TEKST NR 128 1986

SMÅKRYB

- om ikke-standard analyse.

Projektrapport af

Niels Jørgensen

Mikael Klintorp

Vejleder

Jeppe Dyre

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

Småkryb - om ikke-standard analyse.

Projektrapport af Niels Jørgensen og Mikael Klintorp
Vejleder: Jeppe C. Dyre

IMFUFA tekst nr. 128/86 89 sider ISSN 0106-6242

Sammendrag:

Brugen af uendelig små og store tal åbner mulighed for en enklere og mere intuitiv fremstilling af differential- og integralregningen. Det forhold er blevet særdeles aktuelt, efter at logikerne i 1960-erne leverede en holdbar teori for talsystemer med sådanne tal og dermed genoplivede Newton og Leibniz' oprindelige metoder.

Ud over en skitsering af de generelle principper i opbygningen af ikke-standard analyse gennemgås i denne projektrapport, hvorledes kontinuitet, differentiabilitet, kompakthed og integrabilitet kan formuleres ved hjælp af de uendelig små og store tal. I vores gengivelse af et eksistensbevis for løsninger til sædvanlige 1.ordens differentialligninger fremgår særligt tydeligt - synes vi - hvor store lettelser ikke-standard metoderne giver.

Rapporten indeholder endelig nogle beviser vedrørende Riemann-integrabilitet med udgangspunkt i en integrabilitetsbetingelse, der er inspireret af Riemanns oprindelige betingelse. Blandt andet viser vi ækvivalensen mellem denne betingelse og Lebesgues betingelse for Riemann-integrabilitet.

Ikke-standard analysen kræver desværre en del mængde-teoretisk gymnastik, hvilket gør emnet svært tilgængeligt. Afslutningsvis diskuterer vi, om ikke-standard analysens fordele står mål med de gymnastiske anstrengelser.

Indholdsfortegnelse.

Del I. Indledning.

I.1. Ikke-standard analyse som middel til forenkling.

Dette projekt handler om ikke-standard analyse anvendt som middel til at gøre begreber og beviser fra den sædvanlige, matematiske analyse enklere og mere intuitive. Vi fokuserer på begreberne kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet.

Formålet er for det første at vise, at ikke-standard analysen rent faktisk muliggør en forenkling. Det søger vi at underbygge ved at redegøre for de simple og elegante ikke-standard formuleringer af grundlæggende definitioner som for eksempel definitionen på kontinuitet, og ved at se på anvendeligheden af disse ikke-standard formuleringer i forbindelse med Riemann-integralet og ordinære differentialligninger af første orden.

Dernæst er formålet at belyse det problem ved ikke-standard analysen, at den er baseret på en meget kompliceret matematisk konstruktion. Det søger vi at belyse dels ved at skitsere nogle centrale dele af denne konstruktion; dels ved at referere et forsøg på en simpel aksiomatisering af ikke-standard analysen. Denne aksiomatisering er foretaget ud fra et pædagogisk sigte: At undgå den indviklede konstruktion, men bevare de intuitivt behagelige formuleringer.

Betegnelsen "ikke-standard analyse" er i virkeligheden lidt misvisende. De metoder, ikke-standard analysen har åbnet op for, anvendes ikke kun inden for feltet matematisk analyse, men også inden for for eksempel avanceret topologi og talteori (Stroyan og Luxemburg, Introduction to the theory .. s. XI). Betegnelsen stammer fra Abraham Robinsons arbejder fra 1960 og fremefter. Robinson var ikke den første til at

levere en holdbar teori for et talsystem med uendeligt små og store tal - det gjorde D.Laugwitz og C.Schmieden i 1958 (jf. Stroyan og Luxemburg: Introduction ...). Men Robinson har leveret de vigtigste bidrag, herunder blandt andet påvisningen af hvorledes differential- og integralregningen kan opbygges på grundlag af et talsystem med uendeligt små og store tal.

Betegnelsen "ikke-standard analyse" kan ses som en henvisning til, at det historisk var inden for differential- og integralregningen, at infinitesimalerne for alvor blev bragt i spil, og herfra de senere blev fordrevet af ε-δ-metoden. Denne blev knæsat som *standard*-metoden - som *den* matematiske metode.

Vi skitserer i det følgende (I.2) nogle træk af dette historiske forløb, som af Laugwitz er blevet kaldt "Rise, Fall and Resurrection of Infinitesimals".

I.2. Infinitesimalerne bragt til ære og værdighed.

Da Leibniz og Newton lagde de første grundsten til differential- og integralregningen, var det med en udstrakt brug af infinitesimaler. Differentialkvotienter og integraler blev indført ved hjælp af begreber ~~om~~ uendeligt små størrelser, uendelige summer med videre. Men hverken disse to eller nogen af de senere store matematikere, der flittigt benyttede de uendeligt små og store tal, havde nogen holdbar teori for disse tals forhold til de endelige tal.

Når man med infinitesimal-regning beregnede differentialkvotienten af $y = x^2$ således:

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx} = \frac{x^2+dx^2+2x\,dx-x^2}{dx} = 2x+dx = 2x,$$

så måtte man udsætte sig for følgende kritik: På den ene side bliver dx anset for at være et tal, der kan divideres med; på den anden side sættes dx senere lig nul (som kritiseret af blandt andre Berkeley, jf. Laugwitz: Rise, Fall and ...).

Selv om Leibniz ikke havde nogen egentlig teori for de uendeligt små og store tal, formulerede han dog et princip for dem: De uendeligt store tal skulle have samme egenskaber som store endelige tal, ligesom de uendeligt små tal skulle have samme egenskaber som små, endelige tal.

Det er en formulering, som har et vist slægtskab med den moderne ikke-standard analyses teorem, transfer-princippet, eller *Leibniz' princip* som nogle forfattere kalder det (jf. Stroyan og Luxemburg: Introduction ...). Hos Leibniz er der dog hverken tale om noget bevis for påstanden, eller om en nærmere sondring mellem egenskaber, der overføres, og egenskaber, der ikke overføres.

Med ε-δ-bevisernes stigende udbredelse op gennem 1800-tallet gled infinitesimalerne mere og mere i baggrunden. Hos mange matematikere i denne periode ser man dog stadigvæk infinitesimaler spille en vis rolle. Det gælder for eksempel for Riemann, hvis arbejde om en nødvendig og tilstrækkelig integrabilitetsbetingelse vi senere skal vende tilbage til.

Det "endelige" dødsstød mod infinitesimalerne blev leveret omkring 1870 med blandt andre de tyske matematikere Weierstrass, Cantor og Dedekind i forgrunden. Her blev ε-δ-metoderne taget i brug med en hidtil uset slagkraft, der skabte solid grund under fødderne for den matematiske analyse. Det skete med udgangspunkt i en konstruktion af de reelle tal, som vi kender dem i dag - det vil blandt andet sige uden uendeligt små og store tal. (Den historiske baggrund for præciseringen af de reelle tal hos Cantor med flere har vi set nærmere på i projektet "Der er langt fra **Q** til **R**", IMFUFA tekst nr. 99).

Infinitesimalerne gled nu helt ud af den etablerede matematiske verden, stillet over for blandt andet følgende tilsyneladende uovervindelige argumenter:

- De af Weierstrass, Cantor og Dedekind indførte konstruktionsprincipper for en archimedisk ordnet reel talmængde, var de eneste, hvor eksistensen af de reelle tal kunne udledes af eksistensen af de rationale tal. Kun hvis man var tilfreds med en reel talmængde, der var archimedisk ordnet, kunne man overvinde den hidtidige logiske kløft mellem **Q** og **R**.

- De reelle tal opfattedes i en bestemt forstand som et kontinuum. Faktisk indgik dette hos Dedekind direkte i **R**-konstruktionen, ligesom det hos Cantor spillede en stor rolle i hans filosofiske overvejelser om tallene. Opfattelsen af de reelle tal som et kontinuum gjorde deres fuldstændighed til en uomgængelig egenskab, og fuldstændigheden går netop fløjten, hvis der ikke er tale om archimedisk ordning af **R**.

- ε-δ-metoderne demonstrerede deres effektivitet i blandt andre Weierstrass' hånd. Uden på nogen måde at måtte henfalde til brug af infinitesimale betragtninger, kunne han etablere fuldt tilfredsstillende beviser for analysens grundsætninger, ligesom han blev i stand til at udvikle teorien videre, for eksempel med hensyn til konvergens af funktionsfølger.

- Det havde også en betydning, at man dengang ikke alene antog, at talsystemerne var konsistente, men også at de havde en eksistens i virkeligheden uden for matematikken. Dengang søgte for eksempel Dedekind at vise, at der fandtes en reelt eksisterende uendelig mængde. Det skulle retfærdiggøre, at man startede konstruktionen af **N** med antagelsen om eksistensen af en uendelig mængde. Der blev med Cantor fastlagt en bestemt opfattelse af, hvornår mængder var videnskabeligt veldefinerede (og reelt eksisterende) mængder, og fra disse mængder var infinitesimalerne på det bestemteste udelukkede.

Forskellige forsøg på at rehabilitere infinitesimalerne inden for matematikken mislykkedes over for disse autoriteter og ε-δ-metodens anvendelighed til at formulere beviser på stringent vis. I fysikken derimod levede infinitesimalerne i bedste velgående. Det gjorde blandt andet opstillingen af differentialligninger lettere, når man kunne ræsonnere over uendeligt små stykker, massepunkter med videre. Desuden havde fysikerne aldrig været ude for, at regning med dx'er og dy'er gav noget andet, end hvis det samme problem regnedes igennem

med behørige ε-δ-argumenter.

Først med Laugwitz', Schmiedens og Robinsons forskellige arbejder blev der i slutningen af 1950'erne og begyndelsen af 1960'erne leveret beviser for konsistensen af talsystemer med infinitesimaler. Robinson viste også, hvorledes de forskellige grundsætninger i analysen kunne bevises inden for rammerne af en teori med sådanne tal. Endelig ophævede han det paradoks, der havde hvilet over de uendeligt små og store tal, med ikke-standard analysens præcisering af, hvorledes (og hvilke) egenegenskaber, der overføres.

Infinitesimalerne er imidlertid ikke smålige; de forsøger ikke at skubbe de sædvanlige archimedisk ordnede talsystemer ud i samme unåde, som de selv har levet i. Tværtimod tilbyder ikke-standard analysen sig som et supplement, der kan bidrage til at gøre begreber og beviser enklere og mere intuitive.

I.3. Præsentation af de enkelte afsnit.

I del II gennemgår vi først de tre teoremer, som ikke-standard analysen i det væsentlige er en anvendelse af. Vi ser også på nogle træk ved den omfattende mængde-konstruktion, der ligger bag. I beskrivelsen af de tre teoremer baserer vi os på Martin Davis: Applied Nonstandard Analysis. (Der *kan* opbygges ikke-standard modeller, der adskiller sig fra M. Davis. Det gør f.eks. Stroyan og Luxemburg s. 175 f. Vi kan dog ikke gøre nærmere rede for forskellen). Vi søger også at demonstrere, hvordan man i konstruktionen af en mængde med uendeligt små og store tal kan udnytte egenskaberne ved et frit ultra-filter. Her er vi inspireret af et kapitel i Stroyan og Luxemburgs bog.

I del III viser vi, hvorledes de sædvanlige definitioner på kontinuitet, differentiabilitet og kompakthed kan gives nogle simple formuleringer med ikke-standard metoderne. Disse ikke-standard formuleringer er efterhånden en slags "standard" eksempler på anvendelse af ikke-standard analyse. Til sidst anvender vi formuleringerne i tre simple beviser.

I del IV ser vi på nogle lidt mere komplicerede emner fra den elementære analyse: Riemann-integralet og ordinære differentialligninger af første orden. Det er emner, der ikke ofres den store opmærksomhed i Stroyan og Luxemburgs, Davis' og Robinsons bøger; dér er tendensen, at man efter at have demonstreret ikke-standard analysens simple formulering af grundlæggende begreber med videre (jf. bl.a. del III) går videre og fokuserer på emner fra avanceret matematik.

I afsnittet om Riemann-integralet (IV.1) giver vi et ikke-standard bevis for, at funktionen $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann-integrabel, når f er kontinuert. Beviset er efter vores opfattelse

mere intuitivt end det, Stroyan og Luxemburg giver (Introduction ..., s. 78f). Beviset i dette projekt går via en ikke-standard integrabilitetsbetingelse, der er inspireret af den betingelse, Riemann oprindeligt opstillede (Riemann: Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe).

I afsnittet om differentialligninger (IV.2) gennemføres et ikke-standard bevis for eksistensen af løsninger til ordinære differentialligninger af første orden. Dette gøres meget udførligt i modsætning til de tre beviser, vi har luret af, nemlig Regine Winklers, Stoyan og Luxemburgs og endelig Robinsons (i Model Theory) beviser. Vi har gjort det så udførligt for at undgå henvisninger til hjælpesætninger i alt for udstrakt grad. Alle beviserne benytter den såkaldte Euler-metode, hvor man lader den information, som differentialligningen giver om hældningen af en eventuel løsnings graf, styre én frem mod en funktion. Det bevises så, at denne funktion - ikke overraskende - er en løsning til differentialligningen. Pointen er netop, at det ikke er overraskende, og vi sigter her til standard beviser, der gennemføres med Picard-iteration. Det er nemlig ikke umiddelbart indlysende, hvorfor Picard-iterationen fører til en løsning.

Endelig giver vi et ikke-standard bevis for Lebesgues kriterium for Riemann-integrabilitet. Riemann-integrabilitet af diskontinuerte funktioner diskuteres ikke af de nævnte forfattere til ikke-standard værkerne. Stroyan og Luxemburg bemærker, at de i forbindelse med Riemann-integralet forudsætter, at funktionen er kontinuert, fordi integrabiliteten af diskontinuerte funktioner alligevel bedst behandles inden for den samlede Lebesgue-teori (Stroyan og Luxemburg, s. 110).

I del V ser vi på et forsøg på at aksiomatisere ikke-standard analysen. Det drejer sig om H.J.Keislers bog Elementary Calculus med lærervejledningen Foundations of Infinitesimal Calculus. Vi viser, hvorledes Keisler undgår de vanskeligste sider af ikke-standard analysen, men samtidig må give afkald på noget af dens styrke. Keislers aksiomatisering er stærk nok til at gennemføre overvejelserne i afsnit IV.2, men derimod ikke overvejelserne i IV.1. Vi diskuterer afslutningsvis fordele og ulemper ved ikke-standard analysen som middel til forenkling af den elementære analyse.

Del II.

Om konstruktionsfasen i ikke-standard analysen.

I del II introducerer vi først (II.1) de tre teoremer, som ikke-standard analysen i det væsentlige er en anvendelse af. I II.2. uddyber vi hvorledes man kan konstruere en mængde af hyperreelle tal, *R. I II.3. omtaler vi bevisteknikken bag transfer-princippet, det første og mest basale af de tre teoremer. Endelig går vi i II.4. lidt nærmere ind på det formelle sprog L.

II.1. Introduktion af de tre vigtige teoremer.

Ikke-standard analyse er først og fremmest en *anvendelse af nogle teknikker*. I anvendelses-sammenhæng benytter man tre teoremer, som er etableret forud i hvad man kan kalde en konstruktionsfase. Disse tre teoremer er:

(1) Transfer-princippet (efter det engelske udtryk).
(2) Teoremet om indre mængder.
(3) Teoremet om konkurrente relationer.

Det er nogle teknikker, som går ud på at overføre sætninger mellem et *standard-univers* (indeholdende de reelle tal, reelle funktioner m.v.) og et modsvarende *ikke-standard univers*, hvor de sædvanlige begreber som for eksempel kontinuitet kan gives en ny formulering med brug af infinitesimaler. Enhver matematisk sætning i standard universet, som kan bevises ved hjælp af ikke-standard analyse, kan også bevises med standard metoder. Men man kan give simplere og mere intuitive beviser for forskellige sætninger, ved den særlige hoppen frem og tilbage mellem de to universer, som karakteriserer ikke-standard analysen. Skulle den øgede klarhed føre til nye opdagelser, kan man være sikker på, at de samme resultater også har standard beviser (uanset om man umiddelbart kan finde dem).

Standard universet (som vi her vil kalde $\hat{R}$) er defineret således, at alt hvad der sædvanligvis er brug for i matematisk analyse, er indbygget som mængder, der tilhører $\hat{R}$.

$$\hat{R} = \bigcup_{i \in N_0} R_i, \quad \text{hvor}$$

$$R_0 = R, \quad R_{i+1} = R_i \cup \mathcal{P}(R_i)$$

Ikke-standard universet (${}^*\tilde{R}$) er defineret på basis af en mængde ${}^*R$ af hyperreelle tal. ${}^*R$ indeholder en delmængde, der er isomorf med R, og derudover indeholder ${}^*R$ uendeligt små og store tal. ${}^*R$ har de samme 1.ordens egenskaber som R (se i øvrigt II.2).

${}^*\tilde{R}$ består nu af en vis snedigt defineret delmængde af ${}^*\hat{R}$, hvor ${}^*\hat{R}$ konstrueres på basis af ${}^*R$ på samme måde, som $\hat{R}$ blev dannet ud fra R.

$${}^*\hat{R} = \bigcup_{i \in N_0} {}^*R_i, \quad \text{hvor}$$

$${}^*R_0 = {}^*R, \quad {}^*R_{i+1} = {}^*R_i \cup \mathcal{P}({}^*R_i)$$

Vi har altså, at ${}^*\tilde{R} \subset {}^*\hat{R}$. Samtlige elementer i ${}^*R$ tilhører ${}^*\tilde{R}$, og det gør også mængden ${}^*R$. Derimod er det ikke alle elementer i ${}^*R_1$, der tilhører ${}^*\tilde{R}$, og tilsvarende sker der en "frasortering" på alle højere niveauer.

Når man i ikke-standard analysen overfører sætninger fra det ene univers til det andet, er det kun ${}^*\tilde{R}$ og ikke hele ${}^*\hat{R}$, man havner i. Når man skal overføre sætninger den modsatte vej, skal man tilsvarende starte i ${}^*\tilde{R}$. Hermed bliver det afgørende at vide om en mængde A (en vis funktion for eksempel) er element i ${}^*\tilde{R}$. Det at en mængde A tilhører ${}^*\tilde{R}$ udtrykkes ved, at mængden er indre, mens det modsatte definerer betegnelsen en ydre mængde.

Selv om A er dannet af elementer fra ${}^*\tilde{R}$, gælder ikke nødvendigvis at $A \in {}^*\tilde{R}$. Den præcise definition af, hvorledes ${}^*\tilde{R}$ udskilles af ${}^*\hat{R}$ er temmelig kompliceret. Den er også uhåndterlig i forhold til i en anvendelses-sammenhæng at afgøre, om en mængde A er indre. Her vil man ofte overfor denne type af problem søge at benytte nedenstående teorem (2) om indre mængder. I almindelighed gælder, at når ikke-standard universet er konstrueret, og de grundlæggende teoremer én gang er etableret, er man ikke interesseret i at gå tilbage til selve konstruktionen. Det er tilstrækkeligt at henholde sig til de tre nævnte teoremer, som vi vil uddybe nedenfor. Det svarer til, at i reel analyse kan man tage de reelle tals egenskaber som givne, uden at man behøver interessere sig for, hvorledes de reelle tal kan konstrueres ud fra de naturlige tal.

(1) Transfer-princippet.

Transfer-princippet fastslår en strukturlighed mellem standard universet og ikke-standard universet. Nærmere bestemt fastslår transfer-princippet, at de to universer er elementær-ækvivalente, hvilket vil sige, at der gælder de samme 1. ordens sætninger.

Sammenhængen mellem de to universer udtrykkes i transfer-princippet som en sammenhæng mellem to formelle logiske sprog L og *L. L og *L er 1. ordens logiske sprog, og i L er samtlige elementer i $\hat{R}$ navngivne, mens samtlige elementer i $^*\tilde{R}$ er navngivne i *L. At et element er navngivet i sproget, betyder at sproget indeholder en konstant, der svarer til elementet. L og *L indeholder symboler for relationerne "ϵ" og "=" foruden de sædvanlige logiske symboler (dvs. $\wedge, \neg$, og $\exists$, hvorudfra videre kan defineres $\vee, \forall$ og implikations-symboler). Transfer-princippet lyder da:

Givet en vilkårlig matematisk sætning, som kan formuleres som en sætning α i sproget L. Så er α sand i L, hvis og kun hvis $^*\alpha$ er sand i *L, hvor $^*\alpha$ er den sætning i *L, som er fuldstændig identisk med α, *bortset fra*, at samtlige konstanter a,b,c,.. , (der kan højst være endeligt mange), som indgår i α, skal udskiftes med de tilsvarende konstanter *a, *b, *c, .., i *L.

Dette er baseret på, at der til hvert element a i $\hat{\mathbb{R}}$ kan tilordnes et (såkaldt standard) element *a i $^*\tilde{\mathbb{R}}$. (Disse standard elementer i $^*\tilde{\mathbb{R}}$ udgør dog kun en lille delmængde af samtlige elementer i $^*\tilde{R}$).

Som en konsekvens af transfer-princippet fås, at $\mathbb{R}$'s egenskab af at være et ordnet, kommutativt legeme overføres til *$\mathbb{R}$. Derimod kan den archimediske ordning og eksistensen af supremum for enhver opad begrænset delmængde ikke overføres til *R. (Så ville konstruktionen for øvrigt også have været nytteløs, da pointen jo er at konstruere et ikke-archimedisk ordnet talsystem). Sætningerne om at R opfylder disse egenskaber udtaler sig om vilkårlige delmængder af R. Dvs. det er nødvendigt at udtrykke sætningerne ved brug af symbolerne $\forall M \epsilon \mathcal{P}(\mathbb{R})$:.. . Den *-transformerede sætning vil da kun udtale sig om de *indre* delmængder af *$\mathbb{R}$. Der vil gælde, at en vilkårlig indre delmængde af *R har et supremum, hvis den er opad begrænset. Derimod gælder det ikke for vilkårlige, opad begrænsede delmængder af *R, for eksempel mængden af endelige tal.

(2) Teoremet om indre mængder.

Dette princip angiver en metode til at sikre at en mængde $A \epsilon\, ^*\hat{\mathbb{R}}$ er indre. Teoremet siger, at følgende er tilstrækkeligt til at A er indre:

Der findes en indre mængde B, så
1. $A \subseteq B$, og
2. A kan defineres som de af B's elementer, der opfylder en egenskab, som kan formuleres i sproget *L.

Vigtigt i forbindelse med indre og ydre mængder er endvidere, at $\mathbb{N}$ og R er ydre. Det følger umiddelbart af, at de i *R er opad begrænsede uden at have supremum. Det samme gælder mængden af uendelig små tal:

$\{y \epsilon\, ^*\mathbb{R} \mid \forall x \epsilon \mathbb{R}_+ : |y| < x\}$. (Bemærk at vi i denne definition benytter symbolet $\mathbb{R}$, som ikke er med i $^*L$, jf. ovenstående om, at $\mathbb{R}$ er ydre). At specielt disse mængder er ydre, hænger sammen med en afgørende egenskab ved ikke-standard universet $\widetilde{^*\mathbb{R}}$. Når man først befinder sig i $\widetilde{^*\mathbb{R}}$ (det vil sige: skal udtrykke sig ved hjælp af sproget $^*L$), kan man ikke kende forskel på standard og ikke-standard elementer. Egenskaben at være uendelig lille kan ikke formuleres i $^*L$. Træder man ud af rammerne for $\widetilde{^*\mathbb{R}}$ (og tillader brugen af stærkere udtryksformer) kan man derimod godt definere forskellen - jf. definitionen ovenfor af mængden af uendelig små tal. Og *ræsonnementer* over endelighed contra uendelighed (i stort som i småt..) er da også helt centrale i ikke-standard analysen. Det gælder for eksempel ikke-standard kriteriet for kontinuitet. Der er blot tale om egenskaber som ikke kan udtrykkes alene i $^*L$. Som tre vigtige eksempler på egenskaber, som ikke kan udtrykkes i L eller $^*L$, kan for øvrigt også nævnes de tre teoremer vi her er ved at gennemgå.

Det ses, at teknikken i ikke-standard analysen på den ene side indeholder et stærkt teorem om transformation af sætninger mellem de to universer. På den anden side overføres sætningerne kun til $^*\hat{R}$, dvs. kun til en lille delmængde af $\hat{R}$'s fulde modpol, $^*\hat{R}$.

Det er dette både-og, som overvinder det paradoks, som den klassiske infinitesimal-analyse kunne kritiseres for.

Ovenstående to teoremer er tilstrækkelige til at gennemføre de transformationer m.v. i relation til integrabilitet, som er indeholdt i afsnit IV.1 Generelt er de tilstrækkelige til at etablere den såkaldte elementære analyse i en ikke-standard version. Ikke-standard teknikken kan dog gøres stærkere ved at stramme kravene til den grundlæggende konstruktion. Det giver mulighed for at bevise følgende teorem, som vi benytter i afsnit III.4 forbindelse med ikke-standard formuleringen af det topologiske begreb kompakthed.

(3) Concurrence-teoremet.

Teoremet handler om konkurrente relationer r i $\hat{R}$. Givet en relation r, $r \subseteq A \times B$, $A, B \in \hat{R}$. Da er r konkurrent netop når: For en vilkårlig endelig delmængde D af A, $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, findes et $b \in B$, så $(a_i, b) \in r$ for alle $a_i \in D$. Eksempelvis er ordningsrelationen $<$ konkurrent på $\mathbb{N}$.

Concurrence-teoremet siger, at når r er en konkurrent relation, $r \subseteq A \times B$, så findes der et element $b' \in {}^*\tilde{R}$, således at der gælder $({}^*a, b') \in {}^*r$ for alle a i *hele* r's definitionsmængde A.

Eksemplet med ordningsrelationen giver da, at der findes et $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ (lig b' ovenfor), så $n < \omega$ for alle $n \in \mathbb{N}$. (Allerede her er vi begyndt på den forkortede notation, som er uomgængelig i ikke-standard analysen. Således skriver man n i stedet for $^*n$, når $n \in \mathbb{N}$. Endvidere skriver man $n < \omega$ hvor man skulle have skrevet $n \,{}^*\!\!< \omega$ eller $(n, \omega) \in {}^*\!<$, hvilket skyldes, at $^*\!<$ opfører sig fuldstændig som den sædvanlige ordning på $\mathbb{N}$ pga. transferprincippet).

Concurrence-teoremet er ikke nødvendigt for at vise eksistensen af sådanne uendelige elementer, men er et bekvemt redskab til påvisningen heraf. Concurrence-teoremet er i forhold til de to første teoremer et supplement, som kræver en stærkere konstruktion (et specielt frit ultrafilter og en speciel indeksmængde, jf. senere).

Vi kan nu gå i gang med ikke-standard analysen. Redskaberne er ovenstående tre teoremer eller grundsætninger, og mere skal der ikke bruges. På samme måde som der kan være god grund til at gå bag om de reelle tals egenskaber, kan der dog være grund til at gå bag om disse ikke-standard analysens grundsætninger. Uden på nogen måde at forsøge en fuldstændig fremstilling af den komplicerede konstruktion, vil vi i det følgende skitsere et par af hovedideerne:

For det første vil vi skitsere ideen i konstruktionen af $^*\mathbf{R}$. Her vil vi lægge hovedvægten på, at det overhovedet kan lade sig gøre at konstruere et tallegeme, der indeholder de uendelig små og store tal, som blev bandlyst af Cantor m.fl i sidste århundrede. Hovedideen er, at det frie ultrafilter benyttes til at konstruere en mængde, der er elementærækvivalent med **R**, men er betydelig mere righoldig end **R**.

For det andet vil vi komme med nogle bemærkninger om, hvordan det kan lade sig gøre at bevise transfer-princippet.

For det tredje vil vi endelig karakterisere sproget L lidt nærmere.

II.2. Om konstruktionen af $^*\mathbf{R}$.

Vi skitserer her hvorledes man kan konstruere en mængde $^*\mathbf{R}$ af hyperreelle tal. Konstruktionen forudsætter kun de reelle tal, udvalgsaksiomet samt f.eks. Zermelo-Fraenkel-aksiomatiseringen af mængdelæren (ZF). Det implicerer, at $^*\mathbf{R}$ er konsistent, hvis ZF er det, fordi R kan konstrueres alene ved brug af de mængde-konstruktioner, ZF tillader, og fordi udvalgsaksiomet kan føjes konsistent til ZF.

At et sæt af aksiomer er konsistent, vil sige at der ikke kan udledes en modstrid af aksiomerne.

Udvalgsaksiomet er nødvendigt i konstruktionen, fordi denne forudsætter eksistensen af et frit ultrafilter på **N**.

Der kan ikke gives noget *absolut* bevis for konsistensen af *R, ligesom der ikke kan gives noget absolut konsistensbevis for **R**. De reelle tals eksistens kan udledes af ZF, men der kan ikke gives noget absolut konsistensbevis for ZF.

Det principielt umulige i at give et absolut konsistensbevis for eksempel mht. ZF, blev fastslået af Gödel. Gödels anden ufuldstændighedssætning siger i én formulering, at givet konsistensen af ZF, så er påstanden om, at disse aksiomer er konsistente, en uafgørlig sætning.

Konstruktionen af $^*\mathbf{R}$ forudsætter som nævnt udvalgsaksiomet (AC). At dette kan føjes konsistent til AC, skyldes et andet resultat fra formel logik. P. Cohen viste i begyndelsen af 60-erne, at antages at ZF er konsistent, er såvel ZF+AC som ZF+¬AC konsistente.

Vi kan altså sige, at selv om det er svært at få øje på infinitesimalerne ude i virkelighedens verden, så er *R lige så god som R mht. formel konsistens. (For øvrigt er det også svært at finde almindelige uendelige mængder ude i virkeligheden).

Hovedlinjer i selve konstruktionen.

Selve konstruktionen af *R foregår i to tempi, med udgangspunkt i mængden af reelle tal. Først pustes R op til en stor struktur af talfølger, og siden reducerer man strukturen ved at påføre den en passende ækvivalens-relation. (-Vi minder om, at én af metoderne til at konstruere R ud fra Q benytter fundamentalfølger: først etableres mængden af rationale følger, Q^N; herefter udskilles de følger, der er fundamentalfølger; endelig identificeres ved hjælp af en ækvivalensrelation de fundamentalfølger, hvis differens er en nulfølge).

"Oppustningen" består i at danne mængden af samtlige reelle følger $\{a_i\}$, $i \in N$, dvs. mængden af funktioner fra N ind i R, R^N. Denne brug af N vil vi også referere til ved at sige, at vi benytter N som indeksmængde.

Der indføres koordinatvis addition og multiplikation, således at f.eks. $\{a_i\} + \{b_i\}$ fastlægger en ny følge $\{a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, \ldots\}$.

Der skal så påføres R^N en ækvivalensrelation $\approx$ der opfylder følgende løst formulerede betingelser:

1) $R^N/\approx$ skal indeholde elementer, der kan siges at være uendelig store (hhv. små). Efter reduktionen skal strukturen altså stadig være forholdsvis righoldig. Lad os med det samme røbe, at følgen $\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ er udpeget til at spille rollen som repræsentant for et af de uendelig store tal.

2) $R^N/\approx$ skal være et legeme. Det vil bl.a. sige, at vi på den anden side, skal have reduceret så kraftigt i strukturen, at vi har ryddet alle nuldivisorer af vejen. Hvis $\approx$ blot er den koordinatvise identitet, vil der være nuldivisorer. Sættes således $\{0\}_1 = \{0,1,0,1,\ldots\}$ og $\{0\}_2 = \{1,0,1,0,\ldots\}$ fås $\{0\}_1 \cdot \{0\}_2 = \{0,0,0,0,\ldots\}$. Sidstnævnte følge er det neutrale element mht. addition, altså nulelementet, i den nye struktur, og vi får altså, at produktet af to tal, der begge er forskellige fra nul, giver nul.

En passende reduktion i strukturen R^N kan opnås ved at definere $\approx$ ved hjælp af et såkaldt frit ultrafilter på N. Et sådant er en delmængde af P(N). Et frit ultrafilter U er karakteriseret ved at opfylde følgende aksiomer, hvor A og B er vilkårlige delmængder af N:

(1) $\emptyset \notin U$

(2) $A, B \in U \Rightarrow A \cap B \in U$

(3) $A \in U \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in U$

Opfyldelsen af disse tre aksiomer sikrer at U er et filter.

(4) $B \in U \vee N \setminus B \in U$

Med dette aksiom sikres, at U er et *ultra*-filter.

(5) B endelig $\Rightarrow B \notin U$

Med aksiom nr. 5 er der endelig tale om et *frit* ultrafilter.

$\approx$ defineres nu på følgende måde, idet $\{a_i\}$ og $\{b_i\}$ er to vilkårlige følger:

$$\{a_i\} \approx \{b_i\} \Leftrightarrow \{i \mid a_i = b_i\} \in U$$

hvilket også kan beskrives som $a_i = b_i$ "næsten overalt".

Den nye mængde *R er nu simpelthen lig $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\approx$, altså en mængde, hvor et element er en klasse af ækvivalente reelle følger.

Udvalgsaksiomet er nødvendigt for at sikre eksistensen af et frit ultrafilter på N. I forbindelse med konstruktionen af *R som den skitseres her, er udseendet af det frie ultrafilter U i øvrigt ligegyldig. Konstruktionsprincippet er endda så generelt, at man i stedet for **N** kunne have valgt en vilkårlig uendelig mængde som indexmængde.

Derimod er valget af indexmængde I og frit ultrafilter U afgørende, når man vil bevise concurrence-teoremet. Det kræver et særlig smart og spidsfindigt valg af I og U. I det følgende fastholder vi **N** som indexmængde (således at man kan tænke på reelle talfølger) og lade U være vilkårlig. Netop fordi I og U kunne vælges vilkårligt, kan ræsonnementerne gennemføres uændret for de mere spidsfindige valg.

Vi vender ikke tilbage til de mere komplicerede valg af I og U. Men det skal nævnes, at eksistensen af de mere komplicerede konstruktioner viser, at modsat **R** kan *R ikke bestemmes entydigt. Forskellige I'er og U'er kan resultere i ikke-standard udvidelser *R' og *R'', som ikke er isomorfe, selv om både R' og R'' er ikke-archimediske, ordnede kommutative legemer, som indeholder en delmængde, der er isomorf med **R**.

Selve det frie ultrafilters *egenskaber* (jf. aksiomerne (1)-(5)) kommer derimod straks i spil. Vi viser hvorledes de kan udnyttes til at bevise, at den på $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ indførte addition harmonerer med ækvivalensrelationen $\approx$.

Vi forudsætter: $\{a_n\} \approx \{a_n'\}$ og $\{b_n\} \approx \{b_n'\}$,

og skal vise: $\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\}$

Per definition gælder

$\{a_n\} \approx \{a_n'\} \Leftrightarrow M_1 = \{n \in \mathbf{N}: a_n = b_n\} \in U$

$\{b_n\} \approx \{b_n'\} \Leftrightarrow M_2 = \{n \in \mathbf{N}: a_n' = b_n'\} \in U$

$\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\} \Leftrightarrow M_3 = \{n \in \mathbf{N}: a_n + b_n = a_n' + b_n'\} \in U$

Da $(a_n = a_n') \wedge (b_n = b_n') \Rightarrow (a_n + b_n = a_n' + b_n')$

gælder $M_1 \cap M_2 \subset M_3$

Ifølge aksiom (2) gælder $M_1, M_2 \in U \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in U$

Og ifølge (3) gælder $M_1 \cap M_2 \in U \wedge M_1 \cap M_2 \subset M_3 \Rightarrow M_3 \in U$

Det vil sige $\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\}$.

Det er endvidere muligt at overføre multiplikation og ordning på lignende måde, og det kan vises, at *R er et kommutativt legeme. Med hensyn til det nævnte problem om nuldivisorer i en så stor struktur, ser man, at enten $[\{0\}_1]$ eller $[\{0\}_2]$ vil være lig med $[\{0,0,0,0,\ldots\}]$ som følge af aksiom (4).

Der gælder, at R er indlejret i *R: Et element $r \in R$ svarer i strukturen $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\approx$ til den klasse, der bl.a. er repræsenteret ved den konstante følge $\{r, r, r, \ldots\}$.

Det interessante er så, at det ekstra, som *R indeholder, for eksempel er en klasse, der kan repræsenteres ved den omtalte følge $\{\omega_n\} = \{1,2,3,\ldots,n,\ \ldots\}$. Klassen $\omega = [\{\omega_n\}]$ er større end enhver klasse, der kan repræsenteres ved en konstant følge $\{k_n\} = \{k,k,k,\ \ldots\ \}$, fordi $\{n \in \mathbf{N} \mid k_n > \omega_n\}$ er endelig, uanset hvor stort et reelt tal k, der vælges.

Tilsvarende gælder, at $\{0,0,0,\ \ldots\} < \{\frac{1}{\omega_n}\} < \{k_n\}$, uanset hvor lille et reelt tal k, der vælges. Det vil sige, at $[\{\frac{1}{\omega_n}\}]$ er uendelig lille.

Det ses således, at hvis vi formulerer påstanden om, at **R** er archimedisk ordnet:

$\forall a,b \in {}^*\mathbf{R}_+ : \exists n \in \mathbf{N}:\ an > b$

- så er dette ikke opfyldt. Vi kan blot vælge $b = \omega$ og $a \in R_+$.

Når *R ikke er archimedisk ordnet, kan *R heller ikke være fuldstændigt (jf. bemærkningerne ifm. transfer-princippet s.16).

Kontinuitet, differentiabilitet og Diracs delta-funktion i *R

Konstruktionen af en ikke-standard udvidelse *R af R sikrer ikke transfer-princippet eller de andre grundsætninger. Vi mangler stadig et princip for hvorledes det er tilladt at bevæge sig fra det ene system til det andet.

Ikke desto mindre kan det lade sig gøre at definere, at en funktion $f: {}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$ er kontinuert i et punkt x_0.

(Det antages ikke, at f er det vi - forudsat den samlede konstruktion - betegner som en udvidelse af en standard funktion).

En definition kan etableres vhja. de uendelig små tal i *R (jf. definitionen s. 16).

Med $a \simeq b$ menes, at a og b er uendelig tæt på hinanden, dvs. at $(a-b)$ er uendelig lille. Det vil vi også betegne ved at sige, at a og b er ækvivalente - ikke at forveksle med den ækvivalensrelation, der blev påført $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Vi kan definere, at f er kontinuert i et standard punkt x_0, netop når:

$\forall \varepsilon \simeq 0:\ f(x+\varepsilon) \simeq f(x)$.

Betragter vi funktionen

$f(x) = x^2$,

ser vi således, at f vil være kontinuert i ovennævnte forstand i ethvert standard punkt x_0:

$$f(x_0+\varepsilon) = (x_0+\varepsilon)^2 = x_0^2 + \varepsilon(2x_0+\varepsilon) \simeq x_0^2 = f(x_0).$$

For samme funktion (og for x_0 stadigvæk valgt som et standard punkt) kan vi betragte brøken:

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}\ ,$$

hvor dx er en vilkårlig infinitesimal.

Vi får da, at

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = 2x_0+dx,$$

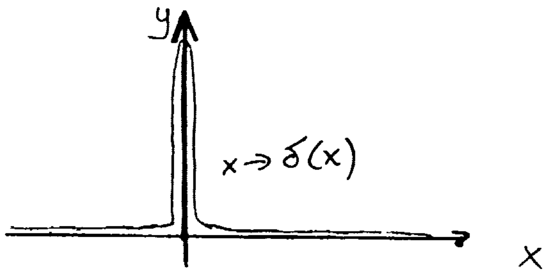
og det ses, at for vilkårlige dx og dx', hvor $dx \approx dx' \approx 0$, er

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0+dx')-f(x_0)}{dx'}$$

På baggrund af ovenstående kunne man passende definere, at f er differentiabel i x_0, netop når to sådanne brøker er ækvivalente og endelige uanset valget af dx og dx'. Og differentialkvotienten kunne videre defineres som det reelle tal, der er ækvivalent med brøkerne.

(Om eksistensen af netop ét reelt tal t, så $t \approx r$, når r er et endeligt, hyperreelt tal, se omtalen af Keislers lærebog i del V; t kaldes standard-delen af r og kan betegnes $t = \mathrm{st}(r)$).

Endelig vil vi nævne, at $^*\mathbb{R}$ rummer mulighed for at give intuitiv mening til Diracs delta-funktion.



Dirac introducerede delta-funktionen til anvendelse indenfor fysikken. Funktionsværdien $\delta(x)$ skal helst være nul (eller uendelig tæt på nul..), undtagen indenfor et meget lille område omkring punktet x=0 (et interval af uendelig lille udstrækning). Her skal funktionsværdien til gengæld være meget stor, således at $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx$ kan tilskrives en bestemt, positiv reel værdi, nemlig 1.

Man kan komme tæt på det ønskede ved at se på funktionen

$d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$d(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{K}{1+K^2x^2}$, hvor K er et stort, positivt helt tal.

Her er nemlig $\int_{-\infty}^{\infty} d(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}(Kx)\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$,

altså uafhængig af K.

Dette kunne give anledning til at forsøge en definition på integralet af funktioner fra $^*\mathbb{R}$ ind i $^*\mathbb{R}$. Det er muligt (jf. Laugwitz: Rise, fall, ..) at opstille en udvidelse af integralbegrebet, således at funktionen δ, hvor

$\delta: {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, $\delta(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2x^2}$, $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$,

vil have integralet $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$.

Som det ses, opfylder funktionen δ, at såsnart $x \neq 0$, er $\delta(x) \approx 0$.

(I del IV opstiller vi dels et ikke-standard kriterium for, at en standard funktion er integrabel i Riemanns forstand, dels indfører vi en ikke-standard *udvidelse* af integralet. Denne udvidelse kan godt benyttes til at give en tolkning af Delta-funktionen, men dette diskuterer vi i øvrigt ikke i projektet).

Ovenstående definitioner af kontinuitet og differentiabilitet, samt forsøgene på at tolke Diracs deltafunktion, mangler imidlertid at blive relateret til standard universet. I den egentlige ikke-standard analyse nøjes man ikke med at studere funktioner mv. indenfor ikke-standard-universet. Ikke-standard-analysen studerer både reelle og hyperreelle funktioner, og det afgørende er netop *sammenhængen* mellem det reelle og det hyperreelle område.

Det skal dog vise sig, at givet en standard funktion f, så *er* f differentiabel (hhv. kontinuert) i x_o *netop* når ikke-standard udvidelsen af f opfylder den nævnte definition på differentiabilitet (hhv. kontinuitet).

Et andet eksempel på viden om ikke-standard universet, som kræver transfer-princippet, drejer sig om de transcendente funktioner. Det er ikke muligt at definere for eksempel sin(x) på sædvanlig vis for $x \in {}^*\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}$, fordi sinus defineres vhja. en grænseproces. Det er et problem, fordi $^*\mathbf{R}$ ikke er fuldstændigt. Og selv om det skulle lykkes at omgå dette problem, ved vi så heller ikke, om den nye udvidede sinus-funktion tilfredsstiller de additions-, subtraktions- mv. formler, der gælder for sinus, og som bl.a. benyttes til at vise differentiabiliteten. Når sammenhængen mellem $\hat{\mathbf{R}}$ og ${}^*\tilde{\mathbf{R}}$ er sikret i from af transfer-princippet, kan man imidlertid vise, at sinus-funktionen (ligesom enhver anden standard funktion) har en ikke-standard udvidelse tilhørende ${}^*\tilde{\mathbf{R}}$, som har de samme egenskaber som standard funktionen.

II.3. Bemærkninger om teknikken i beviset for transfer-princippet.

Transfer-princippet udtaler sig om en utrolig stor mængde af sætninger: mængden af samtlige sætninger om elementer i $\hat{\mathbf{R}}$, der kan udtrykkes i sproget L. Man kan godt undre sig over, hvordan transfer-princippet kan sikres for så *mange* sætninger – sætninger der har hver deres forskellige *mening*.

Visse dele af beviset er vanskelige. Beviset hviler bl.a. på den særlige og ret komplicerede måde, hvorpå ${}^*\tilde{\mathbf{R}}$ er udskilt af ${}^*\hat{\mathbf{R}}$. Derimod er ideen i beviset særdeles enkel. Indviklede og forskelligartede matematiske sætninger kan formuleres i et logisk sprog, der anvender yderst få basale symboler (s.15). Formuleret i sproget L fremtræder en matematisk sætning som en "endelig række af logiske symboler". Det muliggør et induktionsbevis, hvor man groft sagt inducerer over længden af, eller kompleksiteten af, de logiske sætninger (symbolrækker).

Denne induktionsteknik er et fundamentalt redskab indenfor formel logik. Indførelsen af de formelle logiske sprog L og ${}^*L$ har det helt konkrete formål, at bringe teknikken i anvendelse til at producere en viden om sammenhængen mellem $\hat{R}$ og ${}^*\tilde{R}$.

– Når indviklede matematiske sætninger kan formuleres i sproget L, hænger det sammen med den mængdeteoretiske tilgang. Den særlige mængdekonstruktion, $\hat{\mathbf{R}}$, har samtlige reelle funktioner, Riemann-summer m.v. indbygget som mængder i strukturen. Det er mængder, som selv er elementer i $\hat{\mathbf{R}}$, hvilket sikrer, at funktionerne m.v. er navngivet i L. Med de matematiske objekter indbygget i mængdekonstruktionen opnås, at de relevante matematiske sætninger kan formuleres udelukkende ved hjælp af de to relationer "$\in$" og "=" - og så de sædvanlige logiske symboler $\wedge, \neg, \exists$ m.v.

- Induktionsteknikken er en uundværlig teknik indenfor formel logik. Induktionsteknikken benyttes i beviserne for de fleste teoretiske resultater fra logikken. Induktionsteknikken er nødvendig i etableringen af fuldstændighedssætningen for 1. ordens strukturer (dvs. at i en sådan struktur er de sande sætninger netop de sætninger, som kan bevises indenfor strukturen), og den benyttes i andre grundlæggende sætninger, som den formelle logik hviler på.

Det er dog værd at gøre opmærksom på, at selv om denne teknik således anvendes i beviserne for forskellige meget dybsindige sætninger, så er selve induktionsteknikken et enkelt og letfatteligt redskab. Det er et bevisteknisk redskab, der muliggør etableringen af transfer-princippet. Induktionsteknikken tillader at man slutter fra ækvivalensen mellem simple (korte) symbol-rækker i L og *L, til ækvivalensen mellem komplicerede (lange) symbol-rækker. Der skal induceres i flere retninger, dvs. ækvivalensen skal vides at være opretholdt, uanset om man øger kompleksiteten ved at betragte sætninger med en ekstra eksistenskvantor, en ekstra konjunktion, eller andet.

- I afsnittet om konstruktionen af $^*\mathbf{R}$ fremhævede vi, hvorledes det udvidede tallegeme blev etableret via en mellemstation $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. På tilsvarende måde består der mellem $\hat{R}$ og $^*\tilde{\hat{R}}$ et bindeled, her dog en større mængde af funktioner F. F er en vis delmængde af $\hat{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}$, dvs. følger af

elementer fra hele $\hat{R}$ i stedet for kun **R**. (Skal konstruktionen være stærk nok til at bevise concurrence-teoremet, er det nødvendigt at indicere $\hat{R}$ med en noget større indeksmængde end **N**). Med F som omdrejningspunkt mellem $\hat{R}$ og $^*\tilde{\hat{R}}$ kan man nu vise en sammenhæng mellem de simple "$\in$"- og "="-relationer i hhv. $\hat{R}$ og $^*\tilde{\hat{R}}$, på basis af hvilken de øvrige nævnte teknikker kan bringes i spil.

Transfer-princippet udtaler sig om forholdet mellem L og *L. Når man med transfer-princippet i hus har lov til at overføre en sætning α i L til en sætning $^*\alpha$ i *L, så ligger der bag ved denne overførsel en kæde af spring mellem forskellige strukturer: Fra den givne sætning α i sproget L slutter man til betydningen af α i universet $\hat{R}$ (en vis matematisk sætning). Herfra slutter man - via F som omdrejningspunkt - til en parallel sætning i $^*\tilde{\hat{R}}$. Sidstnævnte sætnings formelle udtryk i *L er da $^*\alpha$. Det giver følgende kæde, som illustrerer hvorledes transfer-princippet bevises:

$$L \longleftrightarrow \hat{R} \longleftrightarrow F \longleftrightarrow {}^*\tilde{\hat{R}} \longleftrightarrow {}^*L.$$

(Pilene angiver gangen i argumentationen - de betyder ikke at der findes en bijektion f.eks. mellem $\hat{R}$ og $^*\tilde{\hat{R}}$).

Når transfer-princippet er i hus, interesserer man sig imidlertid ikke for denne underliggende kæde. I praksis drejer det sig derimod om, at få en given matematisk sætning opskrevet med de til rådighed stående symboler i L på en så simpel måde som muligt. Herefter er man så sikret ækvivalensen med den tilsvarende sætning i *L, og man kan da gennemføre forskellige ræsonnementer indenfor $^*\tilde{\hat{R}}$- og $^*\hat{R}$-strukturene. Slutproduktet af disse ræsonnementer skal så til sidst opskrives med symbolerne i $^*L$ (jf. især spørgsmålet om indre og ydre mængder). Vel tilbage over L og videre til $\hat{R}$ står man - forhåbentlig - alt i alt med et simplere eller mere intuitivt bevis for en sætning i $\hat{R}$. Denne i praksis forekommende slutningskæde ser således ud:

$$\hat{R} \longleftrightarrow L \longleftrightarrow {}^*L \longleftrightarrow {}^*\tilde{R} \longleftrightarrow {}^*\hat{R}$$

Mellem L og $^*L$ benytter man det én gang etablerede transfer-princip. Det sidste skridt ud i hele $^*\hat{R}$ er som regel yderst centralt, da man i ræsonnementerne ofte ønsker at kunne skelne mellem endelige og uendelige elementer, mellem indre og ydre mængder, m.v.

I praksis vil man ofte undlade at præcisere, at man bevæger sig via L og $^*L$. I så tilfælde er det altid underforstået, at de sætninger der overføres fra det ene univers til det andet, kan udtrykkes i hhv. L og $^*L$, og at overførslen er sket via de to sprog.

4. Afsluttende bemærkninger om sproget L.

I forbindelse med sproget L skal man være opmærksom på, at selv om L er et 1. ordens sprog, er det et ualmindeligt stærkt 1. ordens sprog. At L er et 1. ordens sprog betyder, at der kun kan kvantoriseres over elementer, ikke over egenskaber (eller delmængder). L's styrke skyldes, at sproget indeholder navne på samtlige elementer i $\hat{R}$, og dermed på samtlige elementer i P(**R**), P(P(**R**)) m.v.

Således er L stærkt nok til at karakterisere **N** og **R** entydigt. Dvs. man kan i L give en formulering af de sætninger, der karakteriserer **N** hhv. **R**, således at alle mængder, der tilfredsstiller sætningerne, er isomorfe. Det er normalt ikke muligt med et 1. ordens sprog. Löwenheim-Skolems sætning fastslår det umulige i at formulere **R** entydigt i et 1. ordens sprog, hvori højst indgår tælleligt mange symboler; da fastslår sætningen nemlig, at der findes en *tællelig* delmængde **A** af **R**, som opfylder alle de sætninger, **R** opfylder (således som disse sætninger nu kan formuleres i det pågældende sprog). Da **R** er overtællelig, står man således med en mængde A, der ikke er isomorf med **R**, og som ikke kan have alle de egenskaber, vi ønsker de reelle tal skal have.

Löwenheim-Skolems sætning angiver imidlertid kun sådanne ubehagelige mængder **A**, hvis kardinalitet er større end eller lig med kardinaliteten af det pågældende sprog (antallet af forskellige symboler i sproget). Da L indeholder ligeså mange symboler som der er elementer i $\hat{R}$, er L ikke alene overtællelig, men af usædvanlig høj kardinalitet.

I den egentlige anvendelse af ikke-standard metoderne henholder man sig som nævnt blot til de beviste grundsætninger, og ser bort fra den bagvedliggende konstruktion. Denne konstruktion har imidlertid i beviserne måttet gøre brug af det omfangsrige og uoverskuelige sprog L. Når man med ikke-standard metoderne kan opnå enklere beviser for matematiske sætninger, er det derfor værd at huske på, at konstruktionen bygger på det intuitivt helt ubebribelige sprog L, der ikke blot indeholder uendeligt mange symboler, men gør det i en meget høj grad af uendelighed. I den enkelte anvendelses-sammenhæng kan man nøjes med f.eks. de første 4 eller 5 niveauer i $\hat{R}$ (hhv. ${}^{*}\tilde{R}$ og ${}^{*}\hat{R}$). Dermed kan man nøjes med et sprog, der svarer hertil, men det er stadigvæk et sprog, hvis kardinalitet er ufattelig høj.

Del III. "Standard" eksempler på anvendelser af småkryb.

I denne og næste del vil vi give nogle eksempler på ikke-standard metoders anvendelighed i den matematiske analyse. Vi skelner mellem to typer anvendelse:

1) Erkendelsespræget anvendelse. Opstilling af ikke-standard formuleringer af grundlæggende begreber som for eksempel kontinuitet og differentiabilitet, og bevis for disse formuleringers ækvivalens med standard-formuleringerne.
2) Bevisteknisk anvendelse. Standard sætninger bevises ved hjælp af sammenhængen mellem standard og ikke-standard universerne. Dette indbefatter naturligvis også brugen af ovennævnte ikke-standard formuleringer, der i mange tilfælde er meget intuitivt håndterlige.

I denne del fremlægger vi nogle standard emsempler af begge typer. Det vil sige eksempler, der meget ofte gives, når nogen ønsker at fremhæve fordele ved ikke-standard analysen i forhold til ε-δ-gymnastikken. Vi varmer hermed op til næste del, hvor vi tager fat på to lidt mere avancerede anvendelser - et af hver type.

III.1. Kontinuitet.

Standard definitionen på kontinuitet af funktionen f i punktet x_0 lyder:

(1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in Dm(f):\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

Med ord kan dette udtrykkes således: Ved at vælge mindre og mindre omegne om x_0 skal funktionsudsvinget om x_0 kunne gøres så småt, som vi behager. En naiv oversættelse kunne være: Hvis omegnen om x_0 er uendelig lille, skal funktionsudsvinget også være uendelig småt:

(2) $\forall x \in {}^*Dm(f): x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0)$

Egentlig burde f stjernes, ligesom Dm(f) er blevet det, men da f og *f er sammenfaldende i standard punkter, bruges blot betegnelsen f for den udvidede funktion af hensyn til overskueligheden. Det er derimod vigtigt at gøre opmærksom på, at variablen x nu løber over hyper-reelle tal, og derfor er Dm(f) blevet stjernet.

Bemærkelsesværdigt nok er den naive oversættelse (2) i fuld overensstemmelse med (1), hvilket nemt bevises i to trin.

<u>(1) ⇒ (2):</u> Givet et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi finde et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så

$$\forall x \in Dm(f): \left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$$

som ifølge transferprincippet også gælder med stjerne på Dm(f). Hvis $x \approx x_0$, så er $\left|x-x_0\right|$ i hvert fald mindre end δ, for uanset valget af ε, så er δ et positivt reelt tal. Heraf fås, at for alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in {}^*Dm(f): x \approx x_0 \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Da det gælder for alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, må $f(x) \approx f(x_0)$.

<u>(2) ⇒ (1):</u> Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og definer mængden *A ved

$${}^*A = \left\{\delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \mid \forall x \in {}^*Dm(f): \left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon\right\}$$

Ifølge (2) vil *A indeholde samtlige positive infinitesimaler. *A er definerbar i sproget *L som en delmængde af $^*\mathbb{R}$. *A er dermed indre, og da mængden af positive infintesimaler ikke er indre, må *A indeholde et element $\xi \not\approx 0$. Vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$, så $\delta < st(\xi)$. Vi kan altså for ethvert reelt $\varepsilon > 0$ finde et reelt $\delta > 0$, så

$$\forall x \in {}^*Dm(f): \left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Da $Dm(f) \subseteq {}^*Dm(f)$ er beviset hjemme.

Når vi opskriver standard kriteriet for kontinuitet (1), benytter vi ikke det formelle sprog L. Det er imidlertid ikke svært at "oversætte" (1) til sproget L:

(3) $\hat{R} \models (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in Dm(f))(\left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon)$

Symbolet $\models$ (kaldet turnstile) refererer til den helt præcise sandheds-definition, der er påkrævet, når der skal føres bevis for transfer-princippet og andre sætninger <u>om</u> begrebet sandhed. "$\hat{R}\models$" kan læses "følgende sætning er sand i $\hat{R}$".

Når sætningen stjernes, skal alle symboler for konstanter erstattes med symboler for de tilvarende standard elementer i $^*\hat{R}$. Transfer-princippet giver så, at sætningen er sand i $^*\hat{R}$:

(4) $^*\hat{R} \models (\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+)(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+)(\forall x \in {}^*Dm(f))$

$$({}^*|x {}^*- {}^*x_0| {}^*< \delta \,{}^*\!\Rightarrow {}^*|{}^*f(x) {}^*- {}^*f({}^*x_0)| {}^*< \varepsilon)$$

Sædvanligvis droppes langt de fleste stjerner dog. Dels vil det ofte fremgå af sammenhængen, hvilket univers man befinder sig i, dels ved man på grund af transfer-princippet, at funktioner og relationer har samme egenskaber som deres stjerne-udvidelser, og endelig gælder der, at $x_0 = {}^*x_0$ for alle $x_0 \in \mathbb{R}$. (4) skrives derfor således:

$${}^*\models (\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+)(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+)(\forall x \in {}^*Dm(f))(\left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon)$$

For at få væsentlige oplysninger vil det ofte være nødvendigt <u>ikke</u> at stjerne hele sætningen. For eksempel har vi i ovenstående bevis for (1) ⇒ (2) i princippet stjernet (3) delvist:

(5) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+: {}^*\models (\forall x \in {}^*Dm(f))(\left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon)$

De kvantorer, der er "holdt udenfor", tilhører hverken L eller *L. (5) skal derfor læses: "Hver gang vi har et positivt, reelt tal ε, kan vi finde et positivt, reelt tal δ, således at de til ε og δ svarende *L-symboler indsat i den pågældende sætning gør den sand i $^*\tilde{R}$." Der står altså én sætning for ethvert positivt, reelt tal ε, og da der findes en del af disse, må (5) siges at være en grundigt fortættet skrivemåde.

Af læselighedshensyn kan det dog ofte være fordelagtigt at udtrykke sig på mere jævnt matematisk. Fremover vil vi ofte gøre, som vi gjorde ovenfor i forbindelse med kontinuitetsbeviset: lade det være underforstået, at de sætninger, der overføres, kunne være udtrykt i de formelle sprog L og *L.

III.2. Differentiabilitet.

At funktionen f har differentialkvotienten a i punktet x_0 kan formuleres standard ved

(6) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in \mathrm{Dm}(f):\ \left(x\neq x_0\ \wedge\ |x-x_0|<\delta\right)\Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$

Sammenlignes med (1) - kontinuitetskriteriet - og dennes ikke-standard formulering, fås umiddelbart

(7) $\forall x\in {}^*\mathrm{Dm}(f):\ \left(x\neq x_0\ \wedge\ x\approx x_0\right)\Rightarrow \left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\approx a$

som ikke-standard ækvivalenten til (6).

Det er nu oplagt, at hvis der findes et reelt tal a, som gør (7) sand, så vil a også opfylde

(8) $\forall dx\in {}^*\mathbb{R}:\ \left(dx\neq 0\ \wedge\ dx\approx 0\right)\Rightarrow \mathbf{st}\left(\dfrac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}\right)=a$

Omvendt vil (7) være opfyldt, hvis (8) er opfyldt. I overensstemmelse med normal terminologi kan vi altså skrive

$$f'(x)=\mathbf{st}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

Som antydet på side 27 kan dette udtryk for f' være ganske handy, hvilket også vil fremgå af afsnit III.5, hvor vi blandt andet beviser kædereglen.

III.3. Ligelig kontinuitet.

Kontinuitet af funktionen f i *hele* Dm(f) kan formuleres standard på denne måde:

(9) $\forall x \in Dm(f)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x' \in Dm(f): |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

Det følger umiddelbart, at ikke-standard formuleringen heraf er

(10) $\forall x \in Dm(f)\ \forall x' \in {}^*Dm(f): x \approx x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$

Med andre ord, funktionen er kontinuert, hvis vi er sikre på, at funktionsværdierne kun ændrer sig infinitesimalt, når vi fjerner os uendelig lidt fra et standard punkt. Understregningen motiveres af ikke-standard kriteriet for ligelig kontinuitet.

Standard kriteriet for ligelig kontinuitet er:

(11) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in Dm(f)\ \forall x' \in Dm(f): |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

og ikke-standard ækvivalenten ser således ud:

(12) $\forall x \in {}^*Dm(f)\ \forall x' \in {}^*Dm(f): x \approx x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$

Sammenlign med (9) og (10). Beviset for (11) $\Leftrightarrow$ (12) er ukompliceret, og udelades her.

Hvordan kan en funktion være kontinuert uden at være ligelig kontinuert? Lad os se på funktionen $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = \sin(1/x)$.

Om denne funktion gælder, at

$$\forall n \in \mathbb{N}: f\left(\frac{2}{(4n-1)\pi}\right) = -1 \wedge f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right) = 1$$

og følgelig vil det samme gælde for den udvidede funktion, blot kan n løbe over $^*\mathbb{N}$. Vælger vi nu et $\omega_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, vil der både gælde, at $\frac{2}{(4\omega_0-3)\pi} \approx \frac{2}{(4\omega_0-1)\pi}$ og at $f\left(\frac{2}{(4\omega_0-3)\pi}\right) - f\left(\frac{2}{(4\omega_0-1)\pi}\right) = 2$. Funktionsværdierne *kan* altså være ikke-ækvivalente, selv om x-værdierne er ækvivalente. Det hænger sammen med, at vi ved at stjerne Dm(f) får elementer med, som ikke er ækvivalente med noget element i Dm(f), i dette tilfælde de positive infinitesimaler. Dette fører frem til nogle mere generelle betragtninger, nemlig omkring begrebet kompakthed.

III.4. Kompakthed.

Lad os betragte mængder $K \subset \mathbb{R}$, som opfylder kriteriet

(13) $\forall x \in {}^*K \; \exists x' \in K: x \approx x'$

Havde Dm(f) i ovenstående eksempel opfyldt dette, var vi ved stjerne-udvidelsen højst kommet uendelig lidt væk fra punkterne i Dm(f). Mængder, der opfylder (13), er således i en vis forstand afsluttede, og de må også nødvendigvis være begrænsede. Hvis en mængde K ikke er begrænset i $\mathbb{R}$, så vil $^*K$ ikke være begrænset i $^*\mathbb{R}$, hvilket igen bevirker, at $^*K$ må indeholde uendeligt store tal, der jo ikke er ækvivalente med noget reelt tal. Rent faktisk er (13) ikke-standard kriteriet for kompakthed!

Da kompakthed er et topologisk begreb, må vi for at bevise ækvivalensen mellem standard og ikke-standard kriteriet for kompakthed helt generelt, tage relationen $\approx$ op til vurdering i en generel, topologisk sammenhæng. Mere præcist skal vi have defineret $\approx$ ved hjælp af åbne omegne, der er det grundlæggende begreb i topologi.

De åbne omegne, der hidtil har ligget underforstået, er åbne intervaller - også kaldet δ-omegne. Lader vi A(0) betegne mængden af åbne intervaller om nul, så kan mængden af infinitesimaler skrives således:

$$\cap \left\{ {}^*M \;\middle|\; M \in A(0) \right\}$$

Med de åbne intervaller kan vi snerpe vilkårligt meget sammen om nul, og infinitesimalerne er dermed de eneste elementer, der er med i <u>alle</u> de stjernede åbne intervaller. Omvendt vil enhver infinitesimal tilhøre alle de stjernede omegne.

Tilsvarende kan vi definere infinitesimale omegne, kaldet monader og betegnet med μ, om vilkårlige standard tal x:

(14) $\mu(x) = \cap \left\{ {}^*M \;\middle|\; M \in A(x) \right\}$

og to endelige (hyperreelle) tal er ækvivalente, hvis og kun hvis der findes en monade, hvori de begge ligger. Dette fortæller ikke andet om uendeligt store tal, end at de ikke er ækvivalente med noget endeligt tal, men det er også nok.

Vi kan med definitionen (14) løsrive os fuldstændigt fra $\mathbb{R}$ og åbne intervaller, og de følgende betragtninger gælder helt generelt for topologiske rum, hvor $\approx$ via (14) har fået den ønskede generelle definition.

Standard kriteriet for kompakthed af en mængde K er:

(15) Ud af <u>enhver</u> overdækning af K med åbne mængder kan der plukkes endeligt mange åbne mængder, der dækker hele K.

Mens ikke-standard kriteriet lød

(16) $\forall x \in {}^*K \; \exists x' \in K: x \approx x'$

<u>(15)⇒(16):</u> Lad K opfylde (15) og lad $p \in {}^*K$. Vi skal så vise, at

$$\exists q \in K: p \in \mu(q)$$

Det skal føre til en modstrid at antage det modsatte:

$$\forall q \in K: p \notin \cap \left\{ {}^*M \;\middle|\; M \in A(q) \right\} = \mu(q)$$

hvilket hermed antages. Der må derfor for alle q i K findes mindst ên åben omegn G(q), hvor $p \notin {}^*G(q)$. Det er klart, at

$$\bigcup_{q \in K} G(q)$$

er en åben overdækning af K. Da K opfylder (15) kan herudaf plukke et endeligt antal omegne, der dækker K, det vil sige, at vi kan finde $q_1, q_2, \ldots, q_n$, så

$\forall x \in K: x \in G(q_1) \vee x \in G(q_2) \vee \ldots \vee x \in G(q_n)$

Stjernet får vi, idet $p \in {}^*K$, at

$p \in {}^*G(q_1) \vee p \in {}^*G(q_2) \vee \ldots \vee p \in {}^*G(q_n)$

og dette er i modstrid med valget af de åbne mængder G.

(16) ⇒ (15): Lad K opfylde (16). Vi skal bevise at K opfylder, at

Ud af enhver åben overdæknin af K kan der plukkes en endelig overdækning.

Vi vil i stedet føre det til en modstrid at antage det modsatte; vi antager altså, at

Der findes en åben overdækning $\mathbf{G}$ af K, hvorudaf der ikke kan plukkes et endeligt antal åbne mængder, der dækker K.

Hvis $G_1 \in \mathbf{G}$, $G_2 \in \mathbf{G}$, ..., $G_n \in \mathbf{G}$, så gælder hermed, at

$\exists p \in K: p \notin G_1 \wedge p \notin G_2 \wedge \ldots \wedge p \notin G_n$

ellers ville $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ være en åben overdækning af K. Vi kan nu definere en relation κ ved

† $\kappa = \{(X,y) \mid X \in \mathbf{G} \wedge y \in K \wedge y \notin X\}$

At omegnen $G \in \mathbf{G}$ står i relation til et punkt i K betyder, at punktet ligger i K, men udenfor G.
Alle omegnene i $\mathbf{G}$ står i relation til (mere end et) element i K, så $Dm(\kappa) = \mathbf{G}$. For et endeligt antal mængder i $\mathbf{G}$ kan vi ifølge † altid finde et punkt i K, som står i relation til dem alle. Dermed er κ concurrent.
Concurrence sætningen giver os da et $p \in {}^*U$, hvor

$\forall G \in \mathbf{G}: ({}^*G, p) \in {}^*\kappa$

Da $\kappa \subset \mathbf{G} \times K$ er ${}^*\kappa \subset {}^*\mathbf{G} \times {}^*K$, så $p \in {}^*K$. For alle $G \in \mathbf{G}$ gælder

$\forall x \in K: (G,x) \in \kappa \Rightarrow x \notin G$

Ved at stjerne slutter vi, at for alle $G \in \mathbf{G}$ gælder $p \notin {}^*G$.
Men da K opfylder (16) og $p \in {}^*K$, så findes et $q \in K$, hvor $p \approx q$. Det kan også udtrykkes ved $p \in \mu(q)$. Da $\mathbf{G}$ er en åben overdækning af K, findes der i $\mathbf{G}$ en åben omegn G(q), der indeholder q. Vi har dermed

$p \in \mu(q) = \cap\left\{{}^*M \mid M \in A(q)\right\} \subseteq {}^*G(q)$

altså at $p \in {}^*G(q)$, mens dette jo netop ikke var tilfældet for noget $G \in \mathbf{G}$. Modstriden er etableret.

Efter denne mundfuld går vi over til den mere bevistekniske anvendelse af ikke-standard metoder.

III.5. Standard sætninger bevist med ikke-standard metoder.

For at benytte alle de nævnte ikke-standard formuleringer har vi valgt at referere ikke-standard beviserne for følgende tre sætninger.

a) Kædereglen.

b) Intervallet $[a;b] \subset \mathbb{R}$ er kompakt.

c) Kontinuitet på kompakt mængde medfører ligelig kontinuitet.

a) Hvis $\varphi(x) = f\big(g(x_0)\big)$, hvor g er differentiabel i x_0, og f er differentiabel i $g(x_0)$, så er φ differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $f'\big(g(x_0)\big)\, g'(x_0)$.

Bevis. Lad $dx \neq 0$ og $dx \approx 0$. Vi har da

$$\frac{g(x_0+dx)-g(x_0)}{dx} = g'(x_0) + \alpha$$

hvor α er en given infinitesimal. Omformet fås

$$\dagger \quad g(x_0+dx) = g(x_0) + g'(x_0)dx + \alpha dx$$

Lad nu $dx' = g'(x_0)dx + \alpha dx \approx 0$. Dette giver, at

$$\begin{aligned} f\big(g(x_0+dx)\big) &= f\big(g(x_0) + g'(x_0)dx + \alpha dx\big) \\ &= f\big(g(x_0) + dx'\big) \\ &= f\big(g(x_0)\big) + f'\big(g(x_0)\big)dx' + \beta dx' \end{aligned}$$

hvor β er en given infinitesimal. Dette opnås ved at udnytte differentiabiliteten af f, på samme måde som differentiabiliteten af g udnyttedes. Når differentiabilitetskriteriet (10) omformes til $\dagger$, så bliver forudsætningen $dx \neq 0$ overflødig. Det er heller ikke tilfældet ovenfor, at dx' altid vil være forskellig fra nul. Vi kan nu beregne tilvæksten af φ således:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0+dx)-\varphi(x_0) &= f\big(g(x_0+dx)\big) - f\big(g(x_0)\big) \\ &= f'\big(g(x_0)\big)dx' + \beta dx' \\ &= f'\big(g(x_0)\big)\big(g'(x_0)dx + \alpha dx\big) + \beta\big(g'(x_0)dx + \alpha dx\big) \end{aligned}$$

Her optræder dx i alle led, og ved division med dx fås

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(x_0+dx)-\varphi(x_0)}{dx} \\ &= f'\big(g(x_0)\big)\, g'(x_0) + f'\big(g(x_0)\big)\alpha + g'(x_0)\beta + \alpha\beta \\ &\approx f'\big(g(x_0)\big)\, g'(x_0) \end{aligned}$$

Hermed er det ønskede resultat opnået. Bemærk at der kun er benyttet simple regneregler for infinitesimalerne. Dette er muligt på grund af $\dagger$, der siger, at en differentiabel funktion g er "næsten lineær" i monaderne. Denne formulering er meget simpel at anvende - også ved beviserne for differentialkvotienten af sum, produkt og kvotient mellem funktioner.

b) Det lukkede interval $[a;b]$ er kompakt.

Bevis. Det lukkede interval $[a;b]$ er defineret ved

$$\{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\}$$

Ved at stjerne finder man, at

$$^*[a;b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} :\ a \le x \le b\}$$

Lad $x \in {}^*[a;b]$. Vi skal finde et $x' \in [a;b]$, hvor $x \approx x'$.

Da x er endelig, er **st**(x) veldefineret. Vi kan altså skrive x som **st**$(x)+dx$, hvor dx er en given infinitesimal. Vi skal nu blot bevise, at **st**$(x) \in [a;b]$, og det indses let, idet $a \le$ **st**$(x)+dx \le b$. Selvom $dx > 0$, så kan **st**(x) ikke være mindre end a, for så ville $dx \ge a-$**st**$(x) > 0$, og dx kan ikke være større end eller lig med noget reelt, positivt tal. Tilsvarende fås, at **st**$(x) \le b$, og vi har dermed fundet det søgte x', nemlig $x' =$ **st**(x).

Nogle vil måske undre sig over, at fuldstændigheden af **R** slet ikke er nævnt. Det skyldes, at fuldstændigheden ligger gemt i, at det er muligt at tage standard delen af et endeligt hyperreelt tal, men det vender vi nærmere tilbage til i del V.

c) Hvis funktionen f er defineret og kontinuert på en kompakt mængde K, så er f ligelig kontinuert.

Bevis. Lad $x, x' \in {}^*K$ og $x \approx x'$. Vi skal vise, at $f(x) \approx f(x')$. Da K er kompakt, findes et $t \in K$, hvor $x \approx t \approx x'$. Da f er kontinuert, $t \in K$, $x \approx t$ og $t \approx x'$, så er $f(x) \approx f(t)$ og $f(t) \approx f(x')$, og dermed $f(x) \approx f(x')$.

Del IV. Riemann-integralet og ordinære differentialligninger i ikke-standard belysning.

I det følgende vises først, hvorledes definitionen på almindelig (Riemann-) integrabilitet kan gives en elegant formulering ved hjælp af ikke-standard analysen. Dernæst vises, hvorledes man på basis af denne ikke-standard definition på integrabilitet kan bevise forskellige sætninger vedrørende integrabilitet og differentialligninger.

I det følgende er $f\colon [a;b] \to \mathbf{R}$ en begrænset funktion. Da Leibniz indførte det gængse symbol for integralet,

$$\int f(x)dx \quad ,$$

forstod han hermed en uendelig sum af produkter $f(x)dx$, hvor dx er uendelig lille. I ikke-standard analysen tolkes integralet netop som en sådan uendelig sum. I det følgende arbejdes således med intervalinddelinger $\{x_i\}$ af $[a;b]$, hvor i løber fra 0 til n, $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$. n betegnes som *-endelig og $\{x_i\}$ som en *-endelig intervalinddeling. Endvidere skal naturligvis gælde, at $(x_{i+1}-x_i) \approx 0$. Ikke-standard analysen muliggør, at disse intervalinddelinger, hvor delintervallængden er uendelig lille, kan behandles (næsten) som om der var tale om almindelige, endelige intervalinddelinger, fordi n er endelig set fra ikke-standard universet.

For at *-transformere standard-definitionen på Riemann-integrabilitet er det nødvendigt at kvantorisere over vilkårlige intervalinddelinger af [a;b], dvs. over *delmængder* af **R**. Dermed bliver det i ikke-standard universet nødvendigt at tale om vilkårlige *indre* intervalinddelinger.

Distinktionen mellem indre og ydre mængder er for vanskelig til at den kan introduceres på f.eks. gymnasieniveau. Dette problem er i Keislers lærebog løst på følgende måde i forbindelse med integrabilitet:

Keisler forudsætter, at de funktioner, der skal integreres, er kontinuerte. Han indfører en såkaldt endelig Riemann-sum, hvor [a;b] deles i et antal stykker af samme længde Δx, startende fra a og eventuelt sluttende med et reststykke af længden mindre end Δx. I delintervallet $[x_i;x_{i+1}]$ betragter Keisler kun funktionsværdien i venstre endepunkt. Givet funktionen f og integrationsintervallet, afhænger Riemann-summen således kun af variablen Δx.

Herefter kan Keisler indføre en såkaldt uendelig Riemann-sum, hvor Δx er uendelig lille. Det bygger på en *-endelig intervalinddeling, jf. ovenfor. Da den af Keisler indførte Riemann-sum kun varierer med Δx, kan han opnå *-endelige intervalinddelinger, hvor $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ uden at kvantorisere over delmængder. Keisler viser, at den uendelige Riemann-sum altid vil være endelig, og at standard-delen af den er uafhængig af valget af infinitesimalen Δx.

$\int_a^b f(x)dx$ kan da defineres som standard-delen af en sådan uendelig Riemann-sum, for vilkårlig positiv infinitesimal Δx.

Herefter kan Keisler bevise de forskellige sætninger om stamfunktion, sammenhæng mellem integrabilitet og differentiation m.v. Samtlige sætninger etableres på basis af ikke-

standard-definitionen af integralet. Nu ville der ikke være noget forkert i at hive den tilsvarende standard-definition ind et par gange, hvis det var nødvendigt for at klare nogle af beviserne. Men det *er* altså ikke nødvendigt, og Keislers fremstilling viser, at hvis man i øvrigt kan acceptere infinitesimalerne, så får man en særdeles enkel og behagelig indføring i den elementære analyse.

I det følgende antager vi - modsat Keisler - ikke at f er kontinuert, men blot at f er begrænset på det lukkede interval [a;b]. Først sikrer vi os, at vores ikke-standard-definition på, hvornår integralet eksisterer, er ækvivalent med den sædvanlige definition på eksistensen af Riemann-integralet. Vi benytter en ikke-standard-definition, som er tæt på (og ækvivalent med) den definition, som gives i Stroyan og Luxemburg, 1976 (s.78), men som dog forekommer os mere håndterlig.

Dernæst viser vi, hvorledes nogle sætninger vedr. integrabilitet og differentialligninger kan gives nogle - efter vores mening - interessante ikke-standard beviser, som kommer tættere på den intuitive opfattelse af tingene.

Den første er en nødvendig og tilstrækkelig ikke-standard betingelse for, at integralet eksisterer. Denne betingelse er inspireret af den betingelse Riemann opstillede i sit *Habilitationsschrift* om trigonometriske funktioner. Når ikke-standard betingelsen er opstillet, falder integrabiliteten af kontinuerte funktioner ud som en umiddelbar konsekvens.

Den anden sætning er eksistens og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger af 1. orden. Ikke-standard beviset går en hel anden - og mere direkte - vej end standard beviset. Af det vi har set, er det den anvendelse af ikke-standard analysen, vi synes er mest interessant.

Til sidst giver vi et - ligeledes ikke-standard - bevis for Lebesgues kriterium for Riemann-integrabilitet.

Lebesgues kriterium lyder, , at f er Riemann-integrabel, netop når mængden af f's diskontinuitetspunkter er en nulmængde. En nulmængde er en mængde der opfylder, at for vilkårligt $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes en tællelig foreningsmængde af åbne intervaller, som overdækker mængden og som har en samlet længde, der er mindre end ε. Et standard-bevis for Lebesgues kriterium gives f.eks. af Apostol (s.169 f).
Det må siges, at vores ikke-standard bevis er svært, hvis man ikke er fortrolig med ikke-standard teknikken.

IV.1. Transformation af standard-definitionen på Riemann-integralet.

Vi vil her opskrive standard-definitionen med (første ordens-) kvantorer, således at vi kan "stjerne" definitionen og få en passende ikke-standard-definition.

Standard-definitionen baseres på endelig Riemann-summer, og vi vil her gøre interval-inddelingen af $[a;b]$ finere ved at lade den største tilladte længde af delintervallerne blive mindre og mindre. (En anden standard-definition kan gives ved at tage én intervalinddeling, og så tilføje nye endepunkter, så man får en videre-inddeling. Disse to fremgangsmåder fører til ækvivalente definitioner, jf. Apostol s.142 og 174).

Vi betegner en intervalinddeling af $[a;b]$ med symbolet $\{x_i\}$. Når $\{x_i\}$ består af n+1 punkter fra $[a;b]$ $(n\geq 1)$, har vi, at $\{x_i\}\in[a;b]^{I_{n+1}}$, hvor $I_{n+1}=\{i\in\mathbb{N}\mid 0\leq i\leq n\}$. Vi forlanger naturligvis, at $x_0=a$, at $x_n=b$, og at der for alle i gælder, at $x_i<x_{i+1}$.

For en given $\{x_i\}$ med n+1 elementer skal vi betragte to intervalinddelinger $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$, som har n elementer og som for alle $i\in I_n$ opfylder $y_i, y_i'\in[x_i;x_{i+1}]$. $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ er i øvrigt vilkårlige.

I det følgende er ovenstående præciseringer af $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ underforståede, og vi skriver $\Delta x_i\leq\delta$ i stedet for $\forall i\in I_n: x_{i+1}-x_i\leq\delta$.

Riemann-integralet defineres sædvanligvis i relation til $\left|S-\sum_{i\in I_n} f(y_i)\Delta x_i\right|$, $S\in R$, (jf. f.eks. Apostol), men det er let at se, at man får samme klasse af integrable funktioner med udgangspunkt i summen $\sum_{i\in I_n}\left|f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$

Vi har da, at f er Riemann-integrabel, netop når:

$$(1)\quad \forall\varepsilon\in R_+:\exists\delta\in R_+:\forall n\in N:\forall\{x_i\}\in[a;b]^{I_{n+1}}:\forall\{y_i\},\{y_i'\}\in[a;b]^{I_n}:$$
$$\Delta x_i\le\delta \Rightarrow \sum_{i\in I_n}\left|f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i < \varepsilon$$

Nu er alt klar til at blive oversat til det formelle sprog, og herefter "stjernet", blot mangler vi en overvejelse over hvad vi mener med symbolet $\sum_{i\in I_n} a_i$, $a_i\in R$. Her er tale om en *funktion*, som tilhører standard-universet og som følgelig har en ikke-standard-udvidelse ligesom enhver anden standard-funktion.

For ethvert $n\in N$ er $\sum_{i\in I_n} a_i$ en afbildning fra R^{I_n} ind i R. Følgelig er den tilsvarende ikke-standard-funktion for ethvert $n\in {}^*N$ en afbildning af ${}^*\left(R^{I_n}\right)$ ind i ${}^*R$.

Fremover skriver vi altid I_n, også i ikke-standard universet, hvor I_n betyder mængden $\{i\in{}^*N \mid 1\le i\le n\}$, $n\in{}^*N$

Regneregler for ikke-standard-summation må hentes fra regnereglerne for standard ditto. Vi skal bl.a. benytte, at når $I=I'\cup I''$, $I'\cap I''=\emptyset$ og I' og I'' er indre mængder, så er $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in I''} a_i$.

Når vi "stjerner" (1), udtrykt i det formelle sprog, får vi en sætning, der handler om (indre) $*$-endelige intervalinddelinger. Vi er specielt interesserede i de intervalinddelinger, hvor antallet af elementer tilhører ${}^*N\setminus N$. Her får vi på den ene side de ønskede uendelige intervalinddelinger, og på den anden side har vi styr på dem, som følge af sammenhængen mellem standard-universet og ikke-standard-universet.

Ved $*$-transformationen overføres præciseringerne mht. $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ til nogle helt parallelle bånd. Transformationen giver en sætning omhandlende *indre*, $*$-endelige intervalinddelinger. Dvs. vi får ikke noget at vide om helt *vilkårlige*, $*$-endelige intervalinddelinger af $[a;b]$ – men det skal vi heller ikke bruge til noget.

Af (1) sluttes:

$$(2)\quad \forall\varepsilon\in R_+:\exists\delta\in R_+:{}^*\!\models\forall n\in{}^*N:\forall\{x_i\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_{n+1}}\right):\forall\{y_i\},\{y_i'\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_n}\right):$$
$$\Delta x_i\le\delta \Rightarrow \sum_{i\in I_n}\left|f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i < \varepsilon$$

Uligheden $\sum_{i\in I_n}\left|(f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i < \varepsilon$ gælder blandt andet for samtlige (indre) intervalinddelinger $\{x_i\}$, hvor $\Delta x_i \simeq 0$.

For alle sådanne intervalinddelinger siger (2), at for alle $\varepsilon\in R_+$, er summen numerisk mindre end ε. Heraf følger, at summen er infinitesimal. Dvs., hvis f opfylder standard-definitionen (1), opfylder ikke-standard-udvidelsen af f følgende ikke-standard-kriterium:

$$(3)\quad \forall n\in{}^*N:\forall\{x_i\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_{n+1}}\right):\forall\{y_i\},\{y_i'\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_n}\right):$$
$$\Delta x_i\simeq 0 \Rightarrow \sum_{i\in I_n}\left|f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i \simeq 0.$$

Vi skal nu vise, at man kan slutte den modsatte vej: hvis udvidelsen af f opfylder (3), opfylder f standard-definitionen (1). Vi slutter af (3), at:

$$(4)\quad \exists\delta\in{}^*R_+:\forall n\in{}^*N:\forall\{x_i\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_{n+1}}\right):\forall\{y_i\},\{y_i'\}\in{}^*\!\left([a;b]^{I_n}\right):$$
$$\Delta x_i\le\delta \Rightarrow \sum_{i\in I_n}\left|f(y_i)-f(y_i')\right|\cdot\Delta x_i \simeq 0.$$

(δ kan vælges som et hvilket som helst positivt infinitesimal).

Af (4) sluttes videre:

$$(5)\ \forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+ : {}^*\models \exists\delta\in{}^*\mathbf{R}_+ : \forall n\in{}^*\mathbf{N} : \forall\{x_i\}\in{}^*\left([a;b]^{I_{n+1}}\right) : \forall\{y_i\},\{y_i'\}\in{}^*\left([a;b]^{I_n}\right) :$$
$$\Delta x_i \le \delta \Rightarrow \sum_{i\in I_n} \left|f(y_i)-f(y_i')\right| \Delta x_i < \varepsilon$$

Ved at fjerne stjernerne i (5) er vi tilbage til en formulering svarende til (1). Dvs. når f er en begrænset standard-funktion defineret på det lukkede interval [a;b], er den Riemann-integrabel netop når ikke-standard-udvidelsen af f opfylder ikke standard-kriteriet (3).

Fra nu af skriver vi $\forall\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\}$ i stedet for
$\forall n\in{}^*\mathbf{N} : \forall\{x_i\}\in{}^*\left([a;b]^{I_{n+1}}\right) : \forall\{y_i\},\{y_i'\}\in{}^*\left([a;b]^{I_n}\right)$

Vi vil også lade det være underforstået, at de *-endelige intervalinddelinger, vi omtaler, er indre mængder.

Integrabilitets-definitionen (eller kriteriet om man vil) i ikke-standard-universet kan da skrives på følgende kortere måde:

Når f er en begrænset standard-funktion defineret på det lukkede interval [a;b], er f Riemann-integrabel netop når ikke-standard-udvidelsen af f opfylder følgende:

$$(6)\quad \forall\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\} : \Delta x_i \approx 0 \Rightarrow \sum_{i\in I_n} \left|f(y_i)-f(y_i')\right| \cdot \Delta x_i \approx 0 .$$

IV.2. En nødvendig og tilstrækkelig integrabilitets-betingelse, jf. Riemann.

f er stadigvæk forudsat at være en begrænset standard-funktion defineret på [a;b].

Vi vil vise at ikke-standard-kriteriet for integrabilitet er opfyldt, netop når udvidelsen af f opfylder følgende:

(7) For ethvert positivt reelt σ skal der gælde:
For alle $\{x_i\},\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$, $\Delta x_i \approx 0$, skal totallængden af de delintervaller $[x_i;x_{i+1}]$, hvori der findes y_i og y_i', så $|f(y_i)-f(y_i')|>\sigma$, være infinitesimal. (Totallængden af de uendeligt korte intervaller defineres nedenfor).

Vi viser i det følgende, at når dette er opfyldt, kan der ses bort fra bidragene til summen $\sum_{i\in I_n} \left|f(y_i)-f(y_i')\right| \cdot \Delta x_i$ fra de delintervaller, hvor funktions-udsvinget er stort (fordi f er begrænset). Samtidig er "ubehagelighederne" fra de resterende delintervaller også ubetydelig, da betingelsen gælder for alle positive, reelle σ. Den samme opdeling i "store" og "små" diskontinuiteter benyttes i Apostols standard bevis for Lebesgues kriterium (Apostol, s.169 f).

Bevis:

Givet en vilkårlig $\{x_i\}$, $\Delta x_i \approx 0$, med indexmængde I_{n+1} ($n\in{}^*\mathbf{N}$) og givet vilkårlige $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$. For vilkårligt $\sigma\in R_+$ defineres følgende indexmængde:

$$I_\sigma = \{i\in I_n \mid |f(y_i)-f(y_i')|>\sigma\}$$

Da I_σ kan defineres i det formelle sprog, og da I_σ er en delmængde af I_n, der selv er indre, er I_σ en indre mængde. Det samme gælder $I_n \setminus I_\sigma$.

For vilkårlig $\sigma \in R_+$ kan vi derfor tillade os følgende omskrivning (jf. s.54):

$$\sum_{i\in I_n} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i = \sum_{i\in I_\sigma} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i + \sum_{i\in I_n \setminus I_\sigma} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i$$

Ved "totallængden" i (7) forstår vi $\sum_{I_\sigma} \Delta x_i$. Summen afhænger ikke blot af $\{x_i\}$, men også af $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ (jf. definitionen på I_σ).

(6) ⇒ (7) - betingelsen nødvendig:

Vi antager, at udvidelsen af f opfylder (6), og betragter vilkårlige $\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\}$, $\Delta x_i \approx 0$. For givet $\sigma \in R_+$ fås:

$$\sigma \cdot \sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i \leq \sum_{i\in I_\sigma} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i$$

Som følge af (6), er højresiden infinitesimal, og derfor må $\sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i$ være infinitesimal for alle $\{x_i\}$, $(\Delta x_i \approx 0)$, da $\sigma \neq 0$.

Da uligheden gælder for vilkårlig $\sigma \in R_+$ fås (6)⇒(7).

(7) ⇒ (6) - betingelsen tilstrækkelig:

Vi antager at udvidelsen af f opfylder (7), og betragter vilkårlige $\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\}$, $\Delta x_i \approx 0$. For givet $\sigma \in R_+$ fås:

$$\sum_{i\in I_\sigma} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i + \sum_{i\in I_n \setminus I_\sigma} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i \leq 2M\cdot \sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i + \sigma(b-a)$$

$M \in R_+$ er en øvre grænse for standard-funktionen $|f(x)|$, og dermed også for ikke-standard-udvidelsen.

Som følge af, at (7) er opfyldt, er $M\cdot \sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i \approx 0$.

Da uligheden gælder for vilkårlig $\sigma \in R_+$ fås:

$$\forall \sigma \in R_+ : \sum_{i\in I_n} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i \leq \varepsilon(\sigma) + \sigma(b-a) \quad \text{, hvor } \varepsilon(\sigma) \approx 0,$$

hvilket kun kan gælde, hvis $\sum_{i\in I_n} |f(y_i)-f(y_i')|\cdot \Delta x_i \approx 0$. Dvs. (7)⇒(6).

Vi har altså, at f er integrabel, netop når:

$$(8) \quad \forall \sigma \in R_+ : \forall \{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\} : \Delta x_i \approx 0 \Rightarrow \sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i \approx 0.$$

Integrabilitet af kontinuerte funktioner:

Heraf følger som et specialtilfælde, at når f er kontinuert, er f integrabel. For når f er kontinuert på det lukkede interval [a;b] er f ligelig kontinuert, og for udvidelsen af f har vi, at $y_i \approx y_i' \Rightarrow f(y_i) \approx f(y_i')$ (jf. s.41), hvoraf følger, at $\sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i \approx 0$ for alle $\sigma \in R_+$.

Af ovenstående (jf. også omtalen af Keislers indføring af integralet) kan let udledes, at når f er kontinuert, har vi for en vilkårlig $\{x_i\}$, $x \approx 0$, at:

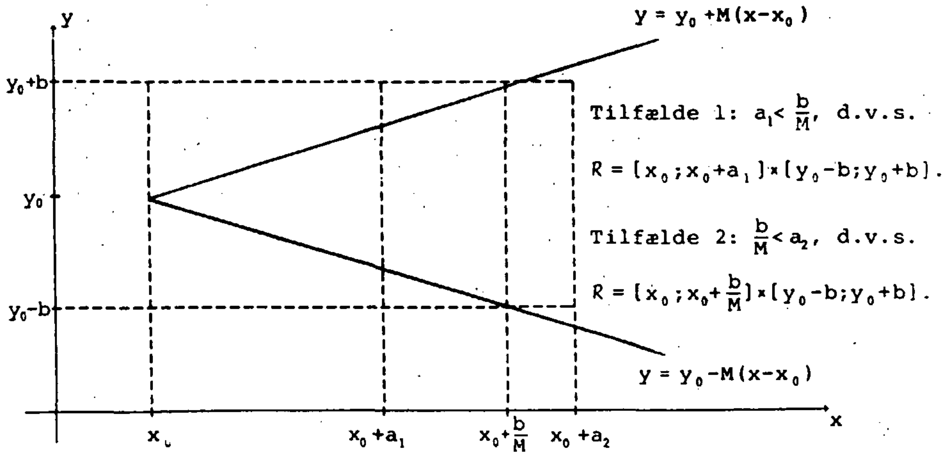
$$(9) \quad \int_b^a f(x)dx = st\left(\sum_{i\in I_n} f(x_i)\Delta x_i\right)$$

IV.3. Bevis for eksistensen af løsninger til ordinære differentialligninger af 1. orden.

I dette afsnit vil vi give et ikke-standard bevis for følgende sætning:

> Antag at den reelle funktion f er kontinuert i rektanglet $R = [x_0;x_0+a]\times[y_0-b;y_0+b]$.
> Da har differentialligningen
>
> (1) $y'(x) = f(x,y(x))$, $y(x_0) = y_0$
>
> mindst én løsning på intervallet $[x_0:x_0+c]$.
> Konstanten c er givet ved $c = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, hvor M er en øvre grænse for $|f(x,y)|$ i R.

Valget af c hænger sammen med den information selve differentialligningen giver. Den maksimale hældning grafen for en eventuel løsning kan have er M, den mindste hældning er -M. Derfor er vi på forhånd sikret, at den funktion, vi skal lede efter, ligger mellem disse to linier:



Hvis nu b er så lille (eller a er så stor), at disse linier forsvinder ovenud henholdsvis nedenud af R, så kan en eventuel løsning også finde på at gøre dette - med mindre altså at vi indskrænker rektanglet i x-retningen som foreskrevet.

Når eksistensbeviset skal gennemføres, er det bekvemt at omskrive differentialligningen (1) til

(2) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds, \quad x \in [x_0;x_0+c].$$

Der gælder nemlig, at

(3) Φ er løsning til (1) $\Leftrightarrow$ Φ er løsning til (2)

I standard beviser spiller (2) en dobbeltrolle. Dels benyttes udtrykket som ide til konstruktion af en funktionsfølge:

(4) $$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_0(s))ds$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds$$

dels er det (2), der ved hjælp af (3) bruges til at vise, at grænsefunktionen opfylder differentialligningen. Først skal funktionsfølgen naturligvis bevises at være konvergent med kontinuert grænsefunktion. For detaljer, se f.eks. Braun 1982.

Et ikke-standard bevis kan med fordel tage mere direkte fat i den information selve differentialligningen giver. Hældningen af den mulige løsning kendes nemlig i (x_0,y_0). Ved at gå et lille stykke i denne retning, kan man ikke nå at fjerne sig særligt meget fra løsningen. Den er jo differentiabel, og den kan dermed tilnærmes med en lineær funktion i en tilpas lille omegn om det pågædende punkt. Efter at have gået dette lille stykke fremad "justeres" hældningen ved at udregne funktionsværdien af f i det punkt, man er nået til. Med denne hældning fortsættes et lille stykke fremad og så fremdeles.

Metoden kaldes Euler-metoden, og det er den simplest mulige "datamaskine-løsning" til differentialligningen (1).

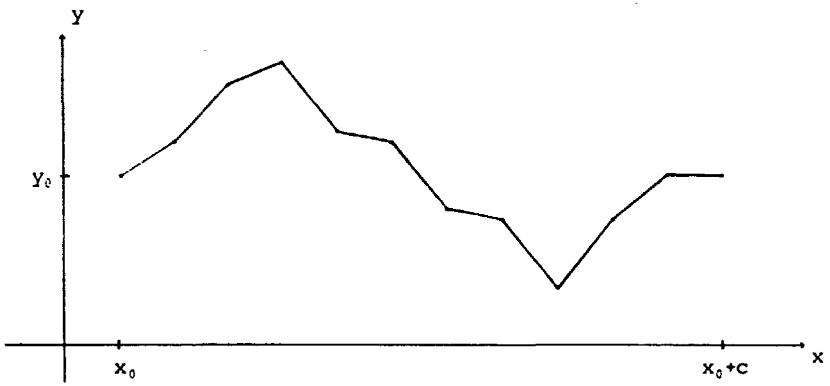
Analytisk kan Euler-tilnærmelsen skrives således:

(5) $\varphi(n,x_0) = y_0$

$\varphi(n,x) = \varphi(n,x_i) + f(x_i,\varphi(n,x_i))\cdot(x-x_i)$,

hvor $x \in \left[x_0+\frac{i}{n}c;\ x_0+\frac{i+1}{n}c\right] = [x_i;x_{i+1}]$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$

En grafisk fortolkning kan muligvis lette fordøjelsen af dette udtryk. Her er $n = 11$.



En eventuel løsning til (1) søges altså tilnærmet ved en stykkevis lineær, kontinuert funktion φ givet ved (5). Da $\varphi(n,x)$ er udtrykt i standard universets sprog, er det muligt at udvide φ naturlig ved at lade $n \in {}^*\mathbb{N}$ og $x \in {}^*[x_0;x_0+c]$. Lader vi ydermere $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, så vil ${}^*\varphi(\omega,x)$ være en "uendelig fin" Euler-tilnærmelse. Påstanden er nu ganske simpelt, at funktionen

(6) $\Phi(x) = \mathbf{st}\left({}^*\varphi(\omega,x)\right)$, $x \in [x_0;x_0+c]$. (<u>Kun</u> for standard x).

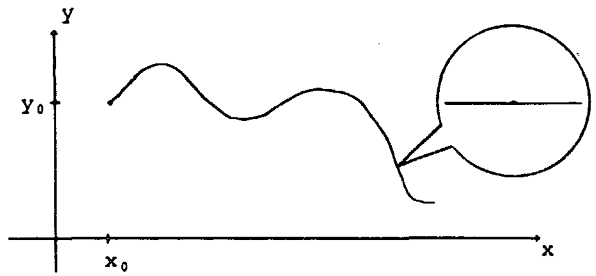
I) er veldefineret.

II) er kontinuert.

III) opfylder (2).

Hvis disse tre punkter kan bevises, har vi konstrueret en løsning til differentialligningen (1).

Først skal det bemærkes, at det er vigtigt at få defineret en standard funktion, altså at definitionen (6) <u>kun</u> gælder for standard x, og at funktionsværdierne er reelle tal. For det første er det en standard funktion, der søges. For det andet ville funktionen defineret som (6), men over hele ${}^*[x_0;x_0+c]$ være ubehagelig, da den ikke nødvendigvis ville være indre. Et infinitesimal mikroskop rettet mod et vilkårligt punkt på grafen ville give følgende billede:



Den givne definition er den eneste mulighed for at overføre den uendelige intervalinddeling til standard universet. Afstjerning af ${}^*\varphi$ vil jo blot give en endelig Euler-tilnærmelse, jævnfør (5). Efter alle disse overvejelser kan vi starte beviset.

<u>ad. I)</u> Et standard bevis måtte her gå ud på at vise konvergensen af Euler-tilnærmelserne. Her kan vi klare os ulige meget nemmere, idet det er tilstrækkeligt, at ${}^*\varphi(\omega,x)$ er endelig i standard intervallet.

Vi kan nemt konstatere, at

(7) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x,x' \in [x_0;x_0+c]: |\varphi(n,x)-\varphi(n,x')| \leq M|x-x'| \leq Mc$

Her står blot, at alle Euler-tilnærmelserne er klemt inde mellem to linier, analogt med situationen på figuren side 65. At det forholder sig således, skyldes at der højst kan forekomme hældninger med numerisk værdi M. Udsagnet kan stjernes direkte, og for alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ vil ${}^*\varphi(n,x)$ ligge klemt inde, specielt er ${}^*\varphi(\omega,x)$ endelig for alle x i intervallet. Sådan!

ad II) Kontinuiteten af Φ er heller ikke svær at vise. Per definition (6) gælder for standard x, at

$$(8) \quad \Phi(x) \approx {}^*\varphi(\omega,x)$$

Herved fås for standard x og standard x', at

$$|\Phi(x)-\Phi(x')| = |{}^*\varphi(\omega,x)-{}^*\varphi(\omega,x')+\mu|$$
$$\leq |{}^*\varphi(\omega,x)-{}^*\varphi(\omega,x')| + |\mu|$$

hvor μ er en given infinitesimal. Ved at stjerne (7) fås, at

$$|\Phi(x)-\Phi(x')| \leq M|x-x'| + |\mu|$$

men da alle involverede størrelser pånær infinitesimalen μ er standard tal, kan vi ved uligheden se bort fra μ. Da kan vi benytte et normalt ε-δ-argument for kontinuiteten af Φ. Givet et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sættes $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, hvorved det indses, at

$$\forall x, x' \in [x_0;x_0+c]: \ |x-x'| < \delta \Rightarrow |\Phi(x)-\Phi(x')| < \varepsilon$$

og kontinuiteten (endda ligelig kontinuitet) er bevist.

ad III) Vi skal her vise, at

$$(9) \quad \Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\Phi(s))ds$$

og beviset føres ved at betragte summer - først endelige, så uendelige, for til sidst at benytte sammenhængen mellem uendelig summation og integral jvf. side 59.
Om φ gælder naturligvis (jvf. (5))

$$(10) \quad \varphi(n,x_j) - y_0 = \sum_{i\in I_j}\left(\varphi(n,x_{i+1}) - \varphi(n,x_i)\right), \text{ hvor } 1 \leq j \leq n$$

altså at ændringen i funktionsværdien fra x_0 til x_j er lig med summen af ændringer i delintervallerne frem til og med $]x_{j-1}; x_j]$. Fra definition (5) finder vi videre

$$\varphi(n,x_{i+1}) - \varphi(n,x_i) = f(x_i,\varphi(n,x_i))(x_{i+1}-x_i)$$
for alle $i \in I_n$.

som indsat i (10) giver

$$\varphi(n,x_j) = y_0 + \sum_{i\in I_j} f(x_i,\varphi(n,x_i))\Delta x$$

idet $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ er konstant og derfor blot betegnes Δx. Dette kan uden videre stjernes, og med $n = \omega$ fås

$$(11) \quad {}^*\varphi(\omega,x_j) = y_0 + {}^*\!\!\sum_{i\in I_j} {}^*f(x_i,{}^*\varphi(\omega,x_i))\Delta x$$

For at få dette overført til Φ må vi analysere forskellen mellem ${}^*\varphi(\omega,x)$ og ${}^*\Phi(x)$ i hele $*$-intervallet ${}^*[x_0;c]$. Da Φ er kontinuert, gælder

$${}^*\Phi(x) \approx {}^*\Phi(\mathrm{st}(x))$$

pr. definition (6) gælder

$${}^*\Phi(\mathrm{st}(x)) \approx {}^*\varphi(\omega,\mathrm{st}(x))$$

Endelig kan det af (7) konkluderes, at

$$^*\varphi(\omega,\mathrm{st}(x)) \approx {}^*\varphi(\omega,x)$$

og alt i alt giver de tre ækvivalenser, at

$$(12)\quad {}^*\Phi(x) \approx {}^*\varphi(\omega,x), \qquad x \in {}^*[x_0,c].$$

Funktionen f er kontinuert på et kompakte interval, nemlig rektanglet R, og f er dermed ligelig kontinuert. Ifølge (7) vil både $\left(x,{}^*\Phi(x)\right)$ og $\left(x,{}^*\varphi(\omega,x)\right)$ holde sig inden for $^*R$, når $x \in {}^*[x_0;c]$, og da de to punkter ifølge (12) tillige vil ligge uendelig tæt, fås

$$^*f(x,{}^*\Phi(x)) \approx {}^*f(x,{}^*\varphi(\omega,x)), \text{ når } x\in{}^*[x_0;c].$$

For $x = x_i$ kan dette formuleres således for alle $i \in I_\omega$:

$$^*f(x_i,{}^*\varphi(\omega,x_i)) = {}^*f(x_i,{}^*\Phi(x_i)) + \varepsilon_i, \text{ hvor } \varepsilon_i \approx 0$$

Dette indsættes i (11), og idet j vælges, så $x_j \approx x$, får man ved hjælp af (12) følgende:

$$(13)\quad {}^*\Phi(x) \approx {}^*\Phi(x_j) \approx {}^*\varphi(\omega,x_j) = y_0 + \sum_{i\in I_j} {}^*f(x_i,{}^*\Phi(x_i))\Delta x + \sum_{i\in I_j} \varepsilon_i\Delta x$$

Det sidste led på yderste højrefløj skulle gerne være infinitesimalt, men da der er tale om en uendelig sum af infinitesimaler, kræves der et argument. Hertil betragtes mængden af (ikke-standard) øvre grænser for <u>alle</u> $|\varepsilon_i|$, $i \in I_\omega$:

$$G = \{\delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \mid \forall\, i \in I_\omega:\ |\varepsilon_i| < \delta\}$$

G er således klart en indre mængde, der indeholder samtlige positive ikke-infinitesimale tal. Derfor må G også indeholde en infinitesimal ε, der altså er en uendelig lille øvre grænse for $|\varepsilon_i|$'erne:

$$\left|\sum_{i\in I_j} \varepsilon_i\Delta x\right| \le \sum_{i\in I_j} |\varepsilon_i|\Delta x < \varepsilon\left(\sum_{i\in I_j}\Delta x\right) = \varepsilon(x_j - x_0) \approx 0$$

Vi kan nu af (13) se, at

$$^*\Phi(x) \approx y_0 + \sum_{i\in I_j} {}^*f(x,{}^*\Phi(x))\Delta x$$

For standard x er $^*\Phi(x)$ standard, og standard-delen af den uendelige Riemann-sum er lig med integralet over det pågældende interval, se side 59. Det ønskede resultat er hermed opnået, nemlig

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\Phi(s))ds$$

IV.4. Ækvivalensen med Lebesgues integrabilitets-kriterium.

Med D betegnes mængden af f's diskontinuitetspunkter på [a;b], og med $m(D)=0$ menes, at D er en nulmængde.

Vi skal vise at ovenstående ikke-standard kriterium (8) er ækvivalent med (standard-) kriteriet $m(D)=0$.

Vi har, at

$$D = \{x\in[a;b] \mid \exists\sigma\in\mathbf{R}_+:\forall h\in\mathbf{R}_+:\exists y,y'\in[x-h;x+h]:|f(y)-f(y')|>\sigma\}.$$

$$= \bigcup_{r\in\mathbf{N}} D_{1/r}, \quad \text{hvor}$$

$$D_{1/r} = \{x\in[a;b] \mid \forall h\in\mathbf{R}_+:\exists y,y'\in[x-h;x+h]:|f(y)-f(y')|>1/r\}.$$

Da $\bigcup_{r\in\mathbf{N}} D_{1/r}$ er en tællelig foreningsmængde, har vi

$m(D)=0 \Leftrightarrow \forall r\in\mathbf{N}:\ m(D_{1/r})=0,$

hvilket igen er ensbetydende med, at

(9) $\forall\sigma\in\mathbf{R}_+: m(D_\sigma)=0,$

hvor D_σ er defineret parallelt med $D_{1/r}$.

Vi vil nu vise (8)⇒(9) ved en argumentation indenfor standard-universet, hvor vi som et væsentligt skridt viser inklusionen:

$$D_\sigma \subseteq \{x_i\} \cup \Big(\bigcup_{i\in I_\sigma}[x_i;x_{i+1}]\Big)$$

Den omvendte implikation (9)⇒(8) viser vi ved en argumentation indenfor ikke-standard universet, hvor det centrale er at vise en anden inklusion:

$$\bigcup^*_{i\in I_\sigma}[x_i;x_{i+1}] \subseteq \bigcup_{x\in D_\sigma}\mu(x),$$

hvor $\mu(x)$ for reelle x i [a;b] defineres ved

$$\mu(x) = \{x+\varepsilon \mid \varepsilon\approx 0\}$$

(8)⇒(9):

Vi antager, at udvidelsen af f opfylder (8), og betragter et vilkårligt $\sigma\in\mathbf{R}_+$. Vi skal da vise, at $m(D_\sigma)=0$.

Første trin er at vise følgende inklusion indenfor standard universet: Når $\{x_i\}$ er en vilkårlig endelig intervalinddeling, findes der $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$, så:

$$D_\sigma \subseteq \{x_i\} \cup \Big(\bigcup_{i\in I_\sigma}[x_i;x_{i+1}]\Big),$$

hvor I_σ indenfor standard universet for givne endelige $\{x_i\},\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ er indexmængden $\{i\in I_n \mid |f(y_i)-f(y_i')|>\sigma\}$, $n\in\mathbf{N}$.

Lad $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ være valgt, så de gør I_σ størst mulig, dvs. valgt så de opfylder:

$$\forall i\in I_n:[(\exists z,z'\in[x_i;x_{i+1}]:|f(z)-f(z')|>\sigma)\Rightarrow|f(y_i)-f(y_i')|>\sigma]$$

Antag $x\in D_\sigma$. Når $x\notin\{x_i\}$, tilhører det et åbent interval $]x_i;x_{i+1}[$. Som følge af definitionen på D_σ, kan vi vælge et $h\in\mathbf{R}_+$, så $[x-h;x+h]\subseteq\ ]x_i;x_{i+1}[$, samtidig med, at $[x-h;x+h]$ indeholder "ubehagelige" z og z'. Det sikrer $i\in I_\sigma$ og dermed $x\in\bigcup_{i\in I_\sigma}[x_i;x_{i+1}]$. Dvs. $x\in\{x_i\}\cup\Big(\bigcup_{i\in I_\sigma}[x_i;x_{i+1}]\Big)$.

Næste trin er oversættelsen af (8) til standard universet:

Ved en argumentation, der forløber helt parallelt til argumentationen i forbindelse med transformationen af definitionen på Riemann-integrabilitet (s.55f), kan vi i (8) "fjerne stjernerne" og få følgende oplysning om vilkårlige endelige intervalinddelinger:

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+:\exists\delta\in\mathbf{R}_+:\forall\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\}:\Delta x_i\le\delta \Rightarrow \sum_{i\in I_\sigma}\Delta x_i \le \varepsilon$$

Ovenstående gælder også for $\{y_i\}$ og $\{y_i'\}$ valgt som ovenfor i forbindelse med inklusionen $D_\sigma \subseteq \{x_i\} \cup \left(\bigcup_{i\in I_\sigma} [x_i;x_{i+1}] \right)$. Heraf sluttes, at for vilkårlig $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ har D_σ en endelig overdækning af åbne intervaller, hvis samlede længde er mindre end ε. Dvs. $m(D_\sigma)=0$.

Da argumentationen er gyldig for vilkårlig $\sigma\in\mathbf{R}_+$, fås $(8)\Rightarrow(9)$.

$\underline{(9)\Rightarrow(8)}$:

Det antages, at f opfylder (9), dvs. $\forall\sigma\in\mathbf{R}_+ : m(D_\sigma)=0$. Vi betragter et givet σ, og skal da vise, at for vilkårlige $\{x_i\},\{y_i\}$ og $\{y_i'\}, \Delta x_i \approx 0$, er $\sum_{i\in I_\sigma} \Delta x_i \approx 0$.

Vi viser først, at for vilkårlige $\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\},\Delta x_i\approx 0$ gælder:

$$\bigcup_{i\in I_\sigma}{}^{*}[x_i;x_{i+1}] \subseteq \bigcup_{x\in D_\sigma} \mu(x).$$

Det er tilstrækkeligt at vise, at når vi har et vilkårligt interval $[x_i;x_{i+1}]$, hvor $i\in I_\sigma$, gælder $\mathbf{st}.(x_i)\in D_\sigma$. At dette gælder, ses på følgende måde:

Når $i\in I_\sigma$ har $\mathbf{st}(x_i)$ "ubehagelige" y og y' i infinitesimal nærhed, dvs.:

$$\begin{aligned}
&\exists y_i\in\{y_i\} : \exists y_i'\in\{y_i'\} : y_i\approx y_i' \approx \mathbf{st}(x_i) \wedge |f(y_i)-f(y_i')| \geq \sigma \\
&\Downarrow \\
&\forall h\in\mathbf{R}_+ : \exists y_i, y_i' \in {}^{*}[\mathbf{st}(x_i)-h;\mathbf{st}(x_i)+h] : |f(y_i)-f(y_i')| \geq \sigma \\
&\Downarrow \\
&\forall h\in\mathbf{R}_+ : \exists y_i, y_i' \in [\mathbf{st}(x_i)-h;\mathbf{st}(x_i)+h] : |f(y_i)-f(y_i')| > \sigma \\
&\Downarrow \\
&\mathbf{st}(x_i)\in D_\sigma
\end{aligned}$$

Da f opfylder (9), findes for vilkårligt $\varepsilon\in\mathbf{R}_+$ en tællelig overdækning M_ε af D_σ, hvor $M_\varepsilon = \bigcup_{i\in\mathbf{N}}]m_{2i-1};m_{2i}[$, $\sum_{i\in\mathbf{N}} (m_{2i}-m_{2i-1}) < \varepsilon$.

Vi danner mængden $\bigcup_{i\in\mathbf{N}}{}^{*}]m_{2i-1};m_{2i}[$, og har da for vilkårlige $\{x_i\},\{y_i\},\{y_i'\},\Delta x_i\approx 0$:

$$\bigcup_{i\in I_\sigma}{}^{*}[x_i;x_{i+1}] \subseteq \bigcup_{x\in D_\sigma}\mu(x) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}}{}^{*}]m_{2i-1};m_{2i}[$$

fordi når $x\in]m_{2i-1};m_{2i}[$ er $\mu(x)\subset{}^{*}]m_{2i-1};m_{2i}[$.

Af $\sum_{i\in N}(m_{2i}-m_{2i-1})<\varepsilon$

fås ved *-transformation, at $\sum_{i\in {}^*N}(m_{2i}-m_{2i-1})<\varepsilon$.

Da $\bigcup_{i\in N}{}^*]m_{2i-1};m_{2i}[\ \subseteq \bigcup_{i\in {}^*N}{}^*]m_{2i-1};m_{2i}[$

fås $\bigcup_{i\in I_\sigma}{}^*[x_i;x_{i+1}] \subseteq \bigcup_{i\in {}^*N}{}^*]m_{2i-1};m_{2i}[$.

Her er begge indeksmængder indre, og vi kan sammenligne ikke-standard summationerne af de tilsvarende længder og få:

$$\sum_{i\in I_\sigma}\Delta x_i \le \sum_{i\in {}^*N}(m_{2i}-m_{2i-1})<\varepsilon \ .$$

Da uligheden gælder for vilkårligt $\varepsilon\in R_+$, sluttes, at

$$\sum_{i\in I_\sigma}(x_{i+1}-x_i)\approx 0 .$$

Da dette gælder for vilkårligt σ, sluttes at (9)⇒(8).

Del V. Vurdering af perspektiver ved ikke-standard analyse.

Fordele ved ikke-standard analyse.

At infinitesimalerne længe måtte leve en forhutlet tilværelse i eksil i fysikernes verden, giver dem - og dermed ikke-standard analysen - en vis historisk betinget sympati. Den er dog ikke tilstrækkelig til at få alle matematikere til at hoppe af begejstring for de små krybs genfødsel; Dertil skal der mere matematisk kød på bordet. Noget af dette kød mener vi at kunne hente i del III og IV.

De simple formuleringer af kriterierne for kontinuitet, differentiabilitet og kompakthed springer åbenlyst i øjnene. Ikke alene er de fuldt ud på højde med de traditionelle formuleringer/definitioner, de er også intuitivt tiltalende og lette at anvende. Således bliver for eksempel beviset for kædereglen reduceret til ren og skær brug af simple regneregler.

Beviser for lidt mere indviklede sætninger kan det også være værd at prøve ikke-standard kræfter med. Beviserne bliver ikke nødvendigvis kortere, men der kan opnås andre fordele:

Integrabiliteten af kontinuerte funktioner kan vises som en umiddelbar konsekvens af en integrabilitets-betingelse, der forekommer intuitivt indlysende: Den infinitesimale længde af de delintervaller, hvori funktionen svinger mere end et vilkårligt positivt reelt tal.

Løsningen af differentialligningen kan begynde med et "forslag", som det intuitvt forekommer særdeles rimeligt at tage i betragtning som en løsning. Ikke-standard beviset lader bogstaveligt talt differentialligningen styre én frem mod en løsning. Til forskel herfra kæmper standard beviset sig igennem med en intuitivt svær funktionsfølge (Picard iteration); det fremtræder som et mysterium, hvor for man herved kan nå frem til en funktion, der opfylder differentialligningen.

Ulemper ved ikke-standard analysen.

Alle roser har imidlertid torne, således også ikke-standard analysen. Tornene er her tilsyneladende for stride til at tillade det revolutionerende gennembrud, som blandt andre Gödel spåede for ikke-standard analysen (se Robinson: Model Theory, side x). Et af de argumenter, der har været fremført mod ikke-standard analysen, drejer sig om den manglende entydighed ved udvidelsen af **R** til et ikke-archimedisk ordnet kommutativt legeme, der indeholder et med **R** isomorft dellegeme. Opskrives aksiomerne for **R**, så vil der nødvendigvis findes en isomorfi mellem to mængder, der begge opfylder aksiomerne. Udskiftes fuldstændighedsaksiomet med et krav om ikke-archimedisk ordning, så vil der eksistere flere ikke-isomorfe legemer, der opfylder alle aksiomerne.

Hvis ikke-standard analysen reelt er et fordelagtigt pædagogisk hjælpemiddel, så virker det på os noget krampagtigt at at fastholde det meget strenge isomorfi-krav. Pointen i ikke-standard analysen er netop den noget svagere strukturlighed, transfer-princippet indebærer: elementær-ækvivalensen mellem **R** og ***R** (og indbyrdes mellem forskellige ikke-standard mængder , som **R** er elementær-ækvivalent med).
Det er den svagere strukturlighed, der åbner op for studiet af en mere righoldig struktur, som har de samme 1. ordens sætninger som den oprindelige struktur.

Når den manglende entydighed alligevel fremføres som et kritisk punkt ved ikke-standard analysen, kan det muligvis skyldes den misforståelse, at ikke-standard analysen drejer sig om at lade et ikke-archimedisk legeme udgøre grundlaget for matematisk analyse. Dette er ikke tilfældet, idet ikke-standard-analysen er et supplement. Det hyperreelle univers kan ikke stå alene, men kommer først til udfoldelse i et samspil med det reelle univers.

Som Bell & Machover (i A Course in Mathematical Logic, s.573) er inde på, kan den manglende entydighed være med til at forklare, hvorfor **R** historisk stod så stærkt i kampen om grundlaget for analysen. Leder man efter et ordnet, fuldstændigt, kommutativt legeme, finder man i alt væsentligt kun ét, mens en søgen efter et ikke-archimedisk ordnet, kommutativt legeme fører den søgende sjæl ad flere veje.

At infinitesimalerne dengang blev kasseret til hjælpemidler til støtte for de reelle tal, har imidlertid en mere naturlig forklaring: Den meget komplicerede konstruktion, der bygger på resultater af langt senere dato end infinitesimalernes barndom. Med de første konstruktioner af **R** fulgte automatisk præciseringen af de intuitive ideer om, at der ikke er "huller" i **R**. De resultater, der var opnået i kraft af denne intuitive opfattelse af fuldstændigheden, for eksempel middelværdi-sætningen, var det dermed muligt at reparere forholdsvis smertefrit. Konstruktionerne af **R** kunne naturligvis ikke bortforklare de paradokser, der tilsyneladende uundgåeligt fulgte med brugen af infinitesimaler. Tværtimod indebar præciseringen af de reelle tal muligheden for at eliminere infinitesimalerne, hvis forsvarere kun havde pædagogiske argumenter til rådighed. Også disse argumenter savnede selvfølgelig solid baggrund, indtil Robinson i 1960 fandt en vej ud af paradokserne.

For at følge denne vej er det jævnfør del II nødvendigt med noget matematisk baggrund, og det sætter de pædagogiske argumenter i et nyt perspektiv: Kan det betale sig at stræbe efter de pædagogiske fordele ved ikke-standard analysen, når der ligger en svært tilgængelig konstruktion til grund for den?

Når vi for eget vedkommende vil svare bekræftende, skyldes det, at vi finder det underholdende at se matematik i historisk perspektiv. Samtidig kan vi komme lidt bag om den række aksiomer, der sædvanligvis udgør det grundlag, man får at arbejde med, nemlig aksiomerne for de reelle tal.

I forbindelse med matematik under universitets-niveau er en så kompliceret konstruktion fuldstændig udelukket, nøjagtig som en konstruktion af $\mathbb{R}$ ikke er relevant i for eksempel gymnasie-sammenhæng. Her er aksiomatisering af ikke-standard analysen en fristende udvej, og vi vil i det følgende se på en sådan aksiomatisering, der er foretaget med henblik på anvendelse af ikke-standard metoder i elementær analyse.

Matematisk analyse på basis af simple ikke-standard aksiomer.

Drevet af pædagogiske motiver har H. J. Keisler i bogen Elementary Calculus søgt at fremstille elementær analyse ved brug af ikke-standard metoder uden at have konstruktionen af et ikke-standard univers som en klods om benet.

I løbet af knap 900 sider kommer han gennem differentiation, kontinuitet og integration af funktioner af en variabel, grænseværdibegrebet (også i ε-δ-versionen!), de trigonometriske, eksponentielle og logaritmiske funktioner, uendelige rækker, vektorregning, partiel differentiation, kurveintegraler samt dobbelt- og tripelintegraler. Det elementære i fremstillingen muliggøres af, at den sofistikerede ikke-standard analyse ikke udnyttes fuldt ud: Dels er al snak om concurrence og indre mængder udeladt; dels er det en svækket udgave af transfer-princippet, han aksiomatisk indfører. Som en ekstra gevinst får Keisler indført fuldstændigheden af $\mathbb{R}$ ved et (ikke-standard) aksiom, der både er nemt at "sluge" og anvende.

At concurrence er strøget af programmet kan måske ikke undre så meget; det begreb bliver først nødvendigt ved mere avancerede anvendelser. Men at al snak om indre mængder kan udelades, det er straks mere besynderligt. Det er jo blandt andet skellet mellem indre og ydre mængder, der afhjælper de for infinitesimalerne så undergravende paradokser. Det er ikke desto mindre muligt, fordi Keisler nøjes med at ræsonnere over naturlige udvidelser af mængder. Ved en naturlig udvidelse af en mængde A, forstår Keisler det, vi har betegnet som *A.

Baggrunden for svækkelsen af transfer-princippet er ønsket om at slippe for det abstrakte formelle logiske sprog L. At svækkelsen er mulig, skyldes at det kun er reelle funktioner, to specielle relationer og fire specielle funktioner, der er under lup i den elementære analyse. De to relationer er identitetsrelationen og ordningsrelationen, = og <. De fire specielle funktioner er addition +, multiplikation $\times$, subtraktion - og division /.

Herved befinder man sig indenfor de første 4 etager i standard universet $\hat{R}$ (se s.13), hvilket indses således: Den første etage er mængden af de reelle tal. Lad os betragte to elementer a og b herfra. I næste etage R_1 vil blandt meget andet findes $\{a\}$ og $\{a,b\}$, der begge tilhører $P(\mathbb{R})$. Tredie etage R_2 vil indeholde $\{\{a\},\{a,b\}\}$, der er den sædvanlige mængdeteoretiske definition på det ordnede talpar (a,b). R_2 vil også indeholde ordnede n-tupler, og endelig vil R_3 indeholde mængder af ordnede talpar, herunder funktioner af en variabel, ordnings- og identitetsrelationerne. R_3 kan også byde på mængder af ordnede n-tupler, og herunder finder vi funktioner af flere variable. Som vigtige eksempler kan nævnes de fire regningsarter, der er funktioner fra $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (ved division $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$) ind i $\mathbb{R}$.

I stedet for sproget L har Keisler således kun brug for et sprog, der kan udtrykke sammenhænge mellem reelle konstanter, reelle variable og reelle funktioner ved hjælp af relationerne = og <. Det er derfor kun nødvendigt at kvantorisere over reelle tal, hvor kvantorerne i L er langt mere omfattende.

Ligninger og uligheder bliver af Keisler kaldt <u>formler</u>, og ved hjælp af tre formler kan vi for eksempel definere en funktion således:

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge y^2 = x)$$

I det formelle sprog L kan dette skrives

$$(1) \quad \models \forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R}: \Big((f(x) = y) \Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge y^2 = x) \Big)$$

hvor y^2 er forkortelsen for $\times(y,y)$, eller på dansk: y gange y. Det er naturligvis den sædvanlige kvadratrodsfunktion, der hermed er defineret, og transfer-princippet anvendt på (1) giver den oplysning, at *kvadratrodsfunktionen i princippet opfører sig nøjagtigt som det sømmer sig, det vil sige som den reelle kvadratrodsfunktion.

Keisler definerer et formelsystem som et endeligt antal koblede ligninger og uligheder. Hvis $p_1, p_2, \ldots, p_k$ og $q_1, q_2, \ldots, q_m$ alle er formler (d.v.s. ligninger/uligheder) i n variable, så udtrykker denne sætning i L

$$(2) \quad \models \forall x_1 \in \mathbb{R} \; \forall x_2 \in \mathbb{R} \; \ldots \; \forall x_n \in \mathbb{R}: \Big((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \Leftrightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m) \Big)$$

at to formelsystemer har samme løsningsmængde. Strengt taget skal de enkelte ligninger og uligheder "pakkes ud", så de er formuleret i sproget L, men jævnfør (1) volder dette ikke de store kvaler. Som en konsekvens af transfer-princippet brugt på (2) formulerer Keisler sit Solution Axiom:

(3) Hvis to systemer af formler har nøjagtig samme reelle løsningsmængde, så har de to systemer også nøjagtig samme hyperreelle løsningsmængde.

Bemærk at Keislers Solution Axiom kun tillader overførsel fra standard til ikke-standard mængder. Keisler benytter ikke overførsel den anden vej. Det skyldes at han helt vil undgå at behandle skellet mellem indre og ydre mængder.

Af samme grund kan Keisler også kun indføre Riemann-integralet for funktioner, der er forudsat kontinuerte. Uden skellet mellem indre og ydre mængder ville der således opstå problemer, hvis man prøvede at definere $\int_a^b f(x)dx$ ved hjælp af vilkårlige uendelige intervalinddelinger af *[a;b], hvoraf ikke alle vil være indre. Jævnfør side 51 fører Keisler læseren uden om dette problem ved kun at betragte inddelinger af *[a;b] i lige store stykker (plus et enkelt rest-interval). Derved er han sikret indre interval-inddelinger.

Det er altså ikke nødvendigt med mere transfer end Solution Axiom (3) giver mulighed for. Den pædagogiske pointe er naturligvis, at mens ligninger og uligheder er rimeligt let tilgængeligt stof, så er det abstrakte 1. ordens sprog L i sammenligning ganske uforståeligt.

Endelig er der så den smarte måde at sikre fuldstændigheden af **R** på. Hvor den normale måde at indføre og anvende dette begreb involverer en uendelig proces (for eksempel Cauchy-følger eller interval-ruser), så kan Keisler klare sig med aksiomet:

(4) Ethvert endeligt hyperreelt tal ligger uendelig tæt på netop et reelt tal.

Til ethvert endeligt hyperreelt tal x hører hermed et standard tal **st**(x), og (4) kunne passende kaldes st-aksiomet. Aksiomet minder i øvrigt en del om ikke-standard kriteriet for kompakthed, se side 43.

Beviset for at st-aksiomet (sammen med Solution Axiom) medfører fuldstændighed af **R**, forløber således:

Lad $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ være en Cauchy-følge af elementer i **R**. Vi skal ved hjælp af st-aksiomet bevise, at $\{a_n\}$ har en grænseværdi i **R**.
Følgen er en funktion fra **N** ind i **R**, og følgen har dermed en naturlig udvidelse, der er en funktion fra

***N** ind i ***R**. Fra et vist led a_m og udefter vil følgens led ligge inden for afstanden 1 af a_m:

$$n > m \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$$

Ifølge Solution Axiom vil også den udvidede følge opfylde dette. Specielt fås, idet ω er et uendeligt stort naturligt tal, at a_ω er endelig.
Ved brug af st-aksiomet sætter vi $A = \mathbf{st}(a_\omega)\ A \in \mathbf{R}$
Da $\{a_n\}$ er en Cauchy-følge, vil der givet et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ findes et $n(\varepsilon)$, så alle tallene

$$a_{n(\varepsilon)},\ a_{n(\varepsilon)+1},\ \ldots$$

højst afviger ε fra hinanden. Solution axiom giver, at

$$a_{n(\varepsilon)},\ a_{n(\varepsilon)+1},\ \ldots,\ a_\omega,\ a_{\omega+1},\ \ldots$$

heller ikke afviger mere end ε fra hinanden. Specielt fås

$$m > n(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_\omega| \le \varepsilon$$

Ved at tage standard delen på begge sider af uligheden fås

$$m > n(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - A| \le \varepsilon$$

hvoraf det fremgår, at det reelle tal A er grænseværdi for følgen $\{a_n\}$.

Ovenstående udledning af **R**'s fuldstændighed præsenterer Keisler først i epilogen til lærebogen. Selve det aksiomatiske udgangspunkt, som Keisler opstiller, omfatter kun følgende:

a) Aksiomer for et archimedisk ordnet, kommutativt legeme $\mathbb{R}$.

b) Aksiomer for et ikke-archimedisk ordnet kommutativt legeme $^*\mathbb{R}$, hvor $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

c) Et aksiom, der sikrer eksistensen af naturlige udvidelser af standard funktioner.

d) st-aksiomet.

e) Solution Axiom.

Alene ved hjælp af disse aksiomer kan man som Keisler viser nå langt omkring. Man behøver selvfølgelig ikke at *nøjes* med at bruge ikke-standard metoder. For eksempel indfører Keisler ε-δ-argumentationen i forbindelse med fejlberegning, og han opstiller ε-δ-betingelsen for blandt andet kontinuitet. Derudover beviser han, at standard og ikke-standard kriteriet for kontinuitet er ækvivalente (jvf. side 37)! Beviset afsluttes let hoverende: " We conclude that the ε-δ-condition must be true after all".

Forenkling ?

Keislers lærebog viser, at det *er* muligt at opnå de pædagogiske fordele ved ikke-standard analysen, uden at de pågældende studerende (gymnasie-elever m.v.) skal trækkes igennem hele den til grund liggende konstruktion. Til gengæld står de studerende, som har lært elementær analyse efter disse principper, med nogle andre problemer:

- Hvis de studerende skal arbejde videre med matematik, er det et problem, at samtlige lærebøger, kurser m.v. er baseret på udelukkende standard metoder. De er så alligevel nødt til at blive fuldt fortrolige med ræsonnementer, der bygger på epsilon-delta metoden, R's fuldstændighed i den sædvanlige formulering, m.v.

- Endvidere betyder den svækkelse af ikke-standard analysen, som er nødvendig af pædagogiske hensyn, at de studerende ikke umiddelbart vil kunne arbejde med mere komplicerede begreber og problemstillinger i ikke-standard belysning. Det kræver en forståelse for skellet mellem indre og ydre mængder i ikke-standard universet, og det kræver det fulde transfer-princip.

Disse vanskeligheder gør det efter vores vurdering til en særdeles tvivlsom pædagogisk fordel at indføre den elementære analyse udelukkende eller overvejende med ikke-standard metoder.

Man må også erindre sig, at de hyperreelle tal ikke vil kunne *erstatte* de sædvanlige reelle tal som udgangspunkt. Hensigten er ikke at fortrænge den sædvanlige matematik, således at den etablerede matematik engang med tiden bliver baseret på ikke-standard metoder. Det er netop ikke-standard analysens svar på kritikken af den manglende entydighed ved udvidelsen af R til *R: hensigten er ikke at ikke-standard analysen skal blive et nyt grundlag, men at den skal levere et *supplement*.

Ideen med at man kan studere en talmængde *R, som er elementær-ækvivalent med R, men mere righoldig end R, kommer først til sin ret, når man arbejder med *begge* strukturer.

Ikke-standard analysen synes derfor at være et tvivlsomt hjælpemiddel til forenkling, hvis man blot aksiomatiserer den og nøjes med dens enkle sider. Ikke-standard analysen kan til gengæld være et stærkt redskab til forenkling, hvis man har mulighed for at få flere af dens forudsætninger med.

Litteraturliste.

Tom M. Apostol: Mathematical Analysis, second edition.
Addison-Wesley Publishing Company, 1982

J.Bell, M.Machover: A Course in Mathematical Logic
North-Holland, 1977

Martin Braun: Differential Equations and Their Applications.
Springer Verlag, 1982

Martin Davis: Applied Non-Standard Analysis.
John Wiley & Sons, 1977

N.Jørgensen & M.Klintorp: Der er langt fra **Q** til **R**.
IMFUFA-tekst nr. 99.

H. Jerome Keisler: Elementary Calculus.
Prindle, Weber & Schmidt, 1976

H. Jerome Keisler: Foundations of Infinitesimal Calculus.
Prindle, Weber & Schmidt, 1976

Detlef Laugwitz: Rise, Fall and Resurrection of Infinitesimals.
IMFUFA-tekst nr. 88, 1984.

B. Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function
durch eine trigonometrische Reihe, 1854.

Abraham Robinson: Model Theory.
North-Holland Publishing Company, 1963

Abraham Robinson: Non-Standard Analysis, revised edition
North-Holland Publishing Company, 1974

K.D. Stroyan, W.A. Luxemburg: Introduction to the Theory
of Infinitesimals.
Academis Press, 1976.

Regine Winkler: Ein Existenzbeweis für gewöhnliche Differential-
gleichungen mit Methoden der Nonstandard Analysis.
Wissenschaftliches Zeitschrift der Technischen
Hochschule Karl Marx-Stadt, 1978, 20. årgang,
hæfte 4, s.527-529.

BILAG: Riemanns oprindelige integrabilitets-betingelse.

Nedenfor bringes en oversættelse af et mindre afsnit i Riemanns afhandling "Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe". Heri opstillede Riemann - som et redskab til sine undersøgelser af de trigonometriske rækker - en nødvendig og tilstrækkelig integrabilitets-betingelse (deraf navnet: Riemann-integralet).

Ikke-standard betingelsen for integrabilitet her i projektet (del IV, afsnit 2) er inspireret af denne Riemann-betingelse. Riemanns værk er fra før bandlysningen af infinitesimalerne, og Riemann benyttede sig af udtryk som "når x bliver uendelig lille" m.v. Det kan diskuteres, om Riemann hermed egentlig mente "når x går mod nul", eller om han opfattede x som et "rigtigt" infinitesimal. I hvert fald viser vores bevis for ikke-standard betingelsen, at Riemanns gamle bevis lader sig formulere, så det bliver konsistent, uden at give afkald på infinitesimalbetragtningerne.

Riemann: Om begrebet et bestemt integral og omfanget af dets gyldighed.

Den ubestemthed, der endnu hersker i nogle grundlæggende punkter i læren om det bestemte integral, nødsager os til at forudskikke noget om begrebet et bestemt integral og omfanget af dets gyldighed.

Altså først: Hvad skal man forstå ved $\int_a^b f(x)dx$?

For at fastsætte dette, tager vi mellem de på hinanden følgende størrelser a og b en række af værdier $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

og betegner for nemheds skyld x_1-a med δ_1, x_2-x_1 med δ_2, ..., $b-x_{n-1}$ med δ_n og lader ε betegne en positiv, ægte brøk. Vi har dermed, at værdien af summen

$$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta\, f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

er afhængig af valget af intervallet δ og størrelserne ε. Har summen nu den egenskab, at hvordan δ og ε end måtte vælges, så nærmer den sig uendeligt til en fast grænse A, så snart samtlige δ bliver uendelig små, da hedder denne værdi $\int_a^b f(x)dx$
Hvis summen ikke har denne egenskab, så har $\int_a^b f(x)dx$ ingen mening.

(...)

Vi undersøger nu for det andet omfanget af gyldigheden for dette begreb eller spørgsmålet: I hvilke tilfælde lader en integration sig gøre og i hvilke ikke?

Vi betragter først integralbegrebet i snævrere forstand, d.v.s. vi forudsætter, at summen S konvergerer, når samtlige δ bliver uendelig små. Betegner vi altså funktionens største udsving mellem a og x_1, d.v.s. forkellen mellem dens største og mindste værdi i dette interval, med D_1, mellem x_1 og x_2 med D_2 ..., mellem x_{n-1} og b med D_n, så må

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

blive uendelig lille med størrelserne δ. Vi antager yderligere, at Δ er den største værdi, denne sum kan antage, sålænge samtlige δ forbliver mindre end d; Δ vil således være en funktion af d, der aftager bestandigt (monotont?) med d og som bliver uendelig lille med denne størrelse. Er den samlede længde af intervaller, hvori udsvinget er større end σ, nu lig med s, så vil disse intervallers bidrag til summen $\delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\ldots+\delta_n D_n$ åbenbart være $\geq \sigma s$. Man har derfor

$$\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n \leq \Delta, \text{ følgelig } s \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ kan, når σ er givet, altid gøres vilkårlig lille gennem velegnet valg af d; det samme gælder derfor for s, og det følger således:

For at summen S skal konvergere, når samtlige δ bliver uendelig små, er det udover, at funktionen f(x) er begrænset, yderligere nødvendigt, at den samlede længde af intervaller, hvori udsvinget er $> \sigma$, hvad end σ måtte være, kan gøres vilkårlig lille gennem velegnet valg af d.

Denne sætning lader sig også vende rundt:

Når funktionen f(x) overalt er endelig, og den samlede længde s af de intervaller, hvori udsvinget af funktionen f(x) er større end en given størrelse σ, ved uendelig aftagen af samtlige størrelsere δ altid tilsidst vil blive uendelig lille, så konvergerer summen S, når samtlige δ bliver uendelig små.

Thi de intervaller, hvori udsvinget er $>\sigma$, leverer til summen $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ et bidrag, der er mindre end s multipliceret med funktionens største udsving mellem a og b, et udsving, der per forudsætning er endeligt; de øvrige intervallers bidrag $< \sigma(b-a)$. Man kan nu åbenbart først vælge σ vilkårlig lille, og derefter (per forudsætning) bestemme størrelsen af intervallerne således, at også s bliver vilkårlig lille, hvorved summen $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ kan gives en vilkårlig lidenhed, og følgelig kan summen S sluttes inde mellem vilkårligt snævre grænser.

Vi har altså fundet betingelser, der er nødvendige og tilstrækkelige, for at summen S konvergerer ved uendelig aftagen af størrelserne δ og altså at der i snævrere forstand kan være tale om et integral af funktionen f(x) mellem a og b.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER GER MOSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 1+11 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE- ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik C. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "GREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.

Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 1o
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.