = if \quad \text{eller} \quad f_1' + if_2' = -f_2 + if_1 .$$

Betragter vi real- og imaginærdel for sig, får vi to koblede ligninger

$$f_1' = -f_2$$
$$f_2' = f_1$$

Det er klart, at $f_1 = \cos$ og $f_2 = \sin$ i hvert fald vil være løsninger. Dvs. funktionen f med

$$f(t) = \cos t + i\sin t$$

vil være en løsning til (*).

På den anden side ville det være nærliggende at antage, at noget, man kunne kalde en kompleks eksponentialfunktion, var løsning til (*); i det reelle tilfælde ved vi jo, at e^{at} er løsning til ligningen $f' - af = 0$. Lad os derfor definere en funktion $\exp : R \rightsquigarrow C$ ved at

$$\exp(ibt) = \cos bt + i\sin bt.$$

Vi vil nu eftervise, at funktionen exp har de samme egenskaber som den kendte (reelle) eksponentialfunktion, dvs.

1) $(e^{at})' = ae^{at}$

2) $e^{s+t} = e^s \cdot e^t$, $e^{s-t} = e^s : e^t$.

For overskuelighedens skyld sætter vi $b = 1$.

ad 1) Da $\exp(it) = \cos t + i\sin t$ er en løsning til ligningen $f' = if$, må

$$(\exp(it))' = i\exp(it).$$

ad 2) I afsnit 3.4 så vi, at man ganger to komplekse tal med modulus 1 ved at addere argumenterne, men dette giver netop, at

$$\begin{aligned}\exp(is) \cdot \exp(it) &= (\cos s + i\sin s)(\cos t + i\sin t)\\ &= \cos(s+t) + i\sin(s+t)\\ &= \exp(i(s+t)).\end{aligned}$$

og analogt fås for en kvotient

$$\frac{\exp(is)}{\exp(it)} = \frac{\cos s + i\sin s}{\cos t + i\sin t} = \cos(s-t) + i\sin(s-t)$$

$$= \exp(i(s-t)).$$

Vi kalder derfor exp den komplekse eksponentialfunktion og betegner den som den reelle med e.

Betragter vi nu to funktioner f, g, hvor f er løsning til differentialligningen $f' - pf = 0$, og g er løsning til differentialligningen $g' - qg = 0$, med $p, q \in C^0$ defineret på samme interval $I \subseteq R$. Da gælder, at

$$(fg)' = gf' + fg' = g(pf) + f(qg) = (p + q)(fg),$$

dvs. fg vil da være løsning til ligningen

$$\varphi' - (p + q)\varphi = 0 .$$

Skal vi derfor løse differentialligningen

$$\varphi' - (a + ib)\varphi = 0 ,$$

sker det ved at løse ligningerne

$$\varphi - a\varphi = 0 \quad \text{og} \quad \varphi - ib\varphi = 0 ,$$

da vil løsningen til den oprindelige ligning blive produktet af løsningerne til de to sidste ligninger.

Vi får derfor, at den fuldstændige løsning til ligningen

$$(D - (a + ib)D^0)\varphi = 0$$

bliver $\qquad \varphi(t) = ce^{(a+ib)t} \qquad ; c \in C$

eller $\qquad \varphi(t) = ce^{at}(\cos bt + i\sin bt); c \in C .$

4. REELLE FUNKTIONER

4.1 Afstandsmål.

Som man vil vide fra differential og integralregningen for funktioner af én variabel, er den nøje forbundet til grænseværdibegrebet inden for de reelle tal såvel med hensyn til begrebernes formelle definition som med hensyn til de bagved liggende ideer. Skal man også for funktioner af flere reelle variable have et grænseværdibegreb, må man have et afstandsmål, som modsvarer numerisk værdi på "den reelle akse".

Vi ser nu på talrummene R^k, $k\in N$, bestående af alle talsæt $\underline{x} = (x_1,x_2, .. ,x_k)$ af k reelle tal. Fra kapitlet om lineære rum (vektorrum) har man bl.a. at R^k med "addition" og "multiplikation med tal" givet ved

$$\underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1,x_2+y_2, .. ,x_k+y_k)$$

$$\lambda\underline{x} = (\lambda x_1,\lambda x_2, .. ,\lambda x_k)$$

bliver et (reelt) vektorrum. På et sådant rum kan vi definere en norm.

Ved en norm i et reelt vektorrum V skal forstås en afbildning $\|\ \|:V\to R$ fastlagt ved:

(n1) $\|\underline{x}\| \geq 0$ for alle $\underline{x}\in V$, og

$\|\underline{x}\| = 0$ hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{0}$

(n2) $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\|\underline{x}\|$ for alle $\lambda\in R,\underline{x}\in V$

(n3) $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ for alle $\underline{x},\underline{y}\in V$.

Når V er forsynet med en norm kaldes V et normeret vektorrum.

I vektorrummet R kan man umiddelbart se, at $\|x\| = |x|$, og omvendt kan man opfatte normen som en generalisation af begrebet numerisk værdi. Som eksempler på normer i R^k kan nævnes, idet $\underline{x} = (x_1, .. ,x_k)$

$$\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$$

Her kaldes $\| \ \|_1$ for <u>sumnormen</u>, $\| \ \|_2$ den <u>euklidiske norm</u> og $\| \ \|_\infty$ for maksimumsnormen.

Man kan vise, at for alle $p \geq 1$ er der defineret en norm i R^k ved

$$\|\underline{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

kaldet <u>p-normen</u>. For p=1 stemmer den overens med sumnormen og for p=2 med den euklidiske norm, og for hvert fast $\underline{x} \in R^k$ kan man se, at

$$\lim_{p\to\infty} \|\underline{x}\|_p = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$$

hvilket begrunder $\| \ \|_\infty$ for maksimumsnormen.

For $k = 1$ vil alle disse normer være ens. For $k = 2$ og $k = 3$ er den euklidske norm den sædvanlige afstand fra begyndelsespunktet i planen eller rummet, når man indfører sædvanlige retvinklede koordinater og dermed afbilder planen eller rummet bijektivt på R^2 eller R^3.

<u>Eksempel</u> : Når man skal eftervise normbetingelserne (n1)-(n3), er de to første som regel simple at vise. Derimod volder (n3) - kaldet "trekantsuligheden" - som regel noget besvær. Vi vil nu vise (n3) for de tre normer $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ og $\| \ \|_\infty$. Det centrale punkt i beviserne er, at den numeriske værdi opfylder trekantsuligheden, dvs at for alle i=1,2,...,k gælder, at

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

Nu først for <u>sumnormen</u> fås, at

$$\begin{aligned}\|\underline{x}+\underline{y}\|_1 &= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \ldots + |x_k+y_k| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \ldots + |x_k| + |y_k| \\ &= \|\underline{x}\|_1 + \|\underline{y}\|_1\end{aligned}$$

For maximumsnormen antager vi, at

$$\max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_k+y_k|\} = |x_j+y_j|$$

men da

$$|x_j+y_j| \leq |x_j| + |y_j|$$
$$\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_k|\}$$

ses, at

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_\infty + \|\underline{y}\|_\infty.$$

Til slut vil vi for den euklidiske norm vise, at

$$(\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2)^2 \geqq \|\underline{x}+\underline{y}\|_2^2$$

men da normen er positiv, følger trekantsuligheden umiddelbart. Da nu

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2}\right)^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2$$
$$+ 2|x_1||y_1| + 2|x_2||y_2| + \ldots + 2|x_k||y_k| + \text{Rest } (\geqq 0)$$
$$= (|x_1|+|y_1|)^2 + (|x_2|+|y_2|)^2 + \ldots + (|x_k|+|y_k|)^2 + \text{Rest } (\geqq 0)$$
$$\geqq \left(\sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \ldots + (x_k+y_k)^2}\right)^2.$$

Med noget mere regnearbejde kan man også vise at enhver p-norm, $p \geq 1$, vil opfylde trekantsuligheden, men vi vil forbigå det her.

Eksempel: Vælger vi, at $|x_j| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\}$ kan vi ved sammenligning af $\|\underline{x}\|_1$ og $\|\underline{x}\|_\infty$ se, at

$$\|\underline{x}\|_1 = |x_1|+|x_2|+ \ldots +|x_k| \leqq |x_j|+|x_j|+ \ldots +|x_j|$$
$$= k|x_j| = k\|\underline{x}\|_\infty.$$

Videre er

$$\|\underline{x}\|_\infty = |x_j| = \sqrt{|x_j|^2} \leqq \|\underline{x}\|_2.$$

Af $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \leqq (|x_1|+|x_2|+ \ldots +|x_k|)^2$

ses endelig at

$$\|\underline{x}\|_2 \leqq \|\underline{x}\|_1$$

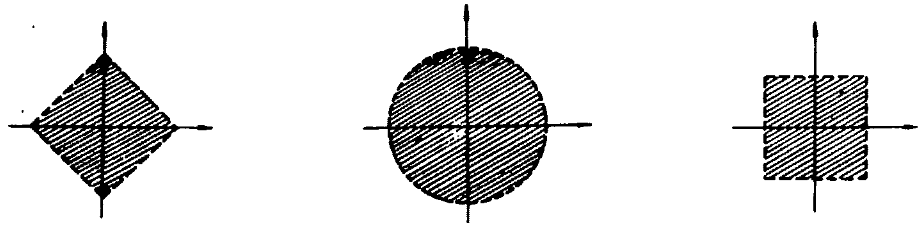
Tilsammen viser det, at

$$\|\underline{x}\|_\infty \leqq \|\underline{x}\|_2 \leqq \|\underline{x}\|_1 \leqq k\|\underline{x}\|_\infty .$$

Lige som vi ud fra den numeriske værdi indfører intervaller som omegne på den reelle akse, kan vi benytte en norm til at indføre omegne i R^k. For ethvert $\underline{a} \in R^k$ og ethvert $r>0$ defineres <u>kuglen $K(\underline{a},r)$ med centrum $\underline{a}$ og radius r ved</u>

$$K(\underline{a},r) = \{\underline{x} \in R^k \mid \|\underline{x}-\underline{a}\|<r\}$$

De følgende figurer viser i tilfældet k=2 - altså planen forsynet med retvinklede koordinater - kuglen $K(\underline{0},r)$ for hver af de tre normer $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ og $\|\ \|_\infty$:



Vi får videre behov for at indføre nøglebegreber, som i tilknytning til den givne norm kan benyttes ved beskrivelse af delmængder i R^k.

Er $\|\ \|$ den valgte norm i R^k, da skal en delmængde A af R^k kaldes <u>begrænset</u>, hvis der findes en kugle $K(\underline{0},r)$, som indeholder A, dvs

$$\exists r>0 : A \subseteq K(\underline{0},r)$$

hvilket i øvrigt er identisk med

$$\exists c>0 \forall \underline{x} \in A : \|\underline{x}\|<c.$$

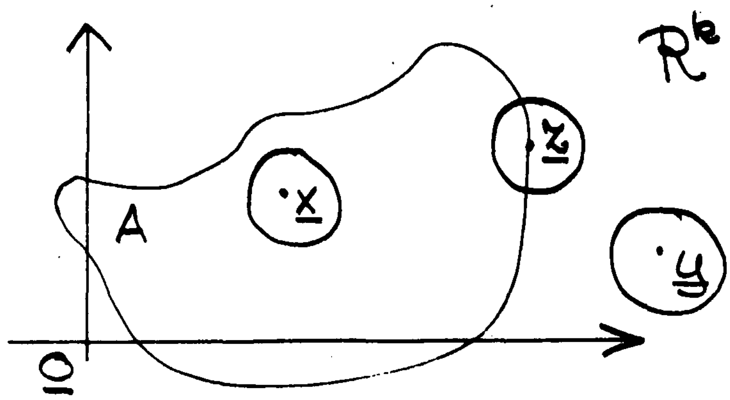
Er A en delmængde af R^k, da kaldes et punkt $\underline{x} \in A$ et <u>indre punkt</u> i A, hvis

$$\exists r>0 : K(\underline{x},r) \subseteq A$$

Tilsvarende er $\underline{y}\in R^k$ et ydre punkt for A, hvis

$$\exists r>0 : K(\underline{y},r)\subseteq R^k \setminus A \quad (=\complement A)$$

altså at $\underline{y}$ er et indre punkt i komplementærmængden $\complement A$.



Et punkt $\underline{z}\in R^k$ siges at være et randpunkt for A, hvis det hverken er et indre eller et ydre punkt for A, dvs, hvis

$$\forall r>0 : A\cap K(\underline{z},r)\neq\emptyset \wedge \complement A\cap K(\underline{z},r)\neq\emptyset.$$

Enhver mængde A giver således anledning til en opsplitning af R^k i tre disjunkte dele

A^{o} : det indre af A

$(\complement A)^{o}$: det ydre af A

∂A : randen af A

hvor fx A^{o} er defineret som mængden af indre punkter i A.
Mængden

$$\bar{A} = A\cup\partial A$$

kaldes afslutningen af A

Et punkt $\underline{x}\in R^k$ kaldes et fortætningspunkt for A, hvis

$$\forall r>0 : A\cap(K(\underline{x},r)\setminus\{\underline{x}\})\neq\emptyset$$

dvs $\underline{x}$ behøver ikke at tilhøre A, men af definitionerne ses, at ethvert fortætningspunkt vil tilhøre $\bar{A}$, og at ethvert indre punkt i $\underline{A}$ er et fortætningspunkt.

En mængde $G\subseteq R^k$ kaldes åben, hvis

$$G=G^{o} \quad \text{eller} \quad G\cap\partial G=\emptyset.$$

En mængde $F\subseteq R^k$ kaldes afsluttet, hvis

$$F=\bar{F} \quad \text{eller} \quad \partial F\subseteq F.$$

Med den terminologi indser man at <u>en mængde $A \in R^k$ er åben (afsluttet) hvis og kun hvis komplementærmængden $\complement A$ er</u> afsluttet (åben).

<u>Eksempel</u>: Vi betragter i R^2 mængden

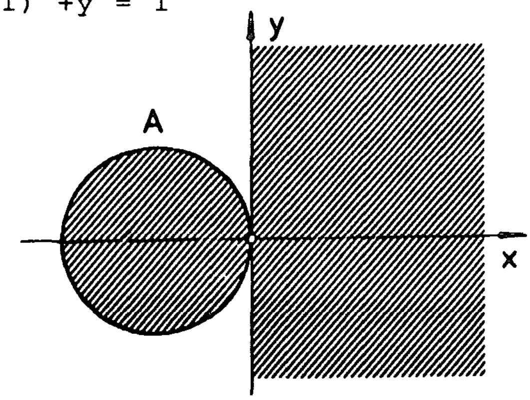
$$A = \{(x,y) \mid x(x^2+2x+y^2) > 0\}$$

Da der for $(x,y) \in A$ må gælde $x \neq 0$ og da

$$x(x^2+2x+y^2) > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 > 1 \quad \text{for } x>0$$

$$x(x^2+2x+y^2) > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 < 1 \quad \text{for } x<0$$

vil A altså bestå af halvplanen $x>0$ og det indre af cirkelskiven med randen $(x+1)^2+y^2 = 1$



Man ser nu at A er åben, og at ∂A netop er randen af cirklen samt y-aksen.

4.2 <u>Funktioner og grænsepunkt.</u>

Vi er nu i stand til at indføre et grænseværdibegreb (og et kontinuitetsbegreb) for funktioner af flere variable.

$\| \ \|$ er en norm i R^k og $\| \ \|^*$ en norm i R^m. En afbildning $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m): A \to R^m, A \subseteq R^k$ kaldes en <u>vektorfunktion</u>, og $f_1, \ldots, f_m$ kaldes dens <u>koordinatfunktioner</u>.

Hvis $m=1$ er $\underline{f}$ en reel funktion (af k variable), og understregningen undlades. Videre vil vi for $m=1$ have, at $\|x\|^* = |x|$.

Vi definerer nu, hvad vi vil forstå ved en grænse"værdi" for $\underline{f}$. <u>Lad $\underline{x}_o \in R^k$ være et fortætningspunkt for $A \subseteq R^k$, og lad $\underline{f}: A \to R^m$. Vi siger da, at $\underline{f}$ går mod $\underline{a}$</u> (eller har grænsepunktet $\underline{a}$) <u>for $\underline{x}$ gående mod $\underline{x}_o$</u> eller

$\underline{f}(\underline{x})\to\underline{a}$ for $\underline{x}\to\underline{x}_o$ eller $\lim\limits_{x\to x_o} \underline{f}(\underline{x})=\underline{a}$

hvis det gælder at:

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\underline{x}\in A: 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{a}\|^*<\varepsilon$

Er $m=\kappa=1$ og $\|x\| = \|x\|^* = |x|$ for alle $x\in R$, ser vi, at denne definition er identisk med den vi kender.

Vi vil nu først se, at dette grænsepunkt er entydigt bestemt. En nemlig $\underline{a}$ og $\underline{b}$ to forskellige grænsepunkter for $\underline{f}$, når $\underline{x}\to\underline{x}_o$, kan vi ifølge definitionen for ethvert $\varepsilon>0$ finde et $\delta_1>0$ og $\delta_2>0$ således at

$$\|\underline{f}(\underline{x})-\underline{a}\|^* < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta_1$$

$$\|\underline{f}(\underline{x})-\underline{b}\|^* < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta_2$$

Vælges $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, har vi for $0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta$, at

$$\|\underline{a}-\underline{b}\|^* = \|\underline{a}-\underline{f}(\underline{x})+\underline{f}(\underline{x})-\underline{b}\|^*$$

$$\leq \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{a}\|^* + \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{b}\|^*<\varepsilon$$

Da således $\|\underline{a}-\underline{b}\|^*<\varepsilon$ for alle $\varepsilon>0$, må det gælde, at $\|\underline{a}-\underline{b}\|^* = 0$ eller $\underline{a} = \underline{b}$.

Af denne sætning kan vi omvemdt konkludere, at hvis der langs to forskellige kurver ind til $\underline{x}_o$ i A findes to forskellige grænsepunkter for $\underline{f}_o$, så har $\underline{f}$ intet grænsepunkt.

Vi får også behov for ikke-begrænsede mængder, hvilket skal betyde, at

$$\forall r>0 \; \exists\underline{x}\in A: \|\underline{x}\|>r.$$

Herved får det mening at tale om $\underline{x}$ gående mod uendelig. Vi har nu følgende tre definitioner:

En funktion $f:A\subseteq R^k$ siges at gå mod $\underline{a}$ (eller at have grænsepunkt $\underline{a}$) for $\underline{x}$ gående mod uendelig, og skriver

$$\underline{f}(\underline{x})\to\underline{a} \text{ for } \underline{x}\to\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{\underline{x}\to\infty} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{a}$$

hvis det gælder, at

$$\forall \varepsilon>0\ \exists r\in R \forall \underline{x}\in A: \|\underline{x}\|>r \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{a}\|^*<\varepsilon$$

Lad $\underline{x}_o \in R^k$ være et fortætningspunkt for $A \subseteq R^k$ og lad $f:A \curvearrowright R$ være en reel funktion. Vi siger, at f går mod plus uendelig for $\underline{x} \to \underline{x}_o$ og skriver

$$f(\underline{x}) \to +\infty \quad \text{for } \underline{x} \to \underline{x}_o \quad \text{eller} \quad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = +\infty$$

hvis der gælder, at

$$\forall b\in R \exists \delta>0 \forall \underline{x}\in A: 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(\underline{x})>b.$$

En reel funktion $f:A \curvearrowright R$ siges at gå mod plus uendelig, for $\underline{x}$ gående mod uendelig og skriver

$$f(\underline{x}) \to +\infty \quad \text{for } \underline{x} \to \infty \quad \text{eller} \quad \lim_{\underline{x}\to\infty} f(\underline{x}) = +\infty$$

hvis det gælder, at

$$\forall b\in R \exists r\in R \forall \underline{x}\in A: \|\underline{x}\|>r \quad \Rightarrow \quad f(\underline{x})>b.$$

Med disse fire definitioner på grænseovergange kan der vises en række regneregler, der formuleres i to sætninger. Vi vil dog kun føre et enkelt af beviserne (det sværeste), da resten kan vises endnu lettere.

Lad $\underline{a},\underline{b}\in R^m$ og $\underline{f},\underline{g}:A \curvearrowright R^m$. Hvis

$$\underline{f}(\underline{x})\to\underline{a} \quad \text{og} \quad \underline{g}(\underline{x})\to\underline{b} \quad \text{for} \quad \underline{x}\to\underline{x}_o$$

vil $\underline{f}(\underline{x}) \pm \underline{g}(\underline{x}) \to \underline{a} \pm \underline{b}$.

Lad $a,b\in R$ og $f,g:A \curvearrowright R$. For enhver af grænseovergangene $\underline{x} \to \underline{x}_o$ og $\underline{x} \to \infty$ vil det gælde at:

(1) Hvis $f(\underline{x}) \to a$, $g(\underline{x}) \to b$ da $f(\underline{x})g(\underline{x}) \to ab$

(2) Hvis $f(\underline{x}) \to a$, $g(\underline{x}) \to b\neq 0$ da $f(\underline{x})/g(\underline{x}) \to a/b$

(3) Hvis $f(\underline{x}) \to \infty$, $g(\underline{x}) \to \pm\infty$ da $f(\underline{x})g(\underline{x}) \to \pm\infty$

(4) Hvis $f(\underline{x})\to a\neq 0$, $g(\underline{x}) \to +\infty$ da $f(\underline{x})g(\underline{x})\to+\infty$ for $a>0$
og $f(\underline{x})g(\underline{x})\to-\infty$ for $a<0$.

Her nøjes vi med at bevise (1). Da vi har k=1, arbejder vi med numerisk værdi. Vi ser først, at

$$|f(\underline{x})g(\underline{x})-ab| = |(f(\underline{x})-a)g(\underline{x})+a(g(\underline{x})-b)|$$
$$\leq |g(x)||f(\underline{x})-a|+|a||g(\underline{x})-b|$$

Da $g(\underline{x})\to b$ for $\underline{x}\to\underline{x}_o$, findes $\delta_1>0$ og $K>0$ således, at $|g(\underline{x})|<K$ for $0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta_1$.

Har vi nu $\varepsilon>0$, da findes $\delta_2,\delta_3>0$ således at

$$|f(\underline{x})-a|< \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{for} \quad 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|< \delta_2$$

$$|g(\underline{x})-b|< \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \text{for} \quad 0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|< \delta_3$$

Er nu $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ vil det gælde, at

$$|f(\underline{x})g(\underline{x})-ab| < K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} + |a|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} < \varepsilon$$

for $0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta$. Altså gælder, at

$$f(\underline{x})g(\underline{x}) \to ab \quad \text{for} \quad \underline{x}\to\underline{x}_o.$$

4.3 <u>Kontinuerte funktioner.</u>

Vi kan nu definere, hvad vi vil forstå ved kontinuerte funktioner.

<u>Lad $\underline{f}:A\sim R^k, A\subseteq R^k$ og $\underline{x}_o\in A$. $\underline{f}$ siges at være kontinuert i $\underline{x}_o$, hvis det gælder, at</u>

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\underline{x}\in A: \|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{f}(\underline{x}_o)\|^* < \varepsilon.$$

Er dette ikke opfyldt, siges $\underline{f}$ at være diskontinuert i $\underline{x}_o$.

<u>$\underline{f}$ siges at være kontinuert i $B\subseteq A$ hvis $\underline{f}$ er kontinuert i ethvert punkt $\underline{x}_o\in B$.</u>

Af de to sætninger om grænseovergange kan vi umiddelbart vise følgende sætninger om kontinuerte funktioner.

<u>Hvis $\underline{f}:A\sim R^m, \underline{g}:B\sim R^m$, hvor $A\subseteq R^k$ og $B\subseteq R^k$, er kontinuerte i $\underline{x}_o\in A\cap B$ er funktionerne $\underline{f}+\underline{g}$ og $\underline{f}-\underline{g}$ også kontinuerte i $\underline{x}_o$.</u>

<u>Hvis $f:A\sim R, g:B\sim R$, hvor $A\subseteq R^k$ og $B\subseteq R^k$ er kontinuerte i $\underline{x}_o\in A\cap B$, er funktionerne $f+g$, $f-g$, fg og f/g (hvis $g(\underline{x}_o)\neq 0$) også kontinuerte i $\underline{x}_o$.</u>

Endelig vil vi vise følgende sætning om sammensætning af kontinuerte funktioner.

<u>Er $A \subset R^k$ og $B \subset R^m$ samt er $\underline{f}: A \to B$ kontinuert i $\underline{x}_o \in A$ og $\underline{g}: B \to R^p$ kontinuert i $\underline{f}(\underline{x}_o) \in B$, da er den sammensatte funktion $\underline{g} \circ \underline{f}: A \to R^p$ kontinuert i $\underline{x}_o$.</u>

Lader vi $\| \ \|'$ være en norm i R^p, kan vi da $\underline{g}$ er kontinuert se, at der til $\varepsilon > 0$ findes et $\delta_1 > 0$ således, at vi for $\underline{y} \in R^m$ får

$$\|\underline{y} - \underline{f}(\underline{x}_o)\|^* < \delta_1 \Rightarrow \|\underline{g}(\underline{y}) - \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_o))\|' < \varepsilon$$

Da videre $\underline{f}$ er kontinuert i $\underline{x}_o$, findes der svarende til δ_1 et $\delta > 0$ således at vi for $\underline{x} \in R^k$ får

$$\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|^* < \delta_1$$

Sammenholdes nu de to betingelser fås, at med $\underline{x} \in R^k$ er

$$\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta \Rightarrow \|\underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) - \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_o))\|' < \varepsilon,$$

dvs $\underline{g} \circ \underline{f}$ er kontinuerte i $\underline{x}_o$.

I alle de sætninger og definitioner, vi har formuleret, har vi arbejdet med "normen" $\| \ \|$ i R^k, $\| \ \|^*$ i R^m osv. Vi har altså formuleret os uafhængigt af hvilken p-norm vi vælger i R^k osv. Dette beror på, at <u>alle p-normer i R^k er ækvivalente</u>, hvilket betyder, at for to forskellige normer $\| \ \|$, $\| \ \|'$ i R^k findes $\alpha, \beta > 0$ så

$$\alpha \|\underline{x}\| \leq \|\underline{x}\|' \leq \beta \|\underline{x}\|$$

for alle $\underline{x} \in R^k$.

Vi viste i et eksempel, at for $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ og $\| \ \|_\infty$ gælder for alle $\underline{x} \in R^k$

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1 \leq k\|\underline{x}\|_\infty \leq k\|\underline{x}\|_2.$$

Dette viser, at disse tre normer er parvis ækvivalente.

Det betyder, at de sætninger, vi kan vise med den ene norm, vil også være gyldige med en af de andre normer, og man kan derfor i en given sammenhæng vælge den norm, det er nemmest at arbejde med.

<u>Eksempel</u>: Betragter vi "projektionsafbildningen" $p_j: R^k \to R$ givet ved

$$p_j(\underline{x}) = x_j \quad \text{for} \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

ser vi, at p_j er kontinuert, idet

$$|p_j(\underline{x}) - p_j(\underline{x}_o)| = |x_j - x_{oj}| < \|\underline{x} - \underline{x}_o\|_\infty$$

dvs til hvert $\varepsilon<0$ vælger vi $\delta=\varepsilon$, og da får vi, at

$$\|\underline{x} - \underline{x}_o\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow |p_j(\underline{x}) - p_j(\underline{x}_o)| < \varepsilon.$$

Betragter vi nu de to afbildninger $\underline{f}: A \to R^m, A \subseteq R^k$ og $p_j: R^m \to R$ da vil koordinatfunktionen f_j blive

$$f_j = p_j \circ \underline{f}$$

og af det forrige ser vi, at hvis $\underline{f}$ er kontinuert, er også f_j kontinuert for $j=1,2, \dots, m$. Vi kan også let vise det modsatte. Dvs vi antager, at $f_1, f_2, \dots, f_m$ er kontinuerte. Der findes således til hvert $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ så der for $j=1,2,..m$ gælder

$$\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta \Rightarrow |f_i(\underline{x}) - f_j(\underline{x}_o)| < \varepsilon.$$

Har vi i R^m valgt maksimumsnormen, ser vi, at

$$\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|_\infty = \max_j\{|f_j(\underline{x}) - f_j(\underline{x}_o)|\} < \varepsilon$$

dvs $\underline{f}$ er kontinuert.

<u>Eksempel</u>: Skal vi nu afgøre om funktionen $\underline{f}: R^2 \to R^2$ givet ved

$$\underline{f}(x,y) = (\sin(xy), \ln(x^2+y^2))$$

er kontinuert, kan vi fx se, at $\sin(xy)$ er sammensat af lutter kontinuerte funktioner og derfor selv kontinuert, ifølge de foregående sætninger. Ligeledes er $\ln(x^2+y^2)$ kontinuert, når $(x,y) \neq (o,o)$, og derfor også $\underline{f}$ når $(x,y) \neq (o,o)$.

Man kan imidlertid ikke altid ved hjælp af disse sætninger afgøre om en given funktion er kontinuert eller har en grænseværdi. Er $f: R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

kan vi for $(x,y) \neq (0,0)$ let se, at f er kontinuert, men for $(0,0)$ er spørgsmålet uafklaret, da nævneren bliver 0. Da imidlertid også tælleren er 0, må vi foretage en nøjere undersøgelse. I en sådan situation må man normalt gå helt tilbage til definitionen på grænseværdi og kontinuitet.

Da f er 0 på såvel x- som y-aksen, er det nærliggende at gætte på, at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Derfor ser vi på

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

dvs for $\|(x,y)-(0,0)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ vil også $x^2+y^2 \to 0$, dvs f er kontinuert i (0,0) med værdien 0.

Eksempel: Funktionen $g:R^2\setminus\{(0,0)\}\to R$ givet ved

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

er 0 på begge koordinatakser, men ved at udregne fx

$$g(x,x) = \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

(dvs g langs linien y=x) kan vi se, at

$$\lim_{x\to 0} g(x,x) = \frac{1}{2}$$

Da imidlertid

$$\lim_{x\to 0} g(x,0) = 0$$

kan g ikke tillægges en grænseværdi i (0,0).

Eksemplet illustrerer, at man kan benytte grænseværdien langs udvalgte kurver til at modbevise kontinuitet eller grænseværdi i et punkt. Disse overvejelser er derimod ikke tilstrækkelige til at bevise kontinuitet. Her skal benyttes resonnementer analoge til de, der blev benyttet på funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} .$$

Da omegne i R^2 - forsynet med den euklidiske norm - er cirkler, vil en grænseovergang i R^2 betyde, at radius (i en cirkel med centrum i grænsepunktet) vil gå mod 0. Indfører vi derfor de polære koordinater

$$x = x_o + r\cos v, \quad y = y_o + r\sin v$$

(hvor grænsepunktet $(x_o, y_o) = (0,0)$ i det aktuelle eksempel), skal vi blot finde

$$\lim_{r\to 0} f(x,y)$$

når v varierer tilfældig. Anvendt på $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ får vi at

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2 v\, r^2\sin^2 v}{r^2(\cos^2 v+\sin^2 v)}$$

$$= r^2\cdot(\cos v \sin v)^2.$$

Da $|\cos v\cdot\sin v| < 1$ for alle v og $r^2 \to 0$ for $r\to 0$ får vi (naturligvis) at

$$\lim_{r\to 0} f(x,y) = 0$$

<u>Eksempel</u>: Er funktion $g: R^2\setminus\{(0,0)\}\to R$ givet ved

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

vil vi undersøge, om g har en grænseværdi for $(x,y)\to(0,0)$. Ved brug af polære koordinater er

$$g(x,y) = \frac{r^2\cos^2 v - r^2\sin^2 v}{r^2}$$

$$= \cos 2v$$

men da $\cos 2v \in [-1,1]$, når $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$ vil g ikke have en grænseværdi i $(0,0)$.

Denne overgang til polære koordinater kan naturligvis kun benyttes i R^2 - med den euklidiske norm. Har man en funktion $f: R^3\to R$, kan man tilsvarende benytte overgang til kuglekoordinater eller <u>rumpolære koordinater</u>

$$x = r\sin u \cos v$$

$$y = r\sin u \sin v$$

$$z = r\cos u$$

hvor $r\geq 0$, $u\in[0,\pi]$ og $v\in[0,2\pi]$

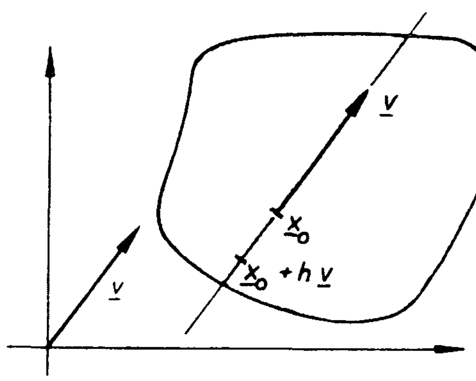
4.4 Differentiable funktioner.

I dette afsnit vil vi indføre differentialregning for funktioner af flere variable. Vi ser på funktioner $f:A \to R$, $A \subseteq R^k$ eller

$$f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad \underline{x} \in A.$$

Når intet ander er nævnt benytter vi den euklidiske norm i R^k. Vi vil i flæng kalde elementerne i R^k for punkter eller vektorer.

Er nu $\underline{x}_o$ et <u>indre</u> punkt i A og $\underline{v}$ en enhedsvektor (dvs $\|\underline{v}\|=1$) vil vi beskrive hvordan f ændres, når $\underline{x}$ flyttes fra $\underline{x}_o$ i vektor $\underline{v}$'s (eller $-\underline{v}$'s) retning. Når $\underline{x}_o$ er et indre punkt



findes der et r>0 således, at

$$\{\underline{y} \in R^k \mid \|\underline{y}-\underline{x}_o\| < r\} \subseteq A,$$

og derfor vil "liniestykket" $\underline{x}_o + h\underline{v} \in A$ blot $|h|<r$. Da er funktionen

$$g(h) = f(\underline{x}_o + h\underline{v})$$

af <u>en</u> variable defineret i en omegn af punktet h=0. Herved kan vi på baggrund af vores kendskab til funktioner af en variable indføre følgende definition:

<u>Hvis $g(h)=f(\underline{x}_o+h\underline{v})$ er differentiabel i punktet h=0, siges f at være differentiabel i $\underline{v}$'s retning i $\underline{x}_o$, og differentialkvotienten $g'(0)$ kaldes den afledede og f i $\underline{v}$'s retning i $\underline{x}_o$, og betegnes $f'(\underline{x};\underline{v})$.</u>

Hvis f er differentiabel i $\underline{v}$'s retning i $\underline{x}_o$, er f også differentiabel i $-\underline{v}$'s retning i $\underline{x}_o$ og

$$f'(\underline{x}_o;-\underline{v}) = -f'(\underline{x}_o;\underline{v})$$

Disse afledede af f kaldes kort de retningsafledede.

Hvis f er differentiabel i $\underline{v}$'s retning i $\underline{x}_o$, har vi at

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_o+h\underline{v}) - f(\underline{x}_o) &= g(h) - g(0) \\ &= g'(0)h + 0(h) \\ &= f'(\underline{x}_o;\underline{v})h + 0(h) \end{aligned}$$

dvs for små h kan vi ved praktiske formål erstatte $f(\underline{x}_o+h\underline{v})$ med $f(\underline{x}_o) + f'(\underline{x}_o;\underline{v})h$. Dette vil vi vende tilbage til.

Er $\underline{e}_1=(1,0, .. ,0)$, $\underline{e}_2=(0,1, .. ,0)$, ... $\underline{e}_k= (0,0, .. ,1)$ basisvektorer i R^k, og er $f:A\to R^k$ differentiabel i $\underline{e}_i$'s retning i $\underline{a}=(a_1,a_2, .. ,a_k)$ siges f at være differentiabel med hensyn til x_i eller i x_i's retning i $\underline{a}$ og den retningsafledede $f'(\underline{a};\underline{e}_i)$ kaldes den partielle afledede af x_i eller den partielle afledede i x_i-aksens retning. Den partielle afledede betegnes på en af måderne

$$f'_{x_i}(\underline{a}) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \quad , \quad D_i f(\underline{a}) .$$

$\underline{a}$'et kan udelades, hvis det af sammenhængen fremgår, hvilket punkt det drejer sig om.

Af definitionen ser vi, at

$$g(h) = f(\underline{a}+h\underline{e}_i) = f(a_1, ..,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1}, ..,a_k)$$

dvs at f er differentiabel i $\underline{a}$ med hensyn til x_i, hvis og kun hvis g er differentiabel i h=0, og er

$$g_i(x) = f(a_1, .. ,a_{i-1},x,a_{i+1}, .. ,a_k)$$

er g_i differentiabel i $x = a_i$. Og således bliver

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = g'_i(a_i) .$$

Populært sagt går partiel differentiation ud på at differentiere med hensyn til én variabel og at opfatte de øvrige som konstante.

<u>Eksempel</u>: Vi ser på funktionen givet ved, at

$$f(x,y) = \sin(xy) + \ln(y-x)$$

$(x,y)\in A$, hvor A er den ved $y>x$ bestemte åbne halvplan. Er $(a,b)\in A$, får vi, at

$$g_1(x) = \sin(xb) + \ln(b-x); \quad x<b$$

$$g_2(y) = \sin(ay) + \ln(y-a); \quad y>a$$

For g_1 og g_2, kan vi nu udregne

$$g_1'(a) = b\cos(ab) - \frac{1}{b-a}$$

$$g_2'(b) = a\cos(ab) + \frac{1}{b-a}$$

Da er f differentiabel i hele A og for ethvert $(x,y)\in A$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) - \frac{1}{y-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + \frac{1}{y-x} \quad .$$

Hvis $f: A \to R$ har partielle afledede med hensyn til x_i i $\underline{a}$ for alle $i=1,2,..,k$, og hvis dette gælder i alle punkter $\underline{a}\in A$, siger vi kort, at f har <u>partielle afledede af første orden i A</u>.

Har f nu partielle afledede af første orden i mængden $U\subseteq A$, og er $\underline{a}\in U$, vil vi hvis funktionerne

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to R \qquad i=1,2, .. ,k$$

har partielle afledede af første orden i $\underline{a}$, sige, at f har partielle afledede af <u>anden</u> orden i $\underline{a}$. Den anden afledede betegnes på en af følgende måder

$$f''_{x_i x_j}(\underline{a}) \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) \ , \quad D_j D_i f(\underline{a}) .$$

Disse tre symboler skal læses således, at man først differentierer med hensyn til x_i og dernæst med hensyn til x_j .

Hvis specielt $j=i$, kan man også benytte betegnelserne

$$f''_{x_i^2}(\underline{a}) \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(\underline{a}) \ , \quad D_i^2 f(\underline{a}) \quad .$$

Vi kan undlade $\underline{a}$, hvis det af sammenæhngen fremgår, hvilket punkt det drejer sig om.

<u>Eksempel:</u> Fortsætter vi med funktionen fra før givet ved

$$g(x,y) = \sin(xy) + \ln(y-x) \quad ; \quad y>x$$

bliver

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\sin(xy) - \frac{1}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin(xy) - \frac{1}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy\sin(xy) + \frac{1}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy) + \frac{1}{(y-x)^2}$$

Her ser vi, at de to sidste linier er identiske, dvs at resultatet er uafhængigt af, hvilken rækkefølge der differentieres i.

Vi vil straks fortsætte med at vise, hvornår differentiationsrækkefølgen er underordnet:

Hvis $f:A\to R$ har kontinuerte partielle afledede af anden orden i den åbne mængde A , da vil for alle $x_o \in A$ og alle $i,j \in \{1,2,...,k\}$ gælde, at

$$f''_{x_i x_j}(\underline{x}_o) = f''_{x_j x_i}(\underline{x}_o)$$

Vi gennemfører beviset for $A \subseteq R^2$, og er $i=j$, er der intet at vise.

Vi vil først vise, at der i det indre af enhver mængde

$$I = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subseteq A \text{ findes punkter}$$
$$\underline{\xi} = (\xi_1,\xi_2) \text{ og } \underline{\eta} = (\eta_1,\eta_2),$$

således at

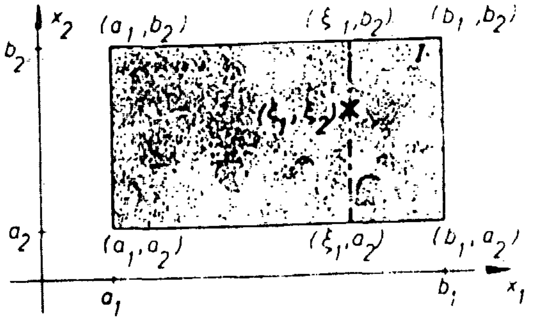
$$f''_{x_1 x_2}(\underline{\xi}) = f''_{x_2 x_1}(\underline{\eta}).$$

Med S betegnes størrelsen

$$S = f(b_1,b_2) - f(b_1,a_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_2) .$$

Vi betragter først funktionen $g_1 : [a_1,b_1] \to R$ givet ved

$$g_1(x_1) = f(x_1,b_2) - f(x_1,a_2) ,$$



der udtrykker forskellen mellem værdierne af f i punkter på øvre og nedre vandrette side af I med samme abscisse x_1 . Det følger umiddelbart, at der gælder

$$S = g_1(b_1) - g_1(a_1) .$$

Funktionen g_1 er differentiabel med den afledede $g_1'(x_1) = f_{x_1}'(x_1,b_2) - f_{x_1}'(x_1,a_2)$. Ifølge middelværdisætningen findes et $\xi_1 \in]a_1,b_1[$, således at $S = g_1'(\xi_1)(b_1 - a_1)$, altså

$$S = [f_{x_1}'(\xi_1,b_2) - f_{x_1}'(\xi_1,a_2)](b_1-a_1).$$

Vi betragter dernæst funktionen $f_{x_1}'(\xi_1,x_2)$, $x_2 \in [a_2,b_2]$, altså restriktionen af f_{x_1}' til det lodrette liniestykke fra (ξ_1,a_2) til (ξ_1,b_2) .

Denne funktion er differentiabel med den afledede $f''_{x_1x_2}(\xi_1,x_2)$.

Ifølge middelværdisætningen findes et $\xi_2 \in]a_2,b_2[$, således at

$$f_{x_1}'(\xi_1,b_2) - f_{x_1}'(\xi_1,a_2) = f''_{x_1x_2}(\xi_1,\xi_2)(b_2-a_2) .$$

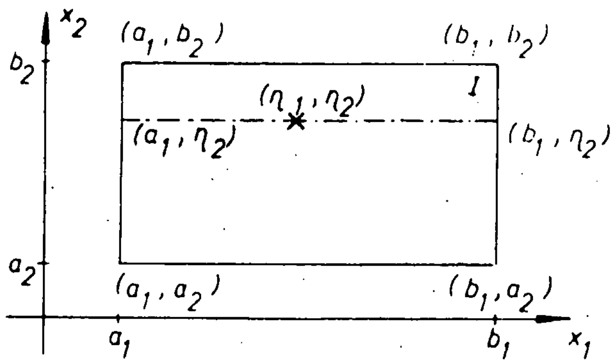
Vi har dermed

(*1) $$S = f''_{x_1x_2}(\xi_1,\xi_2)(b_1-a_1)(b_2-a_2) .$$

På samme måde viser man, at der findes et

$$(\eta_1,\eta_2) \in]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\quad \text{således at}$$

(*2) $$S = f''_{x_2x_1}(\eta_1,\eta_2)(b_1-a_1)(b_2-a_2) \ .$$



Af (*1) og (*2) følger dernæst, at

$f''_{x_1x_2}(\underline{\xi}) = f''_{x_2x_1}(\underline{\eta})$, hvor $\underline{\xi} = (\xi_1,\xi_2)$ og $\underline{\eta} = (\eta_1,\eta_2)$ begge tilhører I .

Lad nu $\underline{x}_0$ være et vilkårligt punkt i A , og lad ε være et vilkårligt positivt tal. Da $f''_{x_1x_2}$ og $f''_{x_2x_1}$ er kontinuerte i punktet $\underline{x}_0$, findes der et $\delta \in R_+$, således at

$$|f''_{x_1x_2}(\underline{x}) - f''_{x_1x_2}(\underline{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{for } ||\underline{x} - \underline{x}_0|| < \delta$$

og

$$|f''_{x_2x_1}(\underline{x}) - f''_{x_2x_1}(\underline{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{for } ||\underline{x} - \underline{x}_0|| < \delta \ .$$

Da A er åben, finder der endvidere en mængde $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subset A$, hvis diameter er mindre end δ og for hvilken $\underline{x}_0 \in I$. Ifølge det foregående findes der to punkter $\underline{\xi}$ og $\underline{\eta}$ i I , således at $f''_{x_1x_2}(\underline{\xi}) = f''_{x_2x_1}(\underline{\eta})$. Vi har derfor

$$|f''_{x_1x_2}(\underline{x}_0)-f''_{x_2x_1}(\underline{x}_0)| \le |f''_{x_1x_2}(\underline{x}_0)-f''_{x_1x_2}(\underline{\xi})|+|f''_{x_2x_1}(\underline{\eta})-f''_{x_2x_1}(\underline{x}_0)| < 2\varepsilon \ .$$

Da ε er vilkårlig, følger det, at

$$f''_{x_1x_2}(\underline{x}_0) = f''_{x_2x_1}(\underline{x}_0) \ .$$

Før vi skal definere en differentiabel funktion af flere variable, skal vi lige repetere fra gymnasiet, at f er differentiabel i $x_0 \in R$, hvis

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to a \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0 \ .$$

eller at

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

hvor $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$.

Det første led $a\Delta x$ er lineært i Δx . Dvs at f er differentiabel i x_0 er ensbetydende med, at der findes en lineær afbildning $T: R \to R$ således, at

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = T(\Delta x) + \Delta x \varepsilon(\Delta x) \ .$$

Fra afsnittet om lineære afbildninger ved vi, at enhver lineær afbildning $T: R^k \to R$ vil være på formen

$$T(\underline{y}) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k$$

for alle $\underline{y} \in R^k$, dvs at der til en given lineær afbildning T netop findes de k reelle variable $a_1, a_2, \dots, a_k$. Vi har nu følgende udvidelse af begrebet differentiabilitet til funktioner af k variable.

Lad $\underline{x}_0$ være et indre punkt i $A \in R^k$.

<u>En funktion $f: A \to R$ siges at være differentiabel i $\underline{x}_0$, hvis der findes en lineær afbildning $T: R^k \to R$ således, at der for $\underline{x}_0 + \Delta\underline{x} \in A$ gælder</u>

$$\Delta f = f(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = T(\Delta\underline{x}) + \varepsilon(\Delta\underline{x}) \|\Delta\underline{x}\|$$

<u>hvor $\varepsilon(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$</u> .

Vi indser først, at <u>hvis f er differentiabel i $\underline{x}_0$, er f kontinuert i $\underline{x}_0$</u> .

Da T er kontinuert, vil $T(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$, og således vil

$$f(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = T(\Delta\underline{x}) + \varepsilon(\Delta\underline{x}) \|\Delta\underline{x}\| \to 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$, dvs

$$f(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}) \to f(\underline{x}_0) \quad \text{for} \quad \Delta\underline{x} \to \underline{0} \ .$$

Dernæst vil vi kæde T sammen med de partielle afledede gennem sætningen:

Lad $f:A\to R$ være differentiabel i $\mathbf{x}_0 \in A^0$ og lad

$$f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0) = a_1\Delta x_1+ \ldots +a_k\Delta x_k+\varepsilon(\Delta\mathbf{x})\,||\Delta\mathbf{x}||\,.$$

For enhver enhedsvektor $\mathbf{v}=(v_1,\ldots, v_k)$ er f differentiabel i $\mathbf{v}$'s retning og

$$f'(\mathbf{x}_0;\mathbf{v}) = a_1v_1+\ldots+a_kv_k \;.$$

Specielt har f partielle afledede af første orden i $\mathbf{x}_0$, og

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = a_i \;, \qquad i=1,2,\ldots,k \;.$$

Da $\mathbf{x}_0 \in A^0$, findes $\delta>0$, så $\mathbf{x}_0+h\mathbf{v}\in A$ for $|h|<\delta$. Da bliver for $|h|<\delta$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0+h\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0) &= a_1(hv_1)+\ldots+a_k(hv_k)+\varepsilon(h\mathbf{v})\,||h\mathbf{v}|| \\ &= h(a_1v_1+\ldots+a_kv_k)+\varepsilon_1(h)|h| \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_0+h\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{h} &= a_1v_1+\ldots+a_kv_k + \varepsilon_1(h)\frac{|h|}{h} \\ &\to a_1v_1+\ldots+a_kv_k \text{ for } h\to 0 \;. \end{aligned}$$

Af sætningen har vi altså, at hvis f er differentiabel i $\mathbf{x}_0 \in A^0$, har f partielle afledede af første orden i $\mathbf{x}_0$, og

$$f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\Delta x_k+\varepsilon(\Delta\mathbf{x})\,||\Delta\mathbf{x}||$$

Det ville være nærliggende at formode, at hvis omvendt f har partielle afledede af første orden i $\mathbf{x}_0$, da er f differentiabel i $\mathbf{x}_0$. Dette gælder imidlertid ikke, som følgende eksempel viser:

Eksempel: $f:R^2\to R$ er givet ved, at

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for } y\neq 0 \\[2ex] 0 & \text{for } y=0 \end{cases}$$

$$\text{Af} \quad \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

slutter vi, at f har partielle afledede af første orden i (0,0) og

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Langs parablen $y=x^2$, $x\neq 0$ får vi, at $f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2} \text{ , mens } f(0,0) = 0.$$

f er således ikke kontinuert i (0,0), og derfor heller ikke differentiabel.

Eksemplet viser således, at blot eksistensen af samtlige partielle afledede i $\underline{x}_o$ ikke er nok til at sikre differentiabilitet i $\underline{x}_o$. Der skal endnu en forudsætning til, hvilket følgende sætning viser.

<u>Hvis $\underline{x}_o \in A^o, A\subseteq R^k$, hvis $f:A\to R$ har partielle afledede af første orden i en omegn $U\subseteq A$ af $\underline{x}_o$, og hvis de alle er kontinuerte i $\underline{x}_o$, da er f differentiabel i $\underline{x}_o$.</u>

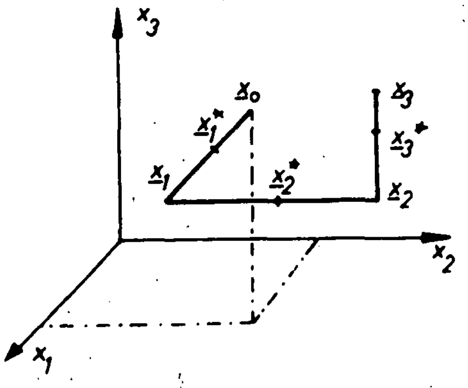
Vi gennemfører beviset for $A\subseteq R^3$, da princippet i bevisgangen træder klarere frem her. Vi skal altså vise, at

$$f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_o)\Delta x_3 + \varepsilon(\Delta\underline{x})\,\|\Delta\underline{x}\|$$

Da $\underline{x}_o\in U$, findes $\delta>0$, så $\underline{x}_o+\Delta\underline{x}\in U$ for $\|\Delta\underline{x}\|<\delta$. Vi indfører nu punkterne $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ ved

$$\underline{x}_1 = (x_{o1}+\Delta x_1, x_{o2}, x_{o3})$$
$$\underline{x}_2 = (x_{o1}+\Delta x_1, x_{o2}+\Delta x_2, x_{o3})$$
$$\underline{x}_3 = (x_{o1}+\Delta x_1, x_{o2}+\Delta x_2, x_{o3}+\Delta x_3)$$

dvs $\underline{x}_3 = \underline{x}_o+\Delta\underline{x}$. Nu er vektorerne $\underline{x}_3-\underline{x}_2$, $\underline{x}_2-\underline{x}_1$, $\underline{x}_1-\underline{x}_o$ akseparallelle, jfr. figuren



Vi kan omskrive $f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o)$ således, at

$$f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o) = (f(\underline{x}_3)-f(\underline{x}_2))+(f(\underline{x}_2)-f(\underline{x}_1))+(f(\underline{x}_1)-f(\underline{x}_o))$$

Af middelværdisætningen for funktioner af én variabel får vi, at der på liniestykket mellem $\underline{x}_{i-1}$ og $\underline{x}_i$, i=1,2,3 findes et $\underline{x}_i^*$ således, at

$$f(\underline{x}_i)-f(\underline{x}_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_i^*)\Delta x_i \quad , \quad i = 1,2,3$$

og for $\Delta\underline{x}\to\underline{0}$ vil $\underline{x}_i^*\to\underline{x}_o$. Da vi har antaget, at de partielle afledede er kontinuerte i $\underline{x}_o$ får vi videre, at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_i^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o) + \varepsilon_i(\Delta\underline{x})$$

hvor $\varepsilon_i(\Delta\underline{x})\to 0$ for $\Delta\underline{x}\to\underline{0}$.

Alt i alt giver dette, at

$$f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i(\Delta\underline{x})\Delta x_i$$

Sættes endelig

$$\varepsilon(\Delta\underline{x}) = \varepsilon_1(\Delta\underline{x})\frac{\Delta x_1}{\|\Delta\underline{x}\|} + \varepsilon_2(\Delta\underline{x})\frac{\Delta x_2}{\|\Delta\underline{x}\|} + \varepsilon_3(\Delta x)\frac{\Delta x_3}{\|\Delta\underline{x}\|}$$

vil $\varepsilon(\Delta\underline{x})\to 0$ for $\Delta\underline{x}\to\underline{0}$, og da er

$$f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o)\Delta x_i + \varepsilon(\Delta\underline{x})\|\Delta\underline{x}\| \;,$$

hvilket netop viser, at f er differentiabel i $\underline{x}_o$.

Betragter vi igen punktet $\underline{x}_o \in A^o$ og er $\underline{h} \in R^k$ valgt således, at $\underline{x}_o + \underline{h} \in A$, vil vi, når f er differentiabel i $\underline{x}_o$, kunne skrive

$$f(\underline{x}_o + h) - f(\underline{x}_o) = T(\underline{h}) + \varepsilon(\underline{h}) \|\underline{h}\|$$

hvor

$$T(\underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_o) h_k$$

Den lineære afbildning kaldes <u>differentialet af f i</u> $\underline{x}_o$, og det betegnes ofte $df(\underline{x}_o, \underline{h})$. Når det af sammenhængen fremgår, hvilket $\underline{x}_o$, der er på tale, udelades dette, og man skriver blot

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k.$$

Betragter vi projektionsafbildningen $p_j(\underline{x}) = x_j$, er den differentiabel for alle $\underline{x}_o$, da

$$p_j(\underline{x}_o + \underline{h}) - p_j(\underline{x}_o) = h_j$$

dvs. $dp_j = h_j$; men hvis vi identificerer p_j med sin funktionsværdi x_j, får vi $dx_j = h_j$. Derfor kan differentialet også skrives

$$\underline{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k}$$

der blot er en symbolsk skrivemåde for det oprindelige udtryk. (Af df kan man også se, at vi ikke længere kan "dividere over med dx" for at få differentialkvotienten)

Har f også kontinuerte partielle afledede af anden orden, kan man på tilsvarende måde indføre <u>det andet differential af f i</u> $\underline{x}_o$ ved

$$d^2 f(\underline{x}_o; \underline{h}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_o) h_i h_j$$

og som for det første differential kan dette skrives kort som

$$\underline{d^2 f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j}$$

Efter tilsvarende retningslinier kan man også indføre det n-te differential, men da vi i det følgende ikke vil få brug for det, skal der ikke ofres mere tid og plads her.

4.5 Kædereglen.

Derimod vil vi fortsætte med reglerne for, hvordan man differentierer funktioner af flere variable. For funktioner af én variabel kan man differentiere den sammensatte funktion

$$(f \circ g)(t) = f(g(f))$$

hvis begge funktioner er differentiable, og

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{d}{dt} g(t)$$

hvor $u=g(t)$. Denne "regneregel" kan udvides til funktioner af flere variable og hedder kædereglen.

Hvis nu vi har den reelle funktion $f(\underline{x})=f(x_1,x_2, \ldots ,x_k), \underline{x} \in A$, og hvis hver af de variable igen er en funktion af én variabel dvs

$$x_1=\phi_1(t),\ x_2=\phi_2(t),\ \ldots\ ,\ x_k=\phi_k(t),$$

For alle i antages ϕ_i at være defineret på samme interval $I \subseteq R$, og vi må forudsætte, at

$$\underline{\phi}(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t), \ldots ,\phi_k(t)) \in A$$

for alle $t \in I$. Vi kan nu for $F=f \circ \phi : I \to R$ vise, at

<u>Hvis $\phi_1,\phi_2, \ldots ,\phi_k$ er differentiable i $t_o \in I$ og $f:A \to R$ er differentiabel i $\underline{x}_o=\underline{\phi}(t_o) \in A$, da er $F=f \circ \phi$ differentiabel i t_o med differentialkvotienten</u>

$$\underline{F'(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o) \cdot \phi_1'(t_o) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_o)\phi_k'(t_o).}$$

Vi gennemfører beviset for k=3. Da f er differentiabel i $\underline{x}_o$, er

$$f(\underline{x}_o+\Delta\underline{x})-f(\underline{x}_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_o)\Delta x_3$$

$$+\varepsilon(\Delta\underline{x})\,\|\Delta\underline{x}\|.$$

Svarende til $\Delta t \neq 0$ indfører vi

$$\Delta\phi_i = \phi_i(t_o+\Delta t) - \phi_i(t_o) \qquad i = 1,2,3$$

og tilsvarende

$$\Delta\underline{\phi} = \underline{\phi}(t_o+\Delta t) - \underline{\phi}(t_o) = (\Delta\phi_1,\Delta\phi_2,\Delta\phi_3).$$

Med denne nomenklatur har vi

$$\begin{aligned} F(t_o+\Delta t) - F(t_o) &= f(\underline{\phi}(t_o+\Delta t)) - f(\underline{\phi}(t_o)) \\ &= f(\underline{\phi}(t_o)+\Delta\underline{\phi}) - f(\underline{\phi}(t_o)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o)\Delta\phi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)\Delta\phi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_o)\Delta\phi_3 \\ &\quad +\varepsilon(\Delta\underline{\phi})\,\|\Delta\underline{\phi}\| \end{aligned}$$

og for $\Delta t \neq 0$ bliver

$$\begin{aligned} \frac{F(t_o+\Delta t)-F(t_o)}{\Delta t} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)\,\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)\,\frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_o)\,\frac{\Delta\phi_3}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta\underline{\phi})\,\frac{\|\Delta\underline{\phi}\|}{\Delta t} \end{aligned}$$

Da ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 er differentiabel i t_o, vil

$$\frac{\Delta\phi_i}{\Delta t} \rightarrow \phi_i'(t_o) \quad \text{for} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

med $i = 1,2,3$, og videre vil

$$\begin{aligned} \left|\frac{\|\Delta\underline{\phi}\|}{\Delta t}\right| &\leqq 3\cdot\max\left\{\left|\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t}\right|,\left|\frac{\Delta\phi_2}{\Delta t}\right|,\left|\frac{\Delta\phi_3}{\Delta t}\right|\right\} \\ &\rightarrow 3\cdot\max\left\{\left|\phi_1'(t_o)\right|,\left|\phi_2'(t_o)\right|,\left|\phi_3'(t_o)\right|\right\} \end{aligned}$$

(da $\|\underline{x}\|_2 \leqq k\|\underline{x}\|_\infty$). Da endvidere $\Delta\underline{\phi}\rightarrow\underline{0}$ for $\Delta t\rightarrow 0$, vil også $\varepsilon(\Delta\underline{\phi})\rightarrow 0$ for $\Delta t\rightarrow 0$. Dette giver alt i alt, at

$$\varepsilon(\Delta\underline{\phi})\frac{\|\Delta\underline{\phi}\|}{\Delta t} \rightarrow 0 \text{ for } \Delta t\rightarrow 0, \text{ og da er}$$

$$\frac{F(t_o+\Delta t)-F(t_o)}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o)\phi_1'(t_o)+ \,..\, +\frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_o)\phi_3'(t_o)$$

for $\Delta t \rightarrow 0$.

Skriver vi y for både f og $F=f\circ\phi$ og x_i for ϕ_i, kan reglen også skrives

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}$$

og man siger, at man får differentialkvotienten af

$$y = F(t) = f(\phi_1(t), \ldots ,\phi_k(t))$$

ved at $\underline{\text{differentiere gennem } x_1, \ldots ,x_k}$ hvor $x_i=\phi_i$, $i=1,2,\ldots,k$.

For $k=1$ genfinder vi reglen for differentiation af sammensat funktion.

Eksempel: Vi vil nu udregne den afledede for $t=1$ af $f(x(t),y(t))$ med $f(x,y)=x^y$, $x(t)=t^2+1$, $y(t)=t^4-t$. Svarende til $t_o=1$ fås $(x_o,y_o)=(2,0)$, og forudsætningerne i sætningen er klart opfyldt. Nu er

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1} \quad ; \quad f'_y(x,y) = x^y \ln x$$

$$x'(t) = 2t \quad ; \quad y'(t) = 4t^3-1$$

og derfor bliver

$$f'_x(2,0) = 0 \ ; \ f'_y(2,0) = \ln 2 \ ; \ x'(1) = 2 \ ; \ y'(1) = 3$$

og

$$\underline{F'(1)} = 0\cdot 2+3\ln 2 = \underline{3\ln 2}.$$

Resultatet kunne også være fremkommet ved logaritmisk differentiation af

$$F(t) = (t^2+1)^{t^4-t}.$$

Kædereglen kan naturligvis også udvides, således at $\phi_1, \ldots ,\phi_k$ kan være funktioner af flere variable, idet de partielle afledede jo udregnes ved at "holde" de øvrige variable fast. Er nu $f:R^3 \curvearrowright R$ differentiabel, og er de tre variable $x,y,z:R^2 \curvearrowright R$ også differentiable, vil den sammensatte funktion

$$f(s,t) = f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$$

også være differentiabel, og

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Bemærk, at vi her benytter det samme symbol "f" for de to funktioner.

Som eksempel på brugen af kædereglen vil vi gennemregne nogle eksempler, hvor man benytter overgang til polære koordinater.

Eksempel: Polære koordinater.

Som udgangspunkt har vi, at vi ønsker at løse den partielle differentialligning

$$xz'_x + yz'_y = z, \quad x>0.$$

Denne kan løses, hvis man i stedet for (x,y) benytter de polære koordinater (r,v) givet ved

$$x = r\cos v \quad , \quad y = r\sin v \ .$$

Det betyder, at hvis $z=f(x,y)$ er en formodet løsning, bliver den med de polære koordinater til

$$z = f(x,y) = f(r(x,y),v(x,y))$$

og man skal derfor tilsvarende ændre differentialligningen til en ligning i (r,v). Da nu

$$(*) \quad \begin{aligned} z'_x &= z'_r \cdot r'_x + z'_v \cdot v'_x \\ z'_y &= z'_r \cdot r'_y + z'_v \cdot v'_y \end{aligned}$$

får vi brug for r og v som funktioner af x og y, dvs fx

$$r^2 = x^2+y^2 \quad ; \quad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$$

og vi kan nu udregne r'_x, r'_y, v'_x og v'_y. Som eksempel er

$$2rr'_x = 2x \quad \text{dvs} \quad \underline{r'_x = \frac{x}{r}} \quad \text{og}$$

$$\frac{1}{\cos^2 v} \cdot v'_x = -\frac{y}{x^2} \quad \text{eller} \quad \frac{r^2}{x^2}\, v'_x = -\frac{y}{x^2} \quad \text{eller}$$

$$r^2 v'_x = -y \quad \text{dvs} \quad \underline{v'_x = -\frac{y}{r^2}}$$

Tilsvarende bliver

$$r'_y = \frac{y}{r} \quad \text{og} \quad v'_y = \frac{x}{r^2}$$

Vi kan nu opskrive (*),

$$z'_x = \frac{x}{r} z'_r - \frac{y}{r^2} z'_v$$

$$z'_y = \frac{y}{r} z'_r + \frac{x}{r^2} z'_v$$

Indsætter vi det i differentialligningen, får vi, at

$$x(\frac{x}{r} z'_r - \frac{y}{r^2} z'_v) + y(\frac{y}{r} z'_r + \frac{x}{x^2} z'_v) = z$$

$$\frac{x^2+y^2}{r} z'_r + (-\frac{xy}{r^2} + \frac{xy}{r^2}) z'_v = z$$

eller $\underline{rz'_r = z}$

Vi har nu en differentialligning, som kun indeholder differentiation m.h.t. én variabel, dvs vi skal løse en differentialligning af formen

$$t \cdot g'(t) = g(t)$$

der jo har løsningerne

$$g(t) = ct \quad , \quad c \in R.$$

Da imidlertid $z(r,v)$ er en funktion af to variable, kan konstanten c betyde en funktion $c(v)$, der er konstant i forhold til differentiationen m.h.t. r, dvs den fuldstændige løsning til ligningen $rz'_r = z$ bliver

$$\underline{z(r,v) = c(v)r}$$

eller hvis vi genindfører x og y

$$z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot c(tg\frac{y}{x}) = x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot c(tg\frac{y}{x})$$

eller hvis funktionen F er

$$F(u) = \sqrt{1+u^2} \cdot c(tg(u))$$

fås

$$\underline{z(x,y) = xF(\frac{y}{x})} \quad , \quad x>0$$

som løsning på den partielle differentialligning

$$xz'_x + yz'_y = z \ , \quad x>0.$$

Man kan også være interesseret i at udtrykke Laplace operatoren

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

i polære koordinater. Her får vi altså behov for at udregne de anden afledede af funktionen $z = f(x,y) = f(r(x,y),v(x,y))$ ved brug af kædereglen.

Har vi nu de oprindelige udtryk for z'_x og z'_y fra (*) kan vi udregne fx

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(z'_r \cdot r'_x + z'_v \cdot v'_x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(z'_r)r'_x + z'_r r''_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(z'_v)v'_x + z'_v v''_{xy}$$

$$= (z''_{rr}r'_y + z''_{rv} \cdot v'_y)r'_x + z'_r r''_{xy}$$

$$+ (z''_{vr} \cdot r'_y + z''_{vv} \cdot v'_y)v'_x + z'_v v''_{xy}$$

dvs

$$\boxed{z''_{xy} = z'_r r''_{xy} + z'_v v''_{xy} + z''_{rr} \cdot r'_x r'_y + z''_{rv}(r'_x v'_y + r'_y v'_x) + z''_{vv} v'_x v'_y .}$$

Ønsker man at udregne z''_{xx} eller z''_{yy} kan x og y blot erstatte hinanden i ovenstående udtryk . Vi skal nu udregne r''_{xx}, r''_{yy}, v''_{xx} og v''_{yy}. Fx bliver

$$\underline{r''_{yy}} = \frac{\partial}{\partial y}(r'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{r - yr'_y}{r^2} = \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3} = \underline{\frac{x^2}{r^3}}$$

og

$$\underline{v''_{yy}} = \frac{\partial}{\partial y}(v'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{2xr'_y}{r^3} = \underline{-\frac{2xy}{r^4}}$$

Tilsvarende bliver

$$r''_{xx} = \frac{y^2}{r^3} \quad \text{og} \quad v''_{xx} = \frac{2xy}{r^4}$$

og dermed får vi, at

$$z''_{xx} = z'_r \frac{y^2}{r^3} + z'_v \frac{2xy}{r^4} + z''_{rr} \frac{x^2}{r^2} + z''_{rv} \frac{-2xy}{r^3} + z''_{vv} \frac{y^2}{r^4}$$

$$z''_{yy} = z'_r \frac{x^2}{r^3} + z'_v \frac{-2xy}{r^4} + z''_{rr} \frac{y^2}{r^2} + z''_{rv} \frac{2xy}{r^3} + z''_{vv} \frac{x^2}{r^4}$$

Ved addition bliver

$$\Delta z = z'_r \frac{1}{r} + z''_{rr} + \frac{1}{r^2} z''_{vv}.$$

Som vi så på side 76 , er

$$f(\underline{x}_o+\underline{h}) - f(\underline{x}_o) = df(\underline{x}_o,\underline{h}) + \varepsilon(\underline{h}) \|\underline{h}\|$$

hvor $\varepsilon(\underline{h})\to 0$ for $\underline{h}\to\underline{0}$. Dette viser, at differentialet df for små $\underline{h}$ vil være en god tilnærmelse til funktionsdifferensen

$$\Delta f = f(\underline{x}_o+\underline{h}) - f(\underline{x}_o).$$

Dette forhold kan ofte med fordel benyttes ved usikkerheds-beregninger, hvilket vi skal se i et eksempel lidt senere, men først skal vi forsøge at give en geometrisk tolkning af differentialet

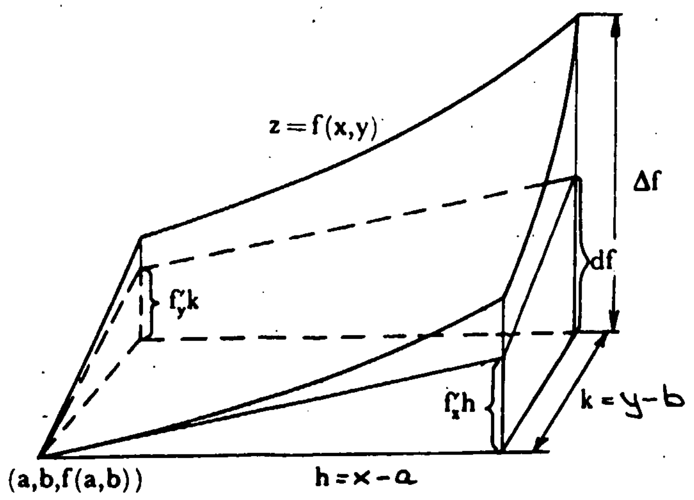
$$df(\underline{x}_o,\underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)h_2 + \ . \ . \ + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_o)h_k.$$

For overskuelighedens skyld vælger vi $f:R^2\to R$ og sætter $\underline{x}_o=(a,b)$ og $\underline{h}=(x-a,y-b)$. Vi ser, at den lineære afbildning

$$g(x,y) = f(a,b) + df((a,b),(x-a,y-b))$$

$$= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

beskriver en plan gennem punktet (a,b,f(a,b)), og den kaldes <u>tangentplanen</u> til f i punktet (a,b,f(a,b)).



Generelt beskriver differentialet df tangenthyperplanen til funktionen f i punktet $(\underline{x}_o, f(\underline{x}_o))$.

Eksempel: Vi skal bestemme tangentplanen til fladen $z=2x^2-y^2$ i punktet $(2,3,-1)$. Med $f(x,y)=2x^2-y^2$ er

$$f'_x(x,y)=4x \quad , \quad f'_y(x,y)=-2y$$

$$f'_x(2,3)=8 \quad , \quad f'_y(2,3)=-6$$

Da bliver tangentplanen i $(2,3,-1)$

$$z = f(2,3) + f'_x(2,3)(x-2) + f'_y(2,3)(y-3)$$

eller

$$z = -1 + 8(x-2) - 6(x-3)$$

eller

$$z = 8x - 6y + 1.$$

Eksempel: Til illustration af hvordan differentialet bruges ved usikkerhedsberegning eller fejlberegning, vil vi se på et forsøg til bestemmelse af tyngdeaccellerationen g ved det fri fald. Man måler faldtiden t i sekunder og faldlængden s i meter. Da kan g i m/sec^2 bestemmes af

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{eller} \quad g = 2s/t^2 .$$

Benævner vi måleusikkerhederne på s og t med ds og dt, kan vi fastlægge fejlen på g af

$$\Delta g = g(s+ds,t+dt) - g(s,t) \approx dg$$

$$= \frac{\partial g}{\partial s}ds + \frac{\partial g}{\partial t}dt = \frac{2}{t^2}ds - \frac{4s}{t^3}dt$$

Da $|ds|$ og $|dt|$ er små, vil således

$$|dg| \leqq \left|\frac{2}{t^2}\right| |ds| + \left|\frac{4s}{t^3}\right| |dt|$$

være et godt mål for fejlen på bestemmelsen af g.

Ofte vil det ikke være tilstrækkeligt at approksimere en flade med dens tangentplan i et punkt. Af hensyn til en senere anvendelse skal vi vise, at <u>hvis $f:A\to R, A\subseteq R^k$ er åben (og konveks) og hvis f har kontinuerte partielle afledede af anden orden, da vil for $\underline{x}_o$, $\underline{x}_o+\underline{h}\in A$ gælde, at</u>

$$f(\underline{x}_o+\underline{h}) = f(\underline{x}_o) + df(\underline{x}_o,\underline{h}) + \tfrac{1}{2}d^2f(\underline{x}_o,\underline{h}) + \varepsilon(\underline{h})\,\|\underline{h}\|^2$$

hvor $\varepsilon(\underline{h}) \to \underline{0}$ for $\underline{h} \to \underline{0}$.

For en funktion $g:R\to R$ findes der, hvis g er to gange differentiabel et <u>oskulerende andengradspolynomium</u> i et hvert punkt, dvs at parablen

$$y = g(a) + g'(a)(t-a) + \tfrac{1}{2}g''(a)(t-a)^2$$

vil være en god tilnærmelse til $y = g(t)$ i en omegn af a. Dette kan fx formuleres således, at der findes et $\tau \in]a,t[$ så

$$g(t) = g(a) + g'(a)(t-a) + \tfrac{1}{2}g''(\tau)(t-a)^2$$

Er nu $\underline{x}_o, \underline{x}_o+\underline{h} \in A$, antager vi tillige at

$$\underline{x}_o+t\underline{h} \in A \quad \text{for alle} \quad t \in [0,1]$$

(hvilket netop betyder, at A er konveks). Nu er funktionen $g:[o,1] \to R$ givet ved

$$g(t) = f(\underline{x}_o+t\underline{h})$$

differentiabel, da f er differentiabel, og videre er

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o+t\underline{h})h_i$$

Her er ifølge forudsætningerne alle funktionerne

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_o+t\underline{h}) \qquad i = 1,2,..,k$$

differentiable og vi har derfor

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_o+t\underline{h})h_i h_j$$

Anvendes det oksulerende andengradspolynomium får vi med $a=0$ og $t=1$, at

$$g(1) = g(0) + g'(0)\cdot 1 + \tfrac{1}{2}g'(\tau)1^2 \qquad \text{eller}$$

$$f(\underline{x}_o+\underline{h}) = f(\underline{x}_o) + df(\underline{x}_o,\underline{h}) + \tfrac{1}{2}d^2f(\underline{x}_o+\tau\underline{h},\underline{h}).$$

Da vi imidlertid antog, at f havde kontinuerte partielle afledede af anden orden, vil vi have

$$d^2f(\underline{x}_o+\tau\underline{h},\underline{h}) = d^2f(\underline{x}_o,\underline{h}) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{ij}(\underline{h})h_i h_j$$

Sætter vi

$$\varepsilon(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{ij}(\underline{h})\frac{h_i h_j}{\|\underline{h}\|^2} \quad \text{vil } \varepsilon(\underline{h}) \to 0 \quad \text{for} \quad \underline{h} \to \underline{0}$$

og vi har derfor

$$f(\underline{x}_o+\underline{h}) = f(\underline{x}_o) + df(\underline{x}_o,\underline{h}) + \tfrac{1}{2}d^2f(\underline{x}_o,\underline{h}) + \varepsilon(\underline{h})\|\underline{h}\|^2$$

hvor $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ for $\underline{h} \to \underline{0}$.

4.6 Minimum og maksimum.

Er $f:R \to R$ en differentiabel funktion, ved vi, at vi ud fra $f'(t_o) = 0$ samt fortegnet for f' i en omegn af t_o kan afgøre, om f vil have lokalt maksimum, lokalt minimum eller ikke i t_o. Vi skal nu forsøge at eftergå tilsvarende egenskaber for funktioner af flere variable, og det er nærliggende at lede efter punkter $\underline{x}_o \in A$ for en differentiabel funktion $f:A \to R$, $A \subseteq R^k$, hvor

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_o)=0\ ,$$

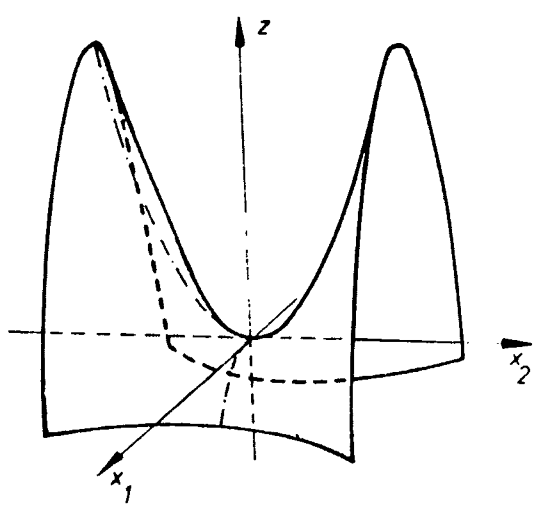
og undersøge om sådanne $\underline{x}_o$ kan være fx lokale maxima. Den formelle definition på et lokalt maksimum kommer lidt senere, men er formentlig intuitivt klar. Vi vil belyse forholdene med et eksempel. Lad $f:R^2 \to R$ være givet ved

$$f(x_1,x_2) = x_2^2 - x_1^2.$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1$

og $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$

vil $(x_1,x_2)=(0,0)$ opfylde egenskaben (*). Da imidlertid $f(0,0)=0$, mens $f(x_1,0)<0$ for $x_1 \neq 0$ og $f(0,x_2)>0$ for $x_2 \neq 0$, vil $(0,0)$ aldrig blive et lokalt ekstremum for f.



Vi kan altså ud fra eksemplet se, at (*) ikke er en tilstrækkelig betingelse til at afgøre lokalt ekstremum. Men lad os nu først formelt definere de begreber, vi skal arbejde med.

Er $A \subseteq R^k$, da siges $f:A \to R$ at have et <u>maksimum</u> i $\underline{x}_o \in A$, hvis der findes $\delta>0$ således, at

$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_o)$ for alle $\underline{x} \in A$ med $\|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta$.

Gælder der specielt

$f(\underline{x}) < f(\underline{x}_o)$ for alle $\underline{x} \in A$ med $0 < \|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta$

siges f at have <u>strengt maksimum</u>.

Tilsvarende siges f at have et minimum i $\underline{x}_o$, hvis der findes et $\delta>0$ således, at

$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_o)$ for alle $\underline{x} \in A$ med $\|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta$

og ligeledes er $\underline{x}_o$ strengt minimum hvis der gælder at

$f(\underline{x}) > f(\underline{x}_o)$ for alle $\underline{x} \in A$ med $0<\|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta$.

Med et fælles udtryk siger vi, at f har ekstremum i $\underline{x}_o$, hvis der enten er maksimum eller minimum i $\underline{x}_o$.

Et punkt $\underline{x}_o$ som er et indre punkt i A, hvor $f:A \to R$ har partielle afledede af første orden, og hvor

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_o)=0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_o)=0, \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_o)=0$$

kaldes et stationært punkt for f.

Vi kan nu vise, at egenskaben (*) er en nødvendig betingelse for ekstremum, idet

hvis $f:A \to R$ er differentiabel og hvis $\underline{a} \in A^o$ er et punkt, hvor f har ekstremum, da er $\underline{a}$ et stationært punkt for f.

For hvert $i=1,2,..,k$ ser vi på funktionen af én variabel

$$g_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

hvor g_i er defineret for de x, hvor $(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots$ $\ldots, a_k) \in A$. Da $\underline{a} \in A^o$, er g_i defineret i en omegn af a_i, og da f er differentiabel, er g_i det ligeså. Da nu f har ekstremum i $\underline{a}$, vil g_i have ekstremum i a_i, og derfor vil

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = g_i'(a_i) = 0$$

hvilket beviser sætningen.

For en funktion af en variabel $f: I \to R$, der er differentiabel i I, gælder som man måske erindrer, at hvis $t_o \in I$ er et stationært punkt (dvs $f'(t_o)=0$), og f to gange differentiabel, da har f strengt maksimum i t_o, hvis $f''(t_o)<0$, og strengt minimum i t_o, hvis $f''(t_o)>0$. Dette resultat skal vi forsøge at udvide til funktioner af flere variable. Vi vil vise følgende sætning:

Lad $A \subseteq R^k$ være en åben mængde, og lad $\underline{x}_o \in A$ være et stationært punkt for funktionen f med kontinuerte partielle afledede af anden orden. Vi betragter matricen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & . & . & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & . & . & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{pmatrix}$$

hvor de afledede beregnes i $\underline{x}_o$. Der gælder da

(i) Hvis $\underline{M}$ har lutter positive egenværdier har f strengt minimum i $\underline{x}_o$.

(ii) Hvis $\underline{M}$ har lutter negative egenværdier har f strengt maximum i $\underline{x}_o$.

(iii) Hvis $\underline{M}$ har såvel positive som negative egenværdier vil f ikke have ekstremum i $\underline{x}_o$.

Da de partielle afledede af anden orden af f er kontinuerte, har vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}_o) \qquad i,j = 1,2, .. ,k$$

og derfor er $\underline{M}$ symmetrisk. Dette betyder, at alle egenværdier er reelle, og at $\underline{M}$ ved et basisskift kan diagonaliseres netop med egenværdierne i diagonalen. Betragter vi tilvæksten $\underline{h}$ ser vi ved udregning, at

$$\underline{h}^t \underline{M}\, \underline{h} = d^2 f(\underline{x}_o, \underline{h})$$

og da samtidig $df(\underline{x}_o, \underline{h}) = 0$ (fordi $\underline{x}_o$ er et stationært punkt) har vi fra side 86, at

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_o) + \tfrac{1}{2}\underline{h}^t \underline{M}\, \underline{h} + \varepsilon(\underline{h}) \|\underline{h}\|^2 \quad ; \ \underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_o$$

hvor $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ for $\underline{h} \to \underline{0}$.

Da nu $\underline{M}$ kan diagonaliseres, vil $\underline{h}^t \underline{M}\, \underline{h}$ i den nye basis blive på formen

$$\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + . . . + \lambda_k h_k^2$$

og derfor bliver

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_o) + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + \ldots + \lambda_k h_k^2) + \varepsilon(\underline{h})\,\|\underline{h}\|^2.$$

(i) Vi antager, at egenværdierne er opskrevet således, at $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$.

Da vil vi få, at

$$f(x) \geq f(\underline{x}_o) + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 h_1^2 + \lambda_1 h_2^2 + \ldots + \lambda_1 h_k^2) + \varepsilon(\underline{h})\,\|\underline{h}\|^2$$

eller da $h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_k^2 = \|\underline{h}\|^2$, at

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_o) + (\tfrac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(\underline{h}))\,\|\underline{h}\|^2.$$

Da $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ for $\underline{h} \to \underline{0}$, og da $\lambda_1 > 0$, findes et $\delta > 0$ således, at

$$|\varepsilon(\underline{h})| < \tfrac{1}{2}\lambda_1 \quad \text{for } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| = \|\underline{h}\| < \delta$$

og dvs således, at

$$f(\underline{x}) > f(\underline{x}_o) \quad \text{for } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta$$

dvs f har strengt minimum i $\underline{x}_o$.

(ii) Antager vi nu, at $\underline{M}$ har lutter negative egenværdier, vil funktionen $-f$ have matricen $-\underline{M}$ i $\underline{x}_o$ med lutter positive egenværdier. Derfor vil $-f$ have strengt minimum i $\underline{x}_o$, dvs $-f(\underline{x}) > -f(\underline{x}_o)$ for alle $\underline{x} \in A$, hvor $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta$, eller

$$f(\underline{x}) < f(\underline{x}_o) \quad \text{for alle } \underline{x} \in A \text{ med } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta$$

dvs f har strengt maksimum.

(iii) Vi antager igen, at egenværdierne er opskrevet efter stigende værdi, og at $\lambda_1 < 0 < \lambda_k$. Vi vælger nu specielt $\underline{h} = (h_1, 0, \ldots, 0)$ dvs parallel med x_1-aksen, da vil

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_o) + (\tfrac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(\underline{h}))h_1^2$$

Da $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ for $\underline{h} \to \underline{0}$, og da $-\lambda_1 > 0$ findes et $\delta_1 > 0$ således, at

$$|\varepsilon(\underline{h})| < -\tfrac{1}{2}\lambda_1 \quad \text{for } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_1$$

eller, at $f(\underline{x}) < f(\underline{x}_o)$, dvs $\underline{x}_o$ kan ikke være minimum for f.
Vælger vi dernæst $\underline{h} = (0, 0, \ldots, h_k)$ får vi tilsvarende

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_o) + (\tfrac{1}{2}\lambda_k + \varepsilon(\underline{h}))h_k^2$$

Igen vælges et $\delta_2 > 0$ således, at

$$|\varepsilon(\underline{h})| < \tfrac{1}{2}\lambda_k \quad \text{for } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_2$$

eller at $f(\underline{x}) > f(\underline{x}_o)$, dvs $\underline{x}_o$ kan ikke være maksimum for f. Hermed er beviset for sætningen fuldendt.

Sætningen udtaler sig ikke om den situation, hvor 0 er egenværdi for $\underline{M}$, og som det fremgår af de følgende eksempler, kan man ikke af $\underline{M}$ afgøre, om der i det stationære punkt er ekstremum eller ej.

Eksempel: Er $f(x,y) = x^4 + y^4$, ser vi, at

$$f'_x(x,y) = 4x^3 \quad \text{og} \quad f'_y(x,y) = 4y^3.$$

Da er $(0,0)$ eneste stationære punkt for f, men af

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 \;, \quad f''_{xy}(x,y) = 0 \quad , \quad f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

ses, at $\underline{M}=\underline{0}$ (0-matricen). Ser vi imidlertid på $f(0,0)=0$, vil $f(x,y)>0$ for alle punkter $(x,y)\neq(0,0)$ dvs $(0,0)$ er strengt minimum for f.

Eksempel: Med $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5$ får vi, at

$$f'_x(x,y) = 4x(y-x^2)-5x^4 \quad , \quad f'_y(x,y) = 2(y-x^2)$$

dvs $(0,0)$ bliver eneste stationære punkt for f. Af

$$f''_{xx}(x,y) = -4y-12x^2-20x^3, \; f''_{xy}(x,y) = -4x, \; f''_{yy}(x,y) = 2$$

ses, at matricen bliver

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dvs sætningen giver ingen oplysning om ekstremum i $(0,0)$.

Af $\quad f(0,y) = y^2 \quad$ og $\quad f(x,x^2) = -x^5$

ses, at $f(0,y)>0$ for alle $y\neq0$, men at $f(x,x^2)<0$ for alle $x>0$. Dvs i enhver omegn af $(0,0)$ vil f antage både positive og negative værdier, og derfor kan værdien $f(0,0)=0$ ikke være ekstremum.

For k=2 kan sætningen formuleres lidt kortere, og man kan direkte af matricen $\underline{M}$ afgøre om funktionen har ekstremum. Vi har i denne situation

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

og vi benævner determinanten for $\underline{M}$ med

(*) $\quad D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$.

Med forudsætningerne fra forrige sætning kan vi nu vise, at er (x_o,y_o) et stationært punkt for f, vil

(i) $\quad f(x_o,y_o)$ være strengt minimum hvis $D>0$ og $f''_{xx}>0$,

(ii) $\quad f(x_o,y_o)$ være strengt maksimum hvis $D>0$ og $f''_{xx}<0$, og

(iii) $\quad f(x_o,y_o)$ ikke være ekstremumværdi, hvis $D<0$.

De to egenværdier λ_1 og λ_2 for $\underline{M}$ kan findes som rødder i ligningen

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}-\lambda & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f''_{xx}+f''_{yy})\lambda + D = 0$$

Da λ_1,λ_2 altså er rødder gælder, at

(Δ) $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = f''_{xx} + f''_{yy} \quad$ og $\quad \lambda_1\lambda_2 = D$

Hvis $D<0$ ville λ_1 og λ_2 have forskellige fortegn, og (iii) følger af (iii) i forrige sætning. Er $D>0$, ser vi af (*), at

$$f''_{xx}f''_{yy} = D + (f''_{xy})^2 > 0$$

og sammenholdt med (Δ) ses, at alle fire tal $\lambda_1,\lambda_2,f''_{xx}$, f''_{yy} vil have samme fortegn, dvs er fx $\lambda_1,\lambda_2>0$ følger (i) af (i) i forrige sætning og tilsvarende for (ii). Dermed er sætningen bevist.

<u>Eksempel</u>: Vi vil nu undersøge ekstremumsværdier for funktionen

$$f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4.$$

De stationære punkter findes af ligningerne

$$f'_x(x,y) = 2(x-y) - 4x^3 = 0$$

$$f'_y(x,y) = -2(x-y) - 4y^3 = 0.$$

Ved addition af ligningerne fås at

$$0 = x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Den sidste parantes har kun $(x,y)=(0,0)$ som løsning. Den første parantes giver, at $y=-x$. Dette indsættes fx i den første ligning, som da giver $x-x^3=0$ dvs $x=0$, $x=1$ eller $x=-1$. Da bliver de stationære punkter

$$(0,0)\ ,\ (1,-1)\ ,\ (-1,1)\ .$$

De partielle afledede af anden orden er nu

$$f''_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2\ ,\ f''_{xy}(x,y) = -2\ ,\ f''_{yy}(x,y) = 2-12y^2.$$

Determinanten i de tre punkter bliver da

$$D(0,0) = 0\ ,\ D(1,-1) = 96\ ,\ D(-1,1) = 96$$

Da endvidere $f''_{xx}(1,-1) = f''_{xx}(-1,1) = -10$ ses det, at såvel $(1,-1)$ som $(-1,1)$ er strengt maksimum for f. Derimod kan vi intet sige om $(0,0)$ ud fra tilsvarende overvejelser. Ser vi imidlertid på

$$f(x,0) = x^2-x^4 = x^2(1-x^2)\quad ,\quad \text{og}$$

$$f(x,x) = -2x^4$$

vil $f(x,0)>0$ for $x\in]-1,1[,x\neq0$ mens $f(x,x)<0$ for alle $x\neq0$, dvs overalt langs linien $y=x$. Således vil $f(0,0)=0$ ikke være ekstremum for f.

4.7 Største- og mindsteværdi.

En funktion $f:A\to R$ med $A\subseteq R^k$ siges at have størsteværdi i A, hvis der findes $\underline{x}_o\in A$, således at

$$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_o) \quad \text{for alle } \underline{x}\in A.$$

Tilsvarende skal det betyde, at f har mindsteværdi i A, hvis der findes $\underline{x}_o\in A$, således at

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_o) \quad \text{for alle } \underline{x}\in A.$$

Er $f:A\to R$ differentiabel kan vi af indledningen til afsnit 4.6 slutte, at hvis f har en størsteværdi (mindsteværdi), som antages i $\underline{a}\in A^o$, da vil $\underline{a}$ være et stationært punkt, idet jo en største- eller mindsteværdi så også er et ekstremum (men ikke nødvendigvis omvendt). Vi har derfor, at:

Hvis $f:A\to R$ har en størsteværdi (mindsteværdi), vil denne enten antages i et stationært punkt eller i et punkt på randen af A.

Det fremgår heraf, at hvis man ved, at f har en størsteværdi, da skal man blot sammenligne f's værdier i de stationære punkter i A med f's værdier på randen af A. Det afgørende er således, at afgøre, om der i det hele taget eksisterer en størsteværdi eller mindsteværdi for f. Til at afgøre dette kan man benytte følgende sætning, som gives uden bevis:

Enhver funktion $f: A \rightsquigarrow R$, der er kontinuert i en afsluttet og begrænset mængde $A \subseteq R^k$, har såvel en største- som en mindsteværdi i A.

Sætningen er en udvidelse af den fra gymnasiet velkendte sætning, at billedet af et afsluttet interval ved en kontinuert afbildning igen er et afsluttet interval. Antager vi nemlig også i sætningen ovenfor, at A er sammenhængende (to vilkårlige punkter kan forbindes med en kontinuert kurve), da vil $f(A)=[M,S]$ hvor M er mindsteværdien og S er størsteværdien for f.

Hvis A ikke er afsluttet og begrænset, må man ved en grænseværdiovervejelse søge at danne sig et skøn over f's værdier uden for en vis afsluttet og begrænset delmængde B af A. Da f har såvel største- som mindsteværdi på B, kan man tit - ved at vælge B passende - på denne måde afgøre, om f vil have største- eller mindsteværdi i A. Vi vil med fire eksempler illustrere, hvordan man benytter dette.

Eksempel: Funktionen $f:R^2 \rightsquigarrow R$ givet ved

$$f(x,y) = xy\sqrt{3-x^2-y^2}$$

er defineret og kontinuert på cirkelskiven $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 3\}$ og differentiabel i det indre af A. Da $f(x,y)=0$ for alle $(x,y) \in \partial A$ vil største- og mindsteværdi - som jo findes da A er afsluttet og begrænset - være i de stationære punkter.

Af

$$f'_x(x,y) = y\sqrt{3-x^2-y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}(3-2x^2-y^2) = 0$$

og

$$f'_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}(3-2y^2-x^2) = 0$$

vil man se, at de stationære punkter i A^o er

$$(0,0),\ (1,1),\ (-1,-1),\ (-1,1),\ (1,-1)$$

Ved indsættelse ses, at størsteværdien er

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 ,$$

og at mindsteværdien er

$$f(-1,1) = f(1,-1) = -1 .$$

Eksempel: Funktionen $f: R^2 \sim R$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{x+y}{2+x^2+y^2}$$

er differentiabel overalt i R^2. Da imidlertid R^2 ikke er begrænset, må vi finde en afsluttet, begrænset delmængde. Indfører vi polære koordinater, ser vi, at

$$|f(x,y)| = \frac{|x+y|}{2+r^2} \leq \frac{|x|+|y|}{2+r^2} < \frac{2r}{2+r^2} \to 0 \quad \text{for } r \to \infty ,$$

dvs blot vi vælger r tilstrækkelig stor, kan vi sikre, at funktionsværdierne uden for en afsluttet og begrænset cirkelskive bliver numerisk set mindre end værdierne i nogle stationære punkter. Vælges fx

$$B = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 10^2\}$$

vil $|f(x,y)| < \frac{1}{5}$ for alle $(x,y) \in \partial B \cup \complement B$.

Til beregning af de stationære punkter finder vi, at

$$f'_x(x,y) = \frac{2+x^2+y^2-(x+y)2x}{(2+x^2+y^2)^2} = 0$$

og

$$f'_y(x,y) = \frac{2+x^2+y^2-(x+y)2y}{(2+x^2+y^2)^2} = 0$$

Da kun tælleren kan blive 0 ser vi, at

$$(x+y)2x = 2+x^2+y^2 = (x+y)2y ,$$

eller at $x=y$, som indsat i fx den første ligning giver $x^2=1$, dvs de stationære punkter er

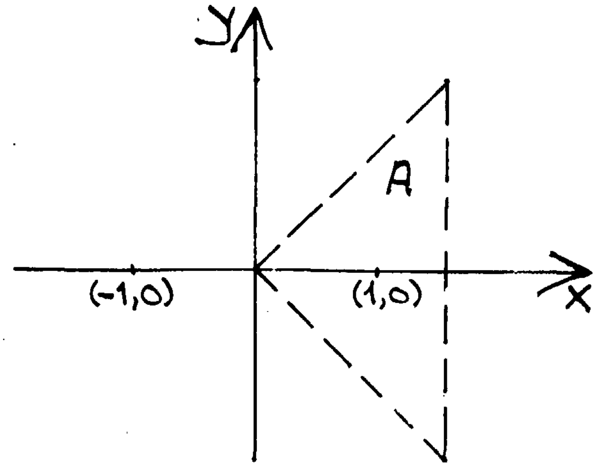
$$(1,1) \quad , \quad (-1,-1) .$$

Da nu $f(1,1)=\frac{1}{2}$ og $f(-1,-1)=-\frac{1}{2}$ har vi såvel største- som mindsteværdi for f, da alle kandidater på randen af og uden for B vil have værdier mellem $-\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{5}$.

Eksempel: Funktionen $f: R^2 \sim R$ givet ved

$$f(x,y) = e^{2x^2-x^4-2y^2}$$

skal undersøges for største- og mindsteværdi på mængden A, som er begrænset af linierne $y=x$, $y=-x$ og $x=\sqrt{2}$, jvf figuren. Vi finder først de stationære punkter af



$$f'_x(x,y)=(4x-4x^3)e^{\phi}=0$$

$$f'_y(x,y)=4ye^{\phi}=0$$

fås, da $e^{\phi}\neq 0$, at de stationære punkter bliver

$(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

Dernæst skal vi undersøge f på ∂A, som består af tre liniestykker. Af

$$f(x,x) = e^{2x^2-x^4-2x^2} = e^{-x^4}$$

ses, at f er monotont aftagende i det aktuelle interval $x\in[0,\sqrt{2}]$, dvs på denne del af randen vil alle funktionsværdier ligge mellem funktionsværdierne i $(0,0)$ og $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Derfor skal vi kun udregne værdien i disse to punkter. Tilsvarende argument fås for

$$f(x,-x) = e^{2x^2-x^4-2x^2} = e^{-x^4}$$

hvor punkterne $(0,0)$ og $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ skal undersøges. Endelig vil vi langs $x=\sqrt{2}$ få, at

$$f(\sqrt{2},y)= e^{4-4-2y^2} = e^{-2y^2}$$

der vil have et maksimum i $(\sqrt{2},0)$ og vil være aftagende på begge sider, hvorfor igen $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ og $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ også skal undersøges. Af

$$f(0,0)=1 \quad , \quad f(1,0)=e \quad , \quad f(\sqrt{2},0)=1$$

$$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = e^{-2}$$

ses, at e er størsteværdi og e^{-2} er mindsteværdi. (Bemærk, at $(-1,0)\notin A$).

<u>Eksempel:</u> Funktionen $f:R_+^2\to R$ givet ved

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

er differentiabel i første kvadrant, men R_+^2 er hverken afsluttet eller begrænset. Vi finder først de stationære punkter. Af

$$f'_x(x,y) = y - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2y = 1$$

$$f'_y(x,y) = x - \frac{1}{y^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 1$$

dvs (1,1) bliver eneste stationære punkt med $f(1,1)=3$. Vi vælger nu mængden

$$B_n = [\frac{1}{n},n]\times[\frac{1}{n},n] \text{ , hvor}$$

$$\{(1,1)\} = B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \dots \subset R_+^2 \quad \text{og} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = R_+^2.$$

Vi skal nu undersøge f på ∂B_n, som består af de fire liniestykker

$$\ell_1: \quad x = \frac{1}{n} \quad , \ y\in[\frac{1}{n},n]$$

$$\ell_2: \quad x = n \quad , \ y\in[\frac{1}{n},n]$$

$$\ell_3: \quad y = \frac{1}{n} \quad , \ x\in[\frac{1}{n},n]$$

$$\ell_4: \quad y = n \quad , \ x\in[\frac{1}{n},n]$$

Da x og y indgår symmetrisk i f kan vi nøjes med at undersøge ℓ_1 og ℓ_2. Af

$$f(\frac{1}{n},y) = \frac{y}{n} + n + \frac{1}{y} \quad \text{og} \quad f' = \frac{1}{n} - \frac{1}{y^2} = 0$$

ser vi, at der langs ℓ_1 skal undersøges punkterne $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n},\sqrt{n})$ og $(\frac{1}{n},n)$. Ligeså giver

$$f(n,y) = ny + \frac{1}{n} + \frac{1}{y} \quad \text{og} \quad f' = n - \frac{1}{y^2} = 0$$

at der langs ℓ_2 skal undersøges punkterne $(n,\frac{1}{n})$, $(n,\sqrt{\frac{1}{n}})$ og (n,n). Da

$$f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 2n + \frac{1}{n^2} \quad , \quad f(\frac{1}{n},\sqrt{n}) = n + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$f(\frac{1}{n},n) = f(n,\frac{1}{n}) = n + 1 + \frac{1}{n}$$

$$f(n,\sqrt{\frac{1}{n}}) = 2\sqrt{n} + \frac{1}{n} \quad , \quad f(n,n) = n^2 + \frac{2}{n}$$

vil $f(x,y)\rightarrow\infty$ for alle $(x,y)\in\partial B_n$, når $n\rightarrow\infty$. Dette viser, at f vil have mindsteværdien 3 på R_+^2 men ingen størsteværdi.

5. DIFFERENTIALLIGNINGER

Ideen med dette kapitel er ikke at give en systematisk indføring i løsning af differentialligninger, hverken analytisk eller numerisk. Derimod vil der blive introduceret og begrundet en mere kvalitativ metode til "løsning" af differentialligninger og systemer af koblede differentialligninger - lineær stabilitets analyse. Denne metode går ud på at beskrive, hvordan løsningerne til differentialligningerne i "store træk" vil forløbe ved at løse simplere eller systemer af simplere differentialligninger. Metoden vil først blive introduceret gennem et eksempel, som man også kan løse analytisk. Eksemplet består for overskuelighedens skyld kun af en ligning. Derefter vil metoden blive indført generelt, og der vil gennem eksempler især blive fokuseret på systemer af to eller tre koblede differentialligninger. Men inden vi starter, skal vi kort repetere lidt om løsning af første ordens differentialligninger.

5.1 Lineære 1.ordens differentialligninger.

Vi skal kort genkalde, hvordan man løser differentialligningen

(*) $\qquad y' + ay = b$

hvor a,b er kontinuerte funktioner på et interval J - dvs. at $a,b \in C^0(J)$. Denne type ligning kaldes en inhomogen, lineær differentialligning af 1.orden. Som man måske kan huske, løses den homogene ligning

$$y' + ay = 0$$

fx. ved følgende overvejelser. Er $y(t) \neq 0$ fås, at

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \Rightarrow (\ln y(t))' = -a(t)$$

$$\Rightarrow \ln y(t) = -A(t) \Rightarrow \underline{y(t) = e^{-A(t)}}$$

hvor $A'(t) = a(t)$. Man skal tillige erindre, at $e^{-A(t)} \neq 0$, når $t \in J$, dvs. når a er kontinuert.

Når vi skal løse den inhomogene ligning (*), ganger vi ligningen på begge sider med funktionen $e^{A(t)}$, som jo er positiv for alle $t \in J$.
Da kan (*) erstattes af

$$y'(t)\, e^{A(t)} + a(t)\, y(t)\, e^{A(t)} = b(t)\, e^{A(t)}$$

eller (prøv selv!)

$$(y(t)\, e^{A(t)})' = b(t)\, e^{A(t)}$$

eller

$$y(t)\, e^{A(t)} = \int b(t)\, e^{A(t)}\, dt + c$$

eller

$$(\Delta) \qquad \underline{y(t) = e^{-A(t)} \int b(t)\, e^{A(t)}\, dt + ce^{-A(t)}}$$

hvor $c \in R$.

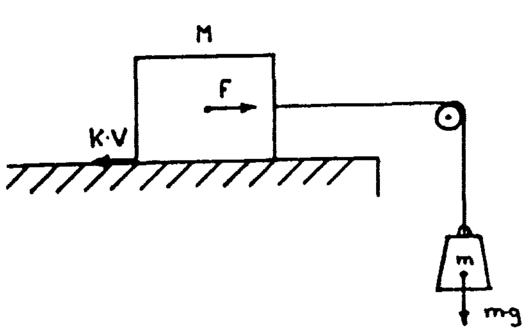
Heraf ser vi tillige, at løsningen til den homogene ligning bliver

$$\underline{y(t) = ce^{-A(t)}} \qquad c \in R$$

idet $b(t) = 0$ for alle $t \in J$.

<u>Eksempel:</u> En model for det på figuren skitserede system kan ud fra Newton's 2.lov ($F = M \cdot a$) omskrives til

$$-kv + mg = Ma ,$$



men da $a = v'$ fås differentialligningen

$$Mv' + kv = mg$$

eller

$$v' + \frac{k}{M}v = \frac{m}{M}g .$$

Denne ligning kan nu løses ved brug af (Δ), idet

$$a(t) = \frac{k}{M}, \quad b(t) = \frac{m}{M}g \quad \text{og} \quad A(t) = \frac{k}{M}t$$

Løsningen bliver da

$$v(t) = e^{-\frac{k}{M}t} \int \frac{m}{M}g \; e^{\frac{k}{M}t} dt + ce^{-\frac{k}{M}t}$$

eller

$$v(t) = \frac{m}{k}g + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Har kassen en starthastighed v_0, dvs. at $v(0) = v_0$, fås ved indsættelse, at

$$c = v_0 - \frac{m}{k}g$$

og da bliver løsninger til differentialligningen med denne startbetingelse

$$\underline{v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}g\,(1-e^{-\frac{k}{m}t})}$$

Dette viser, at hastigheden vil blive konstant, når tiden går, dvs. systemet vil søge mod ligevægten, $v' = 0$. Vender vi tilbage til den oprindelige ligning

$$Mv' + kv = mg$$

ser vi, at $v' = 0$ netop giver

$$v = \frac{m}{k}g \, .$$

5.2 Ikke-lineære differentialligninger af 1.orden.

En almindelig model for, hvordan en population med begrænsede føderessourcer vil udvikles, er den logiske ligning

$$y' = ay(1-by)$$

hvor a og b er reelle konstanter, og hvor y beskriver antallet af individer i populationen. En måde at løse ligningen på er følgende omskrivning

$$\frac{y'}{y(1-by)} = a \qquad \text{eller}$$

$$(\square) \qquad \frac{y'}{y} + \frac{by'}{1-by} = a$$

(prøv selv; det er nemmest at sætte den nederste ligning på fælles brøkstreg). For at omskrivningen er tilladt, må vi fx. forudsætte

$$0 < y(t) < \frac{1}{b} \; .$$

Da $\quad (\ln(1-by(t)))' = \dfrac{-by'(t)}{1-by(t)}$

får vi ved integration af $(\square)$, at

$$\ln y(t) - \ln(1-by(t)) = at + k$$

eller

$$\ln\frac{y(t)}{1-by(t)} = at + k$$

eller

$$\frac{y(t)}{1-by(t)} = e^{at}\cdot c_1 \qquad c_1 = e^k$$

Ved at isolere $y(t)$ i ligningen bliver

$$y(t) = \frac{c_1 e^{at}}{1+bc_1 e^{at}}$$

og ved at forkorte med $c_1 e^{at}$ er

$$y(t) = \frac{1}{b + ce^{-at}} \qquad c = \frac{1}{c_1}$$

Uanset værdien af c , vil $y(t) \to 1/b$, når $t \to \infty$. Igen ser vi, at systemet søger mod en ligevægt, dvs. svarende til $y' = 0$. Vender vi tilbage til ligningen

$$(*) \qquad y' = ay(1-by)$$

ser vi, at $y' = 0$ netop giver

$$y = 0 \quad \text{eller} \quad y = \frac{1}{b} .$$

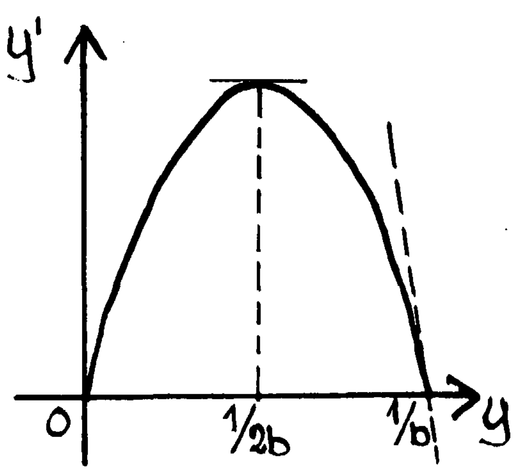
Vi vil nu nøjere ud fra den oprindelige ligning analysere, hvad der sker i nærheden af disse ligevægtspunkter.

Lad os skitsere (*) grafisk i et y-y' koordinatsystem - ikke sandt en parabel med toppunkt i $y = \frac{1}{2b}$ og nulpunktet i $y = 0$ og $y = \frac{1}{b}$.

Fra gymnasiet ved vi, at tangenten til grafen

$$f(y) = ay(1-by)$$

i en omegn af røringspunktet er en god approksimation til grafen.



I punktet $y = y_0$ bliver tangenten som bekendt

$$y' - y_0' = f'(y_0)(y - y_0)$$

Vi er kun interesseret i punkter, hvor $y_0' = 0$. Da bliver ligningen for tangenten i ligevægtspunkterne

$$y' = f'(y_0)(y-y_0)$$

Denne ligning er imidlertid en lineær ligning af 1.orden med konstante koefficienter, dvs. en ligning af formen

$$y' = \alpha y - \beta \qquad ; \quad \alpha,\beta \in R$$

der har løsningerne

$$y(t) = ce^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} \qquad ; \quad c \in R$$

her vil, når $\alpha > 0$: $y(t) \to \infty$ for $t \to \infty$

og når $\alpha < 0$: $y(t) \to -\frac{\beta}{\alpha}$ for $t \to \infty$

dvs. når $\underline{\alpha < 0}$ vil systemet søge mod ligevægt - være <u>stabilt</u>, og når $\underline{\alpha > 0}$ vil systemet søge væk fra ligevægt - være <u>ustabilt</u>.

I vores eksempel har vi

$$f(y) = ay(1-by),$$

og da er

$$f'(y) = a-2aby$$

dvs. $f'(0) = a > 0$ og $f'(\frac{1}{b}) = -a < 0$.

Med den indførte terminologi vil ligevægtspunktet $y = 0$ være ustabilt, mens ligevægtspunktet $y = 1/b$ vil være stabilt.

<u>Eksempel:</u> Har vi nu differentialligningen

$$y' = y(p-y)(q-y) \qquad ; \quad 0 < p < q$$

er vi ude af stand til at løse ligningen analytisk. Vi er således henvist til at lave en kvalitativ vurdering af systemets løsninger (eller løse det numerisk). Finder vi først de punkter, hvor systemet er i ligevægt, dvs. hvor $y' = 0$, finder vi, at

$$y = 0 \vee y = p \vee y = q \ .$$

Vi skal dernæst finde den afledede af

$$f(y) = y(p-y)(q-y)$$

som bliver (prøv selv!)

$$f'(y) = (p-y)(q-y)-y(p-y)-y(q-y)$$

Ved indsættelse af ligevægtspunkterne får vi, at

$$f'(0) = pq > 0, \quad f'(p) = -p(q-p) < 0 \quad \text{og}$$
$$f'(q) = -q(p-q) > 0, \quad \text{da } 0 < p < q$$

dvs. $y = 0$ og $y = q$ er ustabile, mens $y = p$ er stabilt. Dette betyder, at alle løsningskurver, som starter i et punkt $y \in]0,q[$ vil søge mod værdien $y = p$, når systemet udvikler sig.

5.3 Lineær stabilitetsanalyse.

I det følgende vil vi se på systemer af første ordens differentialligninger. Er $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t) \ldots x_k(t))$ en vektorfunktion og $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k): R^k \sim R^k$, kan et sådant differentialligningssystem skrives

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1,\ldots,x_k) \\ x_2' &= f_2(x_1,\ldots,x_k) \\ &\vdots \\ x_k' &= f_k(x_1,\ldots,x_k) \end{aligned}$$

eller på kort form

$$(*) \qquad \underline{x}' = \underline{f}(\underline{x}) \ .$$

Fra kapitlet om reelle funktioner ved vi, at hvis f_i, $i = 1,2,..,k$ har kontinuerte partielle afledede, kan f_i i en omegn af et punkt $\underline{x}_0$ approksimeres med tangentplanen til f_i i $\underline{x}_0$.

Dette følger jo af, at

$$f_i(\underline{x}_0+\underline{h})-f_i(\underline{x}_0) = df_i(\underline{x}_0,\underline{h})+\varepsilon_i(\underline{h})\,||\underline{h}||$$

hvor $\varepsilon_i(\underline{h})\to 0$ for $\underline{h}\to\underline{0}$. Da denne sammenhæng gælder for alle $i = 1,2,\ldots,k$, er det nærliggende (og korrekt) at formode, at dette også gælder for $\underline{f}$, dvs. at

$$\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h})-\underline{f}(\underline{x}_0) = d\underline{f}(\underline{x}_0,\underline{h}) + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\,||\underline{h}||$$

hvor $\underline{\varepsilon}(\underline{h})\to\underline{0}$ for $\underline{h}\to\underline{0}$. Her vil den lineære afbildning, som differentialet beskriver, have følgende udseende

$$d\underline{f}(\underline{x}_0,\underline{h}) = \underline{D\underline{f}}(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}$$

hvor $\underline{D\underline{f}}(\underline{x}_0)$ står for funktionalmatricen af $\underline{f}$ i $\underline{x}_0$, matricen af alle de første afledede af $\underline{f}$ dvs.

$$\underline{D\underline{f}}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

Er $\underline{x}_0$ nu et ligevægtspunkt for systemet (*) dvs. et punkt, hvor $\underline{x}' = \underline{0}$, kan (*) i en omegn erstattes af det lineære system, hvor $\underline{f}(\underline{x})$ approksimeres med tangentplanen til $\underline{f}$ i $\underline{x}_0$ dvs. af systemet.

(Δ) $\qquad \underline{x}' = \underline{D\underline{f}}(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0)$

idet jo $\quad \underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{0}$, da $\underline{x}' = \underline{0}$ i $\underline{x}_0$.

Eksempel: Vi skal nu se, hvordan det foran beskrevne vil udmønte sig for differentialligningsystemet

$$x' = 1-\frac{1}{4}x-y^2$$

$$y' = xy-3y$$

Vi fastlægger først ligevægtspunkterne, dvs. alle (x_0, y_0), hvor $x' = 0$ og $y' = 0$

eller

$$xy = 3y \quad \text{og} \quad \frac{1}{4}x+y^2 = 1$$

eller

$$(x = 3 \vee y=0) \quad \text{og} \quad \frac{1}{4}x+y^2=1 .$$

Det giver ligevægtspunkterne

$$(3,\frac{1}{2}), \ (3,-\frac{1}{2}) \quad \text{og} \quad (4,0) .$$

Når vi skal udregne det lineære system i omegnen af et ligevægtspunkt, skal vi altså udregne de partielle afledede af de - i dette tilfælde - to funktioner

$$f_1(x,y) = 1-\frac{1}{4}x-y^2$$

$$f_2(x,y) = xy-3y$$

dvs.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{4} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x-3$$

I en omegn af fx. punktet $(3,\frac{1}{2})$, vil vi få det til (Δ) svarende lineære differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Når vi således vil forsøge at sige noget kvalitativt om et ofte kompliceret system ved hjælp af lineære systemer i omegnen af ligevægtspunkterne, bliver det af central betydning dels at kunne løse lineære systemer af typen

$$\underline{x}' = \underline{Ax}$$

dels præcist at fastslå, hvornår den beskrevne <u>linearisering</u> er "tilladt".

Netop disse to emner vil dække resten af dette kapitel.

5.4 Løsning af lineære differentialligningssystemer.

Fra forrige afsnit havde vi, at en linearisering af differentialligningssystemet

$$\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x})$$

omkring et ligevægtspunkt $\underline{x}_0$, blev til det lineære differentialligningssystem

$$\underline{x}' = \underline{Df}(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0)$$

dvs. til et <u>inhomogent</u> ligningssystem af formen

$$(*) \qquad \underline{x}' = \underline{Ax} + \underline{b}$$

idet $\underline{A} = \underline{Df}(\underline{x}_0)$ og $\underline{b} = -\underline{Df}(\underline{x}_0)\underline{x}_0$.

Hvis $\underline{A}$ er invertibel, dvs. hvis $\det\underline{A} \neq 0$, vil én løsning til (*) være

$$\underline{x} = -\underline{A}^{-1}\underline{b}$$

og dertil skal så adderes samtlige løsninger til det <u>homogene</u> system

$$(\Delta) \qquad \underline{x}' = \underline{Ax} \ .$$

Det, der altså står tilbage, er at fastlægge løsningerne til dette ligningssystem.

Fra kapitlet om egenvektorer og egenværdier ved vi, at man gennem et basisskift kan bringe matricen $\underline{A}$ på diagonalform, eller næsten-diagonalform.

Dette vil vi udnytte i det følgende.

Vi vil indføre et basisskift, der på koordinatform er fastlagt ved

$$\underline{x} = \underline{Sy} \ ,$$

og da $\underline{S}$ er en konstant, invertibel matrix, er

$$\underline{x}' = \underline{Sy}'$$

Derfor vil systemet (Δ) ændres til

$$\underline{Sy}' = \underline{ASy}$$

eller

$$\underline{y}' = \underline{S}^{-1}\underline{ASy} ,$$

og vores problem er nu blot at fastlægge egenværdier og egenvektorer for $\underline{A}$, således at

$$\underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

bringes på diagonalform eller næsten-diagonalform.

Det transformerede system

$$\underline{y}' = \underline{S}^{-1}\underline{ASy}$$

vil blive opdelt i delsystemer, som kun er knyttet til en og samme egenværdi. De følgende eksempler skal illustrere, hvordan man løser systemer af lineære differentialligninger ved at transformere systemet.

<u>Eksempel:</u> Vi skal løse differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Af $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = 0$ ser vi, at egenværdierne bliver 3,6,9 og de tilhørende egenvektorer er fx.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Derfor vil koordinattransformationen $\underline{x} = \underline{Sy}$, hvor disse tre vektorer er søjlerne i $\underline{S}$, give differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Dette system opdeles i de tre simple differentialligninger

$$y_1' = 3y_1, \quad y_2' = 6y_2 \quad \text{og} \quad y_3' = 9y_3$$

der har løsningerne $(c_i \in R,\ i = 1,2,3)$

$$y_1(t) = c_1 e^{3t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{6t} \quad \text{og} \quad y_3(t) = c_3 e^{9t}.$$

Da kan vi ved at indsætte i $\underline{x} = S\underline{y}$ få løsningerne til det oprindelige ligningssystem til

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{6t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{9t}$$

<u>Eksempel:</u> Skal vi nu løse differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

har vi af eksemplet på side 39, at $\lambda = -1$ er egenværdi (tre gange). Hertil får vi vektorerne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvor <u>kun</u> de to første er egenvektorer. Med disse tre vektorer, som ny basis, vil det oprindelige ligningssystem, jfr. eksemplet, overføres i

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Dette system består altså af de tre simple differentialligninger

$y_1' = -y_1$, $y_2' = -y_2+y_3$ og $y_3' = -y_3$

der har løsningerne ($c_i \in R$; $i = 1,2,3$)

$y_1(t) = c_1e^{-t}$, $y_3(t) = c_3e^{-t}$ og $y_2(t) = (c_2+c_3t)e^{-t}$.

Indsættes dette i $\underline{x} = \underline{S}\underline{y}$ bliver løsningen til det oprindelige system

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Eksempel: Har vi differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ved vi fra det gennemgående regneeksempel fra side 36 til 38, at $\lambda = 1$ er egenværdi for matricen (tre gange). Videre så vi, at der kun var én egenvektor, men hvis vi brugte koordinattransformationen $\underline{x} = \underline{S}\underline{y}$ givet ved

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

blev differentialligningssystemet transformeret til

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$

Dette system består altså af de tre simple differentialligninger

$$y_1' = y_1+y_2\ ,\quad y_2' = y_2+y_3 \text{ og } y_3' = y_3\ .$$

Løses disse ligninger (bagfra) fås (hvor $c_i \in R;\ i = 1,2,3$) $y_3(t) = c_3e^t$,

$$y_2(t)=(c_2+c_3t)e^t\ ,\quad y_1(t)=(c_1+c_2t+\frac{c_3}{2}t^2)e^t$$

Indsættes nu disse løsninger i $\underline{x} = \underline{S}\underline{y}$, får vi altså løsningerne til det oprindelige system til

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2-t \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ -t+1 \end{pmatrix}e^t$$

Disse tre eksempler illustrerer, hvordan man kan løse et lineært differentialligningssystem, hvis den tilhørende matrix har reelle egenværdier. Da man ønsker samtlige reelle løsningsfunktioner til et sådant ligningssystem, synes det ikke umiddelbart muligt at løse systemet, hvis matricen har komplekst konjugerede egenværdier.

5.5 Komplekse løsninger.

I kapitel 2 blev det nævnt, hvis $\alpha+i\beta$ er egenværdi for en reel matrix $\underline{A}$, er også $\alpha-i\beta$ egenværdi, og hvis $\underline{v} = \underline{v}_1+i\underline{v}_2$ var egenvektor svarende til $\alpha+i\beta$, var $\overline{\underline{v}} = \underline{v}_1-i\underline{v}_2$ egenvektor svarende til $\alpha-i\beta$. Dette vil vi vise her. Er F den lineære afbildning, der har matricen $\underline{A}$, gælder, at

(*1) $\quad F(\underline{v}_1+i\underline{v}_2) = (\alpha+i\beta)(\underline{v}_1+i\underline{v}_2)$.

og vi skal tilsvarende vise, at

(*2) $\quad F(\underline{v}_1-i\underline{v}_2) = (\alpha-i\beta)(\underline{v}_1-i\underline{v}_2)$.

Af (*1) får vi

$$F(\underline{v}_1)+iF(\underline{v}_2) = \alpha\underline{v}_1-\beta\underline{v}_2+i(\alpha\underline{v}_2+\beta\underline{v}_1)$$

eller at

$$F(\underline{v}_1) = \alpha\underline{v}_1-\beta\underline{v}_2 \quad \text{og} \quad F(\underline{v}_2) = \alpha\underline{v}_2+\beta\underline{v}_1 \quad ,$$

Når vi skal vise (*2), giver højre side, at

$$\begin{aligned}(\alpha-i\beta)(\underline{v}_1-i\underline{v}_2) &= \alpha\underline{v}_1-\beta\underline{v}_2-i(\alpha\underline{v}_2+\beta\underline{v}_1)\\ &= F(\underline{v}_1)-iF(\underline{v}_2)\\ &= F(\underline{v}_1-i\underline{v}_2)\end{aligned}$$

hvorved påstanden er vist. Dette skal vi nu benytte til at løse differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\underline{A}$ har de to komplekse egenværdier $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$. Vi vælger $\underline{v}$ og $\bar{\underline{v}}$ som søjler i matricen $\underline{S}$, og da får vi det transformerede differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

der består af de to ligninger

$$y_1' = (\alpha + i\beta)y_1 \quad \text{og} \quad y_2' = (\alpha - i\beta)y_2 \; .$$

Disse to ligninger har løsningerne (j.fr. side 54)

$$(*) \qquad y_1(t) = c_1e^{(\alpha+i\beta)t} = c_1e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$$y_2(t) = c_2e^{(\alpha-i\beta)t} = c_2e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t) \; .$$

Skal vi nu have løsningerne til det oprindelige system, får vi af $\underline{x} = \underline{Sy}$, at

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2\bar{\underline{v}}e^{(\alpha-i\beta)t} .$$

Vi vil nu godtgøre, at disse løsninger også kan skrives som reelle funktioner. Lad os nu benytte $\underline{v} = \underline{v}_1 + i\underline{v}_2$ og løsningerne (*), da er

$$\underline{v}e^{(\alpha+i\beta)t} = (\underline{v}_1 + i\underline{v}_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$= e^{\alpha t}[\underline{v}_1\cos\beta t - \underline{v}_2\sin\beta t + i(\underline{v}_1\sin\beta t + \underline{v}_2\cos\beta t)]$$

og

$$\bar{\underline{v}}e^{(\alpha-i\beta)t} = (\underline{v}_1 - i\underline{v}_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

$$= e^{\alpha t}[\underline{v}_1\cos\beta t - \underline{v}_2\sin\beta t - i(\underline{v}_1\sin\beta + \underline{v}_2\cos\beta t)]$$

Vi sætter nu

$$\underline{u}_1(t) = e^{\alpha t}(\underline{v}_1\cos\beta t - \underline{v}_2\sin\beta t)$$

$$\underline{u}_2(t) = e^{\alpha t}(\underline{v}_1\sin\beta t + \underline{v}_2\cos\beta t)$$

og løsningerne bliver

$$\underline{x}(t) = c_1(\underline{u}_1(t) + i\underline{u}_2(t)) + c_2(\underline{u}_1(t) - i\underline{u}_2(t))$$

Da nu c_1 og c_2 er komplekse tal, vælger vi dem fx. som

$$2c_1 = k_1 + ik_2 \quad \text{og} \quad 2c_2 = k_1 - ik_2$$

da bliver

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2}(k_1 + ik_2)(\underline{u}_1(t) + i\underline{u}_2(t))$$

$$+ \frac{1}{2}(k_1 - ik_2)(u_1(t) - iu_2(t))$$

$$= k_1\underline{u}_1(t) + k_2\underline{u}_2(t)$$

eller med $u_1(t)$ og $u_2(t)$ skrevet ud

$$\underline{x}(t) = k_1 e^{\alpha t}(\underline{v}_1\cos\beta t - \underline{v}_2\sin\beta(t))$$
$$+ \; k_2 e^{\alpha t}(\underline{v}_1\sin\beta t + \underline{v}_2\cos\beta(t))$$

Eksempel: Vi ser nu på differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Fra eksemplet på side 35 ved vi, at i og $-i$ er egenværdi med egenvektorerne

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{\underline{v}} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs. at

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da bliver løsningerne til ligningssystemet, idet $\alpha = 0$ og $\beta = 1$,

$$x_1(t) = k_2\cos t - k_1\sin t$$
$$x_2(t) = k_1\cos t + k_2\sin t .$$

Skriver vi det oprindelige ligningssystem i eksemplet ud, får vi, at

$$x_1' = x_2 \quad \text{og} \quad x_2' = -x_1 .$$

Differentieres den første ligning, bliver

$$x_1'' = x_2' = -x_1$$

dvs. løsningerne til den anden ordens differentialligning

$$x_1'' = -x_1$$

er $x_1(t) = k_2\cos t - k_1\sin t$.

Dette bekræfter som antydet på side 7, at

$$\dim\{f \in C^2 \mid f'' + f = 0\} = 2 .$$

Eksempel: Vi skal finde alle reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -2y + z \\ z' &= -2z + w \\ w' &= x - 2w \,. \end{aligned}$$

Når vi skal udregne $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$, gøres dette ved at udvikle efter en række eller søjle. Herved finder man $(2+\lambda)^4 - 1 = 0$, dvs. egenværdierne er

$$\lambda = -1,\ \lambda = -3,\ \lambda = -2+i,\ \lambda = -2-i$$

svarende til $\lambda = -1$ findes $\underline{x}_1^t = (1,1,1,1)$,

svarende til $\lambda = -3$ findes $\underline{x}_2^t = (1,-1,1,-1)$, og

svarende til $\lambda = -2+i$ findes $\underline{v}^t = (1,i,-1,-i)$

Opsplittes $\underline{v}$ i real- og imaginærdel som $\underline{v} = \underline{v}_1 + i\underline{v}_2$, er

$$\underline{v}_1^t = (1,0,-1,0) \quad \text{og} \quad \underline{v}_2^t = (0,1,0,-1)$$

Vælges nu et basisskrift med matrix $\underline{S}$, således at vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{v}$ og $\overline{\underline{v}}$ bliver søjler i $\underline{S}$, transformeres ligningssystemet til

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Disse fire ligninger får løsningerne

$u_1(t) = c_1 e^{-t}$, $u_2(t) = c_2 e^{-3t}$, $u_3(t) = c_3 e^{-2t} e^{it}$

$u_4(t) = c_4 e^{-2t} e^{-it}$,

og når vi transformerer tilbage med $\underline{S}$ bliver en fuldstændig løsning

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1 e^{-t} + c_2\underline{x}_2 e^{-3t} + (c_3\underline{v}e^{it} + c_4\bar{\underline{v}}e^{-it})e^{-2t}$$

Her kan parantesen imidlertid omskrives som vist på side 114, således at

$$c_3\underline{v}e^{it} + c_4\bar{\underline{v}}e^{-it} = k_3(\underline{v}_1\cos t - \underline{v}_2\sin t) + k_4(\underline{v}_1\sin t + \underline{v}_2\cos t) .$$

Hermed bliver en fuldstændig, reel løsning

$$\underline{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-3t} + k_3\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\-\cos t\\\sin t\end{pmatrix}e^{-2t} + k_4\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\\-\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}e^{-2t}$$

Bemærk, at alle egenværdier har negativ realdel eller er negative, dvs. at $e^{-t} \to o$, $e^{-3t} \to o$ og $e^{-2t} \to o$ for $t \to \infty$. Da de trigonometriske funktioner er begrænsede, vil

$$\underline{x}(t) \to \underline{o} \quad \text{for} \quad t \to \infty ,$$

og vi ser, at systemet søger mod et ligevægtspunkt, dvs. systemets løsninger vil alle være stabile.

5.6 Lineariseringssætningen.

Vi vender nu tilbage til den oprindelige situation med et ikke lineært differentialligningssystem

$$\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x})$$

som vi forsøgte at linearisere omkring ligevægtspunktet $\underline{x}_0$, (dvs. hvor $\underline{x}' = \underline{0}$ eller $\underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{0}$) . Da ville det lineære system have formen

$$\underline{x}' = \underline{Df}(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0) .$$

Spørgsmålet er nu, hvornår dette lineariserede system kan sige noget "meningsfyldt" om det oprindelige system. Svaret ligger i følgende sætning:

<u>Hvis $\underline{Df}(\underline{x}_0)$ er invertibel</u> (dvs. 0 ikke er egenværdi), <u>og hvis der ikke er rent imaginære egenværdier, da vil løsningskurverne for det ikke-lineære system og for det lineariserede system i en omegn af $\underline{x}_0$ være kvalitativt ens</u>.

Ved "kvalitativt ens" forstås, at løsningskurverne til såvel det lineariserede som det oprindelige system i en omegn af $\underline{x}_0$ vil forløbe på omtrent samme måde, fx. hvis løsningskurverne til det oprindelige system vil søge mod $\underline{x}_0$, da vil løsningskurverne for det lineariserede system gøre det samme og visa versa. Hvis løsningskurverne spiralerer ind mod $\underline{x}_0$ i det ene system, vil de også gøre det i det andet system.

Det virker rimeligt at forlange, at $\underline{Df}(\underline{x}_0)$ skal være invertibel, da der ellers vil gælde, at $\underline{f}$ ikke vil være injektiv i en omegn af $\underline{x}_0$. Derimod synes den anden betingelse, om at der ikke må optræde egenværdipar af formen $i\beta$ og $-i\beta$, vanskeligere gennemskuelig. Imidlertid skal følgende eksempel understrege, at betingelsen er nødvendig.

<u>Eksempel:</u> Vi betragter systemet

$$x_1' = -x_2 + \varepsilon x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$x_2' = x_1 + \varepsilon x_2(x_1^2+x_2^2)$$

(hvor $\varepsilon = +1$ eller $\varepsilon = -1$), i en omegn af (0,0). Lineariserer vi systemet omkring (0,0), får vi

$$x_1' = -x_2 \quad \text{og} \quad x_2' = x_1$$

der j.fr. eksemplet på side 115 vil have egenværdier $+i$ og $-i$, og vi har fx.

$$x_1 = a\cos(t-t_0) \text{ og } x_2 = a\sin(t-t_0),\quad a,t_0 \in R$$

hvilket jo beskriver koncentriske cirkler med radius a (se omstående figur (c)).

Skal vi analysere de ikke-lineære systemer ($\varepsilon = +1$ og $\varepsilon = -1$) er det lettest at benytte polære koordinater

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \,, \quad \operatorname{tg} v = \frac{x_2}{x_1} \,.$$

Af kædereglen - j.fr. side 79 - fås, at

$$2rr' = 2x_1x_1'+2x_2x_2'$$

$$= 2x_1(-x_2+\varepsilon x_1r^2)+2x_2(x_1+\varepsilon x_2r^2)$$

$$= 2\varepsilon(x_1^2+x_2^2)r^2 = 2\varepsilon r^4$$

og at

$$\frac{1}{\cos^2 v}\, v' = \frac{x_1x_2'-x_2x_1'}{x_1^2}$$

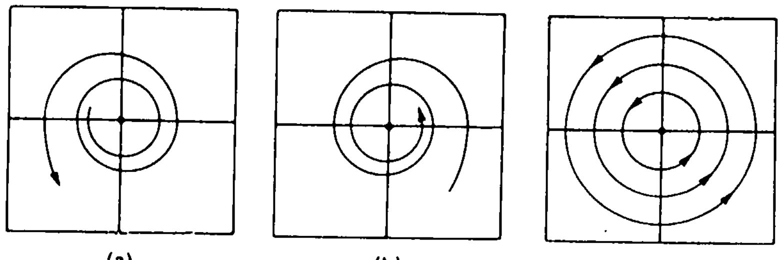
$$= \frac{x_1(x_1+\varepsilon x_2r^2)-x_2(-x_2+\varepsilon x_1r^2)}{r^2\cos^2 v}$$

$$= \frac{x_1^2+x_2^2}{r^2\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v} \,.$$

således er

$$r' = \varepsilon r^3 \text{ og } v' = +1 \,.$$

Den sidste ligning viser, at løsningskurverne bevæger sig med konstant hastighed i den positive (mod uret) omløbsretning, mens den første ligning udtaler sig om, hvorvidt radius r bliver kortere eller længere. Når $\varepsilon = +1$ vil - se figur (a) -



(a) (b) (c)

løsningskurverne bevæge sig væk fra $(0,0)$, da $r' > 0$, og når $\varepsilon = -1$ vil - se figur (b) - løsningskurverne bevæge sig ind mod $(0,0)$, da $r' < 0$.

Vi ser således, at de to ikke-lineære systemer (for $\varepsilon = +1$ og $\varepsilon = -1$) vil have kvalitativt forskellige løsningskurver, samt at de vil have den samme lineariserede system, hvor løsningskurverne er koncentriske cirkler, svarende til at $\underline{Df}(0,0)$ har egenværdierne i og -i.

Den nævnte sætning - lineariseringssætningen - skal vi ikke vise, men man skal være opmærksom på, at sætningen har et nært slægtskab med sætningen fra afsnit 4.6 om maksimum og minimum. Vi betragter jo differentialligningssystemer

$$\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x})$$

i en omegn af et punkt, hvor $\underline{x}' = \underline{0}$ eller $\underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{0}$. Derved bliver det egenværdierne for

$$\underline{Df}(\underline{x}_0)$$

der afgører, om en løsningskurve $\underline{x}(t)$ vil søge mod $\underline{x}_0$ eller ikke. Vi kan hurtigt af de foregående eksempler se, at såfremt alle egenværdier er negative (eller har negativ realdel), vil løsningskurverne til

$$\underline{x}' = \underline{Df}(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0)$$

søge mod ligevægtspunktet $\underline{x}_0$.

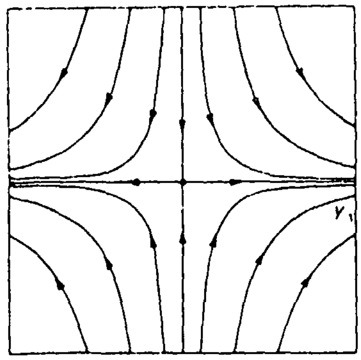
Til slut vil vi give et fuldstændigt billede af, hvordan stabilitetsforholdene vil være for det lineære system

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

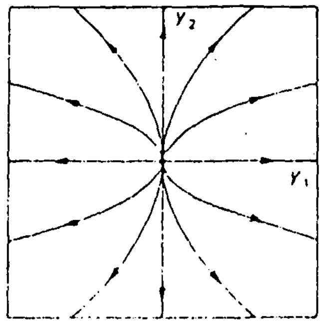
For dette system bestemmes egenværdierne af anden gradsligningen

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 .$$

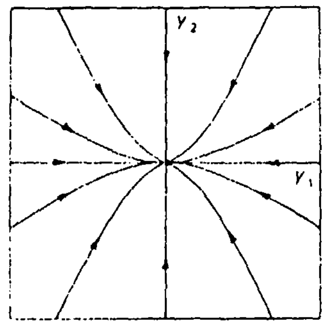
1. $D < 0$



2. $0 < D < \frac{1}{4}s^2$

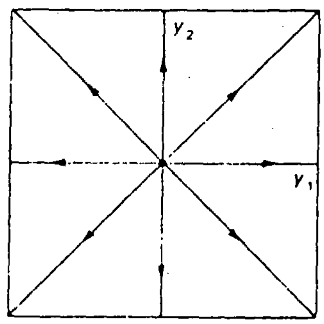


$s > 0$

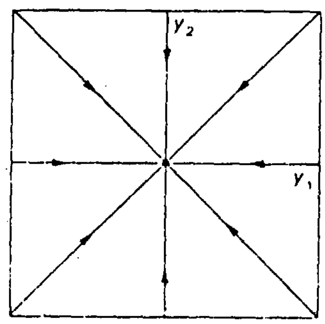


$s < 0$

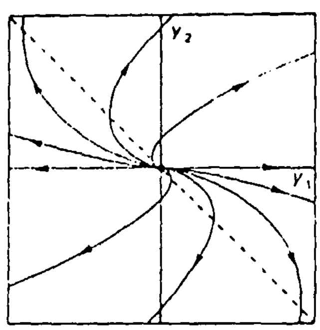
3. $D = \frac{1}{4}s^2$

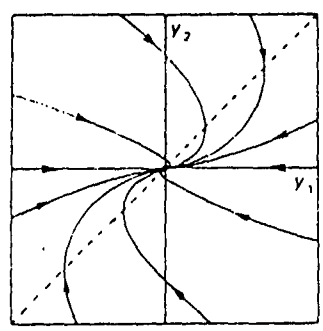


$s > 0$

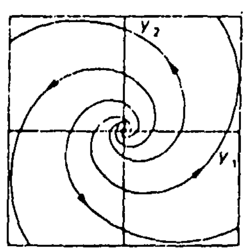


$s < 0$

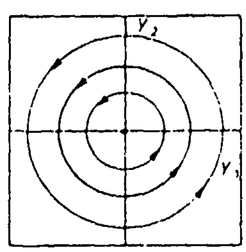




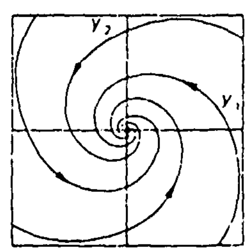
4. $D > \frac{1}{4}s^2$



$s > 0$



$s = 0$



$s < 0$

Indføres betegnelserne $s = a + d$ og $D = ad - bc$ kan man for forskellige kombinationer sktsere løsningskurverne til systemet i omegnen af $(0,0)$, j.fr. figurerne på modstående side. Her vil man se, at løsningskurverne i alle tilfælde, hvor $s > 0$ og $D > 0$, vil søge væk fra ligevægtspunktet, dvs. punktet er ustabilt. Tilsvarende vil ligevægtspunktet være stabilt, når $s < 0$ og $D > 0$, idet løsningskurverne vil søge ind mod punktet. Situationen $s = 0$ og $D > 0$ svarer til figur (c) på side 119, i dette tilfælde kaldes ligevægtspunktet neutralt stabilt eller et center. Endelig kaldes et ligevægtspunkt, hvor $D < 0$ for et sadelpunkt.

Bilag 1

Determinanten som rumfangsmål.

Betragter vi et ordnet par $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ af vektorer i planen, er parret positivt orienteret, hvis den korteste drejning, der giver $\underline{u}_1$, samme retning som $\underline{u}_2$, er en positiv drejning, dvs. mod uret.

Vi skal også definere orientering af lineært uafhængige taltripler $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$. Vi vil sige, at sættet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ er positivt orienteret, hvis den korteste drejning, som giver $\underline{u}_1$ samme retning som $\underline{u}_2$ - set fra spidsen af $\underline{u}_3$ - er positiv (se figur 1). I modsat fald kaldes sættet negativt orienteret.

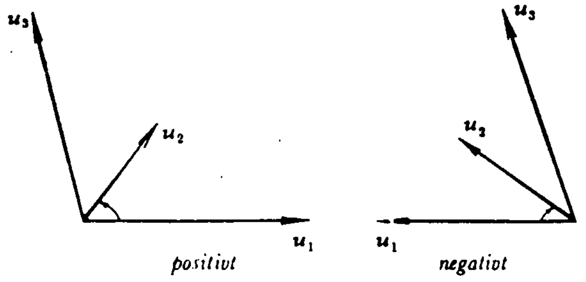


Fig. 1

Eksempel: Med tommel-, pege- og langfinger på højre hånd får man et positivt orienteret tripel, mens de samme fingre på venstre hånd giver et negativt orienteret tripel. Af denne grund benyttes tit navnet højreorienteret - hhv. venstreorienteret i stedet for positivt hhv. negativt orienteret.

De tre vektorer $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ kan permuteres på seks måder, hvor $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$; $(\underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_1)$ og $(\underline{u}_3, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ er orienteret ens, mens

$(\underline{u}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_3)$; $(\underline{u}_1, \underline{u}_3, \underline{u}_2)$ og $(\underline{u}_3, \underline{u}_2, \underline{u}_1)$
har den modsatte orientering.

Tre lineært uafhængige vektorer $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ bestemmer et parallelepipedum (se figur 2), som har de tre vektorer som kanter.

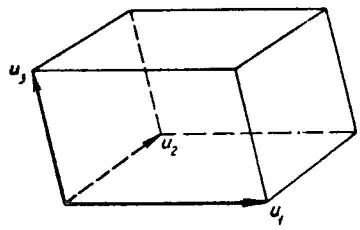


Fig. 2

Vi benævner rumfanget af dette legeme med

$$W(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \ .$$

Videre definerer vi et rumfang med fortegn ved

$$V(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \begin{cases} W(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) & \text{hvis } (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \text{ er pos.orienteret.} \\ 0 & \text{hvis } (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \text{ ligger i en plan.} \\ -W(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) & \text{hvis } (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \text{ er neg.orienteret.} \end{cases}$$

Dette rumfangs værdi er altså afhængigt af den rækkefølge, hvori vektorerne nævnes. Vender vi tilbage til de seks måder, hvorpå de tre vektorer kunne permuteres, kan vi se, at

$$(*1) \quad V(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = V(\underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_1) = V(\underline{u}_3, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$$
$$= \quad -V(\underline{u}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_3) = -V(\underline{u}_1, \underline{u}_3, \underline{u}_2) = -V(\underline{u}_3, \underline{u}_2, \underline{u}_1) \quad .$$

Videre kan vi indse følgende regneregler for rumfang med fortegn

$$(*2) \quad V(\lambda\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \lambda V(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$$

$$(*3) \quad V(\underline{u}_1' + \underline{u}_1'', \underline{u}_2 ; \underline{u}_3) = V(\underline{u}_1', \underline{u}_2, \underline{u}_3) + V(\underline{u}_1'', \underline{u}_2, \underline{u}_3)$$

(se figur 3).

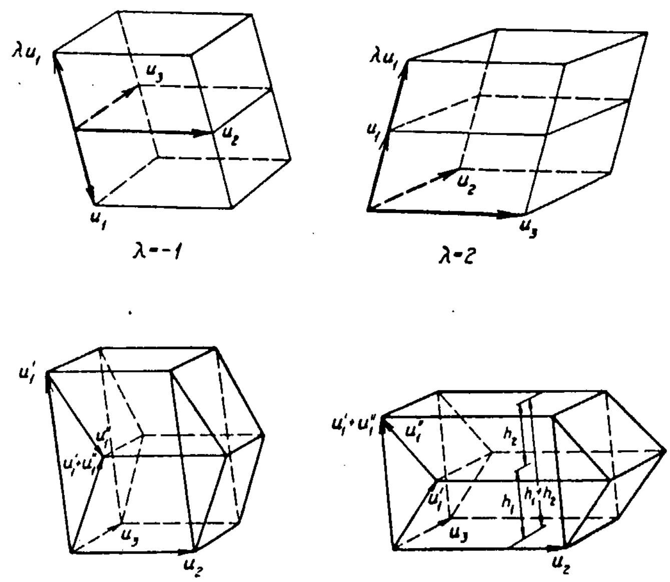


Fig. 3

Tilsvarende regler gælder for de øvrige vektorpladser, hvilket ses ved permutation.

Vi kan nu vise følgende sætning:

Er $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ en basis i R^3 og er sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ fastlagt ved

$$\underline{v}_1 = a_{11}\underline{u}_1 + a_{21}\underline{u}_2 + a_{31}\underline{u}_3$$

$$\underline{v}_2 = a_{12}\underline{u}_1 + a_{22}\underline{u}_2 + a_{32}\underline{u}_3$$

$$\underline{v}_3 = a_{13}\underline{u}_1 + a_{23}\underline{u}_2 + a_{33}\underline{u}_3$$

bliver

$$V(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = V(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Beviset for sætningen bygger stort set på regnereglerne (*1) - (*3). Af (*2) og (*3) fås, at

$$V(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = V(a_{11}\underline{u}_1 + a_{21}\underline{u}_2 + a_{31}\underline{u}_3, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

$$= a_{11}V(\underline{u}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) + a_{21}V(\underline{u}_2, \underline{v}_2, \underline{v}_3) + a_{31}V(\underline{u}_3, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

(Δ1) $$= \sum_{j=1}^{3} a_{j1} V(\underline{u}_j, \underline{v}_2, \underline{v}_3) .$$

For hvert $\underline{u}_j$ får vi dernæst igen af (*2) og (*3), at

$$V(\underline{u}_j,\underline{v}_2,\underline{v}_3)=V(\underline{u}_j,a_{12}\underline{u}_1+a_{22}\underline{u}_2+a_{32}\underline{u}_3,\underline{v}_3)$$

$$=a_{12}V(\underline{u}_j,\underline{u}_1,\underline{v}_3)+a_{22}V(\underline{u}_j,\underline{u}_2,\underline{v}_3)+a_{32}V(\underline{u}_j,\underline{u}_3,\underline{v}_3)$$

$$(\Delta 2) \qquad = \sum_{k=1}^{3} a_{k2}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{v}_3) \ .$$

Endelig får vi for hver $\underline{u}_j$ og $\underline{u}_k$ af (*2) og (*3), at

$$V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{v}_3)=V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,a_{13}\underline{u}_1+a_{23}\underline{u}_2+a_{33}\underline{u}_3)$$

$$=a_{13}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_1)+a_{23}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_2)+a_{33}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_3)$$

$$(\Delta 3) \qquad = \sum_{\ell=1}^{3} a_{\ell 3}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_\ell) \ .$$

Sammenstykkes nu (Δ1) - (Δ3), ser vi, at

$$(\Delta 4) \qquad V(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3) = \sum_{j=1}^{3}\ \sum_{k=1}^{3}\ \sum_{\ell=1}^{3} a_{j1}a_{k2}a_{\ell 3}V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_\ell) \ .$$

Ifølge definitionen på rumfanget vil imidlertid alle led $V(\underline{u}_j,\underline{u}_k,\underline{u}_\ell)$, hvor blot to af indices j,k,ℓ er ens, få rumfang 0. Således vil der kun blive ialt seks led af tripelsummen i (Δ4), som ikke er 0.
Vi har da, at

$$\begin{aligned} V(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)=&\,a_{11}a_{22}a_{33}V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3) \\ &+a_{21}a_{32}a_{13}V(\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_1)+a_{31}a_{12}a_{23}V(\underline{u}_3,\underline{u}_1,\underline{u}_2) \\ &+a_{21}a_{12}a_{33}V(\underline{u}_2,\underline{u}_1,\underline{u}_3)+a_{11}a_{32}a_{23}V(\underline{u}_1,\underline{u}_3,\underline{u}_2) \\ &+a_{31}a_{22}a_{13}V(\underline{u}_3,\underline{u}_2,\underline{u}_1) \end{aligned}$$

Af (*1) ser vi, at de tre første vil have samme fortegn som $V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$, mens de tre sidste vil have modsat fortegn.
Da bliver

$$\begin{aligned} V(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)=&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\ &-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}a-a_{31}a_{22}a_{13})V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3) \end{aligned}$$

eller

$$V(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3) = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$$

———0———

Er $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$ igen én basis i R^3, og er den lineære afbildning $F:R^3 \to R^3$ givet ved

$$F(\underline{u}_k) = a_{1k}\underline{u}_1 + a_{2k}\underline{u}_2 + a_{3k}\underline{u}_3 \quad ; \quad k = 1,2,3$$

bliver den til F svarende matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$$

Vi kan nu vise, at

$\underline{F \text{ er injektiv, hvis og kun hvis } \det A \neq 0}$.

Af forrige sætning har vi, at

$$V(F(\underline{u}_1),F(\underline{u}_2),F(\underline{u}_3)) = \det\underline{A}\cdot V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3) \ .$$

Da $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$ er en basis, er $V(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3) \neq 0$.
Er nu F injektiv, ved vi, at $(F(\underline{u}_1),F(\underline{u}_2),F(\underline{u}_3))$ er lineært uafhængige (og derfor en basis i R^3) jfr. side 12 og derfor bliver $V(F(\underline{u}_1),F(\underline{u}_2),F(\underline{u}_3)) \neq 0$. Da må også $\det\underline{A} \neq 0$. Antages omvendt $\det\underline{A} \neq 0$, er $V(F(\underline{u}_1),F(\underline{u}_2),F(\underline{u}_3)) \neq 0$, der viser, at $((F(\underline{u}_1),F(\underline{u}_2),F(\underline{u}_3))$ er lineært uafhængige,og dermed er F injektiv.

Vi så på side 21, at F var injektiv, hvis og kun hvis $\underline{A}$ var invertibel. Af dette og den netop viste sætning har vi endelig, at

$$\underline{\underline{A} \text{ invertibel} \Leftrightarrow \det\underline{A} \neq 0} \ .$$

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."

Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski