# TEKST NR 124 1986

OPGAVESAMLING I MATEMATIK

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

OPGAVESAMLING I MATEMATIK

IMFUFA tekst nr. 124/86          214 sider          ISSN 0106-6242

---

## Abstract

Teksten indeholder samtlige opgaver, som er stillet til skriftlig eksamen på matematikoverbygningen på RUC i tiden 1974 - jan. 1986.

Indholdsfortegnelse:

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

<u>Reelle funktioner af en og flere variable</u>.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor korrekt besvarelse af fem opgaver anses for fuldstændig besvarelse af sættet.

mandag, den 10. januar 1977 kl. $o9^{\underline{3o}} - 13^{\underline{3o}}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° Kan konstanterne a,b og c samt funktionen $f:R^2 \sim R$ fastlægges således, at differentialformen

$$\omega = bx(yz)^a dx + bx^2 f(y,z)dy + (xz)^2 y^c dz$$

er exakt?
Angiv i bekræftende fald potentialet til $\omega$.

2° Funktionerne $f,g:R\sim R$ forudsættes to gange differentiable, og funktionen $z:R^2\sim R$ er defineret ved

$$z:(x,y)\sim xf(y) + \frac{1}{y^2}g(x) \quad ; \quad y>o$$

Bestem en partiel differentialligning uafhængig af f og g, der har z som løsning.
Fastlæg funktionerne f og g således, at z tillige er løsning til differentialligningen

$$z''_{xy} - \frac{2z}{xy} = o \quad ; \quad x>o$$

3° Inertimomentet for et legeme D i forhold til z-aksen defineres ved

$$I = \iint_D m(x,y)(x^2+y^2)dxdy$$

hvor m er massefordelingen over D. Beregn da inertimomentet for legemet D beskrevet ved:
D er en kvadratisk plade med kantlængde 1 placeret vinkelret på z-aksen, der tillige rører i pladens ene hjørne. $m(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$



4° En funktion $f:M\sim R$, hvor $M = \{(x,y)\mid xy>-1\}$, er defineret ved

$$f:(x,y)\sim \begin{cases} \frac{1}{y}\ln(1+xy) & y\neq o \\ x & y=o \end{cases}$$

Udregn for $y\neq o$ de partielle afledede af første orden til f, og vis, at f er differentiabel i hele M.
For $n\in N$ er $D_n = \{(x,y)\mid 1<y<n \wedge o<xy<1\}$.
Udregn da integralet

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

Idet $D = \{(x,y)\mid x>o \wedge y>1 \wedge xy<1\}$, skal det undersøges, om integralet

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad \text{er konvergent.}$$

5° Vis, at differentialligningen

(*) $(x-y)+(x+y)y' = o$

ikke vil have en integrerende faktor, som kun afhænger af den ene variabel. Opstil den betingelse som $\mu:R^2\sim R$ må opfylde, hvis den skal være integrerende faktor til (*).
Vis, at funktionen $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ tilfredsstiller denne betingelse.
Løs ved brug heraf (*), således at punktet (1,o) tilhører løsningskurven.

6° En funktion $f:[-\pi,\pi]\sim R$ er en ulige funktion.
Angiv fourierrækken for f og redegør for udseendet af denne række samt for centrale dele af teorien for fourierrækker. Redegørelsen ønskes belyst med eksempler.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor korrekt besvarelse af fem opgaver anses for fuldstændig besvarelse af sættet.

mandag, den 27. juni 1977 kl. o9$^{\underline{oo}}$ - 13$^{\underline{oo}}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.



1° Vis, at integralet

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+(x+y)^4}\,dxdy$$

hvor D er første kvadrant, er konvergent, og udregn integralets værdi.

2° Inden for økonomi arbejdes med forskellige makroproduktionsfunktioner af formen $z=f(x,y)$, hvor $f:R_+^2 \to R_+$. Disse beskriver den samlede produktion z som funktion af landets samlede kapitalapparat x og arbejdsstyrken y.
To af disse typer er

$z = ax^p y^{1-p}$ (Cobb-Douglas typen)

$z = (ax^{-p}+y^{-p})^{-1/p}$ (CES-typen)

hvor a og p er positive konstanter. Vis, at begge typer er løsning til samme partielle differentialligning af første orden. (Det anbefales at betragte lnz).

3° Massetætheden for et område D i xy-planen betegnes $\rho(x,y)$. Tyngdepunktet (a,b) for D beregnes, da af

$$a = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy$$

$$b = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy\,,$$

hvor massen af D bestemmes af $m(D)=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy$.

Beregn da tyngdepunktet af det homogene område D, der begrænses af akserne og en kurve med parameterfremstillingen

$$(x,y) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad o \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

4° Funktionen $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{xy}(e^{xy}-1) & x \neq o \wedge y \neq o \\ 1 & x=o \vee y=o\end{cases}$$

Vis, at f er differentiabel i hele $R^2$

5° Vis, at differentiälligningen

$$(*) \quad (x-y\sqrt{x^2+y^2})y' = y+x\sqrt{x^2+y^2}$$

ikke vil være exakt.

Vis derpå, at funktionen $\varphi:R^2 \to R$

$$\varphi:(x,y) \to \frac{1}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (o,o)$$

vil være integrerende faktor til (*).

Løs differentialligningen, og opskriv (f.ex. ved polære koordinater) den løsningskurve, som går gennem (1,o).

6° Bestem fourierrækken til funktionen $\sin\frac{x}{2}$ i intervallet $[-\pi,\pi]$, og benyt denne række til at beregne

$$\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+2}{(4n+1)(4n+3)}$$



Roskilde Universitetscenter

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

<u>Reelle funktioner af en eller flere variable</u>

Der stilles ialt 6 opgaver.

Eksamen afholdes d. 5.1. kl. 9.3o-13.3o.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet kan beholdes.

## OPGAVE 1.

Vis, at funktionen $f: R^3 \to R$, defineret ved

$$f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$$

er differentiabel i $(0,0,0)$.

Angiv også et punkt, hvori $f$ ikke er differentiabel.

## OPGAVE 2.

Vis, at funktionen $f: R^3 \to R$, defineret ved

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}ax^2+by^2+bz^2+byz+(a+b)x$$

ikke kan have strengt lokalt extremum i $(0,0,0)$ ligegyldigt hvordan $a$ og $b$ er valgt.

## OPGAVE 3.

Vis, at funktionen $f: R_+^2 \to R$, defineret ved

$$f(x,y) = \frac{8}{3}x - \int_0^2 x^{t^2} y^{1-t} dt, \qquad x>0,\ y>0$$

har et stationært punkt i $(1,1)$.



## OPGAVE 4.

Om en $C^1$-afbildning $\underline{f} = (f_1,f_2): R^2 \to R^2$ antages det, at

$$u^2+v^2 = x^2+y^2$$
$$ux+vy = 0,$$

hvis $(u,v) = \underline{f}(x,y)$.

Bestem Jacobimatricen, $\underline{f}'(1,0)$, i begge følgende tilfælde:

a) $\underline{f}(1,0) = (0,1)$

b) $\underline{f}(1,0) = (0,-1)$

OPGAVE 5.

For et givet sæt af konstanter a, b, c og r defineres kurven K som løsningsmængden til ligningssystemet, bestående af de to ligninger:

$$9(x-a)^2+y^2+9z^2 = 2r^2$$
$$x^2+5(y-b)^2+4z^2 = \frac{25}{9}r^2$$

med de tre ubekendte x, y og z.

----------

Vi interesserer os nu for de sæt (a,b,c,r), for hvilke følgende betingelse er opfyldt:

(*) Kurven K har punktet P = (1,0,1) fælles med den kugleoverflade F, som har centrum i (a,b,c) og har radius r.

1. Vis, at (*) er opfyldt, hvis (a,b,c,r) = (2,-2,-1,3). Vis, at der i dette tilfælde endvidere gælder, at kurvetangenten i P ligger i tangentplanen i P for F.

2. Vis, at der til hvert r svarer præcis et sæt (a,b,c) således, at (*) gælder, hvis (a,b,c,r) ligger i en omegn af (2,-2,-1,3). Præcisér selv dette udsagn yderligere.

3. Fortolk resultatet i 2 som et udsagn om beliggenheden af de centre for F, for hvilke (*) er opfyldt.



OPGAVE 6

Vis at følgende fire integraler har samme værdi og bestem denne.

$$\iint_D 2\pi r \sin^2\theta \, dr\, d\theta$$

$$\iint_E 2\pi \frac{y^2}{x^2+y^2} \, dx\, dy$$

$$\iiint_F r \sin^2\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$\iiint_G \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \, dx\, dy\, dz$$

$D = \{(r,\theta) \mid 0 < r \leqq \sin\theta,\ 0 \leqq \theta < 2\pi\}$

$E = \{(x,y) \mid x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leqq \frac{1}{4}\} \setminus \{(0,0)\}$

$F = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 < r \leqq \sin\theta,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$

$G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Det må uden bevis benyttes, at

$\frac{y^2}{x^2+y^2}$ er integrabel i E,

og at

$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ er integrabel i G.

Skriftlig eksamen i reelle funktioner.

TORSDAG DEN 8. JUNI 1978

KL. 9.00 - 13.00

Alle hjælpemidler er tilladt.

Der er ialt 5 opgaver.

Der tillægges hver 25 points, altså ialt 125 points.

Sættet anses for tilfredsstillende besvaret,

hvis der opnås 100 points.



Opgave 1.

Funktionen $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\frac{1}{xy} & \text{for } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

Afgør hvilke af de følgende udsagn a) - e) der er sande.

a: f er differentiabel i (0,0)

b: f er kontinuert i (0,0)

c: f har partielle afledede i (0,0)

d: f har partielle afledede i en omegn af (0,0)

e: f har kontinuerte part. afl. i en omegn af (0,0)

Opgave 2.

a: Vis at $(a,b,q) = (0,2\pi,1)$ er løsning til ligningssystemet

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \sin(2\pi q^t)dt = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \cos(2\pi q^t)dt = 1$$

b: Vis at løsningerne i en omegn af $(0,2\pi,1)$ kan fremstilles ved en parameterfremstilling af formen

$$(a,b,q) = (a,\varphi(a)\ ,\ \psi(a))$$

hvor $\varphi$ og $\psi$ er $C^1$-funktioner defineret i en omegn af 0.

c: Bestem $\varphi'(0)$ og $\psi'(0)$



Opgave 3.

Funktionen $f\colon R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}a^2b^2x^2 + 2c^2xy + (b+c)y^2 + (4a^2-b^2-3c^2)x.$$

Det antages at $f$ har $(0,0)$ som stationært punkt.

Betragt herefter følgende muligheder:

A: f har strengt minimum i (0,0)
B: f har minimum i (0,0), men ikke strengt minimum
C: f har strengt maximum i (0,0)
D: f har maximum i (0,0), men ikke strengt maximum
E: f opfylder hverken A,B,C eller D

1) For hver af de to muligheder A og E ønskes angivet et sæt (a,b,c) for hvilket den pågældende mulighed realiseres.

2) Vis at B indtræffer for $(a,b,c) = (1,1,1)$

3) Med M betegnes mængden af sæt (a,b,c) for hvilke B indtræffer.
Vis at der findes en omegn $\omega$ af (1,1,1) og en kurve K gennem (1,1,1) således at den del af M, som ligger i $\omega$, også ligger på K, dvs. $M\cap\omega \subseteq K$. Der skal ikke tages stilling til om hele kurven kan bruges til at realisere B.

## Opgave 4.

For hvert par $(p,q) \in R^2$ er der givet to ellipsoideoverflader $E_{p,q}$ og $F_{p,q}$. Disse har ligningerne

$$(E_{p,q}:) \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + z^2 = 3$$

$$(F_{p,q}:) \qquad \frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} + z^2 = \frac{21}{4}$$

(Bemærk rækkefølgen af $p^2$ og $q^2$ i nævnerne)

De to ellipsoiders skæring, $E_{p,q} \cap F_{p,q}$ betegnes $C_{p,q}$.

1) Bestem et sæt $(p,q)$ således at $(1,2,1)$ ligger på skæringskurven $C_{p,q}$.

2) Bestem for dette valg af $(p,q)$ en parameterfremstilling for kurvetangenten i $(1,2,1)$

3) Vis at der findes en kurve K med følgende egenskab:

   NÅR $(p,q)$ LIGGER PÅ K VIL PUNKTET $P_r = (r^2,2r,r)$ LIGGE PÅ $C_{p,q}$.

4) Bestem tangenten til K i et punkt efter eget valg



## Opgave 5.

I et x,z-koordinatsystem er der anbragt to ellipser $E_1$ og $E_2$, som i polære koordinater har ligningerne:

$$E_1: \qquad r = \frac{p_1}{1 + e\cos\theta}$$

$$E_2: \qquad r = \frac{p_2}{1 + e\cos\theta},$$

jfr. fig. 1, 2 og 3.

Med D betegnes den skraverede mængde på fig. 4.
Den udgøres af det område, som ligger mellem de to ellipser og mellem linjerne OA og OB, der danner vinklerne henholdsvis

$\alpha$ og $\beta$ med x-axen, idet der skal gælde $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Med H betegnes den mængde, som fremgår ved en rotation af D om z-axen.

Bestem $\displaystyle\int_H \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$.

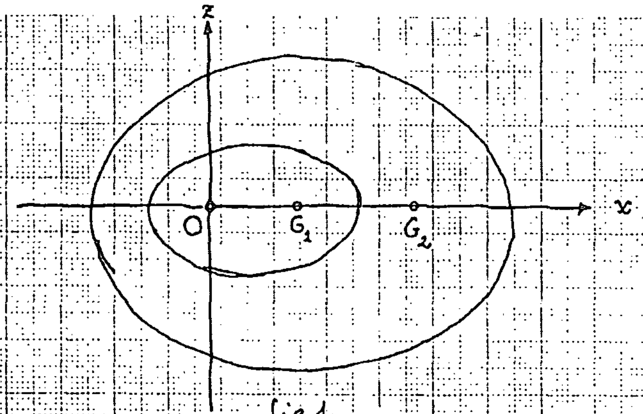



fig 1

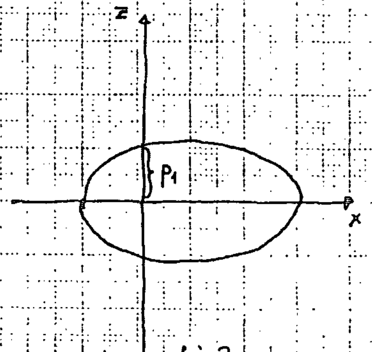



fig 2

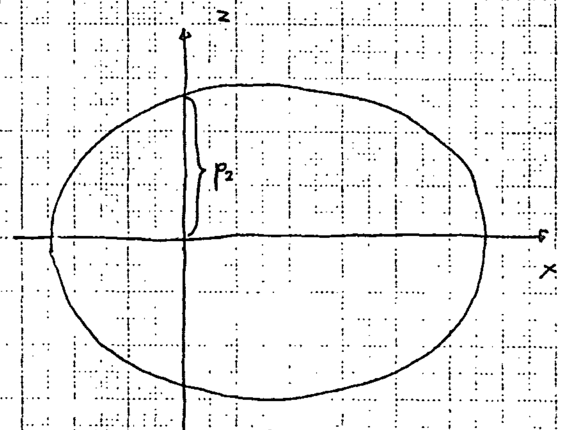



fig 3

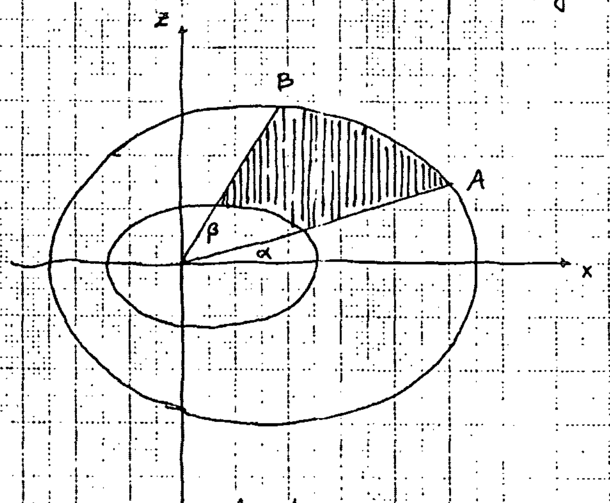



fig 4



Skriftlig prøve i MATEMATIK,

emnekredsen "reelle funktioner

af en eller flere variable",

onsdag den 6. juni 1979, kl. 10 - 14,

Opgavesættet består af fem opgaver. Opgavesættet regnes for fuldstændigt besvaret, dersom fire af de fem opgaver er korrekt besvaret.

Ved prøven er alle hjælpemidler tilladt.

## OPGAVE NR. 1.

Lad $f(x,y) = \int_0^\infty (1 - e^{-t/x})\, e^{-t/y} \frac{1}{t}\, dt$ , $x > 0$, $y > 0$.

a) Gør rede for, at f har partielle afledede med hensyn til x og y og at

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{-y}{x(x+y)} \, ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{x+y} \, .$$

Indfør nye variable $u = \frac{x+y}{x}$ og $v = x$ .

b) Bestem den mængde som $(u,v)$ gennemløber, når $(x,y)$ gennemløber $]0, \infty[^2$ .
Udtryk x og y ved u og v .

c) Vis at de partielle afledede af funktionen $(u,v) \mapsto f(x,y)$ er henholdsvis $\frac{1}{u}$ og 0.

d) Slut af c) at f må være af formen

$$f(x,y) = \ln u + \text{konstant} = \ln \frac{x+y}{x} + \text{konstant}.$$

Vis endelig (f.eks. ved at benytte uligheden $1-e^{-a} \leqq a$ som gælder for alle a) at $f(x,y) \to 0$ for $x \to \infty$ , y fast, og vis derved at $f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x}$ .



## OPGAVE NR. 2.

Betragt funktionen $f(x,y) = xy - \sin \frac{2-y}{2x}$ , defineret for $x \neq 0$.
Indfør videre en mængde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| \leqq 1 \, , \quad x > 2^{-\frac{1}{2}} \right\} .$$

a) Gør rede for, at når $x \neq 0$ så er $f(x,\frac{1}{x}) \geqq 0$ og $f(x,-\frac{1}{x}) \leqq 0$. Benyt dette til at vise, at til ethvert $x > 2^{-\frac{1}{2}}$ findes mindst et y således at $(x,y) \in M$ og $f(x,y)=0$.

b) Vis at funktionen $y \mapsto f(x,y)$, $|y| \leqq \frac{1}{x}$ , er strengt voksende, for ethvert $x > 2^{-\frac{1}{2}}$.

c) Gør rede for, at betingelserne

$$f(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in M$$

entydigt fastlægger y som en differentiabel funktion af x, og udtryk den afledede af denne funktion ved almindeligt kendte funktioner af x og y (det bliver ikke noget "pænt").

## OPGAVE NR. 3.

Bestem den største og den mindste værdi af $x^2+y^2$, når x og y er reelle tal som opfylder

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4 \, .$$

OPGAVE NR. 4.

Lad $A(u)$ betegne arealet af figuren $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\leq u\}$, $u>0$, hvor $g(x,y) = |x| + 4|y|$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

a) Beregn $A(u)$, og vis at $A'(u) = u$.

b) Udregn hvert af integralerne

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(g(x,y))\,dxdy \quad \text{og}$$

$$\int_0^{\infty} f(u)\,A'(u)\,du \quad \left( = \int_0^{\infty} f(u)\,u\,du \right)$$

for nedenstående to valg af funktionen $f\colon [0,+\infty[\ \to\ [0,+\infty[$

$1^\circ$. $f(u) = e^{-u}$.

$2^\circ$. $f(u) = \begin{cases} u^2 & \text{for } 0\leq u\leq 1 \\ 0 & \text{for } u>1 . \end{cases}$



OPGAVE NR. 5.

I det følgende betegner $c$ en positiv konstant. Lad $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<x\}$.

Sæt

$$u = 1 - e^{-c(x-y)}$$
$$v = 1 - e^{-c(x+y)} .$$

a) Gør rede for at der således defineres en bijektiv afbildning $(x,y)\mapsto(u,v)$, $(x,y)\in D$.
Hvad er billedmængden ?
Bestem den totale afledede af afbildningen.
Vis at funktionaldeterminanten er $2c^2 e^{-2cx}$.

b) Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_D (1-e^{-c(x+y)})^4\,(1-e^{-c(x-y)})^2\,e^{-2cx}\,dxdy .$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en og flere variable

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 6. juni 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.



1. Bestem konstanterne $a,b \in R$ således, at

$$\omega = (-2ax^3+axy+y^b)dx+(axy+x^b)dy$$

er exakt.
Beregn derpå potentialet f i punktet (x,y), når $f(1,1)=o$.

2. Bestem talværdien af integralet

$$\int_o^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \qquad o<a<b.$$

ved at udregne integralet

$$\iint_D x^y dxdy$$

hvor $D = \{(x,y) \in R^2 | o<x<1 \wedge a<y<b\}$

3. Fastlæg funktionen $f:R_+ \rightarrow R$ således, at funktionen u givet ved

$$u(x,t) = f(t)e^{-x^2/4t}$$

opfylder varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4. Vis, at afbildningen $f:R^2 \rightarrow R$ defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (o,o) \\ o & (x,y)=(o,o) \end{cases}$$

ikke er kontinuert i (o,o).

(opgave 4 fortsættes)

Vis, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ eksisterer for alle $(x,y)\in R^2$, samt at f for alle $(x,y)\in R^2$ opfylder Laplace's ligning

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

5. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x\cos y\, dx + (1+x^2)\sin y\, dy = 0$$

6. Bestem rumfanget af den punktmængde i $R^3$ som bestemmes ved

$$(x,y)\in D\ , \quad 0\leqq z\leqq \frac{1}{x^2(x^2-y^2)}$$

og $D = \{(x,y)\in R^2 \mid x>0 \wedge x^2-y^2\geqq 1\}$.



# OPGAVER TIL SKRIFTLIG PRØVE I MATEMATIK

(Reelle funktioner af en eller flere variable)

3. JANUAR 1980, KL. 10-14,

Opgavesættet består af fem opgaver. Besvarelsen regnes for fuldstændig, dersom fire af de fem opgaver er korrekt besvarede.

## Opgave 1.

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y).$$

1°. Vis at funktionaldeterminanten for $f$ er $e^{2x}$. Er $f$ bijektiv?

2°. Lad $T$ betegne trekanten i $(x,y)$-planen med hjørnerne $(-2,-1)$, $(2,-1)$ og $(2,1)$. Bestem arealet af billedet $f(T)$ af $T$ ved afbildningen $f$.

---

## Opgave 2.

Udregn integralet

$$\int_0^{+\infty} \int_{1+y^{3/2}}^{+\infty} y^2 (x - y^{3/2})^{-7/4} \exp(-y^3)\, dx\, dy.$$

---



## Opgave 3.

Betragt den kontinuerte funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} & \text{for } x \text{ og } y \text{ begge forskellige fra } 0, \\ 1 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1°. Vis at $f$ har partielle afledede $f'_x$ og $f'_y$ i ethvert punkt. Angiv $f'_x$ og $f'_y$, og gør rede for, at de er kontinuerte.

2°. Gør rede for, at i en omegn af $(x,y) = (1,2)$ fastlægger relationen

$$f(x,y) = \frac{e^2-1}{2}$$

entydigt $y$ som funktion af $x$, og angiv $\frac{dy}{dx}$.

---

## Opgave 4.

Bestem lokale og globale ekstremumspunkter på enhedscirkelskiven $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ for funktionen

$$f(x,y) = \exp\left(-\left(x^2 - \frac{xy}{4} + y^2\right)^3\right) .$$

---

## Opgave 5.

Lad P betegne mængden

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z = 1\} .$$

Bestem maksimums- og minimumspunkter i P for funktionen

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx .$$

---



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 4. juni 1980 kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y)=2(1-xy)^2+x^2+y^2$$

Undersøg, om f har lokale ekstrema.

Bestem derpå største- og mindste værdi for f på mængden

$$D = \{(x,y) \mid |x| \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge |xy| \leq 2\}$$

2. Bestem den mængde $D \subseteq R^2$, hvor dobbeltintegralet

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy \qquad \alpha>1$$

vil antage sin største værdi. Udregn integralet over denne mængde D og fastlæg $\alpha$ således, at $I = 4\Pi$

3. Vis, at funktionen $\varphi:R^2\setminus\{(o,o)\} \to R$ defineret ved

$$\varphi(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

vil have en grænseværdi a for $(x,y)\to(o,o)$.
Suppleres funktionen med $\varphi(o,o)=a$, vis da, at $\varphi$ er kontinuert på hele $R^2$.
Afgør tillige, om $\varphi$ er differentiabel på hele $R^2$.
[Det forudsættes bekendt, at

$$\ln(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3 - \ldots . \text{ for } |z|<1].$$

(opgaven fortsættes)



(opgave 3 fortsat)

Gør endelig rede for, at relationen

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln 3$$

i en omegn af $(x,y)=(1,1)$ entydigt fastlægger y som funktion af x, og bestem $y'(x)$ (udtrykt ved x og y).

4. Beregn rumfanget af legemet

$$\left\{(x,y,z) \mid 1<xy<3 \wedge 1<x<2 \wedge 0<z< \frac{x^3y}{(x^2+xy-1)^2}\right\}$$

5. Idet funktionen $g:R^3 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y,z) = -xy\sin(\tfrac{\pi}{2}z)+z\sin(\tfrac{\pi}{2}(x+y))+x^2+\tfrac{1}{4}y^2+1$$

skal det vises, at der ved $g(x,y,z)=o$ i en omegn af $(1,2,1)$ er defineret en funktion $z:(x,y) \to z(x,y)$.
Undersøg, om z har lokalt ekstremum i punktet $(1,2)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 8. januar 1981 kl. $o9^{\underline{oo}}$ - $13^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1° En funktion $f:R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = 4 \frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^5}$$

Redegør for, at f vil have såvel en største - som en mindste værdi, og beregn disse værdier. (I bilaget er skitseret den del af funktionens graf, som afbildes af $[-1,1]\times[-1,1]$)

2° En mængde M i $R^3$ er beskrevet ved, at

$$-x \leq y \leq x$$

$$o \leq z \leq (\alpha-1) \frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha>1$$

Med $V(\alpha)$ betegnes volumenet af M.

a) Redegør for, at $V(\alpha)$ eksisterer for $\alpha>2$.

b) Vis, at man for $\alpha>2$ får, at

$$V(\alpha) = \frac{1}{2(\alpha-2)}$$

3° En funktion $\varphi:R^2 \to R$ er defineret ved

$$\varphi(x,y) = (1+x^2)\sinh y - x^2 \mathrm{tgh} y - \sinh x$$

a) Redegør for, at

$\varphi(x,x)>o$ og $\varphi(x,-x)<o$, når $x\in R_+$

samt, at

$\varphi(x,x)<o$ og $\varphi(x,-x)>o$, når $x\in R_-$

b) Vis, at afbildningen $y \mapsto \varphi(x,y)$ for hvert x vil være strengt voksende.

(opgaven fortsættes...)

c) Redegør på baggrund af a) og b) for, at der ved relationen

$$\varphi(x,y) = o$$

for ethvert x entydigt fastlægges en differentiabel funktion y(x)

d) Udregn til slut y(o), y'(o) og y"(o).
(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner)

4° Et parameterskift $(u,v) = \Psi(x,y)$ er givet ved

$$\begin{aligned} u &= e^x \cosh y \\ v &= e^x \sinh y \end{aligned} \qquad (x,y) \in R^2$$

a) Gør rede for, at $\Psi$ er injektiv og bestem billedmængden ved $\Psi$.

b) Udregn derpå funktionaldeterminanten for $\Psi$ samt dobbeltintegralet

$$\iint_{R^2} (1+e^x \cosh y)^{-3} e^{2x} dxdy$$

(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner).

5° En funktion $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sinh(xy) & x \neq o \\ y & x = o \end{cases}$$

a) Vis, at f er kontinuert på hele $R^2$.

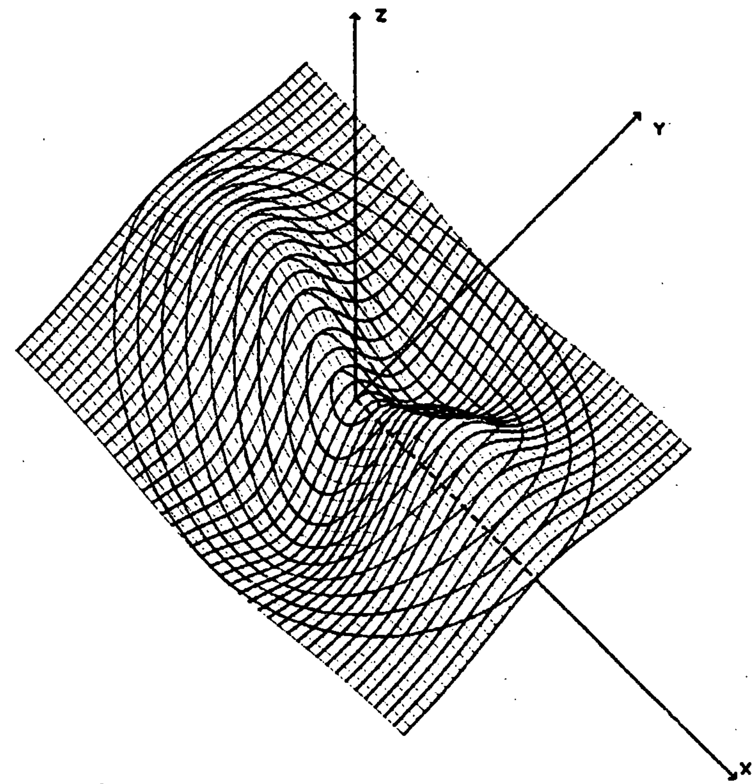
b) Redegør for, at

$$f'_x(o,y) = o \quad \text{og} \quad f''_{xx}(o,y) = \frac{1}{3}y^3$$

og for, at f er differentiabel på hele $R^2$.
(I bilaget findes definitioner på de hyperbolske funktioner).








$$f(x,y) = 4\,\frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^5}$$

Om de hyperbolske funktioner kan oplyses følgende:

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots..$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots..$$

$$\mathrm{tgh}\, z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 3. juni 1981 kl. $09^{\underline{00}}$ - $13^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1° En funktion $\varphi: R^2 \sim R$ er defineret ved

$$\varphi(x,y) = (x+b)(x+ay)^3+3a^2(y-1)^2-27cxy$$

hvor $(a,b,c) \in R^3$.

a) Fastlæg talsættet $(a,b,c)$, således at punktet $(0,1)$ er stationært punkt for $\varphi$.

b) Bestem samtlige talsæt $(a,b,c)$ således, at punktet $(0,1)$ tillige er strengt lokalt minimum for $\varphi$.

2° Bestem rumfanget af den mængde i $R^3_+$, som er fastlagt ved

$$(x,y) \in D \wedge o \leqq z \leqq x^4-y^4$$

hvor

$$D = \{(x,y) \in R^2_+ \mid 1<x^2-y^2<4 \wedge \sqrt{17}<x^2+y^2<5\}$$

3° En afbildning $f: R^3 \sim R$ er givet ved

$$f(x,y,z) = z^3-x^3+3xy^2-3yz^2-6.$$

a) Fastlæg samtlige punkter $(a,b,c)$, hvor der ved relationen

$$f(x,y,z) = o$$

i en omegn af $(a,b,c)$ entydigt er fastlagt en funktion

$$z = \psi(x,y).$$

b) Bestem derpå de punkter $(a,b,c)$, som tillige opfylder

$$z'_x(a,b) = 1 \quad \text{og} \quad z'_y(a,b) = 1$$

c) Udregn med de fundne værdier af a,b og c

$$z''_{yy}(a,b).$$

4° Idet $K = ]0,1[\times]0,1[$ skal følgende integraler beregnes

$$I_1 = \iint_K x(1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$$

$$I_2 = \iint_K (1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$$

5° En funktion $g:R^2 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (o,o) \\ o & (x,y)=(o,o) \end{cases}$$

a) Vis, at g er kontinuert og differentiabel overalt i $R^2$.

b) Vis videre, at

$$g'_x(o,y) = 2y \quad \text{og} \quad g'_y(x,o) = \tfrac{1}{2}x$$

samt

$$g''_{yx}(o,o) \neq g''_{xy}(o,o).$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
Funktioner af en eller flere reelle variable.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 5. marts 1982

kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = (4-x^2-y^2)e^{-x-y}$$

a) Bestem de stationære punkter for f.

b) Afgør derpå om f vil have lokale ekstrema.

2. En afbildning $g:R^2 \to R$ er defineret ved

$$g(x,y) = 3y-2x-1+\sin(x+y)$$

a) Vis, at

$$g(x,y) \leqq o \quad \text{når} \quad y = \frac{2}{3}x$$

og, at

$$g(x,y) \geqq o \quad \text{når} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

b) Vis derpå, at der ved relationen

$$g(x,y) = o$$

entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y = \psi(x)$.

c) Udregn $\psi'(x)$ (udtrykt ved x og y) samt bestem værdimængden for $\psi'$.

d) Vis endeligt, at $\psi$ vil være en bijektiv afbildning af R på R.

3. En mængde $K \subseteq R^2$ er defineret ved

$$K = \{(x,y) \mid x>o \wedge -x<y<x\}$$

og en funktion $k:K \to R$ er defineret ved, at

(opgaven fortsættes)



$$k(x,y) = \int_o^\infty (e^{-(x-y)t} - e^{-(x+y)t})\frac{\sin t}{t}dt$$

a) Vis, at

$$k(x,o) = o \quad \text{samt at}$$

$$k'_x(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+1} - \frac{1}{(x-y)^2+1}$$

$$k'_y(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+1} + \frac{1}{(x-y)^2+1}$$

Der indføres nu de nye variable

$$u = x+y \quad \text{og} \quad v = x-y$$

som overfører K i $R_+^2$

b) Vis, at funktionen, hvorved

$$(u,v) \to k(x,y)$$

har de partielle afledede

$$\frac{1}{u^2+1} \quad \text{og} \quad \frac{-1}{v^2+1}$$

c) Benyt dette til at vise, at

$$k(x,y) = \text{Arctg}u - \text{Arctg}v + c$$

$$= \text{Arctg}\frac{u-v}{1+uv} + c$$

$$= \text{Arctg}\frac{2y}{1+x^2-y^2} + c$$

samt, at c = o.

I opgaverne 4 og 5 benyttes punktmængden

$$H = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y \geqq o\}$$

samt funktionen $\varphi:H \to R$ defineret ved

$$\varphi(x,y) = \frac{xy(x+y)}{(x+y)^5 + \frac{81}{16}}$$

4. Et område $D_n \subset H$ afgrænses af linierne

$$x+y = n \quad , \; x = 0 \quad , \; y = 0$$

samt $\quad x+y = 2n$

Udregn da integralet

$$I_n = \iint_{D_n} \varphi(x,y)\,dxdy$$

og vis, at

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{6} \ln 2$$

5. Undersøg om funktionen $\varphi$ vil have største- og mindsteværdi på H, og bestem i givet fald værdierne.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
Funktioner af en eller flere reelle variable.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 10. januar 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = x+y+(y-x^2)^3.$$

   a) Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne $y=x^2$ og $y=-x$

   b) Vis, at funktionen $y \to f(x,y)$ (dvs for fast x) er monotont voksende.

   c) Vis på denne baggrund, at der ved relationen

   $$f(x,y) = 0$$

   entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y=\psi(x)$.

   d) Udregn $\psi(1)$, $\psi'(1)$ og $\psi''(1)$.

2. En funktion $g:R^2 \to R$, som er to gange kontinuert, differentiabel, kaldes <u>harmonisk</u>, såfremt

$$g''_{xx} + g''_{yy} = 0$$

Bestem de funktioner $\psi:R \to R$ som sikrer, at

$$g(x,y) = \psi(y/x), \quad x>0$$

er en harmonisk funktion.

3. En funktion $\varphi:R^2 \to R$ er givet ved

$$\varphi(x,y) = (17-x^2-y^2)(xy-4)$$

   a) Bestem samtlige stationære punkter for $\varphi$

   b) Fastlæg derpå de lokale ekstrema for $\varphi$ .

4. Idet mængden

$$C_{17} = \{(x,y) \in R_+^2 \mid x^2+y^2 \leq 17\}$$

skal man fastlægge den mængde $C \subset C_{17}$, hvor integralet ($\varphi$ er defineret i opgave 3)

$$\iint_C \varphi(x,y)\,dxdy$$

vil antage sin største værdi. Udregn derpå denne værdi.



5. Bestem det talsæt $(a,b)$, hvor integralet

$$\int_0^1 \left(at^3+bt - 3\left(1-\frac{3}{4}t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 dt$$

antager sin mindste værdi.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
Funktioner af en eller flere reelle variable.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 10. januar 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = x+y+(y-x^2)^3.$$

a) Undersøg fortegnsvariationen for f langs kurverne $y=x^2$ og $y=-x$

b) Vis, at funktionen $y \to f(x,y)$ (dvs for fast x) er monotont voksende.

c) Vis på denne baggrund, at der ved relationen
$$f(x,y) = 0$$
entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y=\psi(x)$.

d) Udregn $\psi(1)$, $\psi'(1)$ og $\psi''(1)$.

2. En funktion $g:R^2 \to R$, som er to gange kontinuert, differentiabel, kaldes harmonisk, såfremt

$$g''_{xx} + g''_{yy} = 0$$

Bestem de funktioner $\psi:R \to R$ som sikrer, at

$$g(x,y) = \psi(y/x), \quad x>0$$

er en harmonisk funktion.

3. En funktion $\varphi:R^2 \to R$ er givet ved

$$\varphi(x,y) = (17-x^2-y^2)(xy-4)$$

a) Bestem samtlige stationære punkter for $\varphi$

b) Fastlæg derpå de lokale ekstrema for $\varphi$.

4. Idet mængden

$$C_{17} = \{(x,y)\in R^2_+ \mid x^2+y^2 \le 17\}$$

skal man fastlægge den mængde $C \subset C_{17}$, hvor integralet ($\varphi$ er defineret i opgave 3)

$$\iint_C \varphi(x,y)\,dxdy$$

vil antage sin største værdi.
Udregn derpå denne værdi.

5. En differentialform $\omega$ er defineret ved

$$\omega = h(x,y)dx + \frac{x^3}{(x^2+a^2y^2)^2}dy$$

hvor $a\in R$ og hvor h er en vilkårlig kontinuert differentiabel funktion for $(x,y)\neq(o,o)$.

Fastlæg en funktion h, således at differentialformen $\omega$ bliver exakt, og udregn derpå integralet

$$\int_c \omega$$

hvor c er en vilkårlig lukket kurve omkring (o,o).



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Funktioner af en eller flere reelle variable

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

tirsdag, den 7. juni 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f : R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3 + {}^1/2} .$$

Vis, at $f$ vil have såvel en største - som en mindsteværdi på $R^2$ og beregn disse værdier.

2. Beregn rumfanget af mængden

$$\{(x,y,z) \mid x>0 \wedge x^2-y^2 > 1 \wedge 0 < z < \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}\}$$

3. To funktioner $G,g : R_+^2 \to R$ er defineret ved

$$G(x,y) = \int_0^\infty \frac{dt}{x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t}$$

og

$$g(x,y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t)^2}$$

Vis, at $G(1,1) = \frac{\pi}{4}$ og $g(1,1) = \frac{1}{2}$ samt, at relationen

$$xG_y'(x,y) - yG_x'(x,y) = 2xyg(x,y)$$

er opfyldt i hele $R_+^2$.

Udregn på denne baggrund integralet (dvs $g(x,y)$)

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2\cosh^2 t + y^2\sinh^2 t)^2} .$$



4. En funktion $\Phi : R^3 \to R$ er defineret ved

$$\Phi(x,y,z) = z^3 + 6x^2z - 8y^3 + 24xy + 6z .$$

a) Vis, at der for alle $x \in R$ gælder, at $\Phi(x,y,2y) \geq 0$ og $\Phi(x,y,-2y) < 0$ for $y>0$ og at

$\Phi(x,y,2y) \leq 0$ og $\Phi(x,y,-2y) > 0$ for $y<0$.

b) Benyt dette samt funktionen $\Phi_z'(x,y,z)$ til at vise, at der ved

$$\Phi(x,y,z) = 0$$

overalt i $R^2$ er defineret en funktion $z = z(x,y)$.

c) Undersøg, om $z$ vil have lokale ekstrema.

5. En differentialform $\omega$ er defineret ved

$$\omega = 2 \cdot \frac{-2xydx + (x^2-y^2-1)dy}{(x^2+y^2-1)^2 + 4y^2}$$

a) Fastlæg den mængde $P \subset R^2$, hvor $\omega$ ikke er defineret.

b) Vis dernæst, at $\omega$ er exakt på $R^2 \setminus P$ .

c) Vis endelig, at funktion $h : C \to R$, hvor $C \subset R^2$, givet ved

$$h(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

for passende valg af $C$, vil være en potentialfunktion til $\omega$ .

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelse skal anses for fuldstændig.

fredag den 6. januar 1984, kl. 10.00 - 14.00.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. En funktion $g:R^2 \to R$ er for alle $a,b \in R$ defineret ved, at

$$g(x,y) = (y^3-ax)^2-b(y-x)^3.$$

a) Fastlæg de talsæt $(a,b)$, hvor $(x,y)=(2,1)$ bliver et stationært punkt for $g$.

b) Undersøg for hvert af de fundne talsæt $(a,b)$, om punktet $(x,y) = (2,1)$ er (svagt eller stærkt) lokalt ekstremum for $g$.

2. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved, at

$$f(x,y) = (y^3+x)^3+2(y-x).$$

a) Undersøg fortegnsvariationen for $f$ langs kurverne

$$x = y \quad \text{og} \quad x = -y^3.$$

b) Benyt dette samt funktionen $f'_y$ til at godtgøre, at der ved relationen

$$f(x,y) = 0$$

overalt i $R$ er defineret en differentiabel funktion $y = \varphi(x)$.

c) Vis, at punktet $(x,y) = (-3,1)$ tilhører grafen for $\varphi$, og udregn tillige $\varphi'(-3)$ og $\varphi''(-3)$.

3. Funktionen $f:R^2 \to R$ er som defineret i opgave 2. Fastlæg da rumfanget af det område, der afgrænses af

$$x>0 \quad , \quad x^{1/3} < y < (2-x)^{1/3}$$

$$0<z<f(x,y).$$

4. Idet $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$, $a \in R$

betegner $C$ komplementærmængden til $D$ i $R^2$.
Fra ethvert punkt $(x,y) \in C$ trækkes de to tangenter til randen af $D$. Disse to tangenter danner vinklen $2\varphi$ med hinanden, [hvor $\varphi$ jo afhænger af punktet $(x,y)$].
Vis da, rumfanget af mængden

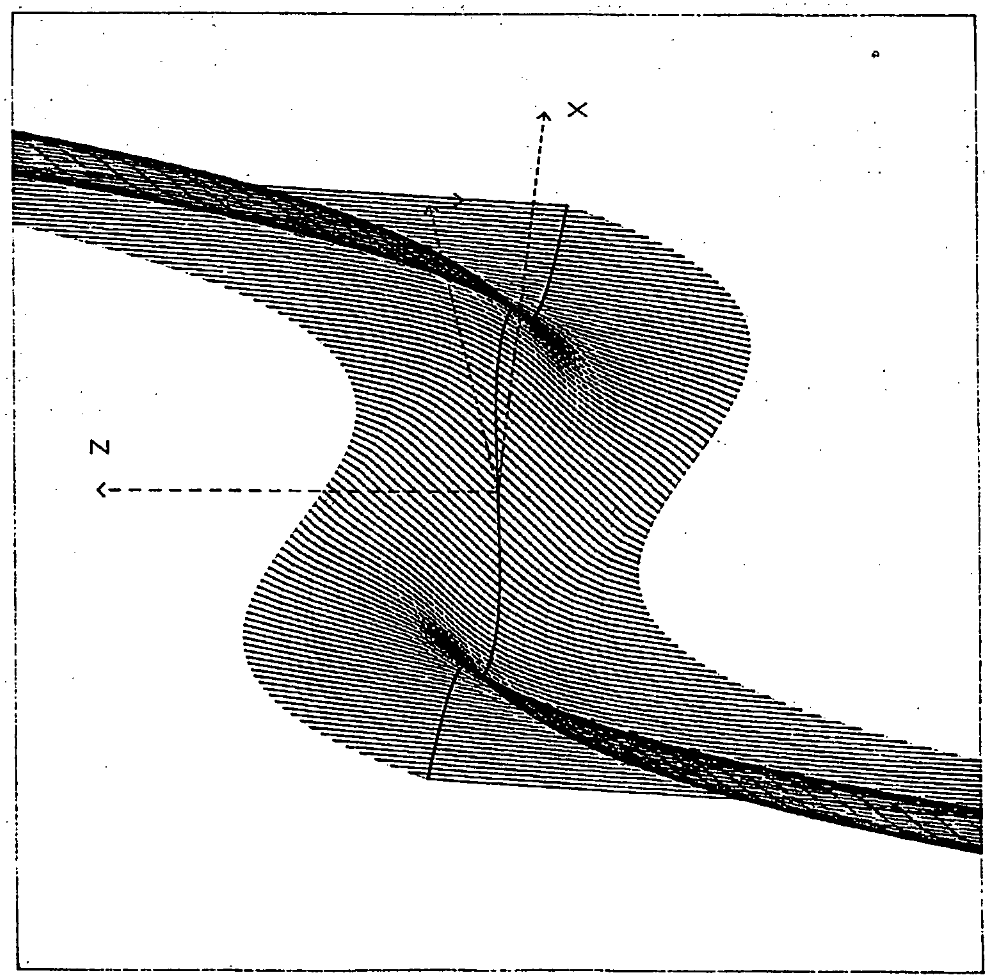
$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in C \wedge 0<z<\operatorname{tg}\varphi - \varphi\}$$

eksisterer, og angiv rumfangets værdi.



Bilag til opgave 2

Dette viser den del af funktionen f's graf, der har definitionsmængde $[-3,3] \times [-1,1]$.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

fredag den 17. februar 1984, kl. 10.00 - 14.00.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Funktionen $\varphi: R^3 \to R$ er defineret ved

$$\varphi(x,y,z)=3xy^2z^3+\frac{4x}{z}-3yz^2+2x^3y^3+2.$$

Vis, at der ved relationen $\varphi(x,y,z)=o$ i en omegn af punktet $(-1,-1,1)$ er defineret en differentiabel funktion $z=\psi(x,y)$.

Udregn dernæst $\psi'_x(-1,-1)$ og $\psi''_{xy}(-1,-1)$

2. Funktionen $f: R^2 \to R$ er for alle $a,b \in R$ fastlagt ved

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}(ax+2y)-\frac{1}{2}x^2+bxy-\frac{5}{4}y^2.$$

Fastlæg de talsæt $(a,b)$, hvor punktet $(x,y)=(1,1)$ bliver et stationært punkt.
Undersøg dernæst for hvert af de fundne talsæt $(a,b)$, om punktet $(x,y)=(1,1)$ vil være lokalt ekstremum for f.

3. Et område G i $R^2$ er givet ved

$$G=\{(x,y)\mid x^2+xy+y^2\leq 4\},$$

og en funktion $g: R^2 \to R$ er fastlagt ved

$$g(x,y) = x^3-y^3-3x+3y.$$

Beregn største - og mindsteværdi af g på området G.

4. Et område D i $R^2_+$ er fastlagt ved, at

$$D=\{(x,y)\mid xy<2 \wedge x^2-y^2>1\}.$$

Bestem rumfanget af den figur, som er beskrevet ved

$$(x,y)\in D \text{ og } o<z<xy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Et område $C \subset R^3$ er fastlagt ved, at

$$C = \{(x,y,z) \mid z > \sqrt{2x^2+y^2}\}$$

og en funktion $f: C \to R$ ved, at

$$f(x,y,z) = \ln(z^2-y^2-2x^2) - \tfrac{1}{2}z^3 - 2x^2y .$$

Vis, at der ved relationen

$$f(x,y,z) = -2$$

i en omegn af punktet $(1,-1,2)$ er defineret en kontinuert og to gange differentiabel funktion $z:(x,y) \to z(x,y)$. Vis, at punktet $(1,-1)$ er et lokalt maksimum for $z$.

2. Idet $D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>1\}$, vis da, at integralet

$$\iint_D \frac{2e^{-x}}{y^3e^x+y}\,dxdy$$

er konvergent med værdien $2\ln 2-1$.

3. Bestem største- og mindsteværdi af funktionen, hvorved

$$(x,y) \to x^4+y^4-(x-y)^2,$$

på mængden

$$\{(x,y) \mid 3x^2+4xy+3y^2 \leq 10\}.$$

4. Idet

$$T = \{(x,y) \mid 0<y<x<1\}$$

skal rumfanget beregnes af mængden

$$\left\{(x,y,z) \mid (x,y)\in T \wedge 0<z< \frac{x^3y^3(x-y)}{(1+x^2y+2xy^2)^2}\right\}$$

[Det anbefales at benytte transformationen $u=x^2y$, $v=xy^2$ og at vise, at $T$ herved afbildes i $T'=\{(u,v) \mid 0<v<u<1\}$] .

5. Vis, at talsættet $(t,x,y) = (-1,1,-1)$ er en løsning til ligningssystemet

$$tx - (t^2+1)y - x^3 = 0$$

$$(t^2-1)x + ty - y^3 = 2$$

Vis derpå, at løsningerne til ligningssystemet for alle $t \leq -\sqrt{3}/2$ kan skrives på formen

$$(t,\varphi(t), \psi(t))$$

hvor $\varphi,\psi: ]-\infty,-\sqrt{3}/2]\to R$ er differentiable funktioner.
Bestem til slut en ligning for tangenten til løsningskurven i punktet $(-1,1,-1)$.



SKRIFTLIG EKSAMEN I <u>FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE</u> 4.6.84
ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

OPGAVE 1

Et område $C\subset R^3$ er fastlagt ved, at

$$C = \{(x,y,z): z > \sqrt{2x^2+y^2}\}$$

og en funktion $f: C\to R$ ved, at

$$f(x,y,z) = \ln(z^2-y^2-2x^2) - \tfrac{1}{2}z^3 - 2x^2y$$

Vis, at der ved ligningen

$$f(x,y,z) = -2$$

i en omegn af $(1,-1,2)$ er defineret en to gange differentiabel funktion $z:(x,y)\to z(x,y)$ . Vis, at punktet $(1,-1)$ er et stationært punkt for denne funktion, og undersøg om den har lokalt extremum i $(1,-1)$.

OPGAVE 2

Lad $f$ være den funktion på $R^3$, som er defineret ved

$$f(x,y,z) = x\sqrt{|y^4-z^4|}$$

Bestem de mængder, hvori $f$ henholdsvis

a: er kontinuert

b: er differentiabel

c: har kontinuerte partielle afledede

OPGAVE 3

Bevis, at ligningen

$$8x^3 - \sin(\pi x) = 0$$

har løsningsmængden $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$
Bevis dernæst, at ligningen

$$8x^3 - \sin(\pi x) = a$$

for ethvert $a\in R$ har højst tre løsninger.
Vis, at der findes en konstant $b>0$ således at ligningen

$$(*) \qquad 8x^3 - \sin(\pi x) - 8y^3 - \sin(\pi y) = 0$$

for ethvert $y$, som opfylder betingelsen $|y| < b$, har netop tre løsninger (med $x$ som den ubekendte).

Angiv det approximerende andengradspolynomium, med $0$ som udgangspunkt, for en funktion $\psi$, om hvilken det gælder, at $(\psi(y),y)$ er løsning til $(*)$ for ethvert $y\in ]-b,b[$.

OPGAVE 4

For ethvert parametersæt $(a,b)\in R^2$ er der givet et dynamisk system på $R^2$ med frembringerfunktionen $f_{a,b}$, som er givet ved, at for $(x,y)\in R^2$ er

$$f_{a,b}(x,y) = (a-x^2+y,\ bx).$$

I skal først undersøge tilfældet $(a,b)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$. Lad $f$ være betegnelse for $f_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$.

Find fixpunkterne for $f$, og bevis, at de (begge) udgør ustabile ligevægtstilstande.

Find så fixpunkterne for $f\circ f$, altså de tilstande, som er periodiske med perioden 2. Det kan betale sig at bemærke, at fixpunkterne for $f$ også er fixpunkter for $f\circ f$.

---

Det er ikke en forudsætning for, at sættet anses for fuldstændigt besvaret, at følgende del af opgave 4 regnes korrekt.

Undersøg om de fundne fixpunkter for $f\circ f$ er stabile ligevægtstilstande for det af $f\circ f$ frembragte dynamiske system.

Vis, at der findes en omegn $\mathcal{U}$ af $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, således, at for alle $(a,b)\in\mathcal{U}$ har $f_{a,b}\circ f_{a,b}$ det samme antal fixpunkter.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

den 15. august kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet mængden $D$ er første kvadrant, skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{1+(x+y)^8}dxdy$$

er konvergent. Udregn tillige integralets værdi.

2. Fastlæg såvel største - som mindsteværdi for funktionen $g:R^2 \to R$ givet ved

$$g(x,y) = (3-xy)^2+x^2+y^2$$

på cirkelskiven

$$\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 10\}$$

3. For alle værdier af $a \in R$ er fastlagt ligningen

$$ax^2z^2-4ay^2z-\frac{1}{z}-a^2xy = 1.$$

Vis, at der ved denne ligning i en omegn af punktet $(0,0,-1)$ er defineret en kontinuert, differentiabel funktion $z:(x,y) \to z(x,y)$. Fastlæg dernæst de værdier af $a$, for hvilke $z$ vil have strengt lokalt maksimum i $(0,0)$.



4. Beregn rumfanget af den del af området $z > x^2+y^2$, som ligger inden for ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2 = 1$.

5. En funktion $f:R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = y^3+\text{arctg}(x+y) - \frac{\pi}{4}x.$$

Undersøg fortegnsvariationen for $f$ langs kurverne

$$y = -x \text{ og } y = (\tfrac{\pi}{4}x)^{1/3}.$$

Vis udfra dette og funktionen $f'_y$, at der ved relationen $f(x,y) = o$ entydigt fastlægges en differentiabel funktion $y = \varphi(x)$.
Vis, at punktet $(1,0)$ tilhører grafen for $\varphi$, og udregn tillige $\varphi'(1)$ og $\varphi''(1)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 3. januar 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$ .

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Fastlæg den kontinuert, differentiable funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt de reelle konstanter a,b og c, således at differentialformen

$$\omega = (xz)^2 y^a dx + bf(x,y)z^2 dy + b(xy)^c zdz$$

bliver exakt.
Udregn derpå potentialet til $\omega$ gennem (1,1,1).

2. Beregn rumfanget af den del af området $z>x^2+y^2$, som ligger inden for ellipsoiden

$$x^2+y^2+2z^2 = 1 .$$

3. Godtgør, at der ved relationen

$$(\beta y - x - \tfrac{3}{2}\beta^2)e^{2-\beta x^2-y^2} = \tfrac{1}{2}$$

i en omegn af punktet $(x,y,\beta) = (-1,1,1)$ er defineret en kontinuert, differentiabel funktion $\beta : (x,y) \to \beta(x,y)$.
Vis, at funktionen $\beta$ har lokalt maksimum i (-1,1).

4. Idet mængden D er givet ved

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy < 2 \wedge x^2-y^2 > 1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{xy(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^2}\, dxdy$$

er konvergent. Udregn tillige integralets værdi.

5. Bestem den ellipsoide af formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a,b,c > o$$

som indeholder punktet (1,-3,2), og som har størst muligt rumfang. Udregn dette rumfang.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{oo}}$ - $14^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x>o \wedge y>1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{\cosh x}{y^3+y\sinh^2 x}\,dx\,dy$$

er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$.

2. En funktion $f: R^2 \to R$ er defineret ved

$$f(x,y) = \int_o^1 \left(xt^3 + yt - \frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{4}t^2}}\right)^2 dt$$

Udregn $f(o,o)$.

Fastlæg dernæst det talsæt $(x,y)$, hvor $f$ antager sin mindsteværdi, og udregn til slut denne mindsteværdi for $f$.

3. Der er givet fladerne

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 = 3$$

$$xy + 2(x-y)z - \frac{1}{4}z^2 = 3$$

Godtgør, at skæringskurven mellem fladerne i en omegn af punktet $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ kan skrives som en parameterfremstilling af formen

$$(x, \varphi(x), \psi(x)$$

hvor $\varphi$ og $\psi$ er differentiable funktioner i en omegn af $\frac{3}{2}$. Udregn dernæst $\varphi'$, $\psi'$, $\varphi''$ og $\psi''$ i $x = \frac{3}{2}$.



4. Idet $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$, $a \in R$

betegner $C$ komplementærmængden til $D$ i $R^2$.
Fra ethvert punkt $(x,y) \in C$ trækkes de to tangenter til randen af $D$. Disse to tangenter danner vinklen $2\varphi$ med hinanden ,[hvor $\varphi$ jo afhænger af punktet $(x,y)$].
Vis da, rumfanget af mængden

$$\{x,y,z) \mid (x,y) \in C \wedge o<z<\operatorname{tg}\varphi - \varphi\}$$

eksisterer, og angiv rumfangets værdi.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Reelle funktioner af en eller flere variable.

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>1\}$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{\cosh x}{y^3+y\sinh^2 x}\,dxdy$$

er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$,

2. Fastlæg største- og mindsteværdi, som z kan antage på en skæringskurve mellem fladerne

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{5}{2}$$

$$xy + 2(x-y)z - \frac{1}{4}z^2 = \frac{11}{4}\ .$$

3. Løs differentialligningen

$$Z''_{xx} + Z''_{yy} - 2Z''_{xy} + 2(Z'_x - Z'_y) + Z = 0$$

fx ved overgang til koordinaterne $u = x+y$, $v = x-y$.

Fastlæg dernæst den løsning til differentialligningen, som opfylder randbetingelserne

$$Z(x,0) = x\ ;\quad Z'_y(x,0) = 1\ .$$

4. En funktion $F: R_+^2 \to R$ er defineret ved, at

$$F(x,y) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \operatorname{arctg}\left(\frac{t(x-y)}{xy+t^2}\right) dt.$$

a) Vis, at $F(1,1)=0$, samt at $F'_x$ og $F'_y$ eksisterer i hele $R_+^2$.

b) Vis hermed, at

$$F(x,y) = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

samt at $c = 0$.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Reelle funktioner af en eller flere variable</u>.

Der stilles fire opgaver, som <u>alle</u> skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

<u>tirsdag, den 7. januar 1986 kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.</u>

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. En funktion $f: R^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2(1-y)^3 + 4xy^2.$$

Bestem største- og mindste-værdi af $f$ på mængden

$$\{(x,y) \mid o \leqq x \leqq 10 \wedge o \leqq y \leqq 4\}.$$

Bestem dernæst værdimængden for $f$ over $R^2_+$.

2. Idet

$$D = \{(x,y) \mid x > o \wedge x^2-y^2 > 1\}.$$

skal det vises, at integralet

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{dxdy}{x^4}$$

er konvergent med værdien $\frac{4}{3}$.

3. Fastlæg det fuldstændige løsningssæt til de sammenhørende differentialligninger

$$z'_x + 2z = w$$

$$w'_y + w = e^{-2x}.$$

Bestem derpå det løsningssæt, som opfylder randbetingelserne

$$z(x,-x) = -e^{-2x} \;;\; w(x,-x) = 2e^{-2x}.$$



4. Vis, at $(x,y,z) = (0,1,1)$ er en løsning til ligningssystemet

$$\int_x^y \operatorname{arctg}(z^t)dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_x^y \ln(1+z^{2t})dt = \ln 2.$$

Vis dernæst, at løsningerne i en omegn af $(0,1,1)$ kan fremstilles som en parameterfremstilling af formen

$$(x,y,z) = (x,\alpha(x),\beta(x))$$

hvor $\alpha$ og $\beta$ er differentiable funktioner i en omegn af $0$.

Bestem til slut $\alpha'(o)$ og $\beta'(o)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
LINEÆR ALGEBRA,

Tirsdag den 2o. januar 1976 kl. 9.oo-13.oo
Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

Den lineære afbildning $G_a: R^3 \sim R^3$ er givet ved matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & a & -3 \\ a+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in R.$$

(1) Bestem de $a \in R$, for hvilke $G_a$ er bijektiv.

(2) Undersøg for hvilke a, $\underline{B}a$ kan diagonaliseres, seres, og angiv en basis for $R^3$ bestående af egenvektorer til $G_{-2}$.

(3) Undersøg, om der findes en ortonormeret basis for $R^3$ bestående af egenvektorer for $G_{-2}$.

(4) Betragt for ethvert $a \in R$ ligningssystemerne

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + ax_3 = o \\ 3x_1 + ax_2 - 3x_3 = o \\ (a+2)x_1 - x_2 - x_3 = o \end{array}\right\}$$

og

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + ax_2 - 3x_3 = o \\ (a+2)x_1 - x_2 - x_3 = o \end{array}\right\}$$

og angiv for begge systemerne dimensionen af løsningsmangfoldigheden, hvor den er ikke-tom.

(Opgavesættet fortsætter)



OPGAVE 2

Lad V være vektorrummet af alle polynomier p af højst første grad over R.

(1) Godtgør, at afbildningen $\varphi: VxV \sim R$, defineret ved

$$\varphi(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad p,q \in V$$

er et skalarprodukt og angiv en i forhold hertil ortonormeret basis for V.

(2) Vis, at afbildningen $F_c$: V $\sim$ V, defineret ved (for $c \in R$)

$$(F_c(p))(x) = (-2c+1)xp'(x) + c^2p(x), \qquad x \in R$$

er en lineær afbildning. Bestem mængden af egenværdier og egenvektorer til $F_c$ for ethvert $c \in R$, og angiv for ethvert $c \in R$ dimensionen af billedrummet for $F_c$.

(3) Vis, at der ikke findes noget $c \in R$, for hvilket $F_c$ er isometrisk. Findes der noget $c \in R$, for hvilket restriktionen $F_c|W$: W $\sim$ W af underrummet W af V bestående af alle polynomier uden konstantled ind i W er isometrisk?

(4) Bestem de polynomier $p \in V$, for hvilke $p \perp F_1(p)$.

OPGAVE 3

Giv en oversigt over de forskellige metoder til beregning af determinanter. Konstruer en 4x4-matrix, der egner sig til at belyse disse metoder, og illustrer disse ved hjælp af denne matrix.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen
LINEÆR ALGEBRA

tirsdag den 8.juni 1976 kl.
Alle hjælpemidler tilladt.

## OPGAVE 1

Idet $P_2$ er det lineære rum af alle polynomier af grad mindre end eller lig 2, defineret på intervallet $[-1,1]$ , defineres ved

$$Q_2 = \{ p \in P_2 \mid p(1) = 0 \}$$

et underrum af $P_2$. Vis, at $\{t^2-t,\ t-1\}$ udgør en basis for $Q_2$

I $Q_2$ defineres et skalarprodukt ved

$$(q|r) = \int_{-1}^{1} q(t)r(t)dt$$

Bestem det ortogonale komplement i $Q_2$ til underrummet frembragt af p, hvor $p(t) = t - 1$, $t \in [-1,1]$.

## OPGAVE 2

Løs for enhver værdi af $a \in R$ ligningssystemet

$$\begin{aligned} y + z + w &= 2 \\ x - y - 2z + w &= 0 \\ -x - y + 4z - w &= 2 \\ x - z + aw &= a \end{aligned}$$

## OPGAVE 3

Lad for ethvert $(s,t) \in R^2$ $A(s,t)$ betegne matricen

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & s+2t & -1 \\ -2 & 0 & s \end{pmatrix}$$

(1) Vis, at $U = \{ (s,t) \mid A(s,t) \text{ ikke regulær} \}$ er et underrum af $R^2$ og angiv en basis for dette underrum.

(2) For hvilke $(s,t) \in R^2$ er 1 en egenværdi til $A(s,t)$?



(opgave 3 fortsat)

(3) Bestem for ethvert par $(s,t)$, for hvilke 1 er egenværdi til $A(s,t)$ (jvf. (2)) egenvektorerne til 1.

(4) Bestem de $t \in R$, for hvilke $A(1-2t,t)$ har lutter reelle egenværdier

(5) Bestem dimensionen af egenrummene svarende til matricen $A(-3,2)$.

## OPGAVE 4

Lad den lineære afbildning $F(a,b)$, $(a,b) \in R^2_+$, af det euklidiske rum $E^4$ ind i sig selv være givet ved matricen

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -a & -a & a \\ -a & b & -a & a \\ -a & -a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

(1) Bestem de $(a,b)$, hvor $F(a,b)$ ikke er bijektiv.

(2) Angiv spektret for $M(a,b)$.

(3) Udregn projektionen af vektoren $\vec{x} = (2,-1,2,-1)$ på egenrummene for $M(a,b)$.

(4) Udregn tillige projektionen af $F(a,b)(\vec{x})$ på egenrummene.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

LINEÆR ALGEBRA, der stilles ialt fire opgaver.

mandag, den 10. januar 1977 kl. $09\frac{30}{}$ - $13\frac{30}{}$.
Alle hjælpemidler tilladt.

1° Lad en lineær afbildning F af det euklidiske rum $E^3$ ind i sig selv være givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at F er bijektiv.

b) Angiv spektret for A samt en basis for egenrummene ved A.

c) Udregn $(\vec{u}\ |F^{-1}\vec{u})$, når $\vec{u} = (-3,6,-9)$ i den oprindelige basis i $E^3$.

2° Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 0 \\ 2x - 5y - z + 4w &= -1 \\ -x + 2y - 2w &= 1 \\ y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

3° En lineær afbildning $F_a : R^3 \to R^3$ er for alle $a \in R$ givet ved matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(opgaven fortsættes næste side)



a) Bestem de $a \in R$, hvor $F_a$ ikke er bijektiv.

b) Bestem de $a \in R$, hvor $B_a$ har mindst to reelle egenværdier.

c) Bestem derpå de $a \in R$, for hvilke $B_a$ kan diagonaliseres med lutter reelle egenværdier.

d) Find a således, at

$$F_a^{-1}\ (-2,1,-3) = (2,-1,3)$$

og angiv spektret for $B_a$.

4° En lineær afbildning L inden for det lineære rum $C^\infty$ af alle reelle vilkårligt ofte differentiable funktioner er for alle $a,b \in R$ givet ved

$$L = D^2 + aD + bD^0$$

d.v.s. $\forall t \in R : (Lf)(t) = f''(t) + af'(t) + bf(t)$ , $f \in C^\infty$

a) Egenrummet svarende til L og egenværdien -2 vides at have funktionerne $f_1 : t \to e^{3t}$ og $f_2 : t \to e^{4t}$ som basis, fastlæg på denne baggrund a og b.

(De fundne værdier af a og b forudsættes benyttet i det følgende).

b) Angiv en basis for egenrummet svarende til L og egenværdien $-\frac{9}{4}$.

c) En lineær afbildning $G : C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$G = D - 2D^0$$

d.v.s. $\forall t \in R : (Gf)(t) = f'(t) - 2f(t)$ , $f \in C^\infty$

Angiv en basis for egenrummet svarende til $G \circ L$ og egenværdien -4.

SKRIFTLIG EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA

mandag, den 27. juni 1977.
Alle hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

Lad for ethvert $a \in \mathbb{R}$, $B_a$ betegne matricen

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 2 & o \\ 1-a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Angiv for ethvert $a \in \mathbb{R}$ en basis for nulrummet $N_a$, ved $B_a$, samt dimensionen af billedrummet.

(2) Undersøg, om der findes noget $a \in \mathbb{R}$, for hvilket $(o,1,o) \in N_a^{\perp}$

(3) Bevis, at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ er enhver egentlig vektor i $N_a$ egenvektor for matricen $B_a'B_a$ ($B_a'$ er den transponerede til $B_a$).

(4) Undersøg, om $B_a'B_a$ er regulær for noget a.

(5) Bestem egenværdierne til $B_1'B_1$.

OPGAVE 2

(1) Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ dimensionen af løsningsrummet for ligningssystemet

$$(*)\begin{cases} (2a^2 - 2a + 1)x_1 + (3a-1)x_2 + (1-a)x_3 = o \\ (3a-1)\ x_1 + 5\ x_2 - x_3 = o \\ (1-a)\ x_1 - x_2 + x_3 = o \end{cases}$$

og bestem samtlige systemets løsninger.

(2) Løs derefter systemet

$$(\Delta)\begin{cases} (2a^2 - 2a + 1)x_1 + (3a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 2a^2 + 1 \\ (3a-1)\ x_1 + 5\ x_2 - x_3 = 3a + 3 \\ (1-a)\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 - a \end{cases}$$



(opgaver fortsat...

OPGAVE 3

Lad V være vektorrummet af alle polynomier af højst 1.grad, altså

$$V = \{P \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}: \ P(x) = ax + b\}.$$

(1) Vis, at der ved
$\langle P_1 | P_2 \rangle = a_1a_2 + 2b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1$
(hvor $P_1$ og $P_2$ er bestemt ved $(a_1,b_1)$ og $(a_2,b_2)$ hhv.)
defineres et skalarprodukt i V. Opskriv for et polynomium P bestemt ved (a,b) normen af P, $|||P|||$ i forhold til dette produkt.

Lad L betegne afbildningen fra V ind i $\mathbb{R}^2$ bestemt ved
$L(P) = (P(o), P(1))$.

(2) Vis, at L er lineær og opskriv i en passende basis for V matricen for L.

(3) Vis, at L er en isometri, opfattet som afbildning fra V forsynet med $\langle \ | \ \rangle$ ind i $\mathbb{R}^2$ forsynet med det "sædvanlige" skalarprodukt.

(4) Vis, at samtlige grafer for elementerne i $\{P_o\}^{\perp}$ har ét punkt fælles og bestem dette, idet $P_o$ er defineret ved

$P_o(x) = x$, for alle $x \in \mathbb{R}$.

OPGAVE 4

Giv en oversigt over, hvad der gælder vedrørende diagonalisering af matricer.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Lineær Algebra.

Der stilles ialt fire opgaver.

onsdag, den 4. januar 1978 kl. $09^{\underline{30}} - 13^{\underline{30}}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.



1° På mængden $C[0,1]$ af reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $[0,1]$ defineres et skalarprodukt ved

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Bestem to funktioner $f$ og $g$ i $C[0,1]$ af formen $a+be^t$ $a,b\in R$, således at $f$ og $g$ er ortonormale.

2° Angiv for ethvert talsæt $(a,b)\in R^2$ løsningen til lignings-systemet

$$\begin{aligned} x \quad -2z- \;w &= 1 \\ y+\; z+\; w &= 0 \\ x+2y+\; z+aw &= a+b \\ x-\; y \quad\;\; -2w &= 1 \end{aligned}$$

3° Idet $C^\infty$ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på $R$, defineres afbildningen $L:C^\infty \to C^\infty$ ved

$$\forall f\in C^\infty: Lf(t) = (t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^0)f(t), \quad t\in R$$

Vis, at $L$ er lineær.

Det antages nu, at $t\in R_+$, vis da at funktionen $\varphi: t\to t^\alpha$, $\alpha\in R$ er egenfunktion for $L$, og angiv den til $\varphi$ hørende egen-værdi.

Betegner $K_\lambda$ egenrummet svarende til egenværdien $\lambda$, ønskes en basis for hvert af egenrummene $K_{-2}$, $K_{-4}$ og $K_0$.

4° For hvert talsæt $(a,b) \in R^2$ defineres en lineær afbildning $F_{a,b}$ af $R^3$ ind i sig selv ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} o & a & b \\ b & a-b & b \\ b & a & o \end{pmatrix}$$

Bestem de (a,b) for hvilke $F_{a,b}$ er bijektiv.

Angiv for hvert talsæt (a,b) dimensionen af de til $\underline{A}$ svarende egenrum.

I de tilfælde hvor $\underline{A}$ kan diagonaliseres, ønskes en basis for $R^3$ bestående af egenvektorer til $\underline{A}$.
Fastlæg (a,b) således, at de til $\underline{A}$ svarende egenrum er ortogonale, samt at $\det\underline{A} = ab$.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra.

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 8. juni 1978 kl. o9$^{\underline{oo}}$ - 13$^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Angiv for hver værdi af $a \in R$ løsningsmængden til lignings-systemet

$$\begin{aligned} x \quad +z+aw &= 1 \\ x+y+z \qquad &= 1 \\ y+z-\ w &= 1 \\ x+y \quad -\ w &= 1 \end{aligned}$$

Begrund, hvorfor løsningsmængden for visse valg af a er tom.

2. Idet $C^\infty$ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på R, defineres afbildningen $L:C^\infty \to C^\infty$ ved $\forall f \in C^\infty : Lf = (D^3+aD+bD^0)f,\ (a,b) \in R^2$.
Vis, at L er lineær.
Bestem (a,b), når funktionen $\varphi: t \to te^{-t}$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien 3.
Angiv en basis for $K_3$ (egenrummet svarende til egenværdien 3).

3. Ved

$$W(\varphi,\psi,\omega) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \omega \\ \varphi' & \psi' & \omega' \\ \varphi'' & \psi'' & \omega'' \end{vmatrix} \; ; \quad W(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix}$$

defineres Wronskideterminanter, hvor $\varphi,\psi,\omega \in C^2$ (henholdsvis $\varphi,\psi \in C^1$). Det forudsættes bekendt, at $\underline{\varphi,\psi,\omega}$ (henholdsvis $\varphi,\psi$) <u>er lineært uafhængige hvis og kun hvis $W(\varphi,\psi,\omega) \neq o$</u> (henholdsvis $W(\varphi,\psi) \neq o$), hvor o betyder o-funktionen.

Antages nu $\varphi,\psi \in C^2$ lineært uafhængige. Vis da, at $W(\varphi^2,\varphi\psi) \neq o$, $W(\varphi\psi,\psi^2) \neq o$ og $W(\varphi^2,\psi^2) \neq o$.

Vis tillige, at $\varphi^2$, $\varphi\psi$ og $\psi^2$ er lineært uafhængige.



4. En lineær afbildning $F_t : R^3 \to R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix}$$

a) Bestem de $t \in R$, hvor $F_t$ er bijektiv.

b) Bestem de til $\underline{A}(t)$ svarende egenværdier, og

c) i de tilfælde, hvor $\underline{A}(t)$ kan diagonaliseres ønskes en basis for $R^3$ af egenvektorer for $\underline{A}(t)$.

d) Fastlæg t således, at

$$F_t^{-1}(-1,2,-3) = (1,-2,3).$$

5. Idet $P_2$ er det lineære rum af alle polynomier af højst anden grad, defineres på intervallet [0,1] et skalar-produkt ved

$$(p|q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$$

Et underrum Q er frembragt af polynomiet $q(t) = 2t-1$.

Beskriv samtlige polynomier i $Q^\perp$.
Angiv en ortonormeret basis for $P_2$, således at hvert basiselement er i enten Q eller $Q^\perp$.
Fastlæg polynomiet $p(t) = t^2+t+1$ i den fundne basis.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 4. januar 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Idet $C^o(I)$ er det lineære rum af alle reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $I = [e^{-1},e]$, defineres et indre produkt i dette rum ved

$$(f|g) = \int_{e^{-1}}^{e} f(t)g(t)dt.$$

Vis, at funktionerne $\varphi:t\rightsquigarrow 1$ og $\psi:t\rightsquigarrow t^{-1}\ln t$ er ortogonale på $C^o(I)$. Bestem derpå tre funktioner af formen

$$\omega:t\rightsquigarrow a+bt^{-1}+ct^{-1}\ln t$$

$a,b,c\in R$, som er parvis ortogonale på $C^o(J)$.

2. Beskriv for hvert talsæt $(a,b)\in R^2$ løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ x - y + 4z - 5w &= b-a \\ 2x - 2y + 5z + aw &= 1 \end{aligned}$$

3. Idet $C_+^\infty$ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på $R_+$, defineres afbildningen $L:C_+^\infty \rightsquigarrow C^\infty$ ved

$$\forall f\in C_+^\infty : Lf = (t^3D^3+at^2D^2+(a+b)tD + bD^o)f$$

$(a,b)\in R^2$.

Vis, at L er lineær.

Bestem derpå $(a,b)$, når funktionen $\varphi:t\rightsquigarrow t\ln t$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien -1.
Angiv endelig en basis for $K_{-1}$ (egenrummet svarende til egenværdien -1).

4. Idet $P_2$ er det lineære rum af alle polynomier p med grad $p \leq 2$, defineres en lineær afbildning $F: P_2 \to P_2$ ved

$$\forall p \in P_2 : F(p(t)) = t^2 p''(t) - (2t+1)p'(t) + p(t) + 8t$$

$t \in R$.

Bestem egenværdier og egenpolynomier for F.

Redegør for, at $F^{-1}$ eksisterer, og bestem $F^{-1}(t^2-2t)$.

5. En lineær afbildning $G: R^3 \to R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at G er bijektiv.

Vis, at A har to egenværdier, samt at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres. Betegner $\lambda$ den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet 2, og $\vec{v}$ er den tilhørende egenvektor, bestem da en vektor $\vec{w}$ således at

$$G\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}.$$

Er $\vec{u}$ egenvektoren svarende til den anden egenværdi, og betegner $\underline{S}$ den matrix, hvis søjler netop er $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ udregn da

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1} \underline{A}\, \underline{S}.$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 8. juni 1979

kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet $C^o(I)$ er det lineære rum af alle reelle, kontinuerte funktioner på intervallet $I = [e^{-1},e]$, defineres et indre produkt i dette rum ved

$$(f|g) = \int_{e^{-1}}^{e} f(t)g(t)dt.$$

Vis, at funktionerne $\varphi: t \sim 1$ og $\psi: t \sim t^{-1}\ln t$ er ortogonale på $C^o(I)$. Bestem derpå tre funktioner af formen

$$\omega: t \sim a+bt^{-1}+ ct^{-1}\ln t$$

$a,b,c \in R$, som er parvis ortogonale på $C^o(I)$.

2. Beskriv for hvert talsæt $(a,b) \in R^2$ løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ x - y + 4z - 5w &= b-a \\ 2x - 2y + 5z + aw &= 1 \end{aligned}$$

3. Idet $C_+^\infty$ betegner mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner på $R_+$, defineres afbildningen $L: C_+^\infty \sim C_+^\infty$ ved

$$\forall f \in C_+^\infty : Lf = (t^3D^3+at^2D^2+(a+b)tD + bD^o)f$$

$(a,b) \in R^2$.

Vis, at L er lineær.

Bestem derpå $(a,b)$, når funktionen $\varphi: t \sim t\ln t$ er egenfunktion for L svarende til egenværdien $-1$.
Angiv endelig en basis for $K_{-1}$ (egenrummet svarende til egenværdien $-1$).



4. Idet $P_2$ er det lineære rum af alle polynomier p med grad $p \leq 2$, defineres en lineær afbildning $F: P_2 \sim P_2$ ved

$$\forall p \in P_2 : F(p(t)) = p''(t)-(t-1)p'(t)+3p(t)$$

$t \in R$.

Bestem egenværdier og egenpolynomier for F.

Redegør for, at $F^{-1}$ eksisterer, og bestem $F^{-1}(t^2+1)$.

5. En lineær afbildning $G: R^3 \sim R^3$ er givet ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at G er bijektiv.

Vis, at A har to egenværdier, samt at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres. Betegner $\lambda$ den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet 2, og $\vec{v}$ er en tilhørende egenvektor, bestem da en vektor $\vec{w}$ således at

$$G\vec{w} = \lambda\vec{w}+\vec{v}.$$

Er $\vec{u}$ egenvektor svarende til den anden egenværdi, og betegner $\underline{S}$ den matrix, hvis søjler netop er $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ udregn da

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles ialt 4 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 3 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 7. januar 1980 kl. $10^{\underline{00}} - 14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. En lineær afbildning $F:R^4 \rightarrow R^4$ er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & o & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ o & 1 & 1 & o \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestem N(F) - nulrummet - og V(F) - billedrummet ved afbildningen F.
Angiv for hver værdi af $a \in R$ løsningsmængden til ligningen

$$F(x,y,z,w) = (2,5,2,a).$$

2. Idet $C_+^\infty$ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktioner på $R_+$, er en lineær differentialoperator $L:C_+^\infty \rightarrow C_+^\infty$ defineret ved

$$L=t^3D^3+at^2D^2-2atD+bD^0$$

$a,b \in R$.

Bestem tallene a og b således, at funktionen $\varphi:R_+ \rightarrow R$ givet ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -a.

Angiv - med de fundne værdier for a og b - en basis for $K_{-a}$ (egenrummet for L svarende til egenværdien -a).
Redegør for, at

$$U = \{f \in K_{-a} | f(1) = o\}$$

er et underrum og angiv en basis for U.

3. Idet $a,b,c,d \in R$ defineres følgende 2x2-matricer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $AB=BA$ og $I^2 = -E$

Betegner $A^t$ den transponerede matrix af A, defineres en 4x4-matrix ved

$$M = \begin{pmatrix} A & B^t \\ -B & A^t \end{pmatrix}$$

Vis, at $\det M > o$ for $(a,b,c,d) \neq (o,o,o,o)$ og, at $\det M = o$ for $a=b=c=d=o$. (VINK: Udregn f.ex. $MM^t$)

$\mathcal{M}$ betegner mængden af alle 4x4-matricer af samme form som M.
Vis, at $\mathcal{M}$ med sædvanlig matrix-addition og skalarmultiplikation er et underrum i rummet af alle 4x4-matricer.
Vis tillige, at matricerne

$$J_1 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} O & -I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

er en basis for $\mathcal{M}$, samt at

1) $J_p^{\,2} = -J_1$ for $p = 2,3,4$

2) $J_2 J_3 = -J_3 J_2$

Bestem $M^{-1}$ for alle matricer $M \neq O$, og vis, at $(\mathcal{M} \setminus \{O\}, \cdot)$ er en ikke abelsk gruppe. ($\cdot$ betyder sædvanlig matrix-multiplikation).



4. Lad for ethvert talsæt $(s,t) \in R^2$, $A(s,t)$ betegne matricen

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} s & 2t & -s \\ s & 2t-s & o \\ -s & s & 2t \end{pmatrix}$$

a) Beskriv mængden

$$N = \{(s,t) \in R^2 \mid A(s,t) \text{ ikke regulær}\}$$

b) Vis, at 2t altid vil være egenværdi for $A(s,t)$, og bestem det tilhørende egenrum.

c) Vis, at $A(s,t)$ altid kan diagonaliseres.

d) Bestem spektret for $A(2t,t)$ samt de tilhørende egenvektorer, når $t \neq o$.

e) Udregn projektionen af egenvektoren svarende til 2t på den plan, som er udspændt af de to øvrige egenvektorer, som er fundet under d).

Skriftlig eksamen i Lineær algebra.

Torsdag den 8 januar 1981 kl. 9.00 – 13.00

Alle hjælpemidler er tilladt





OPGAVE 1

Vis om de tre ligningssystemer

$$(1)\quad \begin{aligned} 4x-5y-2z+3w&=0\\ 3x-2y-5z+4w&=0 \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} x+4y-11z+6w&=0\\ 10x-16y+2z+4w&=0 \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} 2x-5y+4z-w&=0\\ -6x+15y-12z+3w&=0 \end{aligned}$$

at løsningsmængden til (1) er den samme som løsningsmængden til (2), men en ægte delmængde af løsningsmængden til (3).

OPGAVE 2

Vis at løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x-5y-2z+3w&=b_1\\ 3x-2y-5z+4w&=b_2\\ 2x-5y+4z-w&=b_3 \end{aligned}$$

ikke er tom, netop hvis

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & b_1\\ 3 & -2 & b_2\\ 2 & -5 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Løs ligningssystemet i tilfældet $(b_1,b_2,b_3)=(3,4,-1)$.

side 2

## OPGAVE 3

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find den løsning til differentialligningssystemet

$$\underline{x}' = A\underline{x},$$

som opfylder $\underline{x}(0) = (1,1,1,1)$.

Det oplyses, at der kan foretages et basisskifte, således at den lineære afbildning, der har $A$ som matrix, i den nye basis har matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Oplysningen skal bevises).

## OPGAVE 4

Find projektionen af punktet $D$ på den plan, som går gennem $A$, $B$ og $C$, når

$$A = (-1,0,0), \quad B = (1,0,0), \quad C = (0,2,-1), \quad D = (0,1,1)$$

## OPGAVE 5

Foretag en diagonalisering af den kvadratiske form

$$k(x,y) = 4xy - ay^2$$

for $a = 3$ og $a = 0$.

SLUT



SKRIFTLIG EKSAMEN

I

LINEÆR ALGEBRA

Tilladte hjælpemidler: alle

Varighed: 4 timer.

3. juni 1981

kl. $09^{\underline{00}}$ – $13^{\underline{00}}$

OPGAVE 1

Lad $T$ være en lineær operator, som i en vis basis har matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vis, at nulrummet og billedrummet er identiske.

2. Bestem $B^2$

3. Vis, at ingen 5-dimensional operator kan have identisk nulrum og billedrum.

4. Angiv for en vilkårlig operator $S$ en relation mellem nulrum og billedrum, som er tilstrækkelig til at sikre, at $S^2 = S \circ S$ er nulafbildningen.

OPGAVE 2

Find den løsning til differentialligningssystemet

$$\underline{f}'(t) = A\underline{f}(t),$$

for hvilken $\underline{f}(o) = (1,o,1)$, idet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(fortsættes)



OPGAVE 3

Angiv en betingelse i form af et sæt af ligninger og uligheder i a,b,c og d, som er tilstrækkelig til, at der blandt de fire vektorer

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er mindst 3 af dem, som er lineært uafhængige, mens hele sættet skal være lineært afhængigt.

OPGAVE 4

Lad mængden $M_1$ være givet ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} -3x + y &= -3 \\ z &= 1 \\ -x + w &= -1, \end{aligned}$$

og mængden $M_2$ være givet ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} -8x + 4y + 10z &= 0 \\ 2x + 4y - 5w &= 0. \end{aligned}$$

Vis, at $(1,0,1,0) \in M_1$ og find det punkt i $M_2$, som ligger nærmest ved $(1,0,1,0)$.

Find dernæst det punkt i $M_1$, som har den mindste afstand til $M_2$.

(For et punkt $P$ forstås der ved afstanden til $M_2$, afstanden til det punkt i $M_2$, der er nærmest ved $P$, nemlig projektionen af $P$ på $M_2$).



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK I EMNEKREDSEN
L I N E Æ R   A L G E B R A

mandag, den 18. januar 1982 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$

---

Der stilles ialt fire opgaver.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Angiv en basis for løsningsrummet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ -x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 8y - 12z &= 0 \\ x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Bestem de $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= b_1 \\ -x - 2y + 3z &= b_2 \\ 4x + 8y - 12z &= b_3 \\ x - y + 5z &= b_4 \end{aligned}$$

har en løsning.

2. Bestem determinanten for den reelle n×n-matrix

$$\begin{pmatrix} & & & a_n \\ & 0 & \cdot & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & 0 & \\ a_1 & & & \end{pmatrix}$$

Vink: Først gættes løsningen (ved at beregne determinanten for de første par n) og så føres induktionsbevis.

3. Hvilke "elementære omformninger" (ombytning af to rækker, multiplikation af en række med en skalar $\lambda \neq 0$ eller addition af et vilkårligt multiplum af en række til en anden - og tilsvarende for søjlerne) fører fra matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

til matricen

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Lad nu $L$ og $M$ være lineære rum med $(u_1, u_2, u_3)$ basis i $L$ og $(v_1, v_2, v_3)$ basis i $M$ og lad $F : L \to M$ være givet ved matricen $A$ i de to baser. Angiv nye baser i $L$ og i $M$ sådan at $F$ er givet ved $A'$ i de to nye baser.



4. En lineær afbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser $F$ (ved at bestemme egenværdier og egenrum). Lad $U$ være egenrummet svarende til den største egenværdi af $F$.

Vis at "kvotientrummet" $\mathbb{R}^2/U$ (dvs. $\{(x,y) + U \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ med passende addition og skalar-multiplikation) er isomorft med mængden

$$M = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ og } x+y = 2\}$$

forsynet med additionen

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1)$$

og med multiplikationen

$$\lambda(x,y) = (\lambda x + 1 - \lambda, \lambda y + 1 - \lambda).$$

SKRIFTLIG EKSAMEN i LINEÆR ALGEBRA, marts 1982.

Udleveres den 5. marts 1982 kl. $10^{\underline{00}}$,

afleveres den 5. marts 1982 kl. $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler må benyttes.



OPGAVE 1

Lad $f:R^3 \to R^4$ og $g:R^4 \to R^2$ være de lineære afbildninger, som i forhold til standardbaserne har matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vis, at

(1) Billedrummet for $f$ er nulrummet for $g$.

Bestem de talsæt $(a,b,c,d) \in R^4$ for hvilke (1) gælder, når

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 2

Angiv de værdier af $a$ for hvilke matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & a(a+1) \\ a(a-1) & 1 \end{pmatrix}$$

kan diagonaliseres til en diagonalmatrix med reelle værdier.

(fortsættes)

OPGAVE 3

Der er givet fire punkter

$A = (-5,-10,-1)$, $B = (4,b,2)$, $C = (-2,-3,-1)$, $D = (2,4,2)$.

i rummet udstyret med et retvinklet koordinatsystem.

Bestem projektionen E af A på BCD.
Bestem højden fra A i ABCD.

Bestem volumen af ABCD ved to forskellige udregninger.

OPGAVE 4

Bestem løsningen til differentialligningen

$$X^1(t) = AX(t),\ X(o) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

L I N E Æ R   A L G E B R A

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 18. juni 1982 kl. $10^{00}$ - $14^{00}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Find en lineær afbildning af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$ for hvilken $(f_1, f_2)$ er en basis for billedrummet og $(e_1)$ er en basis for nulrummet, hvor

$f_1 = (0,1,3/2)$ , $f_2 = (1,2,3)$ og $e_1 = (2,3,4)$ .

2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + w + z &= a \\ 2x - 5y + 4w - z &= b \\ -x + 2y - 2w \phantom{{}+z} &= c \\ y - w + z &= d \end{aligned}$$

A) for $(a,b,c,d) = (0,-1,1,1)$

B) for $(a,b,c,d) = (0,-1,0,2)$ .

3. Den lineære afbildning $G_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{B}_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

A) Bestem de $a$ for hvilke $G_a$ er bijektiv.

B) Undersøg for hvilke $a$ , $\underline{B}_a$ kan diagonaliseres, og angiv en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer til $\underline{B}_a$ .

C) Bestem derpå $a$ således, at vektoren $\vec{v} = (1,1,-1)$ bliver egenvektor til $\underline{B}_a$, og udregn derpå $G_a^{-1}(2,1,-3)$ .

4. I det lineære rum $C^2$ af alle reelle to gange kontinuert differentiable funktioner på $\mathbb{R}$ defineres en lineær afbildning $L$ ved

$(Lf)(t) = f''(t) - (t+1)\, f'(t) + 3\, f(t), \quad t \in \mathbb{R}$

Lad $P_2$ være det lineære rum af alle polynomier $p$ med grad $p \leq 2$ .

A) Vis at $P_2$ er "invariant" overfor $L$ , hvormed menes at $L(f) \in P_2$ for alle $f \in P_2$ .

B) Bestem egenværdier og egenpolynomier for $M$ = restriktionen af $L$ til $P_2$ .

C) Redegør for, at $M^{-1}$ eksisterer, og bestem $M^{-1}(g)$ hvis $g(t) = t^2 + 1$ for $t \in \mathbb{R}$ .

5. Bestem determinanten for den reelle $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & 0 & & -a_2 & \\ & & a_3 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 & \\ (-1)^{n-1}a_n & & & & \end{pmatrix}$$



Opgaver til

Lineær Algebra

7. marts 1983.

Alle hjælpemidler tilladt.

Der er ialt 4 opgaver, som alle skal regnes.

OPGAVE 1

Afbildningen $f$ fra $R^4$ ind i $R^4$ er givet ved

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (o,o_1,\alpha x_3+\beta x_4,-\beta x_3+\alpha x_4).$$

Bestem billedrum og nulrum for $f$ og bevis, at disse rum er ortogonale på hinanden.

OPGAVE 2

Lad $M$ betegne vektorrummet af 2x2 matricer med reelle elementer.
For en matrix $A \in M$ lader vi $\mathrm{Com}(A)$ betegne mængden af matricer, der kommuterer med $A$, altså

$$\mathrm{Com}(A) = \{X \in M \mid XA = XA\}$$

a: Vis, at $\mathrm{Com}(A)$ er et underrum i $M$

b: Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestem en basis for $\mathrm{Com}(A)$

c: Lad $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Angiv et ligningssystem i $x,y,z,w$, som er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $X \in \mathrm{Com}(B)$, hvor

$$X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}.$$

d: For hvilke $B$ er $\mathrm{Com}(B) = M$.

(fortsættes)



OPGAVE 3

Bevis, at det karakteristiske polynomium $R$ for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er givet ved

$$R(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2-ab).$$

Angiv for hvilke reelle værdier af $a$ og $b$ det er muligt at diagonalisere $A$.

Angiv i tilfældet $a=0$, $b=1$ løsningen til differentialligningssystemet

$$x^1 = Ax, \quad x(o) = (1,1,1,1).$$

NOGLE BETEGNELSER

$F$ betegner vektorrummet af kontinuerte funktioner på [-1,1].

• betegner det skalarprodukt på $F$, som er givet ved

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-4t}dt$$

$P_2$ betegner det underrum, som er udspændt af $f_0, f_1, f_2$ givet ved

$$f_0(t) = e^{2t}, \; f_1(t) = te^{2t}, \; f_2(t) = t^2e^{2t}; \; t\in[-1,1]$$

OPGAVE

Find en ortogonal (ikke nødvendigvis ortonormal) basis for $P_2$.

Lad $\hat{P}$ betegne det underrum, som udspændes af de to første funktioner af den fundne basis.
Bestem projektionen af h på $\hat{P}$, hvor

$$h(t) = e^{2t}(1-2t+t^2), \; t\in[-1,1].$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 6. juni 1983 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$ .

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet A er en nxn-matrix og p er et positivt helt tal, er

$$A^p = A \cdot A \cdot \ldots\ldots \cdot A \text{ (p gange)}.$$

Endvidere betyder E nxn-enhedsmatricen og 0 nxn-nulmatricen.

Vis da, at når $A^p = 0$, er

$$(E-A)^{-1} = E+A+A^2+\ldots\ldots+A^{p-1}.$$

Benyt dette til at udregne

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2. En lineær afbildning fra $E^4$ til $E^4$ er givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Godtgør, at der findes en basis for $E^4$ af egenvektorer til B.

Fastlæg derpå et sådant (gerne ortonormalt) sæt af egenvektorer til B.

3. Bestem (fx ved simplexmetoden) maksimum for

$$Q = x + y + z + w$$

under bibetingelserne

(opgaven fortsættes)



$$\begin{aligned} x \quad\quad + z + w &\leqq 10 \\ y + 2z + w &\leqq 7 \\ x + 2y + z \quad &\leqq 11 \\ x + y + \quad w &\leqq 11 \end{aligned}$$

samt

$$(x,y,z,w) \geqq (0,0,0,0).$$

4. Når $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ er en ortonormal basis for $R^3$ og $k \in R$, er en lineær afbildning $f_k : R^3 \to R^3$ defineret ved

$$f_k(\bar{u}) = \bar{u} + 2\bar{v} + (k-2)\bar{w}$$

$$f_k(\bar{v}) = 4\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$$

$$f_k(\bar{w}) = (k-1)\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}.$$

Fastlæg de k, hvor $f_k$ ikke er injektiv, og bestem med disse valg af k nulrum $(N_k)$ og billedrum $(V_k)$ for $f_k$.

5. Et område $M \subset R^3$ er fastlagt ved, at

(1) $3x + y + 2z \leqq 80$

(2) $2x + 2y + z \leqq 75$

(3) $x + 3y + 4z \leqq 130$

(4) $(x,y,z) \geqq (0,0,0)$.

Bestem det hjørne i M, hvor $(x,y,z) > (0,0,0)$.

Bestem dernæst en parameterfremstilling for det linie-stykke $\ell$ i M, som ligger på randen af såvel (1) som (2).

(opgaven fortsættes)

Fastlæg tallene a og b, således at niveaufladen

$$Q = ax + by + 3z$$

vil antage værdien 155 på hele $\ell$.

Undersøg til slut, om tallet 155 vil være maksimum for Q på M.



LINEÆR ALGEBRA

Skriftlig eksamen, mandag den 6 juni kl $10^{00}$ – $14^{00}$

Opgavesættet består af fire opgaver og anses kun for fuldt besvaret hvis alle opgaver er løst korrekt.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Idet A er en n×n matrix og p et positivt tal, er pr. definition

$$A^p = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad (p \text{ gange}).$$

I det følgende er E n×n-enhedsmatricen og O n×n-nulmatricen.

Vis da, at hvis $A^p = O$, da er $E - A$ invertibel med

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

Benyt dette til at udregne

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. En lineær afbildning, $f$, fra $\mathbb{R}^4$ til $\mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruer en basis for $\mathbb{R}^4$, som består af egenvektorer for $f$. Konstruer, hvis det er muligt, en tilsvarende ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

3. I rummet er der givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Idet vi identificerer punkter med deres koordinatsæt, er der givet tre punkter A, A' og B ved

$$A = (1, 1, 1), \quad A' = (1, 0, -1) \text{ og } B = (-1, 0, -1).$$

Bevis at den punktmængde, som bestemmes af ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

er linjen gennem $A$ og $A'$, som vi betegner $a$.

Linjen $b$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og det punkt, som svarer til parameterværdien $t$ betegnes $B_t$. Bestem $t$ således at $B = B_t$.

Med $A_t$ betegner vi skæringspunktet mellem $a$ og den plan vinkelret på $b$, som går gennem $B_t$.

Angiv volumen af tetraederet $AA_tBB_t$ og angiv den største og mindste værdi af dette volumen, når $B_t$ skal ligge på linjestykket $B_0B_1$.

4. Idet $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ og $k \in \mathbb{R}$ oplyses det om den lineære afbildning $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, at

$$f_k(\bar{u}) = \bar{u} + 2\bar{v} + (k-2)\bar{w}$$
$$f_k(\bar{v}) = 4\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$$
$$f_k(\bar{w}) = (k-1)\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}.$$

Bestem de værdier af $k$, for hvilke $f_k$ ikke er injektiv. Angiv for hver af disse værdier af $k$ en parameterfremstilling af nulrummet og et ligningssystem for billedrummet.

SLUT



EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA,

FREDAG DEN 6. JANUAR 1984 KL 10 – 14

Alle hjælpemidler er tilladt

(1) For $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ lader vi $M(\alpha, \beta, \gamma)$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

For hvilke $(\alpha, \beta, \gamma)$ er $M(\alpha, \beta, \gamma)$ invertibel? Bestem $M(1,2,3)^{-1}$.

(2) Lad $A$, $B$ og $C$ være de tre punkter, som i forhold til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem har koordinatsættene

$$(4,0,0), \quad (0,-2,0) \text{ og } (0,0,1)$$

For et givet punkt $P$ på linjestykket $AB$, således at $P \neq B$, findes der da netop et punkt $Q$ på linjen gennem $B$ og $C$ og et punkt $R$ på linjen gennem $A$ og $C$, således at $PQ$ er vinkelret på $AB$ og $QR$ er vinkelret på $BC$.

Bestem volumen af tetraederet $OPQR$, når $P$ er midtpunktet af $AB$.

Bestem det $P$, for hvilket tetraederet $OPQR$ har maximalt volumen. Punktet $O$ er koordinatsystemets origo.

(3) Lad $f$ og $g$ være de to lineære afbildninger, som har matricerne $A$ og $B$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 5 \\ 2 & 6 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 13 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vis at $f$ og $g$ har samme nulrum ($\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)$), men at billedrummene $\mathcal{B}(f)$ og $\mathcal{B}(g)$ er forskellige. Angiv et ligningssystem for $\mathcal{B}(f)$ og for $\mathcal{B}(g)$

(4) Løs differentialligningen

$$x'(t) = A\,x(t)\,; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som en hjælp oplyses det, at $A$ er matrix for en vis drejning, selvom opgavens løsning ikke forudsætter denne oplysning. Oplysningen må gerne benyttes som et bevist faktum.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{00}$ - $14^{00}$ .

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem determinanten for den reelle $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. For hvert talpar $(a,b)\in R^2$ er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 5w &= 2 \\ x - 2y - z + 5w &= -1 \\ y - 2z + aw &= 1 \\ -y + z + 6w &= b \end{aligned}$$

Angiv for hvert talpar $(a,b)$ løsningsmængden til ligningssystemet.

Opskriv specielt løsningsmængden svarende til $(a,b) = (-6,1)$.



3. En lineær afbildning $F:R^3 \to R^3$ er fastlagt ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem spektret for $\underline{A}$ og vis, at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Betegner a den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet større end 1, og er $\vec{v}$ en tilhørende egenvektor, fastlæg da en vektor $\vec{w}$, således at

$$F(\vec{w}) - a\vec{w} = \vec{v}$$

Er $\vec{u}$ endnu en egenvektor for F, vis da, at $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ udgør en basis for $R^3$, og fastlæg den til F svarende matrix i denne basis.

4. Idet $C^\infty$ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktoner på R, er en liniær differentialoperator $L:C^\infty \to C^\infty$ defineret ved

$$L = D^4 + aD^3 + bD^2 - aD + cD^0$$

hvor $a,b,c \in R$.

Fastlæg samtlige talsæt $(a,b,c)$, således at funktion $\varphi:R \to R$ givet ved

$$\varphi(t) = te^t$$

tilhører $N(L)$ - nulrummet for L.

Bestem det af talsættene $(a,b,c)$, hvor tillige funktionen $\psi:R \to R$ givet ved

$$\psi(t) = e^{2t}$$

er egenfunktion svarende til egenværdien 9.

Angiv med den fundne værdi af a,b og c en basis for $N(L)$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Lineær Algebra

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$ .

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. $P_2$ står for det lineære rum af alle polynomier af grad højst 2 defineret på $[-1,1]$. Endvidere er

$$Q_2 = \{p \in P_2 \mid p(-1) = 0\} .$$

Fastlæg en basis for $Q_2$.

I $P_2$ defineres et skalarprodukt ved

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Bestem en basis for $Q_2^{\perp}$ - det ortogonale komplement til $Q_2$ i $P_2$.

Udregn endelig den ortogonale projektion af

$$q(t) = (t-1)^2$$

på $Q_2$.

2. For hvert talpar $(a,b) \in R^2$ er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 5w &= 2 \\ x - 2y - z + 5w &= -1 \\ y - 2z + aw &= 1 \\ -y + z + 6w &= b \end{aligned}$$

Angiv for hvert talpar $(a,b)$ løsningsmængden til ligningssystemet.
Opskriv specielt løsningsmængden svarende til $(a,b) = (-6,1)$.

3. En lineær afbildning $F:R^3 \to R^3$ er fastlagt ved matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem spektret for $\underline{A}$ og vis, at $\underline{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Betegner a den egenværdi, som har algebraisk multiplicitet større end 1, og er $\vec{v}$ en tilhørende egenvektor, fastlæg da en vektor $\vec{w}$, således at

$$F(\vec{w}) - a\vec{w} = \vec{v}$$

Er $\vec{u}$ endnu en egenvektor for F, vis da, at $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ udgør en basis for $R^3$, og fastlæg den til F svarende matrix i denne basis.

4. Idet $C^\infty$ betegner mængden af alle vilkårligt ofte differentiable funktoner på R, er en liniær differentialoperator $L:C^\infty \to C^\infty$ defineret ved

$$L = D^4+aD^3+bD^2-aD+cD^0$$

hvor $a,b,c \in R$.

Fastlæg samtlige talsæt (a,b,c), således at funktion $\varphi:R \to R$ givet ved

$$\varphi(t) = te^t$$

tilhører N(L) - nulrummet for L.

Bestem det af talsættene (a,b,c), hvor tillige funktionen $\psi:R \to R$ givet ved

$$\psi(t) = e^{2t}$$

er egenfunktion svarende til egenværdien 9.
Angiv med det fundne talsæt (a,b,c) en basis for N(L).



SKRIFTLIG EKSAMEN
I

---

LINEÆR ALGEBRA

---

Den 6. juni 1985, kl. 10.00-14.00

Alle hjælpemidler er tilladt.
En fuldstændig besvarelse kræver, at alle opgaver er korrekt besvarede.

OPGAVE 1. Vi betragter de to reelle ligningssystemer

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= a+1 \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= a+b \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= a-b+3 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= -2(a+1) \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= 3a-2b \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= -2a-3b-1 \end{aligned}$$

hvor $a \in R \setminus \{-1\}$, $b \in R$.

(1) Vis, at begge ligningssystemer har løsninger.

(2) Vis, at for søjlen $\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ har ligningssystemet

$$\begin{aligned} -(a+1)x_2 + (a+1)x_3 - (a+1)x_4 &= s \\ ax_1 + (a-b)x_2 + bx_3 + (2a-b)x_4 &= t \\ (1-b)x_1 - (a+b+1)x_2 + (a+2)x_3 - (a+2b)x_4 &= u \end{aligned}$$

løsninger netop hvis der findes $\lambda, \mu \in R$, for hvilke

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a+1 \\ a+b \\ a-b+3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2(a+1) \\ 3a-2b \\ -2a-3b-1 \end{pmatrix}$$

(3) Hvad er dimensionen af nulrummet for matricen

$$\begin{pmatrix} o & -(a+1) & a+1 & -(a+1) \\ a & a-b & b & 2a-b \\ 1-b & -(a+b+1) & a+2 & -(a+2b) \end{pmatrix} \; ?$$

(Begrund svaret.)

OPGAVE 2 Lad A være en reel 4x4-matrix. Det forudsættes at A som matrix for en afbildning af $R^4$ ind i $R^4$ (udstyret med standardbasen) har egenværdierne

a): -1 med (1,o,o,o) og (o,1,o,o) som hertil hørende egenvektorer

b): -2 med (o,-2,1,o) som tilhørende egenvektor

c): $-\frac{1}{2}$ med (o,o,-2,-3) som tilhørende egenvektor.

→



(1) Bestem A.

(2) Vis, at A kan diagonaliseres, og angiv en basisskiftematrix der fører A over i en diagonalmatrix.

OPGAVE 3 Lad $P_n[o,1]$ være vektorrummet (over R) af alle reelle polynomier af højst n'te grad på intervallet [o,1]. Vi definerer en afbildning F: $P_n[o,1] \to R^{n+1}$ ved for $p \in P_n[o,1]$ at sætte

$$F(p) = (p^{(n)}(o),\, p^{(n-1)}(o), \ldots, p'(o), p(o)),$$

hvor $p^{(k)}(o)$ angiver den k'te afledede af polynomiet p i punktet o.

(1) Vis, at F er en isomorfi mellem $(P_n[o,1],+,\cdot,R)$ og $(R^{n+1},+,\cdot,R)$

(2) Idet vi minder om, at de n+1 polynomier $1,x,x^2,\ldots x^n$ udgør en basis for $P_n[o,1]$, ønskes angivet den til F hørende matrix, når $P_n[o,1]$ er udstyret med denne basis og $R^{n+1}$ med standardbasen.

Vi forestiller os dernæst $P_n[o,1]$ forsynet med "det sædvanlige skalarprodukt" i funktionsrum:

$$(p|q) = \int_o^1 p(t)q(t)\,dt$$

(3) Vis, at der gælder

$$(p|q) = \sum_{i=o}^{n}\sum_{j=o}^{n} \frac{a_i b_j}{i+j+1},$$

hvis $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$,
$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o$,
og at der for vilkårlige sæt $(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_o)$ i $R^{n+1}$ gælder uligheden

$$\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=o}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geq o.$$

(4) Godtgør endelig, at F ikke er en isometri, idet også $R^{n+1}$ forsynes med det deri sædvanlige skalarprodukt

→

$$(x|y) = \sum_{i=o}^{n} x_i y_i,$$

hvor $x = (x_o, x_1, \ldots x_n)$, $y = (y_o, y_1, \ldots y_n)$.

OPGAVE 4 (1) Vis, at matricen

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & o \\ 2a & a & a-1 \\ a+1 & o & a \end{pmatrix}, \quad a \in R$$

har 1 som egenværdi.

(2) Bestem dernæst de $a \in R$, for hvilke $A(a)$ har tre forskelle reelle egenværdier.





Skriftlig eksamen i LINEÆR ALGEBRA JAN 86

Der er 3 opgaver

Alle hjælpemidler er tilladte

## OPGAVE 1

I rummet er givet punkterne A, B og C, som i forhold til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem har koordinatsættene

$$(-4, 0, -\sqrt{2}), \quad (2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2}), \quad (2, -2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

Bevis at trekant ABC er ligesidet.

Ved midtnormalplanen for to punkter P og Q (med $P \neq Q$) forstås den plan, som går gennem midtpunktet af linjestykket PQ og er vinkelret på dette.

Vis at midtnormalplanen for A og B skærer midtnormalplanen for A og C i z-aksen, og at ethvert punkt på z-aksen har samme afstand fra hvert af punkterne A, B og C.

Lad D betegne det punkt med positiv z-koordinat, for hvilket ABCD er et ligesidet tetraeder, og lad E betegne projektionen af A på siden BCD.

Bestem koordinaterne for D og E.

Lad $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{w}$ være de vektorer, som udgøres af koordinatsætterne for A, B og C.

Vis at $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ er en basis for $R^3$.

Lad F være en afbildning af rummet ind i sig selv, for hvilken

$$F(A) = A, \quad F(B) = C, \quad F(C) = D.$$

Lad f betegne den afbildning, som udtrykker F i koordinater i forhold til basen $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. Det antages, at f er lineær.

Bestem matricen for f. Bestem også en matrix for f i forhold til standardbasen i $R^3$.

Lad $\ell$ være linjen gennem A og E.

Vis at $\ell$ er mængden af fixpunkter*) for F.

Vis at F er bijektiv, og at $F^{-1} = F \circ F$.

*) P er fixpunkt for F $\Leftrightarrow$ $F(P) = P$ (definition)





# OPGAVE 2

Lad $n, p \in N$.

Lad A være en kompleks $n \times n$ matrix og sæt $B = A^p$.

1° Bevis at det for alle komplekse tal $\lambda$ gælder, at $\lambda^p$ er egenværdi for B, hvis $\lambda$ er egenværdi for A.

Lad $\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^n$ være en basis for $C^n$, og lad f være den lineære afbildning af $C^n$ ind i $C^n$, som er bestemt ved, at

$$f(\underline{u}^1) = \underline{u}^2,\ f(\underline{u}^2) = \underline{u}^3,\ \dots,\ f(\underline{u}^{n-1}) = \underline{u}^n,\ f(\underline{u}^n) = \underline{u}^1.$$

2° Angiv i forhold til basen $\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^n$ en matrix for hver af de lineære afbildninger $f, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$

($f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc)

3° Bevis (ved at benytte 1° og 2°), at det for alle komplekse tal $\lambda$ gælder, at $\lambda^n = 1$, hvis $\lambda$ er egenværdi for f.

4° Bevis at også det omvendte gælder, nemlig at enhver kompleks løsning $\lambda$ til ligningen $\lambda^n = 1$ er en egenværdi for f, og konstruer en egenvektor, der er eksplicit udtrykt ved $\lambda$.

5° Angiv en basis bestående af egenvektorer for f i tilfældet $n=4$.

# OPGAVE 3

Lad $A$ være matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad for ethvert $t \in \mathbb{R}$, $B_t$ være matricen

$$\begin{pmatrix} 2-t & 4-t & 2-2t \\ 1 & 2 & 1 \\ t & t & 2t \end{pmatrix}$$

De lineære afbildninger $f$, $\tilde{f}$, $g_t$ og $\tilde{g}_t$ er definerede ved, at de i forhold til standardbaserne har matricerne $A$, $A^*$, $B_t$ og $B_t^*$, respektive.
(Stjernen betegner matrixtransponering)

For en lineær afbildning $T$ betegner $\mathcal{N}(T)$ og $\mathcal{B}(T)$ henholdsvis nulrum og billedrum for $T$.

<u>Bevis inklusionerne (for alle $t \in \mathbb{R}$)</u>

(1) $\mathcal{B}(g_t) \subseteq \mathcal{B}(f)$
(2) $\mathcal{N}(\tilde{g}_t) \supseteq \mathcal{N}(\tilde{f})$

<u>og bestem de værdier af $t$ for hvilke inklusionerne er ægte.</u>

<u>Vis at begge inklusioner er ægte, hvis blot én af dem er ægte.</u>

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Differentialligninger.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor man kan vælge mellem opgaverne 5A og 5B, og en fuldstændig besvarelse omfatter således opgaverne 1-4 samt en af opgaverne 5A og 5B.

onsdag, den 4. januar 1978 kl. o9$^{3o}$ - 13$^{3o}$.
Alle hjælpemidler er tilladt.



1° Der er givet en differentiabel funktion $a:\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$ samt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= -ty+\tfrac{1}{t}a(t)z \\ Dy &= x-(1+a(t))z \\ Dz &= tx+a(t)y \end{aligned}$$

Funktionen $\underline{\varphi}_1:\mathbb{R}_+\sim\mathbb{R}^3$ givet ved

$$\underline{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

vides at være løsning til systemet. Angiv samtlige funktioner $\underline{\varphi}_1$, som opfylder denne betingelse.

2° Løs for $t\in\mathbb{R}_+$ differentialligningen

$$(t^4D^4-3t^2D^2+9tD-9D^0)f(t) = o.$$

Bestem derpå $a\in\mathbb{R}$ således, at funktionen $\varphi:t\sim at^2$ er løsning til differentialligningen

$$(t^4D^4-3t^2D^2+9tD-9D^0)f(t) = t^2$$

Løs endelig differentialligningerne

$$(t^4D^4-3t^2D^2+9tD-9D^0)f(t) = t$$

$$(t^4D^4-3t^2D^2+9tD-9D^0)f(t) = t^3$$

3° Løs differentialligningen

$$(\cos^2tD^2-\cos t\sin tD-D^0)f(t) = 3\frac{\sin t}{\cos^2t}$$

og vis, at den løsning, som går gennem (0,1,1) er af formen

$$g:t\sim \sqrt{2}\,\frac{\sin(t+\frac{\pi}{4})}{\cos^2t}$$

$4^{o}$ Angiv den fuldstændige løsning til differentiallignings-systemet

$$Dx = \tfrac{1}{2}tx-\tfrac{1}{2}y+t$$
$$Dy = (\tfrac{1}{2}t^2-1)x-\tfrac{1}{2}ty+t^2$$

$5A^{o}$ Givet differentialligningssystemet med $a,b \in R\setminus\{o\}$

$$Dx = \quad ay \quad +bz$$
$$Dy = bx+(a-b)y+bz$$
$$Dz = bx+ \; ay$$

Angiv for hvert valg af (a,b) den løsning til systemet, som til t=o går gennem (x,y,z) = (3,1,-1).

$5B^{o}$ Idet a,b er differentiable funktioner, skal man eftervise følgende sætning:

Hvis $\varphi,\psi$ er løsninger til differentialligningen $(D^2+aD+bD^o)f = o$, da vil $\varphi^2,\varphi\psi$, $\psi^2$ være løsninger til differentialligningen

$$(D^3+3aD^2+(2a^2+a'+4b)D+(4ab+2b')D^o)f=o$$

Benyt denne sætning til at løse differentialligningen

$$(D^3+(6tgt-3cott)D^2+(18tg^2t-5+3cot^2t)D+24tg^3tD^o)f=o$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Differentialligninger</u>

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

<u>tirsdag, den 6. juni 1978 kl. $o9^{\underline{oo}}$ - $13^{\underline{oo}}$.</u>

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Løs hver af differentialligningerne

$$(D-2D^{\circ})^3 f(t) = e^{-2t}$$

$$(D-2D^{\circ})^3 f(t) = e^{2t}$$

$$(D-2D^{\circ})^3 f(t) = te^{2t}$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$D^2 \binom{x}{y} = \underline{M}^2 \binom{x}{y}$$

hvor $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. For $t>o$ er funktionen $\varphi: t \sim t^{-1}\ln t$ løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+(a+b)tD+bD^{\circ})f = o.$$

Benyt dette til at fastlægge $(a,b)\in R^2$.
Bestem derpå den løsning til differentialligningen, som går gennem $(t,y,y',y'') = (1,1,0,0)$.

4. Løs differentialligningen

$$D\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{y} \\ \frac{t}{x} + \frac{2ty}{t^2-4} \end{pmatrix}$$

og angiv den maksimale løsning, som går gennem $(t,x,y) = (0,1,2)$.



5. En integralligning har formen

$$u(t) = \sin 2t - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|t-x|u(x)dx.$$

Idet $u: R \sim R$ forudsættes to gange differentiabel, skal ligningen omskrives til en differentialligning med passende randbetingelser.
Løs differentialligningen.

6. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$Dx = x+y-z$$
$$Dy = -x+2y \quad +t$$
$$Dz = -x+y+z$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

torsdag, den 4. januar 1979 kl. $10^{\underline{oo}}$ - $14^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Bestem den løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f = o$$

som opfylder betingelserne

$$f(1) = o,\ f'(1) = o \text{ og } f''(1) = -9$$

Fastlæg derpå for t>o den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^2$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^{-2}$$

2. Idet man har $a \in R$ og matricen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

skal man, idet $\underline{M}^t$ betegner den transponerede matrix til $\underline{M}$, bestemme a, således at differentialligningen

$$D\underline{\varphi} = (\underline{M} + a\underline{M}^t)\underline{\varphi}$$

har løsningsmængden

$$\left\{ \underline{\psi} \in C^\infty \;\middle|\; \underline{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$$

3. Vis, at funktionen $\varphi: t \curvearrowright e^{at^2}$ for passende valg af $a \in R$ vil være løsning til differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^o)f(t) = o$$

og bestem endnu en løsning til ligningen.

OPGAVEN FORTSÆTTES

Løs derpå differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^0)f(t) = t^4-3.$$

4. Angiv for t>o den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(tD^3-2D^2+4tD-8D^0)f(t) = 4t$$

5. Løs differentialligningssystemet

$$y^2Dy = \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{2}{3}e^x$$

$$Dx = 1 + 2y^3e^{-x}$$

og angiv den maksimale løsning til systemet gennem $(t,x,y) = (o,3\ln 2,2)$

6. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = -2x+2y+ z$$
$$Dy = -6x+ y+6z$$
$$Dz = -3x+2y+2z$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

fredag, den 8. juni 1979 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

1. Bestem den eller de reelle funktioner, som på et delinterval af $R_+$ tilfredsstiller ligningen

$$tf(t) = 1 + \int_1^t (f(u))^2 u^p du,$$

når $p \in R_+$ og $p \neq 1$.

2. Fastlæg for $t>o$ den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = o.$$

Bestem endvidere en partikulær løsning til hver af ligningerne

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = 1$$

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = t$$

$$(t^3D^3+t^2D^2)f(t) = \ln t$$

3. Inden for kræftforskning har man ud fra omfattende observationer godtgjort, at volumenet V af en kræftsvulst - som funktion af tiden t - i det væsentlige vokser i overensstemmelse med differentialligningen

$$V'(t) = \lambda e^{-\alpha t} V(t)$$

Her er $T_o = \frac{\ln 2}{\lambda}$ fordoblingstiden ved uhæmmet cellevækst og $\alpha$ en individ- og kræfttypeafhængig dæmpningsparameter.

Løs differentialligningen, når $V(o)=V_o$. Bestem derpå den til V svarende (tidsafhængige) fordoblingstid $T_\alpha$ samt det interval $I \subset R_+$, hvor $T_\alpha < +\infty$.

Vis endelig, at $\lim_{\alpha \to o} T_\alpha = T_o$.



4. For en to gange differentiabel funktion $\varphi: R \to R_+$ gælder, at funktionerne $\varphi^2$ og $\varphi^{-1}$ vil være løsninger til differentialligningen

$$\left(D^2 - \frac{1}{t(1+t^2)} D - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} D^o\right) f(t) = o$$

Bestem på denne baggrund den fuldstændige løsning til ligningen. Løs derpå ligningen

$$\left(D^2 - \frac{1}{t(1+1^2)} D - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} D^o\right) f(t) = t^2$$

5. Bestem samtlige <u>reelle</u> løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= \phantom{-3x} \; 3y \\ Dy &= -3x \phantom{3y} + 4z \\ Dz &= \phantom{-3x} -4y \end{aligned}$$

6. Der er givet en differentialligning

(1) $\quad (g_2D^2+g_1D+g_oD^o)f = h$

hvor $h, g_o, g_1, g_2 \in C^o(I)$, $I \subseteq R$.

Endvidere forudsættes, at $g_1 \in C^1(I)$ og $g_2 \in C^2(I)$, samt at

$$\forall t \in I: \; D^2g_2(t) - Dg_1(t) + g_o(t) = o.$$

Vis da, at der findes funktioner a,b således, at (1) er ensbetydende med

(2) $\quad D(aD+bD^o)f = h$

på hele I. Angiv explicit a og b udtrykt ved $g_o, g_1$ og $g_2$.

Fastlæg på denne baggrund den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$((t^2+2)D^2+4tD+2D^o)f(t) = \sin t.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 7. januar 1980 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Bestem det reelle tal a således, at funktionen $\varphi: R_+ \to R$ er defineret ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0)f = o$$

$t>o$. og fastlæg - med den fundne værdi af a - den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

Idet $L = t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0$ bestem da den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf = t^3$$
$$Lf = t$$
$$Lf = t^2.$$

2. Vis, at funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t}$$

opfylder Riccatiligningen

$$Dq + q^2 + \frac{2}{t}q - 1 = o$$

Benyt dette til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 + \frac{2}{t}D - D^0)f = 1 - \frac{1}{t}$$

for $t>o$.

3. Funktionen $f: R \to R$ forudsættes to gange differentiabel samt at være løsning til integralligningen

$$t^2 \int_1^t f(s)\,ds - t \int_1^t s f(s)\,ds = t f(t) - t^2$$

Omskriv integralligningen til en differentialligning med startbetingelser.

Bestem derpå den funktion, som tilfredsstiller integralligningen.

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x - y + 2z + t \\ Dy &= 2x - 2y + 2z + t \\ Dz &= x + 2y - z + t \end{aligned}$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 2x + y + w \\ Dy &= x + y + 2z + w \\ Dz &= 2y + z \\ Dw &= x - y + 2w \end{aligned}$$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

onsdag, den 4. juni 1980 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem det reelle tal a således, at funktionen $\varphi: R_+ \to R$ er defineret ved

$$\varphi(t) = t^2 \ln t$$

er løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0)f = o$$

$t>o$, og fastlæg - med den fundne værdi af a - den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

Idet $L = t^3D^3+at^2D^2-2atD+2aD^0$ bestem da den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$Lf = t^3$$
$$Lf = t$$
$$Lf = t^2.$$

2. Vis, at funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t}$$

opfylder Riccatiligningen

$$Dq + q^2 + \frac{2}{t}q - 1 = o$$

Benyt dette til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 + \frac{2}{t}D - D^0)f = 1 - \frac{1}{t}$$

for $t>o$.



3. Funktionen $f: R \to R$ forudsættes to gange differentiabel samt at være løsning til integralligningen

$$t^2 \int_1^t f(s)ds - t\int_1^t sf(s)ds = tf(t) - t^2$$

Omskriv integralligningen til en differentialligning med startbetingelser.

Bestem derpå den funktion, som tilfredsstiller integralligningen.

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x-y+2z+t \\ Dy &= 2x-2y+2z+t \\ Dz &= x+2y-z+t \end{aligned}$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 2x+y+w \\ Dy &= x+y+2z+w \\ Dz &= 2y+z \\ Dw &= x-y+2w \end{aligned}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 5 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 opgaver er korrekt besvaret.

mandag, den 18. januar 1982 kl. 10.oo - 14.oo.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Funktionerne $\varphi,\psi: R_+ \to R_+$ givet ved, at

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \text{ og } \psi(t) = t$$

antages at være løsninger til differentaialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+btD+(a+b)D^o)f(t) = o$$

hvor $a,b\in R$ og $t>o$.
Fastlæg på denne baggrund a og b samt den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Bestem derpå (med de fundne værdier af a og b) en partikulær løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+btD+(a+b)D^o)f(t) = t$$

2. Løs ved en passende transformation hver af ligningerne

$$y' = 2\frac{y}{t} + 1 \quad \text{for } t>o$$

$$y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 - 2 \text{ for } t>o.$$

3. Funktionen $\varphi: R_+ \to R$ antages at være to gange differentiabel. Videre er funktionen $\psi: R_+ \to R$ defineret ved

$$\psi(t) = t^2\varphi(t).$$

Når funktionerne $\varphi$ og $\psi$ vides at være løsninger til differentialligningen $(t>o)$

$$(D^2-(2t+\frac{1}{t})D+t^2D^o)y(t) = o$$

skal man fastlægge $\varphi$ samt den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Bestem derpå den løsning til differentialligningen

$$(D^2-(2t+\frac{1}{t})D+t^2D^o)y(t) = t^4$$

som indeholder linieelementet $(\sqrt{2},6,\sqrt{2})$.

4. Fastlæg den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$x' = 3x \quad +2z$$
$$y' = 2x+y$$
$$z' = \frac{1}{2}(y-x)+3z$$

5. Der ønskes en beskrivelse af forløbet af løsningskurverne til differentialligningssystemet

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

hvor

$$f(x,y) = \frac{x}{5}(10-x) - \frac{xy}{x+2}$$

$$g(x,y) = y\left(1-\frac{2y}{x}\right)$$

efter nedenstående retningslinier.

a) Bestem de punkter (a,b), hvor løsningerne til systemet er i ligevægt, dvs. hvor $x' = 0$ og $y' = 0$.

b) Med henblik på at lave en lineær tilnærmelse til funktionsparret (f,g) skal man udregne funktionalmatricen

$$\begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

c) Er (a,b) et ligevægtspunkt fastlægges

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \\ g'_x(a,b) & g'_y(a,b) \end{pmatrix}$$

og derpå løses ligningssystemet

OPGAVEN FORTSÆTTES



$$(2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(PS: Løsningerne bliver ikke "pæne", men beskriv det karakteristiske forløb).

d) Ligningssystemet (2) kaldes en linearisering af (1) omkring ligevægtspunktet (a,b). Hvad kan man ud fra løsningskurverne til (2) slutte om forløbet af løsningskurverne til (1) i nærheden af (a,b)?

Skriftlig eksamen i emnekredsen

DIFFERENTIALLIGNINGER

MANDAG DEN 18 JANUAR
1982
kl $10^{00} - 14^{00}$



## SKRIFTLIG EKSAMEN I DIFFERENTIALLIGNINGER

### OPGAVE 1

Bestem den fuldstændige løsning til

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{|y|}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

### OPGAVE 2

Funktionerne cosh og sinh er defineret ved

$$\cosh(t) = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}); \quad \sinh(t) = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

A. Bevis at

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

B. Bevis "additionsformlerne"

$$\cosh(t+u) = \cosh(t)\cosh(u) + \sinh(u)\sinh(t)$$
$$\sinh(t+u) = \cosh(t)\sinh(u) + \sinh(t)\cosh(u)$$

C. Om to differentiable funktioner $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oplyses at

1: $f(t+u) = f(t)f(u) + g(t)g(u)$
$\quad g(t+u) = f(t)g(u) + g(t)f(u)$

2: $f(0) = 1,\ f'(0) = 0;\ g(0) = 0,\ g'(0) = 1$

Vis at $f = \cosh$ og $g = \sinh$.

FORTSÆTTES

## OPGAVE 3

Løs differentialligningssystemet

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

---

Ialt 3 opgaver



Skriftlig eksamen

i emnekredsen

DIFFERENTIALLIGNINGER

Varighed 4 timer

Alle hjælpemidler er tilladt.

## OPGAVE 1.

En 2.ordens lineær, inhomogen differentialligning af formen

$$f''(t) + p(t)\, f'(t) + q(t)\, f(t) = r(t),$$

hvor $p$, $q$ og $r$ er reelle funktioner på $]0,\infty[$, vides at have følgende løsninger på $]0,\infty[$:

$$f_1(t) = -\cos^2 t - t^2$$

$$f_2(t) = -\cos^2 t$$

$$f_3(t) = -\cos^2 t - t$$

(1) Find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen.

(2) Bestem koefficientfunktionerne $p$, $q$ og $r$ på $]0,\infty[$

(3) Find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$f''(t) + p(t)\, f'(t) + q(t)\, f(t) = t$$

på intervallet $]0,\infty[$ .



## OPGAVE 2.

Lad $A$ angive matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Angiv $e^A$.

## OPGAVE 3.

Om funktionerne $g: ]0,1[ \to \mathbb{R}$, $h: ]0,1[ \to \mathbb{R}$ vides, at

$gh$ er løsning til differentialligningen

$$f'(x) = -2x\left(1 + \frac{1}{1-x^2}\right) f(x), \quad x \in ]0,1[$$

med $(gh)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16} e^{-\frac{1}{4}}$

og at

$g + h$ er løsning til differentialligningen

$$f'(x) = -xf(x), \quad x \in ]0,1[$$

med $(g+h)(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{8}}$

Bestem $g$ og $h$.

OPGAVE 4.

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(t,x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad t \leq x \\ t & \text{for} \quad t > x \end{cases}$$

(1) Løs differentialligningen

$x'(t) = f(t, x(t))$ på $\mathbb{R}$

(2) Vis, at der gennem ethvert punkt $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ går netop én løsning til differentialligningen.



EKSAMEN I EMNEKREDSEN

# DIFFERENTIALLIGNINGER

ONSDAG DEN 16 JUNI 82 KL 10 - 14

Alle hjælpemidler er tilladt.

## OPGAVE 1

A: Om funktionerne $f$ og $g$ vides:

1) Det er differentiable funktioner på $\mathbb{R}$

2) $f(0) = 1, \quad g(0) = 0$

$f'(0) = a, \quad g'(0) = b$

3) $\forall t, s \in \mathbb{R}$:

$$f(t+s) = f(t)f(s) - g(t)g(s)$$
$$g(t+s) = f(t)g(s) + g(t)f(s)$$

Vis herudfra at

$$f(t) = e^{at}\cos bt$$
$$g(t) = e^{at}\sin bt$$

B: Løs differentialligningen

$$x'(t) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x(t) + t\, e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} t}$$

med begyndelsesbetingelsen

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

VEND

## OPGAVE 2

A: Løs de to differentialligninger

(1) $\frac{du}{dt} = u^2; \qquad (t,u) \in R^2$

(2) $\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{1+4t}v; \qquad (t,v) \in R^2,\ t \neq -\frac{1}{4}$

B: Det oplyses at

hvis $(x,y)$ er en løsning til systemet:

$$(y-x)\frac{dx}{dt} = x^2y^2 + \frac{4x(x+y)}{1+4t}$$

$$(x-y)\frac{dy}{dt} = x^2y^2 + \frac{4y(x+y)}{1+4t}$$

$$(t,x,y) \in \{(t,x,y) \mid x > y\}$$

da er $(u,v) = (xy, x+y)$ en løsning til systemet bestående af (1) og (2).

Benyt denne oplysning til at undersøge, hvilke løsninger $(x,y)$ til (3), der opfylder betingelsen

$$(x(0), y(0)) = (4,-1)$$

C: Bevis oplysningen i B

## OPGAVE 3

Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \text{maximum}(x,y) = \begin{cases} x & \text{når } x \geq y \\ y & \text{når } x \leq y \end{cases}$$

SÆTTET BESTÅR AF TRE OPGAVER OG FYLDER TO SIDER



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger.

Der stilles ialt fem opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis fire opgaver er korrekt besvaret.

fredag den 6. januar 1984, kl. 10.00 - 14.00.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Differentialligningen

$$y' = ay\cdot(1-\ln(by))$$

er for $a>o$ og $o<b\ll 1$ en model for en populations udvikling.

Godtgør ud fra modellen, at populationen vil have en bærekapacitet - dvs. en øvre grænse for, hvor mange individer, der forbliver i populationen.

Fastlæg til slut den løsning til differentialligningen, som indeholder $y(o)=1$.

2. For hver værdi af $\lambda\in\mathbb{R}$ er givet et differentialligningssystem

$$x' = \lambda x+y-x^3$$

$$y' = \lambda y-x-y^3$$

Det oplyses, at systemet for $\lambda<2\sqrt{2}$ kun har et ligevægtspunkt. For $\lambda=2\sqrt{2}$ opstår fire stabile ligevægtspunkter, og for $\lambda>2\sqrt{2}$ opløses hvert af disse i to ligevægtspunkter - et stabilt og et ustabilt (Dette ønskes ikke bevist).

Vis, at punktet (o,o) for alle $\lambda$ vil være et ligevægtspunkt, som for $\lambda<o$ er stabilt og for $\lambda>o$ er er ustabilt.

Vis dernæst, at systemet for $\lambda=o$ undergår en Hopf bifurkation - dvs. at der for $o<\lambda(<2\sqrt{2})$ er en stabil grænsecykel omkring det ustabile ligevægtspunkt.

Vis til slut, at såvel grænsecykel $(o<\lambda<2\sqrt{2})$ som de resterende ligevægtspunkter $(\lambda\geqq 2\sqrt{2})$ vil ligge i cirkelringen

$$\lambda\leq x^2+y^2\leq 2\lambda.$$



3. Der findes for hvert reelt a fastlagt det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x \quad\quad +(a-1)z \\ y' &= \quad\quad -y \quad -z \\ z' &= -(a+1)x+y \quad -z \end{aligned}$$

Bestem for hvert a rødderne i det karakteristiske polynomium, som svarer til systemet.

Opstil derpå et sæt af lineært uafhængige <u>reelle</u> (vektor-) funktioner, som udspænder den fuldstændige løsning til systemet. (PS: Husk også at behandle tilfældet a=o).

4. En meget simpel model for en pladespiller er beskrevet ved differentialligningerne

$$x' = -\mu x+xy$$

$$y' = 1-\lambda y-x^2$$

$(\lambda,\mu>o)$, idet x står for effekten af dynamoen, og y står for vinkelhastigheden af den roterende skive.

Undersøg denne models stabilitetsforhold - udtrykt ved $\lambda$ og $\mu$. Der ønskes en seperat redegørelse for det tilfælde, hvor $\lambda\mu = 1$.

5. Fastlæg den fuldstændige løsning til hver af ligningerne

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}$$

$$y''' + y'' + y' + y = \cos t$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles fire opgaver, som alle skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

mandag, den 4. juni 1984 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle hjælpemidler er tilladt.



1. Der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^3 + aD^2 + bD + cD^0$$

hvor a, b og c er reelle konstanter. Fastlæg disse konstanter, således at differentialligningen

$$Lf = o$$

har funktionerne $t \rightsquigarrow te^t$ og $t \rightsquigarrow e^{-2t}$ som løsninger. Udregn dernæst - med de fundne værdier for a, b og c - den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$Lf = t(e^t + e^{-t}).$$

2. For alle reelle værdier af $\lambda \neq o$ er givet differentialligningssystemet

$$x' = \lambda y^3 - xy^2$$
$$y' = -\lambda x + x^2 y$$

Godtgør, at systemet altid har tre ligevægtspunkter, og redegør for systemets stabilitetsforhold i nærheden af disse ligevægtspunkter.

3. Bestem samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -2y + z \\ z' &= -2z + w \\ w' &= x - 2w \end{aligned}$$

4. En differentialligningsmodel for et "rovdyr-byttedyr"-system er ved passende scalering transformeret til differentialligningssystemet

$$x' = \frac{x}{72}(57-9x) - \frac{x}{y(x+1)}$$

$$y' = y\left(1 - \frac{5y}{x}\right) .$$

Giv en analyse af systemets stabilitetsforhold ved bl.a. at vise, at systemet har to (relevante) ligevægtspunkter, hvoraf et er stabilt, og et er et sadelpunkt.



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

<u>Differentialligninger</u>.

Der stilles tre opgaver, som <u>alle</u> skal være korrekt besvaret, hvis besvarelsen skal anses for fuldstændig.

<u>mandag, den 7. januar 1985 kl. 10$^{\underline{00}}$ - 14$^{\underline{00}}$</u>.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Løs for $t>o$ differentialligningssystemet

$$
\begin{aligned}
Dx &= x + ty + z \\
tDy &= 2x - y - 2z \\
Dz &= x - ty + z
\end{aligned}
$$

   således at punktet $(0,2,0)$ for $t=1$ tilhører løsningen.

2. Idet der er givet den lineære differentialoperator

$$L = D^4 - D^0$$

   skal den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$Lf = o$$

   opskrives.
   Find dernæst en partikulær løsning til hver af ligningerne

$$Lf_1 = e^{2t}, \quad Lf_2 = e^t$$

$$Lf_3 = te^{-t}, \quad Lf_4 = e^t \cos t$$

$$Lf_5 = \sin t.$$



3. For alle $r>o$ er givet et differentialligningssystem

$$
\begin{aligned}
x' &= 9y - 9x \\
y' &= rx - y - xz \\
z' &= xy - 4z
\end{aligned}
$$

   a. Godtgør, at systemet er uændret under transformationen $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$
   b. Fastlæg systemets ligevægtspunkter.
   c. Godtgør ved en linearisering af systemet omkring hvert af ligevægtspunkter, at $(o,o,o)$ for $r>1$ ikke er stabilt, men at de to øvrige ligevægtspunkter for $1<r<36$ vil være stabile.
   d. Vis, at $(o,o,o)$ for $r \leq 1$ vil være globalt stabilt. (Vink: Vis, at $V = rx^2+9y^2+9z^2$ vil være en Liaponov-funktion).

Skriftlig eksamen i matematik,
vinteren 1977/78.

Emnekreds: statistik og sandsynlighedsregning.

Opgave 1.

På en fabrik arbejder man i tre skift: morgenskift, eftermiddagsskift og aftenskift. En stikprøve fra produktionen i hver af de tre skift viser, at af 200 undersøgte enheder var antallet af defekte enheder henholdsvis 12, 10 og 23. Kan man konkludere noget om, hvorvidt arbejdstidens beliggenhed påvirker kvaliteten af de fremstillede produkter ?

Opgave 2.

Lad $f$ være en funktion af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ af formen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ c(\theta)\, x^{2\theta-1} & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{for } 1 \leq x \end{cases},$$

hvor $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$.

A. Vis at man kan vælge $c(\theta)$, således at $f$ er tæthed for en sandsynlighedsfordeling på $\mathbb{R}$. - I det følgende tænkes $c(\theta)$ valgt på denne måde.

(fortsættes)



Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være stokastisk uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, der følger en fordeling givet ved tætheden $f$, og lad endvidere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observationer af $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

B. Opskriv likelihoodfunktionen.

C. Estimer $\theta$.

D. Opstil kvotientteststørrelsen for hypotesen $H_0$: $\theta = 1$.

Opgave 3.

Ved en undersøgelse af forureningen i en fjord har man på tre vanddybder foretaget to vandprøver, hvori man bestemte koncentrationen af coli-bakterier (der kan anvendes som et mål for vandets forurening). Resultaterne fremgår af nedenstående tabel.

Koncentration af coli-bakterier i tre vanddybder.

| dybde | 0 m | 4 m | 8 m |
|---|---|---|---|
| konc. | 2.15 | 2.15 | 2.00 |
| | 2.56 | 1.95 | 1.65 |

A. Opstil en model for disse data.

B. Undersøg hvordan vandforureningen afhænger af dybden.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 4.

På et bestemt locus hos billen Tetraopes tetraophthalmus findes tre allelle gener A, B og C. Der er derfor seks forskellige genotyper:

AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Alle disse seks genotyper kan skelnes ved elektroforese, så der er også seks fænotyper.

A. Vis at hvis der i en population er tilfældig parring og ingen selektion med hensyn til dette system, så må man forvente, at genotyperne fordeler sig i forholdet

$$p^2 : 2pq : 2pr : q^2 : 2qr : r^2 ,$$

hvor $p+q+r = 1$ , og hvor $p$, $q$ og $r$ betegner genfrekvensen af henholdsvis A, B og C -genet.

En population, hvor forholdet mellem de seks genotyper er på denne form, siges at være i Hardy-Weinberg-ligevægt.

Fra en population af biller på Long Island blev der indsamlet 287 biller, og disse blev klassificeret efter genotype således:

| AA | AB | AC | BB | BC | CC |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 85 | 16 | 99 | 66 | 12 |

B. Undersøg om denne population er i Hardy-Weinberg-ligevægt.



Opgaver til skriftlig eksamen i
Talsystemets opbygning, 3. juni 1981

Opgaverne tænkes løst inden for den opbygningsramme, som er afstukket af teksten til kurset i talsystemets opbygning, foråret 1981. Hvis en anden ramme vælges, præciseres denne.

Varighed: 4 timer
Alle hjælpemidler tilladt

---

Opgave 1    I mængden $D = Q\times Q$ defineres kompositioner $\oplus$ og $\odot$ ved

$$(a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$

og

$$(a_1,a_2) \odot (b_1,b_2) = (a_1b_1,\ a_1b_2+a_2b_1)$$

(1) Vis, at $(D,\oplus,\odot)$ er en kommutativ ring med ételement, hvori nulreglen ikke gælder.

(2) Bestem et dellegeme $(M,\oplus,\odot)$ af $(D,\oplus,\odot)$, som er isomorft med $(Q,+,\cdot)$.

(3) Godtgør, at hvis $(Q,+,\cdot)$ identificeres med $(M,\oplus,\odot)$ ved hjælp af isomorfien, kan ethvert element i D skrives som

$$(a_1,a_2) = a_1 + \rho a_2,$$

hvor $\rho = (o,1)$ og $\rho^2 = (o,o)$

Opgave 2    Lad A være en delmængde af de naturlige tal, $\mathbb{N}$, og lad A have egenskaben

(a) $\forall m \in \mathbb{N}: S(m) \in A \Rightarrow m \in A$

(S betegner efterfølgerfunktionen i $\mathbb{N}$)

(1) Vis, f.eks. ved induktion, at hvis A opfylder (a), da også

(b) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: m \in A \wedge n \leq m \Rightarrow n \in A$

For $n \in \mathbb{N}$ forstås ved begyndelsesafsnittet hørende til n mængden

$$I_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} .$$

(2) Vis, at (a) og dermed (b) er opfyldt for ethvert begyndelsesafsnit A.

(3) Vis, at en vilkårlig delmængde A af $\mathbb{N}$ er et begyndelsesafsnit, hvis og kun hvis A opfylder følgende to betingelser:

(a) (som ovenfor)

og

(c) der findes et $n_o \in A$, så at $S(n_o) \notin A$.

Opgave 3 En følge $(a_n)_n$ af reelle tal kaldes som bekendt voksende, hvis

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1},$$

og aftagende, hvis

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}.$$

En reel talfølge kaldes monoton, hvis den er voksende eller aftagende.

(1) Vis, at enhver monoton og begrænset talfølge i $\mathbb{R}$ er konvergent i $\mathbb{R}$.

Vi betragter nu afsluttede intervaller i mængden af reelle tal, dvs. mængder af formen

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad , a,b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Ved en intervalindsnævring forstås en følge af afsluttede intervaller $([a_n,b_n])_n$, hvorom det gælder, at $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq ..$ dvs.

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

(2) Vis, at i enhver intervalindsnævring har alle intervallerne mindst ét fælles punkt.

En intervalindsnævring kaldes en ruse, hvis ethvert af indsnævringens intervaller er venstre- eller højrehalvdel af det foregående interval.

(3) Vis, at i en ruse har alle intervaller netop ét fælles punkt. (Benyt f.eks., at

(fortsættes)



$$\forall n \in \mathbb{N}: |b_{n+1} - a_{n+1}| = \tfrac{1}{2} |b_n - a_n|).$$

Opgave 4 Skitser kort hovedlinjerne i opbygningen af talsystemet, fra $\mathbb{N}$, over $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$.

SLUT

Skriftlig eksamen i emnekredsen

GEOMETRI (Differentialgeometri)

Varighed: 4 timer.

Alle hjælpemidler tilladt.



OPGAVE 1.

Betragt for $\alpha > o$ kurven med parameterfremstillingen

$$t \leadsto \underline{r}(t), = (t^{\alpha}, t^{\alpha+1}), \quad t \in ]o,\infty[$$

(1) Skitsér kurven, og vis at den er en overalt vilkårligt ofte differentiabel kurve, der tillige er monoton.

(2) Begrund at kurven har en evolut hvis og kun hvis $\alpha \geq 1$, og find en parameterfremstilling for evolutten.

OPGAVE 2.

Lad $\underline{r}(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u^2\sin 2v)$,
$u \in [o,\infty[,\quad v \in [o,2\pi[$
være en parameterfremstilling for en flade.

(1) Godtgør at fladen er en differentiabel $C^{\infty}$-flade overalt, bortset fra i punktet $(o,o,o)$.

(2) Vis, at parameterskiftet $(u,v) \leadsto (x,y)$, hvor

$x = u\cos v$, $y = u\sin v$,

for $u \in ]o,\infty[$, $v \in [o,2\pi[$ er et tilladt parameterskift, og bestem en parameterfremstilling for fladen med $x$ og $y$ som parametre.

(3) Godtgør, at fladen, bortset fra i punktet $(o,o,o)$, er overalt hyperbolsk krummet.

(4) Find hovedkrumningerne og hovedretningerne i punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

OPGAVE 3.

For $a \in ]0,1[$ er der givet en vilkårligt ofte differentiabel rumkurve ved parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (t,\ \sqrt{a}\cosh t,\ \sqrt{1-a}\cosh t),\quad t \in \mathbb{R}$$

(1) Angiv en naturlig parameterfremstilling for denne kurve, regnet ud fra $t = o$.

(2) Vis, at for ethvert $t \in \mathbb{R}$ ligger positionsvektoren $\underline{r}(t)$ i kurvens oskulationsplan i $t$, og at oskulationsplanen er vinkelret på yz-planen.

(3) Bestem kurvens ledsagende koordinatsystem.

(4) Vis, at kurven ligger i en plan, og angiv en ligning for denne.



SKRIFTLIG EKSAMEN i

GEOMETRI (DIFFERENTIALGEOMETRI)

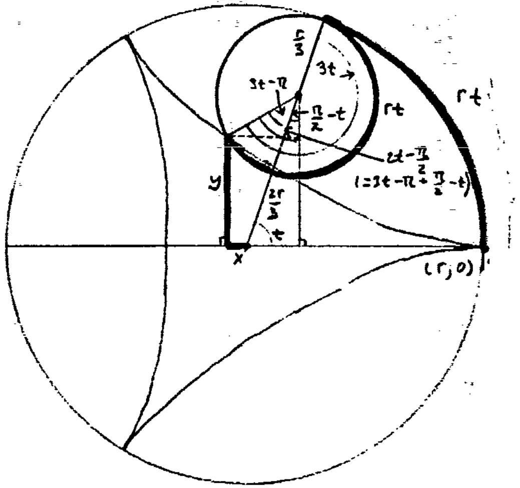
Varighed: 4 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt

August 1982

## OPGAVE 1

Indvendig på en cirkel med radius r ruller en cirkel med radius r/3 i planens positive omløbsretning. Vi betragter den kurve der beskrives af et bestemt punkt på den lille cirkel. Denne kurve kaldes en hypocykloide. Nu rulningen begynder har punktet koordinaterne (r,o).




(1) Begrund, f.eks. med støtte i vedstående figur, at hypocykloiden har parameterfremstillingen

$$x = \frac{2}{3}r \cos t + \frac{r}{3} \cos 2t$$

$$y = \frac{2}{3}r \sin t - \frac{r}{3} \sin 2t$$

($t \in [o, \frac{2}{3}\pi[$). Det oplyses, at denne parameterfremstilling kan udstrækkes til hele intervallet $t \in [o, 2\pi[$.

(2) Vis, at kurven, bortset fra i punkterne svarende til t = o, $t = \frac{2}{3}\pi$ og $t = \frac{4}{3}\pi$, er en vilkårligt ofte differentiabel kurve, og at den for t = o, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ har en spids.

(3) Vis, at buen for $t \in ]o, \frac{2}{3}\pi[$ er monoton og har en evolut for $t \in [o, \frac{\pi}{3}]$. Vis, at den indeholder punktet $(\frac{7}{6}r, \frac{7}{6}\sqrt{3}\, r)$.

## OPGAVE 2

En tre gange differentiabel rumkurve er i et retvinklet koordinatsystem i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I.$$

Rumkurven underkastes en homoteti ud fra koordinatsystemets begyndelsespunkt, dvs. $t \to a\,\underline{r}(t)$ $(a > o)$. Udtryk ved hjælp af buelængde, krumning og torsion for den oprindelige kurve, de tilsvarende størrelser for den nye kurve. Kommentér resultatet.



## OPGAVE 3

En rumkurve har i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\cos t}{\cosh t}, \frac{\sin t}{\sinh t}, \operatorname{tgh} t\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

(1) Vis, at kurven ligger på enhedskugleoverfladen, og find buelængden ud fra det til t = o svarende punkt.

## OPGAVE 4

En flade har parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t,u) = (t-2tu, t^2+u, t^2+u^2), \quad t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}.$$

(1) Vis, at en af fladens parameterkurver er en plan kurve, og angiv en ligning for den plan, hvori den ligger. Vis, at fladen er en differentiabel $C^\infty$-flade overalt, på nær i $(o, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(2) Vis, at fladen i ethvert punkt på parameterkurven svarende til u = o er elliptisk krummet. Bestem hovedkrumninger og hovedretninger i punktet (o,o,o).

SKRIFTLIG EKSAMEN

I EMNEKREDSEN

GEOMETRI

januar 1985

**Varighed: 4 timer**

**Alle hjælpemidler tilladt.**

For at besvarelsen anses for fuldstændig må alle fire opgaver være tilfredsstillende besvaret.



OPGAVE 1

En plan kurve har i polære koordinater ligningen

$$r = 1 - (\theta - \tfrac{\pi}{4})^2, \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

(1) Bestem længden af kurven.

(2) Vis, at kurven er monoton, og at krumningen er maksimal for $\theta = \frac{\pi}{4}$. Bestem det til denne parameterværdi svarende krumningscentrum.

OPGAVE 2

Lad F betegne fladen med parameterfremstillingen

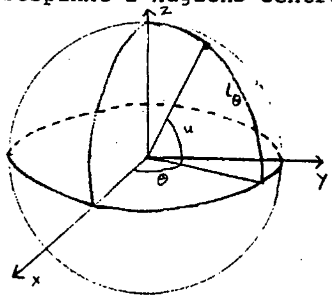
$$\underline{r}(u,v) = \left(v\cos u,\ v\sin u,\ \frac{u}{\frac{\pi}{2} - u}\ln v\right)$$

$$(u,v) \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[ \times \left]0,\infty\right[.$$

Vis, at i ethvert punkt på parameterkurven svarende til v=1 er fladen hyperbolsk krummet.

OPGAVE 3

Lad enhedskuglen være anbragt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i kuglens centrum. Tænk på kuglen som en globus og på punkterne med ikke-negativ tredje-koordinat som den nordlige halvkugle. Ved længdebuen svarende til vinklen $\theta$ forstås storcirkelbuen fra Ækvator til Nordpolen liggende i den halvplan der fremgår af x,z-halvplanen med $x \geq 0$ ved en drejning på vinklen $\theta$ (målt i radian). Denne længdebue, der benævnes $l_\theta$, har følgende parameterfremstilling:




$$l_\theta:\quad \underline{l}_\theta(u) = (\cos\theta\cos u,\ \sin\theta\cos u,\ \sin u)$$
$$u \in [0,\tfrac{\pi}{2}[ \quad (\theta \in [0,\pi[).$$

Vi betragter nu en rumkurve k med parameterfremstillingen

$$k:\ \underline{r}(t) = (\cos\phi(t)\cos t,\ \sin\phi(t)\cos t,\ \sin t)$$

hvor $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$, og hvor $\phi: [0,\frac{\pi}{2}[ \to [0,\pi[$ er en $C^1$-

funktion med $\phi'(t)>0$ for $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$.

(1) Vis, at kurven k er en differentiabel kurve beliggende på enhedskuglens nordlige halvkugle.

(2) Bestem den vinkel hvorunder k skærer længdebuen $l_\theta$ $(\theta\in\phi([0,\frac{\pi}{2}[))$ på den nordlige halvkugle.

(3) Vis, at for $\phi(t) = c\ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2})$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]$, hvor $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, og hvor c er en positiv konstant opfyldende at $c\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)<\pi$, bliver den i (2) omtalte vinkel konstant for alle $\theta\in\phi([0,\frac{\pi}{2}[)$(En konsekvens heraf er, at skib der sejler langs den til det her betragtede $\phi$ svarende kurve k holder en konstant kompaskurs.)

OPGAVE 4

(1) I den projektive plan er givet to forskellige linjer p og q, hvis skæringspunkt betegnes med S. Lad A, B og C være tre forskellige punkter på p og D, E og F tre forskellige punkter på q, så intet af disse seks punkter er sammenfaldende med S. Lad P betegne skæringspunktet mellem linjerne AF og CE og Q skæringspunktet mellem BF og CD.

Ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} p$ fastlægges en projektivitet $\phi$: $p \underset{\wedge}{-} p$. Bestem $\phi(A)$ og $\phi(S)$.

Vis, at $\phi$ er hyperbolsk, hvis P, Q og S ikke ligger på samme linje.

(2) Lad der i den euklidiske plan ganske analogt være givet to forskellige linjer p og q med skæringspunkt S. Lad atter A, B og C være forskellige punkter på p og D, E og F forskellige punkter på q, alle forskellige fra S. Som før betegner P skæringspunktet mellem AF og CE og Q skæringspunktet mellem BF og CD.

Vis, at hvis linjerne AD og BE er parallelle, er også linjerne PQ og AD parallelle.

Opgavesæt slut.



Skriftlig eksamen
i

GEOMETRI

(differentialgeometri og projektiv geometri)

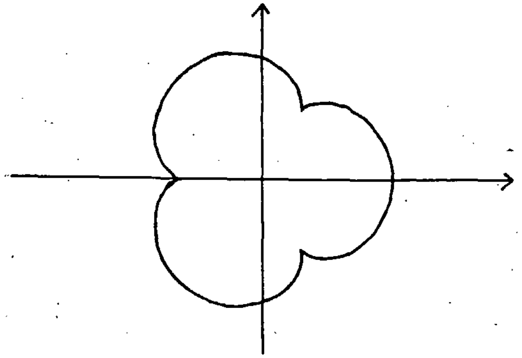
Den 7.juni 85

Alle hjælpemidler er tilladt. Eksamen varer fra kl. 10.00-14.00

En fuldstændig besvarelse forudsætter at alle opgaverne er fuldstændigt besvaret.

OPGAVE 1 En plan kurve har parameterfremstillingen

$$\underline{r}(t) = (\cos t + \tfrac{1}{4}\cos 4t,\ \sin t + \tfrac{1}{4}\sin 4t),\ t \in [o,2\pi[.$$



(1) Vis, at kurvestykket svarende til parameterintervallet $[o, \frac{\pi}{3}[$ er en differentiabel kurve, og bestem buelængden af dette stykke.

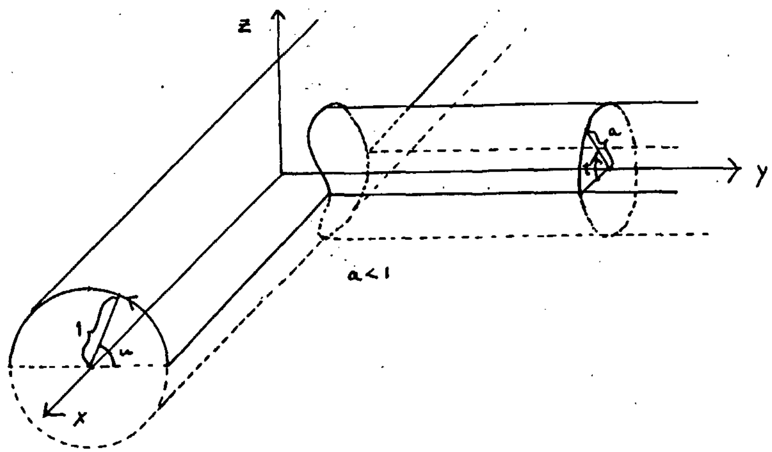
(2) Vis, at det under (1) omtalte kurvestykke har en evolut, og angiv en parameterfremstilling for denne.

OPGAVE 2 I et (x,y,z)-koordinatsystem er givet to cylinderflader med parameterfremstillingerne henholdsvis

$$(x,y,z) = (x, \cos u, \sin u),\ x \in R,\ u \in [o,2\pi[,$$

og

$$(x,y,z) = (a \cos t, y, a \sin t),\ y \in R_+ \cup \{o\},\ t \in [o,2\pi[,$$
$$\text{hvor } o < a \leq 1.$$






(Opgave 2 fortsat)

(1) Angiv en parameterfremstilling for skæringskurven mellem de to cylinderflader, idet t benyttes som parameter. Godtgør at denne kurve er differentiabel netop når (o <) a < 1.

(2) Vis, at for a = 1 ligger den del af skæringskurven, der svarer til ikke-negative førstekoordinater, i en plan, og at denne kurvedel er en ellipsebue.

OPGAVE 3 Lad en flade have parameterfremstillingen

$$\underline{r}(u,v) = (u,v,ue^{-v^2}),\ (u,v) \in R^2.$$

(1) Bestem for ethvert af de punkter på fladen, hvor v = o, hovedkrumningerne og hovedretningerne for punktet.

(2) Vis, at fladen er overalt hyperbolsk krummet for $v \neq o$.

OPGAVE 4 I den projektive plan er der givet tre forskellige linjer p, q og r gennem samme punkt S. Lad A og B være to forskellige punkter på p, begge forskellige fra S. Lad endvidere P og Q være to forskellige punkter, der ikke ligger på nogen af linjerne p,q og r.

Ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} r$ fastlægges en projektivitet $\varphi$: $p \underset{\wedge}{-} r$. Med R betegnes skæringspunktet mellem linjerne $A\varphi(A)$ og $B\varphi(B)$. Endelig fastlægges ved $p \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} q \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} r \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} p$ en projektivitet $\psi$: $p \underset{\wedge}{-} p$.

(a) Gør rede for, at $\psi(A) = A$.

(b) Vis, at $\psi$ er den identiske afbildning af p.

(c) Vis, at P, Q og R ligger på samme linje.

SKRIFTLIG EKSAMEN

I

EMNEKREDSEN

TOPOLOGI

Januar 1986.



OPGAVE 1

Lad $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ være injektiv og kontinuert (i den sædvanlige topologi)

(a) Lad $a<c<d<b$, vis at $f(]c,d[) = ]C,D[$ hvor $\{C,D\} = \{f(c),f(d)\}$.

(b) Vis, at $f(]a,b[)$ er et åbent interval (eventuelt kan et eller begge endepunkter være $\pm\infty$ ).

(c) Vis, at den omvendte funktion $f^{-1}: f(]a,b[) \to ]a,b[$ er kontinuert.

OPGAVE 2

Lad $V$ være et reelt vektorrum med en norm $\|\ \|$ og lad $f: V \to \mathbb{R}$ være en lineær funktion.

Vis, at hvis $f$ er kontinuert i nul, så er $f$ kontinuert overalt (kontinuitet er med hensyn til normen $\|\ \|$ på $V$ og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

OPGAVE 3

Lad $(S,d)$ være et metrisk rum og lad $x \in S$.
Sæt

$$B(x) = \{y \in S \mid d(x,y) < 1\}$$

og

$$d_x : S \to \mathbb{R}, \quad d_x(y) = d(x,y).$$

(a) Vis, at $d_x$ er kontinuert (med hensyn til $d$ på $S$ og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

(b) Vis, at $\overline{B(x)} \subseteq \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ($\overline{B(x)}$ betegner afslutningen af $B(x)$).

(c) Gælder der altid $\overline{B(x)} = \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ?

Begrund svaret.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

OPGAVE 4

Lad for et $a \in R$ $G_a = ]-\infty, a[$ .

(a) Vis, at systemet $T = \{G_a \mid a \in R\} \cup \{\emptyset, R\}$ er en topologi på $R$.

(b) Vis, at $(R,T)$ opfylder andet numerabilitets aksiom.

(c) Beskriv de afsluttede mængder i $(R,T)$.

(d) Lad $T_o$ være den sædvanlige topologi på $R$, og betragt afbildningerne

$$f_1, f_2 : (R, T_o) \rightarrow (R, T) \text{ givet ved}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq o \\ 0 & \text{for } x < o \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > o \\ 0 & \text{for } x \leq o \end{cases}$$

Undersøg, om $f_1$ og $f_2$ er kontinuerte.

(opgavesættet slut).



Skriftlig prøve i MATEMATIK,
emnekredsen Sandsynlighedsregning
og statistik,

tirsdag d. 7.1.1986 kl. 10.00 - 14.00,

Opgavesættet består af fire opgaver og fem sider.

Ved prøven er alle hjælpemidler tilladt.

Opgave 1.

I en boligforening bor der 10 bilejere, men foreningen bygger kun 9 carporte. Man indfører derfor følgende regel til fordeling af carport-plads: Hvert år trækkes der lod mellem bilejerne om, hvem der kan få en carport-plads det kommende år; men når man ét år ikke har haft nogen carport, er man automatisk sikret en carport i de to næste år. Ved begyndelsen af det første år, trækker alle lod på lige fod.

1) Hvad er sandsynligheden for, at bilejer Olsen har carport i de to første år, men ikke i det tredje ?

2) Hvad er sandsynligheden for, at bilejer Alibert har carport i de tre første år, men ikke i det fjerde ?

3) Hvad er sandsynligheden $p_k$ for, at bilejer Schmidt har carport i netop de første k år, hvor k = 0,1,2,... ? ($p_0$ skal forstås som sandsynligheden for ikke at have carport i det første år.)

4) Bilejer Blihk må i det fjerde år undvære carport. Hvor lang en uafbrudt periode kan han derefter forvente at have en carport ?

5) Hvor mange år (regnet fra ordningens start) kan bilejer Schlange forvente uafbrudt at have carport til sin bil ?



Opgave 2.

Det er velkendt, at blodtrykket hos mennesker almindeligvis stiger med alderen. For nærmere at undersøge, hvordan det vokser med alderen, kan man analysere nedenstående talmateriale, der består af sammenhørende værdier af blodtryk og alder for 38 kvinder.

Tabel 1. Sammenhørende værdier af blodtryk (mm Hg) og alder (år) for 38 kvinder.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82.17 | 28 | 88.19 | 46 | 89.66 | 63 | 81.45 | 36 | 85.16 | 42 |
| 89.77 | 59 | 89.11 | 54 | 107.96 | 77 | 74.82 | 21 | 83.98 | 57 |
| 92.95 | 47 | 79.51 | 34 | 87.86 | 51 | 76.85 | 27 | 76.93 | 24 |
| 87.09 | 41 | 97.55 | 66 | 92.04 | 69 | 100.85 | 72 | 96.30 | 60 |
| 86.42 | 50 | 94.16 | 57 | 78.12 | 32 | 89.06 | 59 | 94.58 | 74 |
| 103.48 | 77 | 81.30 | 41 | 83.71 | 36 | 68.38 | 20 | 86.64 | 47 |
| 87.91 | 51 | 86.42 | 57 | 103.87 | 69 | 83.76 | 36 | 84.35 | 54 |
| 68.64 | 24 | 100.50 | 61 | 100.42 | 80 | | | | |

Talmaterialet blev analyseret af et computer-program. En del af udskrifterne fra computer-programmet er gengivet på næste side.

Kommenter computer-resultaterne. Hvad er det for en statistisk model der er underforstået ? Hvad er skønnene over modellens parametre ? Hvad kan man sige om, hvor godt modellen passer ?

***** REGRESSION ANALYSIS *****

Y-VARIATE: BLODTRYK

*** REGRESSION COEFFICIENTS ***

| | ESTIMATE | S.E. |
|---|---|---|
| CONSTANT | 63.04315 | 2.01596 |
| ALDER | 0.49830 | 0.03825 |

*** ANALYSIS OF VARIANCE ***

| | DF | SS | MS |
|---|---|---|---|
| REGRESSN | 1 | 2647.7 | 2647.69 |
| RESIDUAL | 36 | 561.6 | 15.60 |
| TOTAL | 37 | 3209.3 | 86.74 |

PERCENTAGE VARIANCE ACCOUNTED FOR 82.0



Opgave 3.

Ved et amerikansk universitet foretog en kunststuderende en undersøgelse, der skulle klarlægge, om kunstnere i højere grad end andre mennesker tror på ESP (ESP = Extra Sensory Perception, dvs. sansning ad "overnaturlig" vej). Han spurgte 114 kunstnere og 344 ikke-kunstnere om, hvor meget de troede på ESP, idet de fik følgende svarmuligheder: "tror på ESP", "tror til en vis grad på ESP", og "tror ikke på ESP".

Blandt kunstnerne var der 67 der troede på ESP, 41 der til en vis grad troede på ESP, og 6 der ikke troede på ESP. Blandt ikke-kunstnerne var de tilsvarende tal 129, 183 og 32.

Hvad kan man på denne baggrund sige til spørgsmålet om, hvorvidt kunstnere i højere grad end andre mennesker tror på ESP ? Begrund svaret.

Opgave 4.

I slutningen af skoleåret 1982-83 foretog man en spørgeskemaundersøgelse blandt 1.g-matematikere i fire gymnasier i Århusområdet. Blandt andet blev eleverne bedt om at angive deres seneste karakter i hvert af fagene Matematik, Fysik og Kemi; resultaterne heraf ses i Tabel 1.

Tabel 1. Karakterfordeling i hvert af fagene Matematik, Fysik og Kemi for 384 1.g-matematikere.

| karakterer | Matematik | Fysik | Kemi |
|---|---|---|---|
| 13 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 3 | 2 | 4 |
| 10 | 67 | 31 | 32 |
| 9 | 119 | 92 | 98 |
| 8 | 111 | 128 | 130 |
| 7 | 59 | 97 | 82 |
| 6 | 22 | 25 | 32 |
| 5 | 2 | 8 | 6 |
| 03 | 0 | 1 | 0 |

Kan man på denne baggrund sige noget om, hvorvidt der er forskel på de karakterer der gives i de tre fag ?

(Ved besvarelsen kan man eventuelt benytte disse hjælpestørrelser:

| | Mat. | Fysik | Kemi |
|---|---|---|---|
| sum af karakterer: | 3230 | 3056 | 3082 |
| sum af kvadrater på karakterer: | 27708 | 24848 | 25262 .) |



SKRIFTLIG EKSAMEN

I

EMNEKREDSEN

TOPOLOGI

Januar 1986.

OPGAVE 1

Lad $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ være injektiv og kontinuert (i den sædvanlige topologi)

(a) Lad $a<c<d<b$, vis at $f(]c,d[) = ]C,D[$ hvor $\{C,D\} = \{f(c),f(d)\}$.

(b) Vis, at $f(]a,b[)$ er et åbent interval (eventuelt kan et eller begge endepunkter være $\pm\infty$ ).

(c) Vis, at den omvendte funktion $f^{-1} : f(]a,b[) \to ]a,b[$ er kontinuert.

OPGAVE 2

Lad $V$ være et reelt vektorrum med en norm $\|\ \|$ og lad $f: V \to \mathbb{R}$ være en lineær funktion.

Vis, at hvis $f$ er kontinuert i nul, så er $f$ kontinuert overalt (kontinuitet er med hensyn til normen $\|\ \|$ på $V$ og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

OPGAVE 3

Lad $(S,d)$ være et metrisk rum og lad $x \in S$.

Sæt

$$B(x) = \{y \in S \mid d(x,y) < 1\}$$

og

$$d_x : S \to \mathbb{R}, \quad d_x(y) = d(x,y).$$

(a) Vis, at $d_x$ er kontinuert (med hensyn til $d$ på $S$ og den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$).

(b) Vis, at $\overline{B(x)} \subseteq \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ($\overline{B(x)}$ betegner afslutningen af $B(x)$).

(c) Gælder der altid $\overline{B(x)} = \{y \in S \mid d(x,y) \leq 1\}$ ?

Begrund svaret.

(opgavesættet fortsætter)



(opgavesættet fortsat)

OPGAVE 4

Lad for et $a \in \mathbb{R}$ $G_a = ]-\infty, a[$.

(a) Vis, at systemet $\mathcal{T} = \{G_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ er en topologi på $\mathbb{R}$.

(b) Vis, at $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ opfylder andet numerabilitets aksiom.

(c) Beskriv de afsluttede mængder i $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

(d) Lad $\mathcal{T}_o$ være den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$, og betragt afbildningerne

$$f_1, f_2 : (\mathbb{R},\mathcal{T}_o) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}) \text{ givet ved}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Undersøg, om $f_1$ og $f_2$ er kontinuerte.

(opgavesættet slut).

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom". Projektrapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.

---

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity". Af: Helge Kragh.

---

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS". Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller". Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER". Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

---

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

---

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

---

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

---

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

---

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CUR - RICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

---

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.