TEKST NR 127 1986

GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA.

Projektrapport af:
Pernille Sand,
Heine Larsen &
Lars Frandsen.

Vejleder:
Mogens Niss.

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

1. Indholsfortegnelse.

side:

1. Indholdsfortegnelse. . . . . 1.
2. Forord. . . . . 2.
3. Problemformulering. . . . . 4.
4. Karakteristik af den matematiske aktivitet i 1800-tallet. . . . . 5.
5. Udviklingen af den abstrakte algebra. . . . . 7.
5.1. Indledning. . . . . 7.
5.2. Konkret anvendelse af gruppe-, ring- og legemsbegrebet i de fire discipliner. . . . . 9.
5.2.1. Konkret anvendelse af gruppebegrebet indenfor ligningsløsningsteori. . . . . 9.
5.2.2. Anvendelse af det konkrete gruppebegreb indenfor geometri. .19.
5.2.3. Anvendelse af det konkrete gruppe- og legemsbegreb i talteori. . . . . .20.
5.2.4. Anvendelse af det konkrete gruppebegreb indenfor permutationsteori. . . . . .22.
5.3. Generalisering af de algebraiske begreber. . . . . .23.
5.3.1. Indledning. . . . . .23.
5.3.2. Galois' generelle gruppebegreb. 24
5.3.3. Serret's fremstilling af teorien for permutationsgrupper. . . . . .26.
5.3.4. Jordan's udvidelse af det generelle gruppebegreb. 27.
5.3.5. Transformationsgrupper som et generelt gruppebegreb i Klein og Lie's arbejde. . . . . .28.
5.3.6. Det generelle ring- og legemsbegreb i Kronecker og Dedekind's studier af algebraiske tal. . . . .30.
5.4. Den abstrakte formulering af gruppe-, ring- og legemsbegrebet. . . . . .32.
5.4.1. Indledning. . . . . .32.
5.4.2. Det abstrakte gruppebegreb. . . . . .32.
5.4.3. Det abstrakte legemsbegreb. . . . . .33.
5.4.4. Det abstrakte ringbegreb. . . . . .34.
6. Analyse af Galois' rolle i udviklingen af den abstrakte algebra. . . . . .35.
6.1. Indledning. .35.
6.2. Præsentation af Galois' hovedsætning og begrebsramme. . . . . .37.
6.3. Præsentation af Jordan's fremstilling af galoisteoriens hovedsætning. . . . . .41.
6.4. Galois direkte og indirekte bidrag til udviklingen af den abstrakte algebra. . . . . . . .43.
7. Efterskrift. .46.
8. Litteraturliste. . . . . .47.

2. Forord.

Vores primære udgangspunkt er, at vi ville lave et historisk projekt om udviklingen af et område indenfor matematikken. Vi havde fra starten planlagt at lave et projekt indenfor det videnskabsteoretiske modul og havde arbejdet med matematisk filosofi i grundlaget for intuitionistisk matematik. Men efter et stykke tid fandt vi ud af, at det alligevel ikke var noget for os og valgte derfor at lave et historisk projekt.

Inspireret dels af algebra i vores kursusarbejde og dels af den eksotiske duft var vores interesse faldet på Galois' teori, som en teori for løsning af visse spørgsmål i tilknytning til algebraiske ligninger.

Vores første ide var at studere dens udvikling ved at se på dens formulering på forskellige tidspunkter i forhold til den moderne algebras udvikling. Det faldt os lidt svært at finde på en afgrænsende problemstilling indenfor denne ramme, så vi valgte at gøre det omvendte i en vis forstand og i stedet undersøge Galois bidrag til den abstrakte algebra. Dette valg skyldes også delvist vores erkendelse af, at Galoisteori i dag er en helt integreret del af den abstrakte algebra.

Vi har tilstræbt følgende struktur i projektet. Først har vi en indledning, hvor vi præsenterer matematikkens tilstand i perioden umiddelbart før Galois. Det er ikke ment som en præcisering af Galois udgangspunkt matematisk set, men mere som en præsentation af de tendenser og tankegange som præger tiden omkring Galois.

I den næste del beskriver og forklarer vi udviklingen af den abstrakte algebra. Da den abstrakte algebra som helhed er en ret kompleks størrelse, har vi forsøgt at beskrive den med en ramme som opdeler et begrebs udvikling i tre faser.

Den første fase er, hvor arbejde inden for forskellige discipliner udgør en motivation for begrebet, og giver anledning til forskellige forstadier af begrebet. Den anden fase er, hvor der er forskellige bestræbelser på at selvstændiggøre forstadierne fra deres discipliner og på dels at generalisere dels at udvide til andre discipliner. Den tredje fase er, når begreberne får deres abstrakte formulering og løsrives fra forbindelsen til specifikke områder.

Efter afsnittet om algebraens udvikling præsenterer vi dels Galois' arbejde dels Jordan's fremstilling af det tilsvarende og giver til sidst i en sammenligning et bud på, hvad Galois' arbejde har betydet som bidrag til den abstrakte algebra.

Vi har i projektet koncentreret os om begreberne gruppe, ring og legeme og kun interesseret os for disciplinerne ligningsløsningsteori, permutationsteori, geometri og talteori. Vi har i særlig grad lagt vægt på udviklingen af gruppebegrebet og dets stilling i ligningsløsningsteori idet, det er her, Galois har størst direkte betydning.

Vi har i indledningen og afsnittet om den abstrakte algebras udvikling baseret os på sekundære og tertiære kilder og i høj grad taget fremstillinger og konklusioner i disse for gode varer. Flere steder følger vi således disse meget tæt. I afsnitttene om Galois' arbejde har vi derimod lagt vægt på også at se de primære kilder såsom Galois' og Jordan's tekster; ikke så meget for at bestemme indholdet i deres arbejde, men mere for at få et direkte indtryk af det.

3. Problemformulering.

Projektet skal omhandle en analyse af hvilke ideer og resultater Galois har bidraget med til udviklingen og formuleringen af den abstrakte algebra.

Formålet med denne analyse er at få belyst den abstrakte algebras teoridannelse og få kortlagt dens udviklingsforløb.

4. Karakteristik af den matematiske aktivitet i 1800-tallet.

Det følgende afsnit er ment som et meget skitseagtigt billede af, hvad der rørte sig i matematik i Europa i det attende århundrede. Den første del er meget bred og overordnet, mens den anden del er mere specifikt rettet mod algebra.

Nogle af de områder, som man arbejdede indenfor, var uendelige rækker, sædvanlige og partielle differentialligninger, differentialgeometri samt variationsregning. Fælles for dem er, at de har deres udspring i differential- og integralregningen, som var blevet udviklet i det foregående århundrede.

Udviklingen og anvendelsen af differential- og integralregning indenfor de ovennævnte områder, førte til opkomsten af det, man i dag kalder analyse (det attende århundredes vigtigste bidrag til de matematiske teoribygninger vi kender i dag).

Hvad angår områder som analytisk geometri og algebra gjorde man i århundredet ikke de store fremskridt. Man beskæftigede sig næsten udelukkende med løsning af n'tegradsligningen, fordi det havde betydning for analyse. Områder som brugen af højereordens diffentialer og spørgsmål om eksistensen af integraler blev noget, som man ikke talte højt om, da der her lå nogle af de problemer gemt, mangel på beviser og skarpe begreber, som var en følge af den løse og "intuitive" tankegang, som prægede perioden op til omkring 1770.

En anden ting var, at man troede mere på symboler end på logik. Det førte til den paradoxale situation, at selv om man var klar over den matematiske nødvendighed af beviser, var man ikke i stand til at gennemføre dem med tilstrækkelig strenghed. Euler og Lagrange var nogle af de eneste, som forsøgte at give deres arbejder at ordentligt fundament.

En ting, som betød, at man ikke var så bange for manglende beviser, i hvert tilfælde indtil midten af århundredet, var troen på GUD som verdens skaber, idet man var overbevist om, at denne ikke ville lade noget være ufuldendt, hvorfor universet var at betragte som matematisk fuldendt. Det betød, at man trygt kunne udfylde eventuelle "huller". Selv da religionen i slutningen af århundredet mistede sin indflydelse på "videnskaben", blev billedet af universet som noget matematisk fuldendt bibeholdt.

At det blev analysen, som kom til at præge århundredet, hænger sammen med, at de problemer man arbejdede med, var af fysisk art/karakter, som Laplace udtrykte det: "Matematik er bare et redskab for fysik."

Denne sammenhæng mellem fysik og matematik i århundredet, betød ikke kun fremgang for matematikken, men førte til, at man byggede den på et mere "løst" og intuitivt grundlag. Man tog et fysisk problem, lavede noget matematik på det, og stemte de teoretiske resultater overens med de empiriske resultater, så var det garanti nok for, at det man havde lavet, var rigtigt.

I det attende århundrede udfoldede den matematiske aktivitet sig først og fremmest på akademierne i Europa og i mindre grad på universiteterne. Det var især på Academie des sciences i Paris og Berlins Akademi. Faktisk var det først omkring 1795-1800, at professorater i matematik blev oprettet på universiteterne. Det var også akademierne som støttede de forskellige tidsskrifter, som fandtes på den tid. De matematiske tyngdepunkter var især Frankrig og Tyskland (På Royal Society i London arbejede man mest med anvendt matematik), mens det var franskmænd og sveitzere og ikke tyskere som var tilknyttet akademierne. Bl.a. blev Euler og Lagrange støttet af Berlins akademi. Tyskland havde ikke selv de store matematikere i dette århundrede (ikke før Gauss).

Algebraen, forstået i sin gamle betydning som lignings-løsningsteori, er en af de ældste matematiske discpliner, allerede babylonerne beskæftigede sig med det.

Omkring 1770-71 skete der virkelig noget vigtigt i udviklingen af algebra. Det var på det tidspunkt at, Lagrange, Waring og Vandermonde offentliggjorde deres arbejder. Før dette var algebraen ikke en selvstændig disciplin men er indeholdt i andre discipliner.

Man lavede stadig meget arbejde med konkrete eksempler, men samtidig begyndte man at studere ligninger mere generelt og sætninger/udtryk betragtes som bevist, hvis det er muligt at vise gyldigheden af dem for de generelle bogstavudtryk, ved hjælp af de regneoperationer, som man har til rådighed. Sidst i perioden "beviser" man også sætninger ved numeriske eksempler.

Lagrange's arbejde med at analysere metoderne til løsning af tredje- og fjerdegradsligningen med henblik på at kunne sige noget om løsning af femtegradsligningen i slutningen af det attende århundrede dannede grundlag for lignings-løsningsteori. Lagrange er et tidligt eksempel på, den strukturelle tankegang, som kommer til at præge det nittende århundrede.

5. Udviklingen af den abstrakte algebra.

5.1. Indledning.

I dette afsnit vil vi beskrive den abstrakte algebras udvikling, som vi har opdelt i tre faser.

Den første fase beskæftiger sig med konkrete anvendelser af algebraiske begreber indenfor fire discipliner, nemlig ligningsløsnings-teori, geometri, talteori og permutationsteori. Grunden til, at vi har valgt netop disse områder er, at det var disse fire discipliner, som var genstand for algebraisering.

Indenfor hver disciplin vil vi beskrive nogle hændelser, som karakteriserer og eksemplificerer konkret brug af abstrakt algebra. Afsnittet omhandlende ligningsløsningsteori er langt mere detaljeret, da bidragene indenfor dette felt til den abstrakte algebras udvikling er mere signifikant i forhold til bidragene fra talteori og geometri. Ydermere er bidragene fra ligningsløsningsteori af større interesse, idet vi er interesserede i at vurdere betydningen af Galois' bidrag.

Den anden fase i den abstrakte algebras udvikling er karakteriseret ved, at man i højere grad studerer de algebraiske strukturer og begreber i sig selv men stadig indenfor rammerne af de fire områder, som de er tilknyttet.

Til at belyse dette har vi valgt en række personer, som efter vores mening er repræsentative for denne fase af udviklingen indenfor de fire discipliner.

Den tredie fase er karakteriseret ved, at studiet af de algebraiske begreber løsrives fra de discpliner, hvor de er udviklet. Dette afsnit er opdelt efter de tre begreber gruppe, ring og legeme, hvor vi indenfor hvert begreb dels beskriver dets abstrakte formulering og dets umiddelbare forudsætninger, dels udviklingen af teorien omkring det.

I beskrivelsen af den abstrakte algebras udvikling er det gruppebegrebets konkrete fortid, i modsætning til ring- og legemsbegrebets, der var et resultat af den i stigende grad strukturelle tænkemåde i matematik. Udviklingen af ring- og legemsbegrebet har sin oprindelse i studiet af talsystemerne. Derfor blev ring- og legemsbegrebet ikke i så høj grad som gruppebegrebet brugt som alment strukturelt redskab, og opdagelsen af deres egenskaber var derfor et resultat af konkrete undersøgelser af talsystemernes egenskaber.

Vi vil her præsentere den terminologi, som er knyttet til gruppe-, ring- og legemsbegrebet, når vi omtaler begrebernes status i forskellige udviklingsfaser.

Vi vil her operere med abstrakt-, generelt-, udvidet- og konkret gruppe-, ring- og legemsbegreb. Ved et konkret begreb skal forstås et begreb, som er bundet til en matematisk disciplin. Et udvidet begreb er et, som er overført fra en discplin til en anden, hvor dets status forbliver uforandret i den første disciplin. Et generelt begreb er et, som er overført fra en disciplin til en anden, men hvor dets status i den første disciplin ændres/generaliseres, så det er fælles for de to discipliner. Vi vil også tale om et generelt begreb, når begrebet i en eller flere discipliner sammenfattes til et begreb, som indeholder de tidligere. Et abstrakt begreb er et, hvor man kun stiller krav til dets egenskaber, og hvor det er egenskaberne, som definerer begrebet. Ydermere er et abstrakt begreb løsrevet fra specifikke matematiske universer.

5.2. Konkret anvendelse af gruppe-, legeme- og ringbegrebet i de fire discipliner.

5.2.1. Konkret anvendelse af gruppebegrebet indenfor ligningsløsningsteori.

Som antydet tidligere i projektet foregik der en ændring i synsvinklen indenfor matematisk forskning. Fra en meget beregningsorienteret synsvinkel gik man over til at betragte mere strukturelle aspekter og egenskaber. Denne ændring foregik også indenfor ligningsløsnings-teori, hvor Lagrange (1736-1813) må betragtes som pioner.

I 1771 udgiver Lagrange en bog ("Reflections sur la resolution algebrique des equations"), hvor i han analyserer løsningerne til ligninger af indtil fjerde grad. Han er ude på at afdække strukturen i løsningerne med henblik på at kunne sige noget generelt om løsninger af algebraiske ligninger. Denne bog er et klart udtryk for skiftet fra blot at beregne en lignings rødder til at studere deres struktur.

Mere specifikt forsøgte Lagrange at finde ud af, hvorfor (i modsætning til hvordan!) løsningsmetoderne til tredie- og fjerdegradsligningen virkede. Hans konklusion var derefter, at denne måde at løse ligninger på er dømt til at mislykkes for generelle ligninger af højere grad.

Hans Undersøgelse viste, at hvis man skulle behandle ligninger af højere grad end fire, krævede det en ny måde at gribe sagen an på, noget som involverede kombinatorik ("..calcul des combinaisons.."). Dette er det første eksempel på at inddrage permutationsteori og dermed indirekte gruppeteori i teorien for løsning af algebraiske ligninger.

Vi vil her kort skitsere Lagranges metode til behandling af den generelle tredjegradsligning, hentet fra Kline s.600-606.

Han betragter ligningen

$$x^3 + nx + p = 0$$

og transformerer denne ved substitutionen

$$x = y - \frac{n}{3y}$$

og opnår derved en sjettegradsligning i y,

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

Dette er en andengradsligning i y^3, og den kan med

$$r = y^3$$

skrives som

$$r^2 + pr - \frac{n^3}{27} = 0$$

Rødderne r_1 og r_2 er af formen

$$\frac{-p\pm\sqrt{p^2+\frac{4n^3}{27}}}{2}$$

og for at transformere tilbage til y, må man løse ligningerne:

$$y^3-r_1=0 \quad \text{og} \quad y^3-r_2=0$$

Med

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

kan rødderne skrives som

$$(y_1,\dots y_6)=(\sqrt[3]{r_1},\omega\sqrt[3]{r_1},\omega^2\sqrt[3]{r_1},\sqrt[3]{r_2},\omega\sqrt[3]{r_2},\omega^2\sqrt[3]{r_2})$$

Dernæst fås ved indsættelse i

$$x=y-\frac{n}{3y}$$

at

$$x_1=\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2},\quad x_2=\omega\sqrt[3]{r_1}+\omega\sqrt[3]{r_2},\quad x_3=\omega^2\sqrt[3]{r_1}+\omega^2\sqrt[3]{r_2}$$

Vi har nu opnået at udtrykke løsningen til den oprindelige ligning som funktion af rødderne i den reducerede ligning.

Lagrange viste, at alle de tidligere løsningsmetoder er udtrykt i ovenstående. Det nye, Lagrange fremhæver, er, at løsningerne til den reducerede ligning kan udtrykkes som funktion af rødderne i den oprindelige ligning. Lagrange viser, at værdierne for y har formen,

$$y=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)$$

De seks forskellige værdier af y opnås ved permutation af x_1, x_2 og x_3.

Ved at betragte dette udtryk finder Lagrange ud af, at graden af den reducerede ligning er lig med antallet af permutationer af rødderne i den oprindelige ligning. I tilfældet med tredjegradsligningen er der $3!=6$ permutationer af rødderne x_1, x_2 og x. Den reducerede ligning i y skal derfor være en sjettegradsligning. Ydermere argumenterer Lagrange ved at se på permutationer af rødderne x_1, x_2 og x_3 for, at den reducerede sjettegradsligning i y kan reduceres til en andengradsligning i y^3. Blandt de seks permutationer er der tre, som ombytter alle x_i, og tre, som kun ombytter to og lader den tredje være uændret. Med værdien af ω taget i betragtning har vi, at

$$y_1=\omega^2 y_2=\omega y_3 \quad \text{og} \quad y_4=\omega^2 y_5=\omega y_6$$

som er relationer mellem rødderne i den reducerede ligning. Ved at opløfte ligningerne til tredje potens får vi, at

$$y_1^3=y_2^3=y_3^3 \quad \text{og} \quad y_4^3=y_5^3=y_6^3, \text{ idet } \omega^3=1$$

En anden måde at udtrykke dette på er, at funktionen

$$y^3=(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$$

kun antager to værdier under samtlige permutationer af x_1, x_2 og x_3. Dette er grunden til, at ligningen, som y opfylder, er en andengradsligning i y^3.

Lagrange undersøger også den generelle fjerdegradsligning med henblik på at kunne finde tilsvarende relationer mellem rødderne i den dertil hørende reducerede ligning og rødderne i den oprindelige ligning. Hans argumentation bygger også i dette tilfælde på permutationsteoretiske overvejelser.

Generelt går hans metode ud på med udgangspunkt i den generelle n'te-gradsligning at se på symmetriske funktioner af rødderne og det antal værdier, de antager under permutation af rødderne.

Mere præcist ser han på en række af symmetriske funktioner af rødderne, hvor den første skal tillade samtlige permutationer, det vil sige n! permutationer. De efterfølgende funktioner vælger han sådan, at de kun tillader nogle af de permutationer, som den forrige tillader.

Lad os sige, at den p'te funktion i rækken tillader r permutationer blandt dem, som den p-1'te funktion tillader. Der vil da gælde, at funktionen vil være rod i en ligning af grad r, hvor koefficienterne er rationale funktioner af koefficienterne i den oprindelige ligning.

Betingelsen for, at processen kan fortsætte, er selvfølgelig, at man kan finde koefficienterne til ligningen, hvor den p'te funktion er rod. Dette kan lade sig gøre, hvis den p'te ligning kan løses algebraisk (det vil sige med rationale operationer og roduddragning), så vil den p'te funktion være givet ved koefficienterne til den oprindelige ligning. Denne proces fortsætter indtil den sidste funktion i rækken vælges til at identisk at være en af rødderne, de vil sige, at hvis den tilsvarende række af ligninger kan løses algebraisk, så har man bestemt roden ud fra koefficienterne til den oprindelige ligning. De øvrige rødder bestemmes på lignende vis. Ligningerne i denne række kaldes resolvent ligninger ("reduites").

Lagrange forsøgte også v.h.a. denne metode at løse den generelle femtegradsligning. Problemet var, at hans metode ikke gav noget kriterium for at vælge funktionerne i rækken, så de er rødder i ligninger, som kan løses algebraisk.

Lagrange's ide med at betragte antallet af værdier en rational funktion antager under permutationer af dens variable, danner grundlag for teorien for permutationsgrupper.

Set i lyset af moderne abstrakt gruppeteori demonstrerer Lagrange sætningen om, at ordenen af en undergruppe i en gruppe er divisor i ordenen af gruppen.

Lagrange's studier af algebraiske ligninger dannede ikke kun grundlag for teorien for permutationsgrupper en også for senere studier indenfor ligningsløsnings-teori først og fremmest af Ruffini, Abel, og Galois.

I det følgende vil vi se på Ruffini's arbejde og herunder hans bevis for femtegradsligningens uløselighed v.h.a. radikaler, d.v.s rationale operationer og roduddragning.

Paoli Ruffini (1765-1822) publicerer i 1813 en artikel "Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali" ,hvor-i han præsenterer sit bevis for uløseligheden af den generelle ligning af grad højere end fire.

Ruffini's fremgangsmåde er i høj grad den samme som Lagrange, bortset fra at han mere detaljeret undersøger mængden af permutationer, som lader en resolvent funktion uændret. Et af hans resultater var, at hvis p er antallet af permutationer, som lader en resolvent funktion uændret, så er p en divisor i n!, hvor n er graden af den oprindelige ligning, samt at antallet af værdier, en sådan funktion antager, når rødderne permuteres, er n!/p.

Ruffini viste også ligesom Lagrange, at en sådan funktion er rod i en ligning af grad n!/p. Specielt viste han, at graden n!/p af en resolvent til femtegradsligningen kan antage værdierne 2, 5 eller 6 men ikke 3 eller 4. Dette betyder, at den resolvente funktion ikke er rod i en ligning af grad 3 eller 4. Hvis n!/p ikke er 2, må 5 gå op. Hvis n!/p er 5, findes der resolventer med grad 5, men disse kan ikke reduceres til binome ligninger af formen x-M=0

Ruffini's bevis for den generelle femtegradslignings uløselighed v.h.a. radikaler er ikke endegyldigt, da det bygger på antagelsen, at sådanne radikaler altid kan udtrykkes som rationale funktioner af rødderne.

Ruffini går i sit arbejde langt videre end bare at opdage, at der er en forbindelse mellem løsbarhed af algebraiske ligninger og permutationer, idet permutationer indgår som en central del af strukturen i teorien for ligningsløsning.

I foråret 1824 beviser Abel (1802-1829) uden kendskab til Ruffini's arbejde, at den generelle femtegradsligning ikke kan løses v.h.a. radikaler. Abels bevis er komplet, idet han beviser den antagelse, som er underforstået i Ruffini's fremstilling.

I forhold til Lagrange, Ruffini og Cauchy, går Abel langt i anvendelsen af permutationsteori indenfor løsning af algebraiske ligninger. Dette leder ham til undersøgelser af kommutative permutationer, idet han stiller spørgsmålet om, hvilke ligninger af en given grad, der er løsbare v.h.a radikaler. Abel kommer frem til en sætning som set med moderne briller er et specialtilfælde af Galois' hovedsætning. Abel's sætning udsiger, at hvis rødderne i en ligning opfylder, at enhver af dem kan udtrykkes som en rational funktion af en af dem, kaldet x, og hvis ethvert par af rødder Fx,Gx er relateret ved FGx=GFx, så kan ligningen løses v.h.a. radikaler.

I 1801 publicerer Gauss bogen "Disquisitiones Aritmeticae", hvor i han præsenterer et bevis for, at den cyklotomiske ligning kan løses ved hjælp af radikaler. I Gauss' studier af den cyklotomiske ligning ses eksempler på brug af et konkret gruppebegreb, idet han udnytter gruppeegenskaber såsom frembringere i cykliske grupper, stabilitet, kommutativitet og associativitet. Ydermere har hans arbejde dannet grundlag for den videre udvikling af teorien for algebraiske ligninger samt for den dertil hørende teori for permutationsgrupper.

Vi vil nu kort skitsere hovedresultatet i Gauss' behandling af den cyklotomiske ligning, og derefter præsentere hans metode i beviset illustreret ved et eksempel. Dernæst vil vi redegøre for det gruppeteoretiske indhold og dets betydning for gruppeteoriens og dermed den abstrakte algebras udvikling.

Gauss betragter den generelle cyklotomiske ligning,

$$x^n - 1 = 0$$

og indser, at problemet kan reduceres til at betragte ligninger af primisk grad, det vil sige, hvor n er et primtal. Ved at dividere ligningen med x-1 (idet 1 er rod) fås en ny ligning:

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

Gauss beviser under antagelse af, at n er et primtal, at polynomiet X er rationalt irreducibelt, det vil sige irreducibelt over legemet af de rationale tal. Pointen er så, at hvis n-1 er et produkt af nogle faktorer a,b,c,.., så kan ligningen løses ved at løse nogle ligninger af grad a,b,c,... Eksempelvis har vi for n=17, at $n-1=16=2^4$, og dermed at den cyklotomiske ligning af 17.de grad kan løses ved at løse fire andengradsligninger. Dette resultat var i øvrigt af stor interesse, idet det viste, at man kunne konstruere en regulær syttenkant med passer og lineal, idet andengradsligninger er løsbare v.h.a. passer og lineal.

Gauss tager udgangspunkt i ligningen

$$x^{17}-1=0$$

og opgaven er at udtrykke rødderne ved hjælp af radikaler. Ligningen har rødderne

$$1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{16}$$

hvor

$$\varepsilon_\nu = \cos\nu u + i\sin\nu u$$

Derefter danner han en ny rækkefølge af rødderne

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}$$

og betegner denne

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{16}$$

Den nye rækkefølge er bestemt ved, at

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 , \alpha_{i+1} = \alpha_i^3 \quad \text{og} \quad \alpha_{16}^3 = \alpha_1$$

er gælder altså, at i den cykliske orden af $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}$ angivet ved $\alpha_1, \ldots, \alpha_{16}$ er enhver rod en tredjepotens af sin forgænger. I det $\alpha_1, \ldots, \alpha_{16}$ er parvist konjugerede, ser man at:

$$\alpha_1+\alpha_9 = 2\cos u \quad \alpha_2+\alpha_{10} = 2\cos 3u \quad \alpha_3+\alpha_{11} = 2\cos 8u$$

$$\alpha_4+\alpha_{12} = 2\cos 7u \quad \alpha_5+\alpha_{13} = 2\cos 4u \quad \alpha_6+\alpha_{14} = 2\cos 5u$$

$$\alpha_7+\alpha_{15} = 2\cos 2u \quad \alpha_8+\alpha_{16} = 2\cos 6u$$

Vi bemærker desuden, at da rødderne i oprindelige ligning har summen nul, gælder det at:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{16} = -1$$

Derefter spaltes summen i de to summer, som h.h.v. indeholder de lige og de ulige numre i den cykliske orden.

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11} + \alpha_{13} + \alpha_{15}$$
$$= 2\cos u + 2\cos 8u + 2\cos 4u + 2\cos 2u$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{16}$$
$$= 2\cos 3u + 2\cos 7u + 2\cos 5u + 2\cos 6u$$

hvor
$$\beta_1 + \beta_2 = -1$$

Derefter beregnes $\beta_1\beta_2$ ved at beregne det dobbelte produkt af β_1 og β_2, nemlig

$$\begin{aligned}2\beta_1\beta_2 = {} & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{15}\alpha_{16} + \alpha_{16}\alpha_1 \\ & + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 + \ldots + \alpha_{15}\alpha_2 + \alpha_{16}\alpha_3 \\ & + \alpha_1\alpha_6 + \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_8 + \ldots + \alpha_{15}\alpha_4 + \alpha_{16}\alpha_5 \\ & + \\ & \vdots \\ & + \alpha_1\alpha_{16} + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \ldots + \alpha_{15}\alpha_{16} + \alpha_{16}\alpha_{15}\end{aligned}$$

Produktet $2\beta_1\beta_2$ er fremkommet ved at multiplicere hvert led i β_1 med alle led i β_2 og hvert led i β_2 med hvert led i β_1 og lægge det hele sammen. Dette giver 128 produkter, der er opstillet således:

I den første søjle har vi skrevet produkterne af α_1 og leddene i β_2 begyndende med α_2 og følgende ordenen af leddene i β_2.

I anden søjle har vi skrevet produkterne af α_2 og leddene i β_1 begyndende med α_3 og følgende ordenen af leddene af β_1, så at vi efter α_{15} ender med α_1. I tredje søjle har vi skrevet produkterne af α_3 og leddene i β_2 begyndende med α_4 og følgende ordenen af leddene i β_2, så vi efter α_{16} ender med α_2, o.s.v. På denne måde er opnået, at leddene i anden søjle er tredjepotenserne af leddene i første søjle, idet i hver række er de to faktorer i anden søjle efterfølgere i den cykliske orden for de to faktorer i den første søjle.

På tilsvarende måde er leddene i tredje søjle tredjepotenser af leddene i anden søjle, o.s.v. Dette medfører, at vi kan beregne summen af de 128 led uden faktisk at udregne leddene. Thi hvert produkt $\alpha_i\alpha_j$, der optræder i $2\beta_1\beta_2$, er selv et α_K (idet de eneste produkter $\alpha_i\alpha_j$, for hvilke dette ikke gælder, er dem, hvor de to indices har differens 8, og sådanne produkter forekommer ikke i $2\beta_1\beta_2$).

Hvis nu en række begynder med f.eks. α_{13}, som det er tilfældet for den første række, må det andet led i rækken være α_{16}, o.s.v. så at leddene i rækken er $\alpha_{13}, \alpha_{14}, \dots \alpha_{16}, \alpha_1, \dots$. I hver række er summen af leddene derfor −1. Vi har derfor, at

$$2\beta_1\beta_2 = -8$$

og følgelig, at

$$\beta_1\beta_2 = -4$$

Tallene β_1 og β_2 er derfor rødderne i polynomiet,

$$x^2+x-4$$

og da $\beta_1 > \beta_2$ finder vi

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-4} = 0$$

Vi spalter nu β_1 i

$$\gamma_1 = \alpha_1+\alpha_5+\alpha_9+\alpha_{13} = 2\cos u + 2\cos 4u$$

$$\gamma_3 = \alpha_3+\alpha_7+\alpha_{11}+\alpha_{15} = 2\cos 8u + 2\cos 2u$$

Da er

$$\gamma_1 > \gamma_3 \quad \text{og} \quad \gamma_1+\gamma_3 = \beta_1$$

Vi ønsker at beregne $\gamma_1\gamma_3$, og idet vi går frem som før, finder vi, at:

$$\begin{aligned}2\gamma_1\gamma_3 = {} & \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_5 + \dots + \alpha_{15}\alpha_1 \\ & + \alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_9 + \dots + \alpha_{15}\alpha_5 \\ & + \alpha_1\alpha_{11} + \alpha_3\alpha_{13} + \dots + \alpha_{15}\alpha_9 \\ & + \alpha_1\alpha_{15} + \alpha_3\alpha_1 + \dots + \alpha_{15}\alpha_{13}\end{aligned}$$

Her er i hver række hvert led niendepotensen af sin forgænger, og hvert af de optrædende produkter $\alpha_i\alpha_j$ er selv et α_k. Hvis nu en række begynder med α_4, som det er tilfældet for første række, må rækken bestå af

$$\alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{14}, \alpha_{16}, \alpha_2$$

og den sum må være β_2. Man ser, at for hver række er leddenes sum enten β_1 eller β_2. Følgelig kan $\gamma_1\gamma_3$ udtrykkes ved hjælp af de allerede beregnede tal β_1 og β_2. Ved at udregne de første led i de fire rækker finder man, at første og fjerde række giver summen β_2 og anden og tredje række summen β_1. Vi finder derfor at

$$2\gamma_1\gamma_3 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = -2$$

Altså er

$$\gamma_1\gamma_3 = -1$$

Tallene γ_1 og γ_3 er derfor rødderne i polynomiet

$$x^2 - \beta_1 x - 1$$

og da $\gamma_1 > \gamma_3$ har vi, at

$$\left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\beta_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

På tilsvarende måde spalter vi β_2 i

$$\gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_{10} + \gamma_{14} = 2\cos 3u + 2\cos 5u$$

$$\gamma_4 = \gamma_4 + \gamma_8 + \gamma_{12} + \gamma_{16} = 2\cos 7u + 2\cos 6u$$

Da er $\gamma_2 > \gamma_4$ og $\gamma_2 + \gamma_4 = \beta_2$

Vi finder, at:

$$\begin{aligned} 2\gamma_2\gamma_4 &= \alpha_2\alpha_4 + \alpha_4\alpha_6 + \cdots + \alpha_{16}\alpha_2 \\ &+ \alpha_2\alpha_8 + \alpha_4\alpha_{10} + \cdots + \alpha_{16}\alpha_6 \\ &+ \alpha_2\alpha_{12} + \alpha_4\alpha_{14} + \cdots + \alpha_{16}\alpha_{10} \\ &+ \alpha_2\alpha_{16} + \alpha_{14}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{16}\alpha_{14} \end{aligned}$$

Ved at udregne de første led i de fire rækker finder man, at første og fjerde række giver summen β_1 og anden og tredje række giver summen β_2. Altså er

$$2\gamma_2\gamma_4 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2 \quad \text{og} \quad \gamma_2\gamma_4 = -1$$

så at γ_2 og γ_4 er rødderne i polynomiet

$$x^2 - \beta_2 x - 1$$

Da $\gamma_2 > \gamma_4$ fås:

$$\left.\begin{matrix}\gamma_2\\ \gamma_4\end{matrix}\right\} = \frac{\beta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^2 + 1}$$

Således kan vi fortsætte, og vi ser, at processen må ende med, at vi finder udtryk for alle rødderne $\alpha_1, \dots, \alpha_{16}$, på basis af hvilke disse kan konstrueres.

I Gauss' fremstilling af beviset for, at den generelle cyklotomiske kan løses v.h.a. radikaler, ses klart hans implicitte anvendelse af gruppeegenskaberne. For det første benytter han sig af stabilitetsegenskaben, idet han udnytter, at et hvert produkt $\alpha_i \alpha_j$ igen er et α_k og for det andet af kommutativitetsegenskaben, idet et hvert produkt $\alpha_i \alpha_j$ er det samme som produktet $\alpha_j \alpha_i$.

Gauss' arbejde og resultater indenfor ligningsløsningsteori er det første eksempel på systematisk anvendelse af permutationsgrupper i teorien for algebraiske ligninger. Dette har dels bidraget til Galois' komplettering af anvendelsen af permutationsgrupper indenfor ligningsløsningsteori (galoisteori) dels selvstændiggørelsen af teorien for permutationsgrupper hovedsaglig foretaget af Cauchy.

5.2.2. Anvendelse af et konkret gruppebegreb indenfor geometri.

Den tyske matematiker Møbius (1790-1868) leverede det første eksempel indenfor geometri på synsvinkelskifet fra beregningsorienterede til strukturorienterede metoder.

Hans bidrag til udviklingen indenfor gruppeteori er hovedsagligt repræsenteret i hans arbejde med klassifikation af geometriske objekter (senere kaldet invariant-teori), hvor han inden formuleringen af det abstrakte gruppebegreb fremstillede den gruppeteoretiske organisering af geometri.

Dette bidrag dannede senere grundlag for Erlangen Program i 1872, hvor i teorien for transformationsgrupper blev udviklet. Vi vil senere komme ind på transformationsgruppebegrebet i Erlangen Program.

5.2.3. Anvendelse af det konkrete gruppe- og legemsbegreb i talteori.

På tilsvarende måde som i udviklingen af geometri var der i talteori repræsenteret konkrete anvendelser af de algebraiske begreber gruppe og legeme. Gruppeteoretiske argumenter var ligeledes repræsenteret i talteoretiske materialer.

I modsætning til situationen indenfor teorien for løsning af algebraiske ligninger og geometri var den begyndende forekomst af gruppeteoretisk tænkning i talteori ikke et udtryk for trangen til at udvikle en sammenhængende teori. Derimod var den et direkte resultat af konkrete studier af talsystemernes egenskaber og struktur, som blev opdaget ved konkrete talteoretiske undersøgelser.

Forskellige mennesker, som kan krediteres for dette, er Gauss med sin teori for sammensætning af former og Euler med sin teori for grupper af potensrester. I det følgende vil vi kort skitsere det algebraiske perspektiv i disse personers arbejde med udgangspunkt i Van der Warden s.148 og Wussing s.55-61.

Gauss betragter binære kvadratiske former,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2, \quad A,B,C \text{ er heltal}$$

og definerer sammensathed ved at angive en betingelse for hvornår en form er sammensat af to former. En form er sammensat af to andre, hvis der findes en substitution af variablene bestående af linearkombinationer af af produkterne af variablene i de to former, så formen transformeres til produktet af de to former. Hvis substitutionen opfylder nogle regularitetskrav, siges formen at være sammensat af de to former.

Det gruppeteoretiske kommer ind ved, at der indføres en klassedeling af formerne, sådan at to former ligger i samme klasse hvis der findes en lineær transformation med determinant 1, som transformerer den ene over i den anden. På klasserne af former lader det sig så gøre at definere en sammensathed så, hvis en form er sammensat af to former, så er dens klasse entydigt bestemt ved klasserne af de to former. Det vil sige, at sammensathed af former over føres til sammensathed af klasser.

Han viser så, at man givet to former kan finde en form, som er sammensat af disse og at denne komposition respekterer klassedelingen. Ved yderligere at definere en diskriminant, for en form viser han, at antallet af klasser af former med en given diskriminant er endeligt, og at klasserne med kompositionen overført på disse udgør, hvad der svarer til, en endelig abelsk gruppe.

Leonard Euler (1707-1783) udgiver i 1761 "Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta". Her i analyserer han rester, som fremkommer ved division af et potensudtryk med et primtal. Vi benytter som udgangspunkt fremstillingen af Euler i Wussing s.48-51.

Euler identificerer tal, som giver den samme rest ved division med et givet primtal, p, og opnår, hvad der svarer til at betragte restklasser, idet han benytter, at antallet af ikke-ækvivalente rester ved division med p højst kan være p-1 når p ikke må gå op. Når man betragter rækken af potenser,

$$1, a, a^2, a^3, \dots$$

må nogle af dem nødvendigvis give anledning til de samme rester, specielt vil uendeligt mange give resten 1. Hvis den mindste potens, som giver resten 1, er a^λ, vil

$$1, a, a^2, \dots, a^{\lambda-1}$$

alle have forskellige rester og resten for $a^{n\lambda+\mu}$ vil være den samme som for a^μ. Euler viser så en sætning om, at hvis

$$\lambda < p-1$$

er der højst lige så mange rester, som der ikke er rester det vil sige

$$\lambda \leq (p-1)/2$$

Gruppeteoretisk set er dette et specialtilfælde af sætningen om, at ordenen af en undergruppe går op i ordenen af gruppen. Euler's undersøgelse har en kompleksitet, som svarer til at betragte opdeling af en gruppe i undergrupper og se på de tilsvarende sideklasser.

5.2.4. Anvendelse af det konkrete gruppebegreb indenfor permutationsteori.

Konkrete undersøgelser af permutationer var et direkte resultat af anvendelsen af permutationer i ligningsløsningsteori.

Den franske matematiker Cauchy var den første, som beskæftigede sig systematisk med egenskaberne ved permutationer. I 1815 publicerede han en artikel, der hovedsagligt var baseret på beviset for en sætning, der siger, at antallet af forskellige værdier et ikke-symmetrisk udtryk med n variable kan antage, ikke er mindre en det største primtal p, som ikke overskrider n, medmindre det er 2.

Cauchy fik i den forbindelse defineret en lang række egenskaber for permutationsgrupper, som lige så godt kunne være udsagt om abstrakte grupper. Cauchy definerer produktet af to permutationer samt erkender at identitetspermutationen må betragtes som en permutation.

Der-ud-over definerer han ordenen af en permutation, en cyklisk permutation og dens potenser samt definerer forskellen mellem en permutation og en substitution. Hvis man skriver n variable i en rækkefølge har man en permutation. En substitution er overgangen fra en permutation til en anden.

Cauchy's arbejde med permutationer dannede grundlag for den videre udvikling indenfor den gruppeteoretiske formulering af ligningsløsningsproblemet samt for selvstændiggørelsen af teorien for permutationsgrupper, som tidligere var tæt knyttet til ligningsløsningsteori.

Den gruppeteoretiske tendens i Cauchy's arbejde er i høj grad repræsenteret i hans definition af begrebet "ækvivalente permutationer". Definitionen er, at hvis man på forhånd har givet en rational funktion af n rødder, da vil to vilkårlige permutationer af rødderne være ækvivalente, hvis de giver anledning til den samme funktionsværdi. Ligeledes er hans ide med at gruppere permutationer efter denne egenskab af stor betydning for Galois' arbejde med permutationsgrupper i teorien for algebraiske ligninger.

Den videre udvikling af teorien for permutationsgrupper er repræsenteret i Galois', Serret's og Jordan's arbejder. Bortset fra Galois' er deres gruppebegreb udelukkende knyttet til substitutionsgrupper. Substitutionsgrupper er det, vi i dag kalder permutationsgrupper. I det følgende er der altså tale om substitutionsgrupper når vi anvender termen, permutationsgruppe.

5.3. Generalisering af de algebraiske begreber.

5.3.1. Indledning.

I det følgende afsnit vil vi beskrive den anden fase i udviklingen af den abstrakte algebras udvikling, som i store træk foregår i perioden fra Galois til Lie. Udover disse personer har vi valgt Serret, Jordan, Kronecker og Klein som de matematikere, der i deres arbejde er repræsentive for denne periode.

Den matematiske virksomhed i denne periode var i høj grad centreret om at forstå og fortolke Galois studier af anvendelsen af permutationsgrupper i ligningsløsningsteori, idet han var den, som først fik demonstreret gruppebegrebets abstrakte potentiale.

Galois markerede på baggrund af sine studier af algebraiske ligninger starten på den periode, hvor man for alvor begyndte at interessere sig for grupper som et redskab til at klassificere og strukturer den viden, man i forvejen havde.

Dette resulterede bl.a. i, at der indenfor de fire matematiske discipliner opstod nye selvstændige områder, som blev gjort til genstand for gruppeteoretiske studier eksempelvis permutationsteori, invariantteori og repræsentationsteori. disse teorier indeholder kun brug af konkrete og generelle gruppebegreber og er derfor, efter aksiomatiseringen af det abstrakte gruppebegreb, blevet en del af den abstrakte algebras anvendelsesområder.

5.3.2. Galois' generelle gruppebegreb.

Den franske matematiker Evariste Galois levede fra 1811 til 1832. I 1832 nedskrev han sine ideer og resultater formuleret i en kortfattet og svært tilgængelig begrebsramme, som først i 1846 blev publiceret af matematikeren Liouville. Galois havde dog flere gange forsøgt at få udgivet sine artikler, men blev p.g.a. sine komplicerede og til tider ufuldstændige fremstillinger, ignoreret som respektabel matematiker.

Galois' havde som udgangspunkt for sine studier af algebraiske ligninger Lagrange, Gauss, Abel og Cauchy's arbejde indenfor ligningsløsningsteori og permutationsteori. Galois indså, at der var en tæt forbindelse mellem disse teorier. Dette gjorde ham i stand til at løse Lagrange's problem, nemlig at finde et eksplicit kriterium for løsbarheden af algebraiske ligninger v.h.a rodudtryk.

Galois opdagede, at man kunne "aflæse" strukturen af rødderne i en ligning udfra strukturen af en permutationsgruppe, som var associeret til ligningen. Galois viser, at man til enhver algebraisk ligning kan danne en permutationsgruppe, bestående af permutationer af ligninges rødder med følgende to egenskaber:

1) alle funktioner af rødderne, som forbliver uændret, når man substituerer med en permutation fra gruppen, kan udtrykkes rationelt.

2) alle rationelt udtrykkelige funktioner af rødderne forbliver uændrede, når man anvender permutationer fra gruppen. Denne gruppe benævnes ligningens gruppe.

Med begreberne "permutation" og "substitution" menes der h.h.v. en given rækkefølge af rødderne og overgangen fra en rækkefølge af rødderne til en anden.

Vi vil her skitsere Galois' kriterium for hvornår en algebraisk ligning er løsbar v.h.a. rodudtryk. Galois bruger i denne sammenhæng begrebet "decompositition propre", som vi vil oversætte med "en egentlig opløsning".

Dette begreb er knyttet til en gruppe tilhørende en ligning og betyder, at: Når man tilføjer samtlige rødder i en hjælpeligning til koefficientlegemet for ligningen, får man, at ligningens gruppe opløses i undergrupper. Hvis man indenfor hver undergruppe kan komme fra en vilkårlig permutation til anden ved brug af den samme substitution, så siges opløsningen af gruppen at være en egentlig opløsning.

I moderne terminologi svarer dette til en gruppes opløsning i normale undergrupper, hvor en normal undergruppe er en, hvis højre- og venstresideklasser er identiske. Galois' kriterium siger, at en algebraisk ligning er løsbar v.h.a. rodudtryk, hvis dens gruppe G kan opløses i normale undergrupper H sådan at:

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m = E$$

Hvor E er gruppen bestående af identiteten. Ydermere skal der gælde at antallet af sideklasser af H_k i H_{k-1} og H_1 i G skal være primtal.

Vi vil senere i projektet udkrystallisere de enkelte dele af Galois' begrebsramme. I gruppeteoretisk henseende betragtes Galois' metoder, som det første egentlige forsøg på at udnytte egenskaberne ved en gruppe.

Galois benyttede begrebet "en gruppe" i to forskellige betydninger. Den ene var, på tilsvarende måde som hans forgængere brugte det, blot et andet ord for en "mængde" eller "samling". Den anden betydning, som kommer til udtryk i hans seneste artikler, er et matematisk teknisk begreb, hvor kompositionsegenskaben eksplicit definerer gruppen. På trods af hans flertydige brug af ordet "gruppe", er der i hans undersøgelser klart repræsenteret den fundamentale rolle, som begrebet "normal undergruppe" spiller. Galois må derfor siges at være den, der på baggrund af det konkrete gruppebegreb i Lagrange, Gauss, Abel og Cauchys' studier, først opererer, med et generelt gruppebegreb.

Galois' og til dels Cauchy's studier af permutationsgrupper påvirkede den videre udvikling indenfor ligningsløsningsteori, idet man i stigende grad studerede permutationsgrupper i modsætning til tidligere hvor studiet af rationale funktioner blev sat i højsædet.

I perioden fra 1832 - 1846 var der på intet tidspunkt tegn på videre forskning indenfor ligningsløsnings- og permutationsteori. Det viste sig imidlertid, at der skulle gå op til tyve år, før Galois' gruppebegreb blev yderligere generaliseret.

5.3.3. Serret's fremstilling af teorien for permutationsgrupper.

Franskmanden Serret (1819-1885) var den første, som forsøgte at uddrive de gruppeteoretiske pointer i Cauchy og Galois' arbejde indenfor h.h.v. permutationsteori og ligningsløsningsteori. I sin bog "Cours d'Algebre superieure" publiceret i 1866 skitserer han, v.h.a. nogle gruppebaserede sætninger hentet fra Galois og Chauchy, gruppebegrebets daværende status.

Disse sætninger udsiger i store træk noget om ordenen af forskellige permutationsgrupper og hvornår en samling af permutationer udgør en gruppe. En af disse sætninger siger, at alle de permutationer på n tal, der kommuterer med en anden permutationsgruppe t på n tal, udgør en gruppe. En anden sætning sætning siger at de n! permutationer af n tal udgør en gruppe, som indeholder den alternerende gruppe, hvis, orden er n!/2.

Disse sætninger, ialt 10, udgør tilsammen grundlaget for hvad Serret på daværende tidspunkt anså for tilstrækkelige til at behandle problemet med at konstruere samtlige permutationsgrupper.

Serret's bidrag har i denne forbindelse ikke været knyttet til konstruktion eller opdagelse af nye resultater indenfor permutationsgrupper. Han har derimod forsøgt at forene Cauchy's udvidede gruppebegreb med Galois generelle gruppebegreb i en fælles begrebsramme. Serret får dermed dannet et, i forhold til de af Cauchy og Galois, yderligere generaliseret gruppebegreb.

Efter Serrets udgivelse i 1866 og op til 1880'erne skete der en eksplosiv udbredelse af anvendelsen af Galois' ideer og metoder i forskellige matematiske discpliner. Her vil vi specielt nævne Jordans (1838 - 1922) undersøgelser af anvendelsen af permutationsteori i studiet af transcendente funktioner og analytisk geometri, som er samlet i bogen "Traite des substitutions et des equations algebriques " og udgivet i 1870.

5.3.4. Jordan's udvidelse af det generelle gruppebegreb.

Jordans anvendelse af permutationsgrupper i analytisk geometri dannede grundlag for den videre udvikling af gruppebegrebets anvendelse i geometri, som eksplicit repræsenteres i Klein's Erlangen Program fra 1872. Det gruppeteoretiske aspekt i Jordan's og Klein's arbejder er, på trods af den kun to-årige afstand mellem publikationerne, i høj grad forskelligt. Mens Klein i Erlangen Program foretager en ydeligere generalisation af gruppebegrebet (transformationsgrupper) anvender Jordan det af Serret formulerede gruppebegreb indenfor nogle discipliner. Derfor må Jordans gruppebegreb være en udvidelse af Serret's begreb.

Jordans ide er at "oversætte" problemer indenfor geometri til algebraiske ligninger, så man derefter direkte kan anvende Galois' metoder. Jordan var derfor "tvunget" til at udvikle et passende sæt regneregler for permutationsgrupper, som ville gøre ham i stand til at formulere et geometrisk problem i gruppeteoretiske termer. Jordan viste, at tidligere løste geometriske problemer kunne reduceres til at betragte undergrupper af "den lineære gruppe". Linære grupper blev både af Serret og Jordan detaljeret undersøgt.

Gruppebegrebet er det centrale redskab i Jordan's "Traite", idet han opfatter sin anvendelse af gruppeteori, som et forsøg på at få struktureret og klassificeret mængden af lineære grupper.

I den anden del af "Traite" beskæftiger han sig med analytisk repræsentation af permutationer. Mere specifikt forsøger Jordan at finde et analytisk udtryk for samtlige permutationer, som kommuterer med en transitiv gruppe,(en gruppe af permutationer af en mængde 1,....,n er transitiv hvis den for ethvert element ,a, i mængden indeholder en permutation p så p(1)=a, transitivitet er et udtryk for sammenhæng i gruppen) F.

Han kommer frem til, at en sådan mængde af permutationer kan repræsenteres i en matrixform. Pointen er så, at man udfra determinanten kan afgøre om matricen virkelig repræsenterer en permutation. Hvis dette er tilfældet vil samtlige permutationer, som kan udtrykkes ved matricen, udgøre en gruppe. Det er denne gruppe, hvis egenskaber såsom ordenen, sæt af frembringere faktorgrupper i en kompositionsrække, undergrupper, kanoniske former af gruppeelementerne .... o.s.v. han udforskede.

Fra et historisk synspunkt kan hans undersøgelser af analytiske repræsentationer af permutationer tolkes som en slags overgangsfase fra begrebet en permutationsgruppe til begrebet en gruppe af lineære substitioner.

5.3.5 Transformationsgrupper som et generelt gruppebegreb i Klein og Lie's arbejde.

Jordans undersøgelser af substitutionsgruppebegrebets anvendelse indenfor analytisk geometri var som tidligere nævnt med til at danne grundlag for Klein's Erlangen Program. Klein forsøger i denne bog at foretage en klassifikation af geometri v.h.a. gruppeteori. Klein's ide med Erlangen Program var til dels også et resultat af hans studier af geometriske invarianter, d.v.s. geometriske objekter som lades uændret m.h.t. bestemte afbildninger.

Kleins brug af Jordans substitutionsgruppebegreb fører til en ny type gruppe nemlig transformationsgruppe. Gruppens elementer betragtes som afbildninger og kompositionen i gruppen er funktionssammensætningen. Transformatiomsgruppebegrebet er en generalisation af Jordans substitutionsgruppebegreb, idet man kan opfatte samtlige substitutioner som transformationer.

Både Jordan og Klein anser stabilitetsegenskaben for tilstrækkelig til at definere endelige grupper, forudsat at man har givet associativtet samt eksistenssen af neutralelementet. Kleins anvendelse af transformations - grupper forudsatte faktisk, at den inverse transformation eksisterde. Men han var ikke i stand til at udtrykke denne eksplicit. Dette blev der dog kort efter publikationen af Erlangen Program, rådet bod på i Lie's formulering af teorien for transformationsgrupper.

På tilsvarende måde, som Galois tilknyttede en substitutionsgruppe til enhver algebraisk ligning, knytter Klein til enhver geometri en transformationsgruppe.

Selvstændiggørelsen af teorien for transformationsgrupper foretages af Lie i 1876. Her forsøger Lie, at sammenfatte gruppebegrebets status i forskellige matematiske discipliner. Lie udtrykker det selv som et forsøg på at forene teorien for substitutionsgrupper, geometri og differentialligningsteori i en fælles begrebsramme nemlig transformationsteori. Lie får "næsten" defineret det abstrakte gruppebegreb, men er ikke i stand til at abstrahere fra gruppeelementernes konkrete natur og udelukkende se på relationerne mellem disse.

På trods af dette blev gruppebegrebet først genstand for aksiomatisering 5-6 år efter. På dette tidspunkt definerede Lie i en artikel "Uber unendliche kontinuierliche gruppen" fra 1883 begreberne kontinuerte/diskontinuerte endelige/uendelige -grupper, hvor hans gruppebegreb stadig svarer til transformationsgruppebegrebet.

Selv om Lie i 1883 havde fuldstændiggjort teorien for transformationsgrupper fortsatte han sine studier af disse, dog under stadig større påvirkning af "behovet" for aksiomatisering. Hverken Klein eller Lie tog skridtet til at formulere en mængdeteoretisk aksiomatisering af gruppebegrebet, selv om de i deres studier eksplicit anvender gruppeaksiomerne.

5.3.6 Det generelle ring- og legemsbegreb i Kronecker og Dedekinds studier af algebraiske tal.

Udviklingen af ring- og legemsbegrebet foregik hovedsagligt i talteori, specielt indenfor studiet af algebraiske tal. Imodsætning til gruppebegrebet var udviklingen af ring- og legemesbegrebet knyttet til en lille gruppe mennesker.

Gauss' teori for cyklotomiske polynomier og sammensætning af former førte direkte til studiet af algebraiske tallegemer. Både Gauss og Galois havde i deres studier af kongurenser et konkret legemsbegreb, idet de beskæftigede sig med restklasser og restklasselegemer d.v.s. endelige tallegemer.

Studiet af algebraiske tallegemer blev hovedsagligt foretaget af Kronecker (1823-1891) og dedekind (1831-1916). Kroneckers konstruktivistiske filosofiske baggrund var årsagen til at, de to's teorier for tallegemer var grundlæggende forskellige, på trods af deres tætte samarbejde.

Den primære forskel mellem Kronecker og Dedekinds studier var, at Dedekind beskæftigede sig med egenskaber for mængden af elementer, som dannede et legeme. Mens Kronecker beskæftigede sig udelukkende med elementerne.

Begrebet "tallegeme" blev indført af Dedekind i 1850'erne, som i forbindelse med talområder, skulle fortolkes som en samling af objekter, der dannede en vis helhed. Det generelle legemesbegreb blev introduceret af Dedekind, idet han sammen med Dirichlet formaliserede de rationelle tals egenskaber og derefter generaliserede resultater.

Dedekind definerer, at et vilkårligt system af relle eller komplekse tal, som opfylder stabilitetsegenskaberne m.h.t. de fire kompositioner +,-,*,/ er et tallegeme eller bare et legeme.

Kronecker udelukker i sine studier det generelle mængdebegreb, idet hans konstruktivistiske filosofi ikke tillader brug af uendelige "helheder". Denne begrænsning medfører, at Kroneckers legemsbegreb var begrænset til en endelig udvidelse af de rationelle tal, mens Dedekinds legemsbegreb var et algebraisk system som tilfredsstillede hans definition.

I stedet for begrebet "legeme" anvendte Kronecker begrebet "et rationalitetsområde" (rationalitatsbereich), som første gang eksplicit blev introduceret af Galois. Både Kronecker og Galois' begreb er, i samme udstrækning som Dedekinds, et legeme. Den eneste forskel er, at Kronecker begrænser sig til endeligdimensionale udvidelser af de rationelle tal. Kronecker skabte en hel teori for legemer (rationalitetsområder), hvori hans legemsbegreb er mere generelt end Dedekind's, dette ses ved, at Kronecker studerer legemer af rationelle funktioner med n variable. I denne forbindelse introducerer han begrebet "at tilføje en variabel til et legeme", hvor begrebet "en variabel" bliver udvidet til at omfatte en abstrakt størrelse.

Det moderne legemsbegreb er ikke et resultat af enten Kronecker eller Dedekind's arbejde, Selv om de i deres fremstillinger adskiller sig fundamentalt fra hinanden. Tværtimod blev blandingen af deres forskellige, men dog indbyrdes supplerende, indsigt i legemsteori udgangspunktet for Weber's abstrakte formulering af legemsbegrebet i 1893.

Studiet af de algebraiske heltal d.v.s. tal, som er rødder i polynomier med heltallige koefficienter, førte direkte til studier af ringstrukturer. Man opdagede, at entydig primtalsfaktorisering ikke altid var mulig i integritetsområder, d.v.s. ringe med 1-element uden 0-divisorer.

Dedekind var den første, som indførte et generelt ringbegreb. Han definerede en ring som en mængde af tal sådan at, hvis a og b tilhører mængden n, så skal deres produkt, sum og differens også tilhøre den. Dedekind arbejdede med de konkrete ringe h.h.v. ringene bestående af mængden af alle algebraiske heltal og mængden af alle algebraiske heltal i et vilkårligt algebraisk tallegeme.

Den videre udvikling af ringbegrebet foregik i den sidste tredjedel af det nittende århundrede. På dette tidspunkt studerede man b.l.a. konkrete lineære associative algebraer. Disse algebraer er moderne set ringe, og i den abstrakte ringteoris formulering bliver resultaterne for disse konkrete algebraer generaliseret. Den abstrakte formulering af ringbegrebet kom først langt senere (Frankel i 1914) end det abstrakte gruppe- og legemesbegreb (Weber i h.h.v. 1882 og 1883).

5.4. Den abstrakte formulering af gruppe-, ring- og legemsbegrebet.

5.4.1. Indledning.

De abstrakte begreber gruppe, ring og legeme har alle rødder i konkrete anvendelser inden for områder af matematiken. Vi har tidligere set på forudsætningerne for det abstrakte gruppebegreb.

Legemsbegrebet har på lignende vis optrådt implicit indenfor forskellige discipliner. Det kommer for eksempel til udtryk i Galois' rationalitets-områder og i Dedekinds og Kroneckers arbejder med algebraiske tal.

Ringbegrebet har rødder fælles med legemsbegrebet. Arbejde med konkrete ringe finder man hos Dedekind og Kronecker indenfor algebraiske tal, hos Kummer med ideal-komplekse tal og hos Hilbert indenfor algebraisk talteori. I modsætning til gruppe- og legemsbegrebet forekommer "ikke-trivielle" eksempler på ringe først lige omkring og efter formuleringen af det abstrakte begreb. Indtil da indskrænkede studier af ringstrukturer sig stort set til talsystemerne.

5.4.2. Det abstrakte gruppebegreb.

Gruppen var i sig selv den første af de tre abstrakte strukturer, som blev introduceret og undersøgt, og var på en måde den første abstrakte struktur indenfor algebra overhovedet.

Allerede i 1849 havde Cayley en definition af en abstrakt gruppe og i 1878 yderligere en. De kommer som en naturlig del af udviklingen af symbolsk algebra i England på dette tidspunkt. Cayleys gruppebegreb slår ikke igennem på dette tidspunkt, men det er kendt af hans efterfølgere.

Kronecker giver i 1870 en abstrakt definition af begrebet "endelig abelsk gruppe" svarende til Cayleys begreb fra 1849. I denne definition kræver han nogle abstrakte elementer med en abstrakt operation, som er stabil, har associativitets- og kommutativitets-egenskaben og at der for ethvert element findes et entydigt inverst. Med dette begreb viser han blandt andet et basis-teorem. Dette begreb er på grund af sin aksiomatiske formulering et vigtigt skridt i formuleringen af et generelt abstrakt gruppebegreb.

W.v. Dyck giver en definition af abstrakte grupper i 1882 samtidig med, at Weber gør det. Dycks definition kræver (iflg. Kline s.1141) en mængde med en associativ men ikke nødvendigvis kommutativ operation, som afbilder ind i mængden selv, og at der til ethvert element findes et inverst. (neutralt element er ikke nævnt). Dycks gruppebegreb omfatter alle de konkrete gruppebegreber: gruppebegrebet fra ligningsløsningsteori, uendelige transformationsgrupper i geometri og grupperne fra talteori.

Webers samtidige definition af gruppe er, at et system G af elementer af enhver slags $O_1, \ldots, O_h$ kaldes en gruppe af orden h, hvis man fra ethvert par af elementer i systemet kan aflede et tredje ved en forskrift, som kaldes komposition eller multiplikation, og hvis associativitet og forkortningsregler gælder. I 1893 definerer Weber yderligere et gruppebegreb, hvor det tillige skal gælde, at for tre vilkårlige elementer, som indgår i en relation AB=C, skal en hvilken som helst af dem være entydigt bestemt af de to øvrige.

Efter formuleringen af det abstrakte gruppebegreb er der en masse bestræbelser på at formulere gruppeteori fra forskellige discipliner inden for rammerne af det abstrakte gruppebegreb.

J.-A. de Seguier (1862-1937) er en repræsentant for disse bestræbelser med "Elements de la theorie des groupes abstrait" fra 1904. I dette værk er der lagt vægt på at fremstille teorien for endelige grupper og det sker med udgangspunkt i blandt andet Burnsides (1852-1927) "Theory of Groups of Finite Orders" fra 1897 og Jordans arbejder, som begge er baseret på generelle gruppebegreber.

Et væsenligt element i Seguiers tekst, som netop understreger overgangen til abstrakt gruppeteori, er, at han viser gruppe-aksiomernes uafhængighed ved en række modeksempler, og dermed at alle er nødvendige for at opnå den fulde gruppestruktur.

5.4.3. Det abstrakte legemsbegreb.

I modsætning til gruppebegrebet, som i sine tidlige stadier var repræsenteret i flere discipliner, udspringer legemsbegrebet primært fra studiet af talsystemerne. Legemsegenskaberne kendes meget tidligt som love for tallene. Ved udvidelse af egenskaberne til abstrakte symboler fås de begrebsdannelser, som præger den engelske skole fra starten af det nittende århundrede.

Legemsbegrebet findes som et generelt begreb hos Abel og Galois i form af rationalitetsområder i ligningsløsningsteori. Galois er endvidere den første, som fatter, at Gauss' teori for kongruenser er et udgangspunkt for studiet af endelige legemer.

Legemsbegrebet findes som et generelt begreb hos Kronecker og Dedekind i studiet af algebraiske tal. Det er Dedekind, som i 1879 giver en første definition af begrebet tallegeme og det er et umiddelbart forbillede for Weber, som i 1893 præsenterer det abstrakte begreb kommutativt legeme i en udgivelse om abstrakt galois-teori.

Efter formuleringen af det abstrakte legemsbegreb finder Kurt Hensel p-adiske legemer ("Theorie der algebraischen Zahlen", 1908) og kan med disse danne en lang række forskellige legemer. Dette motiverer en klassifikation af legemer. Det er Ernst Steinitz (1871-1928), som i "Algebraischen Theorie der Korper" fra 1910 gør noget for denne sag, idet han opdeler legemer efter deres primlegemer og snakker om karakteristik af legemer.

Steinitz udvikler en stor mængde teori for abstrakte legemer og definerer en lang række egenskaber ved og begreber relateret til legemer. Blandt andre ting stiller han spørgsmålet om, i hvilke legemer galois-teori gælder, hvilket fører til diskussionen af separabilitet af legemer.

5.4.4. Det abstrakte ringbegreb.

Udviklingen af det abstrakte ringbegreb og ringteori forstår man meget dårligt ved at lede efter en udvikling fra konkrete anvendelser inden for nogle discipliner. Begreber, som hører hjemme i ringteori, findes konkret indenfor studier af tallegemernes struktur hos Dedekind, Kronecker og Kummer, og der laves også her en del teori af ringteoretisk art, men det er først med de almindelige bestræbelser på at fundere matematiken abstrakt og aksiomatisk, at det abstrakte ringbegreb kommer. Det er Frankel, som i 1914 definerer det abstrakte ringbegreb.

Abstrakt ringteori er ikke lavet som et forsøg på at forene teori indenfor forskellige discipliner, men optræder mere som et led i den aksiomatiske opbygning af algebra. Det er også typisk, at ringteori anvendes indenfor discipliner, som først udvikles på dette og senere tidspunkter.

Wedderburn laver i slutningen af århundredet en del teori for ringe og for lineære associative algebraer, men det er først med Emmy Noether i tyverne at ring- og idealteori bliver systematiseret og får et aksiomatisk grundlag.

6. Analyse af Galois' rolle i udviklingen af den abstrakte algebra.

6.1. Indledning.

Formålet med det foregående afsnit har været, at få et overblik over udviklingen og tilblivelsen af den abstrakte algebra. Afsnittet kan betragtes som en slags pilotprojekt med henblik på senere i projektet dels at afklare betydningen af Galois' bidrag i forhold til andres og dels få en fornemmelse af, hvad hans udgangspunkt har været. Ydermere har det skulle tjene det formål, som er nævnt i forordet til projektet, at få et indtryk af, hvordan en matematisk teoribygning bliver udviklet.

Parallelt med udviklingen af den abstrakte algebra foregik der fra 1846 og op til omkring slutningen af det nittende århundrede en udvikling af Galois' teori, som senere bliver til det, vi i dag kalder for galoisteori. Karakteristisk ved denne udvikling var, at den var et resultat af flere forskellige menneskers forsøg på at forstå og komplettere Galois' arbejde. Gennem disse studier fik man langsomt øjnene op for gruppebegrebets styrke, som et redskab til at repræsentere strukturen af matematiske objekter, i dette tilfælde i forbindelse med algebraiske ligninger.

Galois' formål med at anvende gruppebegrebet i ligningsløsningsteori var til dels en konsekvens af hans forgængeres problemer med (u)løsbarheden af femtegradsligningen og til dels en konsekvens af hans indsigt i nødvendigheden af at præsentere gruppebegrebet gennem en af dets anvendelser.

Denne indsigt havde den engelske matematikker Cayley ikke, idet hans præsentation af gruppebegrebet ikke udsagde noget om dets konkrete anvendelse, men udelukkende var en præsentation af det abstrakte begreb uden, at det var tilknyttet en matematisk disciplin. Konskvensen var, at man ikke i den matematiske verden, var i stand til at forstå og dermed acceptere det abstrakte gruppebegreb som et slagkraftigt redskab i matematik.

Karakteristisk ved Galois' efterfølgere var, at de var delt i to lejre. Den ene koncentrerede sig om at udrede hans arbejde, som nok må siges at være ufuldstændig og visse steder inkonsistent. Den anden forsøgte i højere grad at videreudvikle Galois' ideer i retning af at anvende gruppebegrebet i andre discipliner.

Repræsentative for disse to lejre er h.h.v. italieneren E.Betti (1823-92) og franskmanden C.Jordan (1838-1922). I modsætning til udviklingen af Galois' resultater i Italien og Tyskland var situationen i Frankrig stærkt påvirket af troen på, at Cauchy havde færdigformuleret teorien for permutationsgrupper.

Dette medførte, at studiet af de gruppeteoretiske aspekter i Galois' arbejde blev overset til fordel for hans resultater indenfor ligningsløsningteori. Det var først, da Cauchy's arbejde med permutationsgrupper og Galois' teori blev sammenfattet af Serret i 1866, at man i Frankrig fik øjnene op for gruppebegrebets styrke i matematik.

E.Betti var den første, som udfyldte et af de største gruppeteoretiske "huller" i Galois' fremstilling. Han beviser, at Galoisgruppen for en ligning faktisk er en permutationsgruppe, hvilket er en antagelse hos Galois. På trods af dette repræsenterer Betti's fremstilling på ingen måde en generalisation af Galois' gruppebegreb. Derimod er Jordan's formulering af Galois' teori det første eksempel på et forsøg på dels at systematisere Galois' resultater og dels at fremhæve gruppebegrebet som et strukturelt redskab i matematik.

I det efterfølgende afsnit vil vi forsøge at gøre rede for Galois' bidrag til udviklingen af den abstrakte algebra, idet vi har valgt at skelne mellem hans direkte og indirekte bidrag.

Galois' direkte bidrag består i hans overordnede mål, nemlig at finde en abstrakt begrebsramme for de forskellige områder og metoder i matematik. Vores begrundelse for, at det er et direkte og ikke et indirekte bidrag, er, at det uden nogen form for bearbejdelse fører til studiet af strukturer i matematik, som er grundlæggende for den abstrakte algebra.

Endvidere består Galois' indirekte bidrag i hans uafsluttede men revolutionerende resultater indenfor ligningsløsningsteori, som har givet anledning til adskillige forsøg på at komplettere og systematisere hans arbejde. Dette har, som nævnt tidligere, ført til udviklingen af galoisteori. Disse bestræbelser udgør tilsammen en betydelig faktor i udviklingen af den abstrakte algebra og ligeledes har resultaterne fra anvendelserne af Galois' teori optrådt som en væsentlig begrundelse og motivation for den abstrakte algebra.

For at få belyst Galois' direkte bidrag præsenterer vi et repræsentativt udpluk af hans arbejde, som vi har valgt til at være hans hovedsætning samt hans tilhørende begrebsramme.

Dernæst vil vi præsentere Jordan's fremstilling af det, som indholdsmæssigt svarer til Galois' hovedsætning. Dette skal ligge til grund for en vurdering af Galois' indirekte bidrag, idet Jordan's fremstilling repræsenterer det første vellykkede forsøg på en generalisation af galoisteori. Derefter vil vi dels sammenligne Galois og Jordan's fremstillinger og dels gøre rede for deres forbindelse til den abstrakte algebras begrebsramme, før til sidst at kunne vurdere Galois' direkte og indirekte bidrag til udviklingen.

6.2. Præsentation af Galois' hovedsætning og begrebsramme.

Med udgangspunkt i Galois' originaltekster vil vi i det følgende præsentere hans hovedsætning og begrebsramme med den oprindelige terminologi. Galois' hovedsætning handler om kriteriet for, hvornår en algebraisk ligning er løsbar v.h.a. radikaler, d.v.s. rodudtryk af rationale udtryk. Til dette udnytter han dels Cauchy's resultater indenfor permutationsgruppeteori og dels Lagrange, Abel og Gauss' arbejde indenfor ligningsløsningsteori.

I Galois' artikel "Memoire sur les conditions de resolubilite des equations par radicaux" indledes der med en række begrebsdefinitioner. Galois definerer, hvad der menes med en " reducibel ligning " og " rational divisor ". I det efterfølgende mener vi "polynomium", når vi snakker om en "ligning".En ligning siges at være reducibel, hvis den har rationale divisorer; i modsat fald er den irreducibel.

Begrebet " rational divisor " og " rational " er vigtige begreber i Galois' indledende kommentarer. Når en ligning har koefficienter, som alle er rationale tal,vil det simpelt sige, at ligningen kan opløses i faktorer, hvis koefficienter er rationale tal.

Hvis koefficienterne i ligningen ikke er rationale tal, så skal man ved en rational divisor forstå en divisor, hvori koefficienterne kan udtrykkes som rationale funktioner af koefficienterne fra den oprindelige (ligning). En rational divisor svarer til, hvad vi i dag forstår ved en divisor liggende i koefficientlegemet ved adjunktion af nye objekter.

Derefter definerer Galois' begrebet "at tilføje en størrelse til en ligning". Givet nogle størrelser siger han, at man tilføjer disse størrelser til ligningen, når det drejer sig om, at reducere denne. Disse størrelser kalder han tilføjelser til ligningen. I den moderne begrebsramme svarer det til at udvide koefficientlegemet.

Substitutions - og permutationsbegrebet er klart adskilt i deres definitioner, men bliver i artiklen nogle gange anvendt i flæng. Galois definerer en substitution, som overgangen fra en permutation til en anden. Når han grupperer substitutioner gøres det udfra den samme permutation. Ydermere skal der gælde, at hvis to substitutioner tilhører den samme gruppe, så vil deres sammensætning også tilhøre gruppen.

Galois'gruppebegreb ændrer sig gennem hans arbejde,hvor gruppebegrebet har tre forskellige betydninger. I begyndelsen er en gruppe blot en samling af permutationer, d.v.s. et begreb på lige fod med Lagrange's gruppebegreb; dernæst en samling af permutationer, hvor kompositionsegenskaben bliver defineret, men ikke altid er sikret. I størstedelen af hans arbejde er en gruppe en samling af permutationer, som er stabil m.h.t. multiplikation.

Vi vil i det følgende præsentere tre af Galois' sætninger, som tilsammen udgør størstedelen af grundlaget for hovedsætningen.

Sætning 1.

Givet en ligning, hvor a,b,c,..er de m rødder. Der vil altid eksistere en gruppe, bestående af permutationer af bogstaverne a,b,c,..,som har følgende egenskab:

1) alle funktioner af rødderne, som er invariante overfor substitutionerne i gruppen, vil være rationalt bestemmelige.

2) omvendt; alle funktioner af rødderne, som er rationalt bestemmelige, vil være invariante overfor samtlige af disse substitutioner.

Dette er Galois' definition af en lignings gruppe.

Sætning 2.

Hvis man tilføjer til en ligning en rod r fra en irreducibel hjælpeligning, så:

1) To tilfælde :
   a) Enten vil ligningens gruppe ikke ændre sig
   b) Ellers vil ligningens gruppe dele sig i p grupper, hver tilhørende en ligning fremkommet respektivt, når man til den oprindelige ligning tilføjer enhver af rødderne fra hjælpeligningen.

2) Disse grupper vil have denne egenskab, at man kommer fra den ene til den anden, når man på alle permutationer i den første gruppe udfører den samme substitution

Galois definerer ikke selv begrebet "hjælpeligning", men refererer til Gauss' anvendelse af disse. I afsnit 5.2 om Gauss' løsning af syttengradsligningen er hjælpeligningerne de fire andengradsligninger, hvis koefficienter og konstanter findes udfra summer og produkter af rødderne i syttende-gradsligningen og som kan løses.

Galois beviser ikke denne sætning, men antyder kun trinene i et bevis.

Givet en ligning kan man finde en rational funktion V af rødderne sådan, at alle rødderne er rationale funktioner af V. Man kan således betragte en irreducibel ligning, hvor V er rod. Givet $V, V', V'', \ldots, V^{(n-1)}$ er rødderne i den irreducible ligning. Givet rødderne qV, q_1V, $q_2V, \ldots,$ $q_{m-1}V$ i den oprindelige ligning, så kan de n permutatiner af rødderne udtrykkes således :

$$\begin{array}{lllll}
(V), & qV, & q_1V, & \ldots, & q_{m-1}V, \\
(V'), & qV', & q_1V', & \ldots, & q_{m-1}V', \\
(V''), & qV'', & q_1V'', & \ldots, & q_{m-1}V'', \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\
(V^{(n-1)}), & qV^{(n-1)}, & q_1V^{(n-1)}, & \ldots, & q_{m-1}V^{(n-1)}
\end{array}$$

Denne gruppe af permutationer vil have den egenskab, at alle funktioner af rødderne, som er invariante overfor substitutionerne i gruppen, kan skrives som $F = \psi V$, hvor

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)}$$

Hvis ligningen i V, som korresponderer til den oprindelige ligning, forbliver irreducibel efter tilføjelsen af roden er det klart, at ligningens gruppe ikke ændres. Hvis den i modsat fald er reducibel, så vil ligningen i V kunne opløses i p faktorer alle med samme grad og af samme form:

$$f(V,r) \times f(V,r') \times f(V,r'') \ldots\ldots \quad , \text{ hvor}$$

r, r', r'', ..., alle er forskellige. Således vil ligningens oprindelige gruppe opløses i grupper hver bestående af lige mange permutationer, eftersom der til enhver værdi af V korresponderer en permutation. Disse grupper vil svare til disse, man opnår, hvis man til den oprindelige ligning successivt tilføjer r,r',r'',...

Vi har i det foregående set, at alle værdierne af V var rationale funktioner af hinanden. Det er klart, at hvis V' er rod i f(V,r'), så vil F(V')også være en rod.

Udfra dette siger Galois, at man får gruppen relateret til r' ved at udføre den samme substitution overalt i gruppen relateret til r. For at komme fra permutationen (F(V)) til permutationen (F(V')) er det nødvendigt at bruge den samme substitution, som for at komme fra permutationen (V) til permutationen (V').

Sætning 3.
Hvis man til en ligning tilføjer alle rødder i en hjælpeligning, så vil de p grupper, beskrevet i Sætning 2., have denne egenskab, at substitutionerne er de samme for hver af grupperne.

Inden præsentationen af Galois' hovedsætning er det nødvendigt, at definere begrebet " en egentlig opløsning ":

Ved, til den oprindelige ligning, at tilføje en eller alle rødder i en hjælpeligning bliver ligningens gruppe delt i grupper sådan, at man kan komme fra den ene til den anden med den samme substitution. Det er kun, hvis alle rødder i hjælpeligningen tilføjes, at det er sikkert, at disse grupper vil have de samme substitutioner. Hvis dette er tilfældet, kaldes denne opløsning for egentlig.

Galois' hovedsætning lyder som følger :

Hvis ligningens gruppe tillader en egentlig opløsning, sådan at den opløses i M grupper hver med N permutationer, hvor N og M skal være primtal, så kan ligningen løses ved at løse to ligninger, hvis respektive grupper h.h.v. består af M og N permutationer.

Galois' begreb "at en opløsning for en gruppe er egentlig" svarer i moderne forstand til egenskaben "opløselighed" af en gruppe, som indebærer normalitet af undergrupper. Vi siger, at en gruppe er opløselig, hvis der eksisterer en endelig række af undergrupper,

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$$

hvor det gælder at G_i er en normal undergruppe af G_{i+1} og kvotientgruppen G_{i+1}/G_i er kommutativ. Begrebet "en lignings gruppe" er i dag blevet til Galoisgruppen for udvidelsen af rodlegemet over koefficientlegemet, hvor

Galoisgruppen består af mængden af automorfier af rodlegemet, som afbilder koefficientlegemet identisk. Galois' tilføjelser af rødder til en ligning og opdelingen af dens gruppe svarer til at betragte Galoisgrupperne af udvidelser af koefficientlegemet.

6.3 Præsentation af Jordan's fremstilling af galoisteoriens hovedsætning.

Jordan udgiver i 1870 sin "Traité des substitutions et des équations algébrique". Den er opdelt i fire bøger. Den første handler om kongruenser, den anden om substitutioner, den tredje om irrationale tal (blandt andet i algebraiske ligninger) og den fjerde om løsbarhed ved hjælp af radikaler.

Jordan definerer grupper med udgangspunkt i substitutioner af tal. I afsnit 23 i første bog i Traité definerer han således en substitution ved:

Man giver navnet substitution til en operation med hvilken man ombytter nogle bestemte tal, som man kan antage repræsenteret ved bogstaverne a,b,..

Han siger videre at man kan opfatte som en substitution kaldet identiteten ("unité") at lade alle bogstaverne blive på deres plads.

Givet to substitutioner A og B vil man ved AB betegne substitutionen, som man får ved at foretage substitutionen A efter substitutionen B. A betegner den substitution, som sammen med A giver identiteten.

Man siger, at et system af substitutioner danner en gruppe, hvis produktet af to substitutioner i systemet selv er med i systemet.

Han definerer endvidere frembragt gruppe, orden og grad af en gruppe, orden af en substitution, ombyttelighed af substitutioner, og meget mere.

Vi vil nu præsentere Jordan's ligningsteori med et uddrag af de sætninger, som vedrører forholdet mellem en ligning, dens rødder og egenskaber ved dens gruppe.

Jordan starter i afsnit 348 med at sige, hvad der er udgangspunktet. Har man givet en algebraisk ligning, F(x)=0, med grad m, ved man, at den har m rødder, og at alle symmetriske funktioner af dens rødder kan udtrykkes rationalt ved koefficienter fra ligningen.

Man kan generalisere problemet til at spørge: For en given ligning F(x)=0, hvilke funktioner af rødderne, der tillader at udtrykkes som rationale funktioner af dels koefficienterne i ligningen, dels visse vilkårligt givne irrationale tal, som således siges at være tilføjet ligningen ("adjointes a l'equation").

Vi betragter herefter som rationale alle størrelser, som kan udtrykkes rationalt med koefficienter fra ligningen og de tilføjede størrelser. En ligning med rationale koefficienter siges på dette grundlag at være irreducibel, når den ikke har nogen rødder fælles med nogen ligning af mindre grad med rationale koefficienter.

Dette var de vigtigste grundlæggende begreber for i afsnit 353 at kunne formulere hvad han selv betragter som en fundamental sætning:

Givet en ligning F(x)=0, hvor alle rødderne x1,..,xm er forskellige, og til hvilken man kan antage at have tilføjet visse hjælpestørrelser y,z,... Der findes da altid en substitutionsgruppe for rødderne, sådan at enhver funktion af rødderne, hvor substitutionerne fra gruppen ikke ændrer dens værdi ("valeur numerique"), er rationalt bestemt, og omvendt.

Beviset for denne sætning er temmeligt stort og bygger på tre lemmaer som sikrer eksistensen af forskellige rationale funktioner som relaterer rødder og koefficienter. Den i sætningen nævnte gruppe benævnes ligningens gruppe med hensyn til de tilføjede størrelser y,z,... ("le groupe de l'equation relatif aux quantites adjointes y,z,.."). Hvis der ikke er tilføjet nogen størrelser kan man tale absolut om ligningens gruppe. Det er med udgangspunkt i egenskaberne ved denne gruppe, at han formulerer egenskaber ved ligninger.

Vi vil til sidst berøre spørgsmålet om løsbarhed af ligninger ved hjælp af radikaler, som det behandles af Jordan i fjerde bog. Først defineres egenskaben at kunne løses ved hjælp af radikaler, dernæst angives et kriterium for løsbarhed og tilsidst angives Jordans formulering af Galois' kriterium for løsbarhed.

En ligning er løsbar ved hjælp af radikaler, hvis man kan frembringe dens rødder rationalt ved at tilføje passende rødder fra binome ligninger (som kan antages at være af primisk grad).

Først har vi Jordan's "eget" kriterium:

For at en ligning er løsbar ved hjælp af radikaler, er det nødvendigt og tilstrækkeligt at dens kompositionsfaktorer alle er af primtalsorden. (Jordan's kompositionsfaktor svarer til det moderne abstrakte begreb, og er defineret i hans første bog.)

Dernæst har vi Jordan's udgave af Galois' kriterium:

For at en ligning er løsbar ved hjælp af radikaler er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at dens gruppe er at betragte som en potensfrembragt række af substitutioner således at:

1) Enhver af disse er en permutation i gruppen frembragt af den forrige.
2) Den første af potenserne i rækken, som er indeholdt i den nævnte gruppe, skal være af primisk grad.

Om Jordan's Traite kan man overordnet sige at den er punktum i udviklingen af galoisteori, og at den samler det meste af den på dette tidspunkt kendte gruppeteori. Jordan har igennem hele Traite lagt vægt på anvendelserne af sin teori.

6.4 Galois' direkte og indirekte bidrag til udviklingen af den abstrakte algebra.

Som nævnt i indledningen til dette afsnit er Galois' indirekte bidrag karakteriseret ved hans uafsluttede men revolutionerende resultater i ligningsløsningsteori, som har resulteret i udviklingen af galoisteori, der direkte har påvirket tilblivelsen af den abstrakte algebra.

Dette vil vi begrunde ved dels at se på hvilken måde Jordan, som er en repræsentant for et mellemliggende led i udviklingen af galoisteori, har absorberet og anvendt Galois' resultater; dels ved at skitsere Jordan's forbindelse / bidrag til den abstrakte algebras begrebsramme.

Præsentationen af Galois og Jordan's fremstillinger skal i det følgende være med til at danne grundlag for vores konklusioner.

Jordan har i sin fremstilling af galoisteorien hovedsaglig lagt vægt på at præsentere dens anvendelser men har kun i ganske få tilfælde løsrevet sig fra gruppebegrebets tilknytning til ligningsløsningsteori. Dette har medført, at Jordan's arbejde fortrinsvis har resulteret i en afrunding af Galois' gruppeteoretiske formulering af kriteriet for en algebraisk lignings løsbarhed v.h.a. rodudtryk samt færdiggørelsen af teorien for permutationsgrupper.

I modsætning til Galois har Jordan en væsentlig mere udbygget teori omkring permutationsgruppebegrebet. Med udgangspunkt i Galois' definition af en gruppe definerer Jordan gruppeegenskaberne primitiv /ikke-primitive og simple/sammensatte grupper samt den alternerende gruppe. Ydermere beviser han entydigheden ved kompositionsfaktorerne i en gruppe ved rent gruppeteoretiske argumenter. I dette tilfælde har Jordan overhovedet ikke nævnt dets forbindelse til ligningsløsningsteori.

Et af de få steder hvor Jordan går et skridt videre i forhold til Galois i retning af gruppebegrebets strukturelle styrke, er i hans isomorfibegreb. Definitionen af isomorfe grupper svarer fuldstændig til den moderne bortset fra, at Jordan's gruppebegreb stadig er knyttet til permutations-grupper. Det eneste som forhindrer Jordan i at definere en abstrakt gruppe er, at han forbigår Galois' abstrakte ide med at betragte gruppebegrebet som et strukturelt redskab og derfor ikke får løsrevet sig fra dets konkrete anvendelser.

Galois og Jordan's fremstillinger af galoisteoriens hovedsætning og begrebsramme repræsenterer i store træk den samme terminologi og udskiller sig kun fra hinanden ved at Jordan opererer med et mere udvidet gruppebegreb.

Jordan's bidrag til den abstrakte algebra var hans teori for permutationsgrupper, som dels var et direkte resultat af hans arbejde med galoisteori og dels et resultat af Serret's forsøg på at på at anvende Galois' gruppebegreb indenfor ligningsløsning - og permutationsteori.

På baggrund af dette vil vi konkludere, at hans indirekte bidrag har været en væsentlig katalysator for formuleringen af den abstrakte algebra.

Galois' direkte bidrag er, som tidligere nævnt i afsnittet hans overordnede mål, nemlig at finde en abstakt begrebsramme for de forskellige områder og metoder i matematik. I modsætning til hans indirekte bidrag er det først muligt at spore hans direkte bidrag omkring formuleringen af det abstrakte gruppebegreb. Grunden til dette er, at der ikke tidligere var basis for en abstrakt begrebsamme. Denne basis blev først dannet efter, man havde erkendt gruppebegrebets anvendelse indenfor de fire discipliner ligningløsningsteori (galoisteori), geometri, talteori og permutationsteori.

Galois' demonstrerer sine gruppeteoretiske ideer ved at anvende dem til at løse et af de største problemer man på denne tid forsøgte at løse.

I modsætning til sine forgængere anvender Galois eksplicit et generelt gruppebegreb, hvis egenskab (egentlig opløsning) repræsenterer egenskaben (løsbarhed) ved en ligning.

Dette er, som han selv nævner det, bare et eksempel på, hvordan hans mål med en abstrakt begrebsramme, kan simplificere og strukturere konkrete problemer i matematik.

Galois' direkte bidrag kan umiddelbart findes i formuleringen af den abstrakte algebra, idet der, for at opfylde Galois' mål, faktisk kræves en "abstrakt algebra" eller noget tilsvarende, f.eks. den moderne mængdelære. Omvendt er grundideen i og formålet med den abstrakte algebra allerede formuleret af Galois i 1830'erne omkring halvtreds år før formuleringen af den abstrakte algebra.

7. Efterskrift.

Vi har gennem vores arbejde med projektet beskæftiget os med to typer kildematerialer. Den ene er karakteriseret ved, at den fremstiller og vurderer de matamatiske udviklingsforløb. Ulempen ved denne type kildemateriale er,at den, i forhold til studiet af det matematiske indhold, giver en ufuldstændig fremstilling. Fordelen er derimod, at man direkte får den historiske sammenhæng præsenteret.

Den anden type kildemateriale er selve originalteksterne, som vi h.h.v. har til rådighed for Galois og Jordan. Her har man direkte mulighed for at studere deres arbejde i detaljer, hvorimod det kræver et omfattende studie af disse, hvis den historiske sammenhæng skal udledes. Vi har så vidt, som det var muligt, brugt begge typer kildemateriale.

I forordet til projektet beskrev vi tre formål, som vi regnede med kunne opfyldes gennem vores projektarbejde.

Det ene formål var selvsagt at vurdere Galois' bidrag til udviklingen af den abstrakte algebra. Det har vi fået et ganske godt indblik i, men det er et indblik, som siger lige så meget om Galois' efterkommere og den abstrakte algebras udvikling.

Det andet formål var, at få et overblik over den abstrakte algebras begrebsramme. Dette formål er kun i en vis udstrækning blevet opfyldt, idet vi hovedsagligt har beskæftiget os med abstrakt algebra knyttet til abstrakt galoisteori. Vi mener dog at have et overblik, som er tilstrækkeligt til, at vi kan orientere os i algebraiske materialer.

Det tredje og sidste formål var, at få erfaring med at arbejde "historisk". Her er det vores oplevelse at vi har været nødt til at drage vores konklusioner udfra tekster, som i forvejen har draget de samme konklusioner blot i en anden sammenhæng. Det største problem for os har været at skelne mellem de forskellige fremstillingers præsentation og fortolkning af det historiske materiale.

8. Litteraturliste.

Bell,E.T.,'The development of mathematics',1945.

Bell,E.T.,'Men of mathematics',1965.

Bourgne,R.,Azra,J.P.,'Ecrits et memoires mathematiques d'Evariste Galois',1962.

Boyer,Carl.B,'A History of mathematics',1968.

Gaal,Lisl,'Classical galois theory',1973.

Jensen,Børge,'Konstruktionen af den regulære syttenkant',1968-69, forelæsningsnote.

Jordan,Camille,'Traite des substitutions et des equations algebriques',1957.

Kiernan,B.Melvin,'The development of galois theory from Lagrange to Artin',Archive for history of exact sciences,Vol.8.

Koppelman,Elaine,'The calculus of operations and the rise of abstrakt algebra',Archive for history of exact sciences,Vol.8.

Kline,Morris,'Mathematical thought from ancient to modern times',1972.

Novy,Lubos,'Origins of modern algebra',1973.

Reed,Jon,Johan Aarnes,'Matematikk i vår tid',1967.

Stewart,Ian,'Galois theory',1984.

Van der Warden,B.L.,'A history of algebra',1985.

Wussing,Hans,'The genesis of the abstrakt group consept',1984.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UD - VIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom". Projektrapport af: Lasse Rasmussen . Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity". Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS". Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller". Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGS - SYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLIN - GER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER". Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "GREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. lo
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.