TEKST NR 13 1979

GERT KREINØE

CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET

VEJLEDER:

ALBERT PAULSEN

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss

3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og
videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.

6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik,
og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.

7/78 "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.

12/79 "Lineære differentialligninger og differentialligningssystemer"
Mogens Brun Heefelt.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

CAVENDISH'S FORSØG

- anvendelse, muligheder og placering i gymnasiet

En undersøgelse af forsøgsudstyr, foretaget til kursus i undervisningsforsøg, RUC, 1978.

Deltager: Gert Kreinøe
Vejleder: Albert Paulsen

FORORD

Ifølge bekendtgørelsen for gymnasielæreruddannelsen i fysik skal der udføres skoleeksperimentelt arbejde - undervisningsforsøg - i et ikke nærmere defineret omfang. Hvad og hvordan har lejlighedsvis været diskuteret. Et forhold er kommet klart til udtryk, det skoleeksperimentelle arbejde skal ses i en pædagogisk sammenhæng dvs. som et led i et arbejde, som ikke blot omfatter skoleeksperimentet(erne), men også i hvilken pædagogisk sammenhæng eksperimentet optræder og hvorfor. Det er nærliggende at integrere undervisningsforsøgene i et projekt, der iøvrigt handler om at undervise i fysik i gymnasiet. Jeg tror og håber imidlertid ikke, at der kun er <u>ét</u> svar på spørgsmålet, hvordan man arbejder med undervisningsforsøg ved IMFUFA. Allerede nu tegner der sig forskellige måder, på hvilken man kan tilgodese bekendtgørelsens krav. Den foreliggende rapport repræsenterer en <u>del</u> af det skoleeksperimentelle arbejde Gert har udført og er et eksempel på <u>én</u> måde at gøre det på. For at vise dette eksempel kommer det i tekstrækken.

Albert Paulsen.

Indholdsfortegnelse

1. Placering af Cavendish's forsøg i dets fysiske sammenhæng.

Cavendish's forsøg tjener til at bestemme konstanten, G, i gravitationsloven:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Der siger, at kraften (F) mellem to masser (m_1 og m_2) er proportional med massernes størrelse og omvendt propertional med kvadratet på deres afstand (r_{12}).

1.1 Historiske betragtninger.

Med den øgede samhandel i begyndelsen af 1400-tallet og den dermed øgede skibsfart, blev der mere og mere brug for præcis navigation. For at imødekomme dette behov fik astronomien stor betydning for videnskaben på dette tidspunkt.
Som et led i denne udvikling opstillede Copernicus i 1543 et heliocentrisk system, som skulle få stor betydning for den videre udvikling. Med Tycho Brahes observationer og Keplers love er astronomien ført frem til at beskrive planetbanerne med stor præcision, uden dog at kunne give nogen forklaring på empirien, endsige sammenknytte i en model.

Galelei knyttede som den første mekannikken og astronomien sammen, ved at foreslå at det var de samme kræfter, der bestemte himmellegemernes baner og fik en sten til at falde til jorden.
Desuden brugte han som den første eksperimenter til at verificere sine teoretisk udledte sammenhænge. Således brugte han matematikken til at udlede faldloven og kontrollerede faldlovens rigtighed, ved at "oversætte" faldet til den langsommere bevægelse på skråplanet.

Man havde altså nu en præcis beskrivelse af planetsystemet, en matematisk formuleret mekanik samt en ide om at disse to ting kunne knyttes sammen.
Gilbert foreslog i sin "De Magnete", at planeterne holdtes i deres baner af magnetiske kræfter (de indtil da eneste kendte kræfter, der virker på afstand), Borelli introducerede den ide at planeterne måtte være påvirket af en kraft, der ophævede centrifugalkraften. Da planetbanerne , ifølge Kepler er ellipser måtte (stadig ifølge Borelli) denne kraft være afstandsafhængig og altså være en

e ller anden funktion af afstanden i en eller anden potens. Med Huygens undersøgelse af centrifugalaccellerationen (1673) blev det muligt at fastlægge afstandsloven. Kraften måtte i følge Hooke Halley og Wren være en funktion af den inverse til afstandens kvadrat, men det var ikke muligt at fastlægge hvilken funktion.

Det blev Newton der fandt denne sammenhæng, idet han i 1687 offentliggjorde sin teori om den universelle gravitation, hvori han opstillede gravitationskraften

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^2}$$

Newtons argumentation er kort som følger (omskrevet til moderne notation).

1.Overslagsberegning

Antages det at månens bane er cirkelformet, kan man ud fra Huygens beregne månens accelleration mod jordens midte, og ved disse overslagsberegninger for man at denne accelleration er $3600=60^2$ gange mindre end den af Galilei bestemte tyngdeaccelleration ved jordens overflade. Hvis man antager at det er jordens tyngdefelt der strækker sig ud til månen, må man formode at accellerationen mod jordcentret var omvendt proportional med kvadratet på afstanden fra jordcentret.

2.Nøjere analyse.

Ved en nøjere analyse bruger Newton Keplers love til at opstille gravitationsloven, ikke sådan at han deducerer gravitationsloven ud af Keplers love, snarere sådan at han til stadighed sørger for at Keplers love er indeholdt i hans overvejelser.

Keplers første lov:siger at planeterne bevæger sig i ellipser med solen i det ene brændpunkt.

Dette omformulerer Newton til at planeterne følger baner givet ved ligningen:

(K1) $$r = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon\cos\varphi)}$$

hvor r er afstanden fra solen til planeten og φ er vinkelen mellem polaraksen og forbindelseslinien mellem solen og planeten. a og b er længden af henholdsvis den halve storakse og halve lilleakse. (se iøvrigt figur 1)

Keplers anden lov:siger at radius vektor fra solen til en planet beskriver lige store arealer i lige store tider.

Arealet mellem polaraksen, planetbanen og radiusvektor er givet ved

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 \, d\varphi$$

og deraf

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

som ifølge Keplers anden lov er konstant, altså

(K2,a) $\quad \dot{A} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = C$

som differentieres til

(K2,b) $\quad \ddot{A} = r \dot{r} \dot{\varphi} + \tfrac{1}{2} r^2 \ddot{\varphi} = r(\dot{r} \dot{\varphi} + \tfrac{1}{2} r \ddot{\varphi}) = 0$

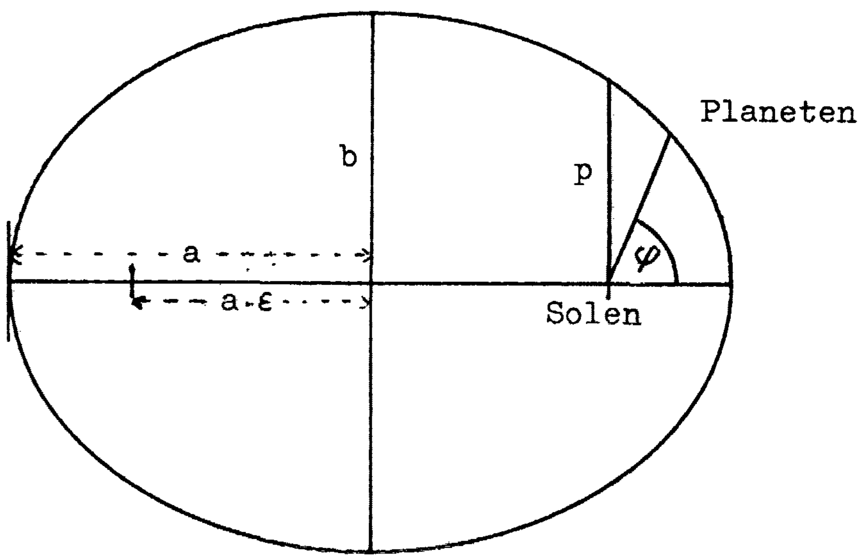
Keplers tredie lov: siger at forholdet mellem kvadratet på omløbstiden i banen og tredie potens af dennes halve størrelse, er det samme for alle planeter.

Dette omskrives til:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstant for alle planeter om solen}$$

Desuden bruger Newton sine egne love fra sin dynamik (2.og 3.)

Figur 1.



(N2) $\overline{F} = m\,\overline{a}$ (hvor $\overline{F}$ er kraften på en masse, m, med accelleration $\overline{a}$)

(N3) aktion lig reaktion

samt den simple egenskab, at arealet af en ellipse, dels er givet ved πab og dels ved C T, hvor C er arealhastigheden og T er omløbstiden, altså

$$\pi ab = C\,T$$

Vi vil nu finde accellerationen udtrykt ved de polære koordinater, hvor basisvektorerne er

$$\overline{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$
$$\overline{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Først udregnes hastigheden

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\,\dot{\overline{e}}_r = \dot{r}\,\overline{e}_r + r(-\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{\varphi}\cos\varphi)$$
$$= \dot{r}\,\overline{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\overline{e}_\varphi$$

Videre kommer accellerationen til at blive

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = (\ddot{r}\,\overline{e}_r + \dot{r}\,\dot{\overline{e}}_r) + (\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi})\overline{e}_\varphi + r\,\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\cos\varphi, -\dot{\varphi}\sin\varphi)$$
$$= \ddot{r}\,\overline{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\overline{e}_\varphi + \dot{r}\,\dot{\varphi}\overline{e}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\overline{e}_\varphi - r\,\dot{\varphi}^2\,\overline{e}_r$$
$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\overline{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi})\overline{e}_\varphi$$

Bruges nu (K2,b)

$$\dot{A} = \tfrac{1}{2}r(2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}) = 0$$

fås

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2$$
$$a_\varphi = 0$$

Indsættes (K1) og (K2,a) fås ved differentiation:

$$a_r = \frac{-4C^2 a}{b^2}\,\frac{1}{r^2}$$

Nu benyttes at

$$C = \frac{\pi ab}{T}$$

fås,når det samtidig benyttes at $\frac{a^3}{T^2}$ er konstant (K3), for alle planeter

$$a_r = -\frac{K}{r^2}$$ (hvor K er en konstant karakteristisk for solen).

$$a_\varphi = 0$$

Newtons anden lov anvendt på dette giver

$$F = m\,a_r = \frac{Km}{r^2}$$

Da vi desuden kan konstatere, at Keplers love også gælder for månernes baner omkring planeter, kommer vi med de samme regninger til

$$f = \frac{k\mu}{\rho^2}$$

(hvor f er kraften på planetens måne, ρ månens afstand til planetens centrum og μ månens masse, og k er en for planeten karakteristisk konstant)

Planetens kraftfelt må (antager vi) også virke på solen med en kraft

$$\Phi = \frac{kM}{r^2}$$ (M er solens masse)

Men Newtons tredie, kræver at

$$\Phi = F_{planet}$$

eller

$$kM = Km \qquad \frac{k}{K} = \frac{m}{M}$$

Denne ligning tilfredsstilles (bla.a.) af

$$k = Gm \qquad \text{og} \qquad K = GM$$

hvor G er en universel konstant

Vi får derfor for kraften mellem to masser m_1 og m_2

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Som det ses af loven er det muligt, blot med kendskab til Gm_{sol}, at forudsige planeters baner omkring solen, og denne størrelse kan findes udfra kendte planetbaner (eks. jordens)

Det er denne kendsgerning, der gjorde det muligt for Haley kort efter offentliggørelsen af loven, at beregne en komets banekurve med stor nødagtighed uden at kende den universelle konstant G.

Men der var et spørgsmål, som man ikke kunne svare på uden at kende G, nemlig det at finde jordens massefylde. Forskellige forsøg blev gjort med at se på ændringen af tyngdefeltets retning ved foden af bjerge. Dette forsøg lykkedes ikke og ikke før efter mere end 100 år lykkedes det Cavendish i1798 at måle kravitationskræfterne på en torsionsvægt, efter at Coulomb kort for inden havde undersøgt torsionssvingninger såvel eksperimentelt som teoretisk. Cavendish's apperatur er så godt som identisk med det apperatur, der er anvendt i følgende øvelse.

1.2 Hvordan måler man gravitationskraften

Som det ses af gravitationsloven er det muligt, hvis man kender G,, ved hjælp af blot et par enkelte observationer, at beregne himmellegemernes baner i forhold til hinanden.

Lad os se lidt på , hvad det er vi skal måle. I følge Newtons 2.lov er sammenhængen mellem kraft og accelleration givet ved:

$$F = m\,a$$

og dette gælder selvfølgelig også for gravitationskraften:

$$G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = m_1 a_1$$

eller

$$G = \frac{a_1 r_{12}^2}{m_2}$$

G er altså givet, hvis man kender to massers indbyrdes afstand, den ene masse og den anden masses accelleration som følge af massetiltrækningen.
Det er dette der gør det umuligt at bestemme accellerationen udfra faldforsøg, idet man her kender accellerationen og massen af den samme partikel, og derfor ikke kan bestemme G. Det er heller ikke muligt at bestemme G udfra astronomiske observationer, idet masserne her er ukendte, så selvom det er muligt at måle accellerationen (afveje den med centrifugalkraften i den elliptiske bevægelse), er det ikke muligt at beregne G.

Men til beregning af massers (m) baner omkring solen er kendskabet til G's værdi også unødvendigt.
Vi har at gravitationskraften på en masse m fra solen er central med størrelsen:

$$F = G\frac{M_s m}{r^2}$$ (r er afstanden mellem M_s og m)

Det ses at hvis man blot kender en planets opførsel, så kan man udfra dette bestemme konstanten (GM_s), og v.hj.af denne beregne alle andre himmellegemers baner omkring omkring solen.

Som nævnt ovenfor er det for at finde G nødvendigt at kende en masses accelleration og en anden masse samt deres indbyrdes afstand. Interessen for at kende G skyldes at kendskab til G, medfører at man udfra astronomiske observationer kan bestemme Jor-

2. Cavendishs forsøg.

Til bestemmelse af gravitationskonstanten har John Michell og Henry Cavendish udviklet den såkaldte torsionsvægt. I 1789 bestemte Cacendish således konstanten til en værdi, der kun afveg en halv provent fra den man anvender i dag.

2.1. Princippet i målingen.

Princippet i målingen er, at man måler kraften mellem to sæt ens kugler, hvor de to er faste (M) og to er bevægelige (m) (se fig. 1), det vil sige de to småkugler (m) er fastgjort på

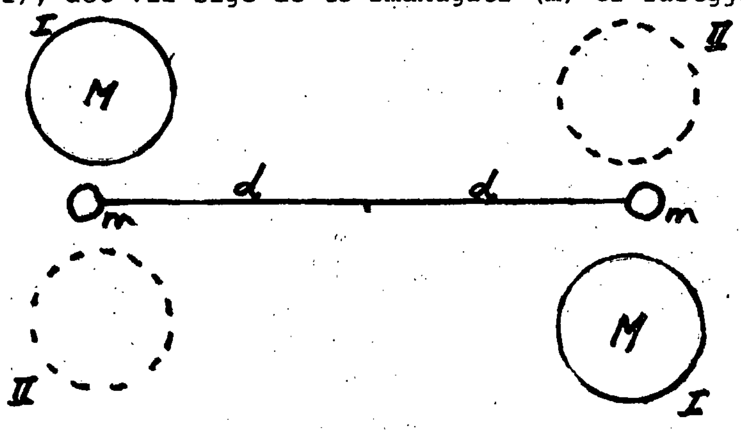


fig 1.

en fælles stang, som er ophængt i en tynd tråd, således at dette system kan udføre svingninger.
Systemet vil have svingningstiden T, bestemt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{s}}$$ (hvor I er inertimomentet, og s er torsionskonstanten)

Torsionskonstanten, s, bestemmes ved at måle systemets svingningstid.

Når de små kugler påvirkes af kræfter i form af gravitationen fra to blykugler (M) vil svingningen få et nyt ligevægtspunkt, der er drejet en vinkel, φ, i forhold til det oprindelige ligevægtspunkt.
I dette punkt ophæver gravitationskræfternes moment, torsionsmomentet eller

$$F\,2d = s\varphi \iff F = \frac{s\varphi}{2\,d}$$

Da masserne og deres indbyrdes afstand, r, er kendt kan G beregnes af

$$\frac{s\varphi}{2d} = G\frac{Mm}{r^2}$$

eller

$$G = \frac{Mm\ 2d}{s\varphi\ r^2}$$

Dette er det princip Cavendish brugte, men lad os se på det konkrete forsøg.

2.2 Forsøgsgennemgang.

Til forsøget bruges:

En torsionsvægt fra Leybold (nr. 33210
med tilbehør:
lampe
2 blykugler
stativmateriale
samt Leybold-Heraeus forsøgsbeskrivelse

En stativfod opsættes på en væg, der ryster mindst muligt. På en stativstang i dette monteres torsionsvægten.
Torsionsvægten justeres til lodret ved hjælp af skruerne i stativfoden. Herefter afterrerer man vægten og sørger for at tråden hænger fri, og at torsionsvægten kan svinge frit, altså således at den ikke rammer boksens væg.

Efter justeringen kan man benytte to forskellige metoder til at bestemme G, henholdsvis accellerationsmetoden og svingningsmetoden.

2.2.1. Accellerationsmetoden.

De store blykugler (M) placeres i stilling I (se fig 2) og man lader de små kugler falde til ro.
Når systemet er faldet til ro ændres de store kuglers placering til II (fig 2). Denne omlægning vil forstyrre ligevægten mellem torsionskraften og gravitationskraften.

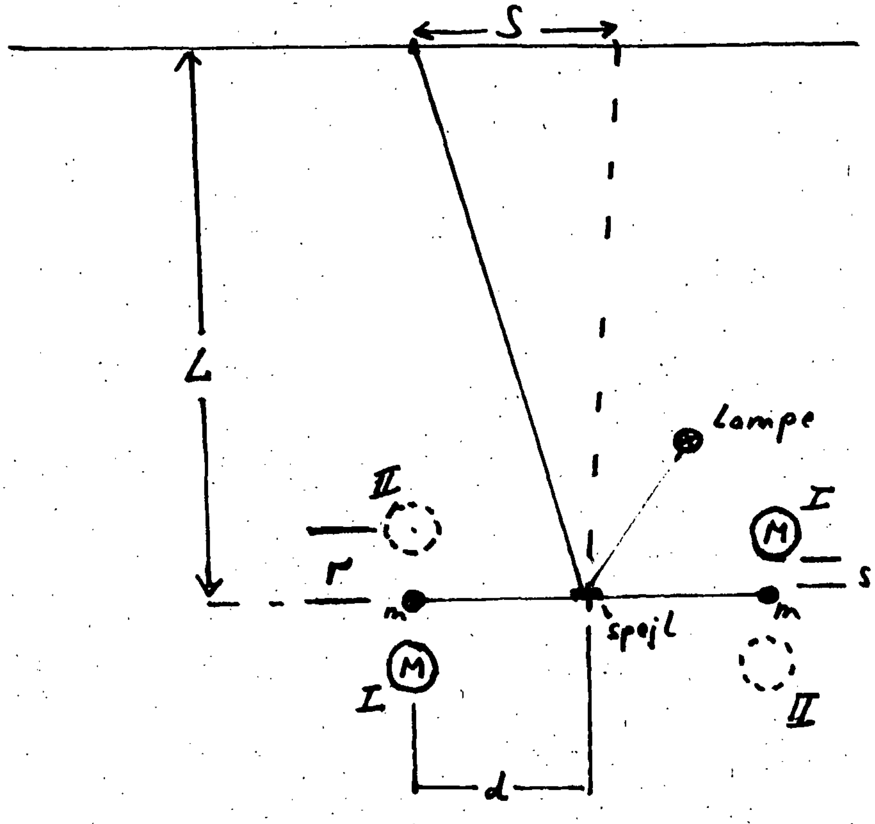


fig.2 Principskitse af torsionsvægten.

Da disse kræfter netop har ophævet hinanden, vil de små kugler (m) lige efter omlægningen være påvirket af to kræfter, nemlig torsionskraften og "den nye" gravitationskraft, som er ensrettede og lige store. Altså fås at kraften på de små kugler (K) er givet ved

$$K = 2G\frac{mM}{r^2}$$

denne kraft vil accellerere kuglerne med accellerationen b_o, altså:

$$mb_o = 2G\frac{mM}{r^2}$$

eller

(1) $$G = \frac{b_o r^2}{2M}$$

(Her er r og M målelige og bevægelsens accelleration kan måles ved at måle sammenhørende værdier af den tilbagelagte vej, S, (se fig 2) og tiden (t),(S måles for hver 15 sek, det første minut).

b_o fås nu af

$$b_o = \frac{2s}{t^2} = \frac{S\ d}{t^2 L}$$ (hvor L er afstanden fra torsionsvægten til skærmen, s er afstanden mellem de små og de store kugler)

b_o midles over de første fire værdier og G kan nu beregnes af (1).

2.2.1.1. Fejl og usikkerhed.

Som det ses gøres der to fejl ved beregningen af G

A. Der tages ikke hensyn til gravitationskraften mellem den lille kugle m og den af de store kugler, der er anbragt modsat.

B. b_o regnes som en konstant accelleration til trods for at den kun har størrelsen b_o lige ved bevægelsens begyndelse. (Dette tages der delvis højde for ved kun at måle b_o udfra sammenhørende værdier af S og t, hvor t er lille i forhold til svingningstiden.)

A.

Før omlægningen af kuglerne er kræfterne på den lille kugle

F_S (gravitationskraften fra den nærmeste kugle)

F_L (gravitationskraften fra den fjerneste kugle (kun den ene komposant)

T (torsionskraften)

Da kuglen er i ro er

$$F_S = T + F_L \qquad \text{(se fig 3)}$$

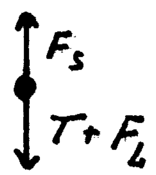


fig.3

Efter omlægningen virker F_S og T i samme retning, mens F_L virker i modsat retning. (se fig 4)

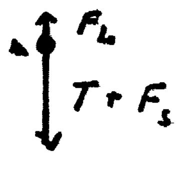


fig.4

Kraften på kuglen bliver altså:

$$F_T = F_S + T - F_L = F_S + T + F_L - 2F_L = 2F_S - 2F_L$$

altså fås da

$$F_L = G^{\$} \frac{mM}{R^2} \cos \psi$$

(hvor R er afstanden til den anden kugle og ψ er vinkelen mellem F_L og R)

$$F_L = G^{\$} \frac{m\ M}{(4d^2+r^2)} \frac{r}{4d^2+r^2}$$

$$F_L = G^{\$}mM \left(\frac{r}{(4d^2+r^2)^{3/2}}\right)$$

Vi har nu totalkraften

$$F_T = mb_o = 2G^{\$}mM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2+r^2)^{3/2}}\right)$$

$$mb_o = 2G^{\$}mM \left(\frac{R^3 - r^3}{r^2R^3}\right)$$

Den korrigerede værdi af G bliver så

$$G^{\$} = \frac{b_o\, r^2R^3}{2M(R^3-r^3)} = G \frac{R^3}{(R^3-r^3)} = G \left(1 + \frac{r^3}{(R^3-r^3)}\right)$$

B.

Man kan komme ud over dette ved at benytte svingningsmetoden (se 2.2.2), men fejlen skyldes kort, at T ikke er konstant, men derimod vinkelafhængig.

$$T\ d = -k\varphi$$

(hvor k er en karakteristisk konstant og φ er udslagsvinkelen fra ligevægtspunktet.)

Principielt kunne man godt indføre denne vinkelafhængige T, men det kræver først en langsommelig måling for at fastlægge k, og derved forsvinder ideen med accelerationsmetoden, nemlig at den er kort og enkel. Derfor vil man ved nøjagtigere forsøg foretrække svingningsmetoden.

En egentlig usikkerhedsberegning vil der ikke blive udført her, idet metoden som ovenfor nævnt er behæftet med fejl, der vil gøre at metoden alligevel kun er egnet til at anskueliggøre, at det er muligt at måle gravitationskræfter.

2.2.2. Svingningsmetoden.

Svingningsmetoden er den der svarer til Cavendish's metode.

Når systemet er i ro med de to store kugler i position I (se fig.2) markeres ligevægtstilstanden for lyspletten, der er tilbagekastet fra spejlet, monteret på torsionsvægten (fig.2)

Nu omlægges de store kugler til position II og de små kugler begynder at svinge. For hver 15 sek. afsættes lysplettens position (efter et minut dog kun hver 30 sek.

Ved at afsætte sammenhørende værdier af tiden, t, og S (se fig.2) kan svingningstiden T for systemet findes (ved midling over samtlige målte svingninger).

I stilling I gælder, da kraftmomentet i hvile er 0

(2) $F\,2d = k\varphi$ (hvor F er gravitationskraften på de små kugler, k er torsionskonstanten og φ er vinkelen fra 0-punktet).

Da svingningstiden for en torsionssvingning (uden dæmpning) er givet ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

fås k som

$$k = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

indsættes i (2) fås

$$G \frac{m\,M}{r^2}\,2\,d = \frac{4\pi^2\,I}{T^2}\,\varphi$$

eller da

$$I = 2\,m\,d^2$$ (vi ser bort fra andet en kuglens inertimoment)

$$G = \frac{4\pi^2\,I\,r^2}{m\,M\,2\,d\,T^2}\varphi = 4\,\frac{\pi^2\,r^2\,2\,m\,d^2}{M\,T^2\,m\,2\,d}\,\varphi$$

$$= 4\,\frac{\pi^2\,r^2\,d}{M\,T^2}\,\varphi$$

men φ er udslaget fra ligevægtspunktet uden de store kugler, og vinkelen mellem de to ligevægtspunkter i position I og II, α, må da give φ som

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

og (i følge fig 2)

$$\frac{S}{2L} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

fås

$$G = \frac{\pi^2\,r^2\,d\,S}{M\,T^2\,L}$$

hvor alle størrelser på højre side er målelige.

2.2.2.1. Fejl og usikkerhed.

Ved beregningen af G gøres der ved denne metode 3 fejl.

a. Der tages ikke hensyn til gravitationskraften mellem den lille kugle og den af de store kugler, der er anbragt længst væk.

b. Der tages ikke hensyn til andre inertimomenter end fra de to kugler i beregningen af torsionskonstanten.

c. Der tages ikke hensyn til at torsionssvingningen er dæmpet.

a.

Beregningerne bliver analoge med de tilsvarende for accellerationsmetoden og korrektionen bliver

$$G^{\$} = G\left(1 + \frac{r^3}{R^3 - r^3}\right)$$

b.

Der er her tale om et bidrag fra en stang ophængt i sit tyngdepunkt og fra spejlet. Da de to masser ikke er opgivet har det ikke været muligt at vurdere fejlen, men

$$I_{stang} = \frac{1}{12} m_{stang} (2d)^2 = \frac{1}{3} m_{stang} d^2$$

og

$$I_{spejl} = \frac{1}{12} m_{spejl} l^2 \quad \text{(hvor l er spejlets bredde)}$$

Denne fejl er kun lige nævnt i vejledningen, og det er som nævnt umuligt, uden at splitte apperatet ad, at finde dens størrelse.

c.

Denne fejlkilde er ikke nævnt i vejledningen.
Lad os vurdere størrelsen af fejlen.

I beregningen ovenfor bestemmes k til

$$k = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Er svingningen derimod dæmpet får vi følgende:
Vi antager at dæmpningen er hastighedsafhængig (en god tilnærmelse til luftmodstanden)
Bevægelsesligningen bliver så

$$I\ddot{\varphi} = -k^{\varepsilon}\varphi - \gamma\dot{\varphi} \quad \text{(hvor } \gamma \text{ er en dæmpningskonstant)}$$

De reelle løsninger er givet ved

$$\varphi = A\, e^{-\frac{\gamma}{2I}t} \cos(\omega_e t) \quad \text{(hvor } \omega_e \text{ er systemets egenfrekvens).}$$

ω_e er givet ved

$$\omega_e^2 = \frac{k^{\varepsilon}}{I} - \frac{\gamma^2}{4\,I^2}$$

eller da det er svingningstiden T vi måler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_e^2} = 4\pi^2 \left(\frac{k^{\varepsilon}}{I} - \frac{\gamma^2}{4\,I^2}\right)^{-1}$$

$$= 4\pi^2 \frac{4\,I^2}{4\,k^{\varepsilon}\,I - \gamma^2}$$

som giver

$$k^{\varepsilon} = k + \frac{\gamma^2}{4I}$$

Korrektionen $\frac{\gamma^2}{4I}$ fås direkte ud fra to målinger.

<u>eks.</u>

m ålinger til tiden t_1 og $t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_e}$

her fås:

$$\varphi_1 = A\cos(\omega_e t_1)\, e^{-\frac{\gamma}{2I}t_1}$$

$$\varphi_2 = A\cos(\omega_e t_2)\, e^{-\frac{\gamma}{2I}t_2}$$

og

$$A\cos(\omega_e t_1) = A\cos(\omega_e t_2) = A^*$$

som giver

$$\gamma = 2I\,\frac{\ln\varphi_2 - \ln\varphi_1}{t_1 - t_2}$$

<u>Usikkerheden på svingningsmetoden.</u>

Gravitations konstanten er givet ved:

$$G = 2\pi^2\,\frac{r^2 d\,S}{M\,T^2 L}$$

og dermed bliver den relative usikkerhed:

$$\frac{\Delta G}{G} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

2.3. Forsøgsresultater.

Accellerationsmetoden.

Gravitationskonstanten bestemmes af

$$G = \frac{b_o\, r^2}{2M}$$

hvor

$M = 1,5$ kg

$r = 4,5 \cdot 10^{-2}$ m

$d = 5,0 \cdot 10^{-2}$ m

$L = 6,8$ m

og b_o beregnes udfra skemaet:

$S^{\,mm}$	$t^{\,s}$	$b_{oi} = \frac{S\,d}{t^2 L}$
0,0	0	
5,0	15	$1,63 \cdot 10^{-7}$ m s^{-2}
13,5	30	$1,10 \cdot$ - -
27,0	45	$1,00 \cdot$ - -
44,0	60	$0,90 \cdot$ - -

$b_o = 1,16 \cdot 10^{-7}$ m s^{-2}

og dermed bliver G

$$G = \frac{1,16 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m\,s^{-2}}\ (4,5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2}{2 \cdot 1,5\ \mathrm{kg}} = \underline{7,83 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}$$

Svingningsmetoden.

Gravitationskonstanten bestemmes af:

$$G = \frac{\pi^2\, r^2\, d\, S}{M\, T^2\, L}$$

hvor

$L = 6,8$ m

$M = 1,5$ kg

$r = 4,5 \cdot 10^{-2}$ m

$d = 5,0 \cdot 10^{-2}$ m

$S = 2,43 \cdot 10^{-1}$ m

$T = 6,46 \cdot 10^{2}$ s

og dermed bliver G

$$G = \frac{\pi^2\ (4,5)^2\ 5,0\ 2,45}{1,5\ (6,46)^2\ 6,8}\ \frac{10^{-4}\ 10^{-2}\ 10^{-1}}{10^4}\ \frac{m^4}{kg\ s^2\ m}$$

$$= \underline{5,70 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$$

Denne værdi korrigeres for gravitationen fra den anden kugle:

$$G^{\$} = G\ \frac{R^3}{(R^3 - r^3)} = \underline{6,12 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$$

Korrigeres yderligere for dæmpningen fås jævnfør side 14 øverst og side 16.

$$G^{£}\ \frac{m\ M}{r^2}\ 2d = k\varphi + \frac{\gamma}{4I}\ \varphi$$

$$G^{£} = G^{\$} + \frac{\gamma^2\ \varphi\ r^2}{4I\ 2d\ m\ M}$$

Indsættes i dette at $I = 2md^2$ og $\varphi = \frac{S}{4L}$ samt

$$= 4I\ \frac{\ln^{\varphi_1} - \ln^{\varphi_2}}{t_1 - t_2}$$

fås korrektionen

$$G^{£} = \underline{6,17 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$$

Det skal bemærkes, at begge forsøgene måtte foretages flere gange, for bare at fungere nogenlunde. Forsøget er meget tidskrævende.

<u>Usikkerhedsberegning.</u>

$$\frac{\Delta G}{G} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$\Delta r = 0{,}05\ 10^{-2}\,m$	og dermed	$2\frac{\Delta r}{r}$	=	2,22%
$\Delta d = 0{,}05\ 10^{-2}\,m$	-	$\frac{\Delta d}{d}$	=	1,00%
$\Delta S = 0{,}02\ 10^{-1}\,m$	-	$\frac{\Delta S}{S}$	=	0,82%
$\Delta M = 0{,}05$ kg	-	$\frac{\Delta M}{M}$	=	3,33%
$\Delta L = 0{,}05$ m	-	$\frac{\Delta L}{L}$	=	0,74%
$\Delta T = 4$ s		$\frac{\Delta T}{T}$	=	2,48%
		Total	=	<u>10,59%</u>

$\frac{\Delta G}{G}$ bliver altså 10%

3. Hvordan kan forsøget bruges i skolen?

For at besvare dette spørgsmål må man først gøre sig klart, hvilken forståelse man ønsker af gravitationsfænomener.
Lad os prøve at se på det lidt firkantet og stille en række krav, som må være opfyldt, før man kan tale om at gravitationsloven er forstået.

A. Gravitationen er universel. Alle masser tiltrækker hinanden.
B. For at beregne en satellitbane om eksempelvis jorden er det unødvendigt at kende gravitationskonstanten. Det vil være tilstrækkeligt at kende en anden satellits (eks.månen) bane omkring jorden.
C. Tyngden er et "særtilfælde" af gravitationen og enhver planet har et sådant tyngdefelt, hvis styrke er afhængigt af planetens masse
D. Gravitationskonstanten G kan ikke bestemmes på anden måde end ved Cavendish-forsøg (eller lignende)
E. Hvorfor og hvordan er tanken om den universelle gravitation fremkommet? Her tænkes dels på samfundets krav og behov og dels på den internt videnskabelige udvikling.

Det næste skridt bliver så at undersøge de forskellige måder forsøget kan indgå i undervisningen på, og herunder se på om og hvordan forsøget kan være et led i opbyggelsen af den ovennævnte forståelse.
Man kan forestille sig forsøget udført på tre måder, nemlig

1.En kvalitativ påvisning af at to blykugler tiltrækker hinanden.
2.Accellerationsmetoden.
3.Svingningsmetoden.

og hver af disse tre muligheder kan igen udføres som elevforsøg eller demonstrationsforsøg.

3.1.Demonstrationsforsøg

Ved et demonstrationsforsøg er det læreren, der udfører forsøget og eleverne der er tilskuere. Forsøget kan have to helt forskellige formål, enten at vise noget nyt og overraskende eller at bekræfte noget som man ved hjælp af regninger har postuleret.

De to formål lægger op til to vidt forskellige undervisningsforløb. I det første bliver forsøget centralt i forhold til undervisningen , på den måde at forsøget og den dermed følgende oplevelse bliver inspirationen for det videre arbejde. I det andet for forsøget karakter af et check på om vore resultater nu også holder.

Set udfra et historisk synspunkt har begge disse formål relevans, idet begge former faktisk er forekommet. Som eksempel kan vi tage el-mag læren, hvor Ørsteds forsøg kan siges , at være af typen ny og overraskende erkendelse, mens HertZ's forsøg med sender og modtager var af kontroltypen.Men lad os se på Cavendish,s forsøg anvendt på de to måder.

3.1.1 Cavendish anvendt til at overraske og inspirere til nye undersøgelser.

Lad os forestille os en time i en 1.G. Begreberne fra kinematikken (afsand, hastighed og accelleration) og dynamikken (kraft, Newtons love) er kendte og desuden er faldloven kendt. Fra folkeskolen har eleverne et begreb om massetiltrækning, så hvis de skal overraskes, skal det være med at effekten kan ses i så lille format.

Formålet med at vise cavendish forsøg bliver altså at vis at forholdsvis små masser tiltrækker hinanden, og endda så meget at det kan påvises.

Hvis opstillingen er i stand til at vise dette, vil det nok overraske eleverne, da de fra deres dagligdag kun erfarer tyngden, d.v.s. de bliver stillet over for et fænomen, som de ud fra deres dagligdag ikke ville forvente.

Ved timens begyndelse bliver opstillingens indretning forklaret (uden at fortælle hvad det skal bruges til). Det forklares, hvordean lysplettens bevægelse hænger sammen med de to blykuglers bevægelse.

Læreren omlægger nu de store kugler, så de små kugler accellereres.

Eleverne vil altså nu iagttage en lysplet, der bevæger sig langsomt hen over tavlen, men vil det overraske dem. Er det ikke meget kendt at når man rører ved noget der hænger i en snor, så vil det bevæge sig, der er med andre ord en langt mere nærliggende forklaring på fænomenet end massetiltrækning.

Jeg tror først overraskelsen kommer når læreren fortæller, at det var kuglerne, der tiltrak hinanden og derfor får demonstrationen ikke den ønskede effekt.
Man kunne selvfølgelig have bedt eleverne om at forudsige, hvad der villle ske, og dermed bygge på deres viden fra folkeskolen, men så er vi allerede langt inde i et forsøg af næste type:

3.1.2.Cavendish anvendt til at eftervis gravitationsloven.
Vi forestiller os nu en anden klasse, der har arbejdet med gravitationsloven og har set den anvendt på planetbaner, hvor læreren en dag kan lave følgende time.

1.Ved timens start kunne han lade klassen regne på tiltrækningen mellem to blykugler.

2.Der burde altså være kræfter mellem to blykugler, når vi lagde dem på bordet. Vi laver et forsøg (måske bare tænkt). Hvorfor sker der ingenting? Efter en kortere diskussion kunne eleverne måske komme frem til, at vi ikke så noget på grund af gnidning.

3. Hvis man nu fjerner gnidningskræfterne. Vi kunne hænge dem op i to snore. Endnu et forsøg. Hvorfor sker der ingenting., som vi kan se? Igen måtte klassen diskutere og ved at sammenligne tyngdekræfterne med de beregnede gravitationskræfter skulle de nok finde et svar.

Med sådanne små skridt kan man komme frem til Cavndish opstillingen, der er en måde at til at se de meget små effekter.
Denne forsøgsrække og diskussion ville sikkert give et bidrag til en forståelse af, at gravitationen er universel og at alle masser tiltrækker hinanden, men samtidig også vise, at små massers effekt i forhold til de store (som planeter) er meget lille.

3.1.3. I det ovenstående er Cavendish forsøg kun anvendt til at demonstrere kvalitative sammenhænge, og måske lige antyde muligheden af kvantitative målinger. Jeg er af den overbevisning, at anvendelse af apperaturet til et kvantitativt demonstrationsforsøg ville være halsløs gerning. Dels tager den hurtigste af de to metoder (accellerationsmetoden) omkring en time, hvor der ikke kan foregå andet, og dels foregår der ikke særlig meget i den tid. Endelig er forsøget meget kedeligt, hvis man ikke selv er engageret i målingerne, og det vil derfor højst være muligt at aktivere 2-3 elever som hjælpere.

3.2.Elevforsøg.

Formålet med øvelsen er at vise en metode - den eneset mulige - til at bestemme gravitationskonstanten,G.

Da der kun findes de to fremgangsmåder, accellerations- og svingningsmetoden, til at bestemme G, må elevforsøget udføres efter forsøgsbeskrivelserne 2.2.1 og 2.2.2.

Forudsætningerne for begge disse målinger er kendskab til de Newtonske love, gravitationsloven, samt en anelse trigonometri, derudover kræver svingningsmetoden kendskab til kraftmoment, inertimoment og torsionssvingninger.

Da forsøget er teknisk vanskeligt at udføre, og da disse tekniske vanskeligheder kan virke slørende på det egentlige indhold i øvelsen, er det nok tilrådeligt, at læreren inden han overlader apperatur og forsøgsgennemgang til eleverne gennemgår princippet i målingerne med klassen (f.eks. som nævnt i 3.1.2.) Da beregningerne i forbindelse med forsøget kræver et grundigt kendskab til gravitationsloven kan Cavendish forsøget kun indgå som elevforsøg i slutningen af et forløb om gravitation. Eller med andre ord, hvis forsøget skal udføres som elevforsøg, skal det tjene til at bekræfte vores tidligere påstande, således som det også historisk har været hensigten med opstillingen.

Men hvilken værdi vil det kvantitative forsøg have frem for det kvalitative i 3.1.2, rent oplevelsesmæssigt?

Er det væsentlige ikke

a.at vi kan se gravitationseffekten og

b.at vi principielt (hvis vi vil) kan måle denne?

Med hensyn til at tilrettelægge et elevforsøg hvor det kvalitative var i højsædet, er jeg bange for at netop forsøgets store komplicerthed, vil være medvirkende til at skjule årsagerne til det, der kommer ud, og en enkelt uovervejet rystelse vil medføre at forsøget først kan føres til ende en time senere. Hvis Cavendish forsøget skal overraske og undre er man desværer henvist til dempnstrationsforsøg.

3.3. Facts om apperatur.

Cavendish torsionsvægten fremstilles af Leybold-Hereaus og forhandles i Danmark af

Leybold-Hereaus
Nyholms allé 39
2610 Rødovre

Udstyret koster i februar 1979 kr. 2165.- ex. moms.
Det har bestillingsnummeret: 33210 hos Leybold.
og på RUC er det katalogiseret under: nr. R3h - 15A
Til udstyret hører vejledningen: Physikalische Handblätter: DK 531.51.

4. Konklusion

Som detfremgår af afsnit 1.1 er gravitationskonstantens størrelse irrelevant i den erkendelsesmæssige proces, der førte frem til gravitationsloven og dermed til en forståelse for både planeternes baner og tyngdefænomenerne på jorden.

Gravitationsloven beskriver altså massetiltrækning og beskriver med stor præcision de data, man kan måle, som himmellegemernes bevægelser. Det er derfor naturligt at tage sit udgangspunkt i de fænomener loven er tænkt til at beskrive og undersøge disse fænomener.

Cavendish forsøg er meget tidskrævende og da det samtidig er unødvendigt for at forstå de centrale problemer omkring gravitationen må dets placereing i undervisningen højst være til anskueliggørelse af kræfternes størrelse og så endda først på et tidspunkt, hvor eleverne har arbejdet med graviattion et stykke tid på andre måder. Dette sidste for at forhindre at forsøget får en central placering i et forløb.

Det var ønskeligt om der istedet for dette præcise og avancerede apperatur fandtes et billigt apperat, der direkte, uden lys spejle og andet tingeltangel, kunne vise en synlig effekt af gravitationen mellem to masser.

5 .Undervisningsforløb.

Det følgende er et forsøg på en planlægning af et muligt undervisningsforløb, der kunne give en forståelse af gravitationen svarende til de i kap.3. nævnte punkter A-E.

Gravitationen er interessant udfra et erkendelsesmæssigt synspunkt, snarere end et praktisk. Dette er selvfølgelig noget af en tilsnigelse, dels på grund af at astronomien oprindelig skulle løse navigationsproblemer, og dels fordi gravitationen idag er blevet hverdag i kraft af satellitter, rumrejser og tyngde på månen. Jeg vil alligevel tage det erkendelsesmæssige udgangspunkt i det følgende undervisningsforløb.

Dele af forløbet kan man forestille sig vil foregå i samarbejde med faget historie.

5.1.Elevforudsætninger.

Forløbet er lagt an på en 1.G.matematisk, som har gennemgået den Newtonske mekanik. Det er selvfølgelig nødvendigt at klassen kan regne på forskellige bevægelsesproblemer, og derfor skal selve kraftbegrebet være grundigt indarbejdet.

5.2. Indledende fase: Historiske forudsætninger.

Klassen arbejder (evt. som gruppearbejde) med et historisk projekt, hvor forskellige samfunds opfattelse af universet undersøges (eks Ægypten, Mesopotamien, Grækenland, Palæstina, Indien, Kina, Islam, Middelalderens Europa og/ eller andre).

Der diskuteres i klassen på hvilket grunlag, de udvalgte samfund har opstillet deres teorier og med hvilket formål. Som et vigtigt led diskuteres i hvor høj grad teorierne er bygget på observerede data eller er opstillet som idealer. Teoriernes forudsigelser konfronteres med faktiske målinger og med deres formål. Eksempelvis havde babylonierne en stykvis lineær model for solens maksimumshøjde på himmelen som funktion afdatoen, denne model er ikke i fuldstændig overensstemmelse med målinger, men den er udmærket til at lave en kalender efter.

Denne første fase er et led i en opnåelse af en forståelse for gravitationsteoriens opståen. Samtidig vil denne fase give et indblik i, at visse af oldtidens teorier er, i forhold til deres formål, temmelig nøjagtige uden at være forklarende, mens andre er forklarende uden at være tilsvarende præcise. Projektet kan altså også tjene til at vise forskellen på den rent beskrivende videnskab, der for eksempel registrerer solens bevægelser, som de ser ud fra jorden, og sætter det op i en tabel eller formel, og den forklarende, der prøver at få en årsag-virkning sammenhæng frem.

5.3. Anden fase: Opkomsten af gravitationsteorien.

I denne fase arbejder klassen med mekannikkens og her specielt med den celeste mekaniks udvikling fra Galilei til Newton. Det vil sige at klassen arbejder med den historiske udvikling, som er gennemgået i kap.1.1. Der bør dog focuceres mere på den samtidige samfundsmæssige udvikling end der er gjort i dette kapitel.
Det bliver på denne måde muligt, at argumentere fro gravitationslovens udseende i detaljer (sammenknytning af tyngde og celest mekanik, cirkelbevægelsens bevægelsesligninger, Newtons anden og lignende detaljer i vejen frem til den endelige udformning (se 1.1))

Samtidig giver denne fase en mulighed for at sammenligne forskellige samfundstypers behov for videnskab. Da udviklingen af den celeste mekanik er nært knyttet til udviklingen af mekannikken i almindelighed vil denne del også knytte an til det kendte stof fra denne.

5.3. Tredie fase: Regninger på forekommende data.

I denne fase regnes opgaver af traditionel karakter, dog med den begrænsning at gravitationskonstanten ikke er nødvendig for at foretage beregningen. Man kunne, forenkelt, forestille sig følgende problem.

> Opg.1. Hvad er omløbstiden for en satellit om jorden, der befinder sig i afstanden 2R (R er jordens radius) ?

Opgaven lyder i sig selv simpel, men for at løse den må klassen indsamle det nødvendige materiale og eleverne må hele tiden undersøge, hvordan får vi de nødvendige oplysninger til at løse problemet.

5.4. Fjerde fase: Bestemmelse af planeters masse og bestemmelse af G.

På dette tidspunkt kan man vist roligt regne med at gravitationen hænger eleverne ud af halsen, men der er dog stadig en ting vi ikke kan.

Opg.2. Hvad "vejer"jorden ?

Dette spørgsmål kan vi ikke svare på uden at kende G, så vi vil nu finde ud af hvordan vi finder den,
Til svar på dette spørgsmål kunne klassen gennemgå et kort undervisningsforløb, som det er gennemgået i kap.3.1.2, måske med fremhævelse af at forsøget fra Cavendishs side faktisk var tænkt som en metode til at finde jordens masse.

5.5.Konklusion.

Dette undervisningsforløb gør som man kan se mere ud af gravitationen end er traditionelt gøres i gymnasiet.
Dette skyldes to ting, dels skal undervisningsforløbet ses som en mulig måde at gribe et fysisk emne, som man ønsker at behandle grundigt, an på, dels anser jeg gravitationsteorien for at være af stor betydning for vores opfattelse af sammenhængene i universet.

Til sidst vil jeg gerne påpege, at jeg ikke anser dette undervisningsforløb for at væreen læst, hvorover man kan bygge en række af undervisningsforløb til samme klasse.
Forløb af denne type kan kun visenogel sider af videnskaben fysik og fòr at få andre facetter frem må man tage udgangspunkt i elevernes hverdag, i samfundet omkring dem og der finde egnede fysiske problemstillinger.
Dette forløb focuserer på fysikkens placering i samfundet, udviklingen af teorier og en forståelse af verdensrummets udseende (store ord, ikke sandt).

Gert