TEKST NR 12 1979

MOGENS BRUN HEEFELT

Lineære differentialligninger og differentialligningssystemer

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Gert Kreinøe.
Vejleder: Bernhelm Booss.

3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.

6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.

7/78 "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.

Forord

Dette kursusmateriale om lineære differentialligninger og differentialligningssystemer er udarbejdet i efteråret 1978 i forbindelse med et kursus i differentialligninger for studerende på gymnasielæreruddannelsen i matematik. Indholdet er i det væsentlige uændret i forhold til tilsvarende kurser afholdt i efteråret 1977 og foråret 1978. Formålet med dette kursusmateriale er at beskrive et fagligt indhold af emnekredsen "Differentialligninger" i Bekendtgørelsen for gymnasielæreruddannelsen i matematik.

RUC, januar 1979. Mogens Brun Heefelt.

Indholdsfortegnelse. Side

Kapitel 1

Lineære differentialligninger af første orden.

1.1 Differens- og differentialligninger.

Eksempel 1.1 Befolkningstilvæksten i udviklingslandene skønnes at være 3% p.a., og tilvæksten i bruttonationalproduktet (BNP) skønnes at være 5% p.a.. Man ønsker nu at undersøge tilvæksten i BNP pr. indbygger.
Betegnes befolkningens størrelse med $x(t)$ og tilvæksten Δx får man, at

(1) $$\Delta x = 0{,}03x \cdot \Delta t$$

og tilsvarende betegnes BNP med $y(t)$ og tilvæksten Δy, da bliver

(2) $$\Delta y = 0{,}05y \cdot \Delta t$$

begge taget over tidsrummet Δt. Det man herefter skal undersøge er, hvordan

$$\Delta \left(\frac{y}{x}\right)$$

kan bestemmes ud fra Δx og Δy. Dette lader sig imidlertid ret vanskeligt gøre. Til mange formål kan det i stedet betale sig at betragte følgende grænseværdi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

hvorved de to differensligninger (1) og (2) ændres til

(1') $$x'(t) = 0{,}03x(t)$$

(2') $$y'(t) = 0{,}05y(t)$$

der kaldes de til (1) og (2) knyttede <u>differentialligninger</u>. Ønsker man nu at bestemme tilvæksten i BNP per indbygger får man ifølge de almindelige differentiationsregler, at

$$\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' = \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)}$$

$$= \frac{0{,}05y(t)x(t) - 0{,}03x(t)y(t)}{x^2(t)}$$

$$= 0{,}02\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

Som nævnt i eksemplet kan det i den anførte sammenhæng være en fordel at gå over til differentialligningen i stedet for at regne på differensligningen. Også i almindelighed er det praktisk at benytte differentialligningen i stedet for differensligninger, idet kun meget enkle differensligninger lader sig løse. <u>Man skal imidlertid være klar over, at man faktisk foretager en ændring af systemet man beskriver ved at gå over til differentialligningen</u>. Dette vil blive demonstreret ved følgende eksempel.

<u>Eksempel 1.2</u> En kapital k i en bank forrentes med 100r% p.a., dvs. tilvæksten er

$$\Delta k = rk\Delta t$$

Sker rentetilskrivning hvert hele år er kapitalen efter n år, når vi starter i år 0 med k_0

$$k_n = (1 + r)^n k_0$$

Sker derimod rentetilskrivningen hvert halve år fås analogt efter n år

$$k_n = (1 + \frac{r}{2})^{2n} k_0$$

gives der kvartalsvis rentetilskrivning fås

$$k_n = (1 + \frac{r}{4})^{4n} k_0$$

Havde vi som før istedet betragtet grænseværdien (dvs. kontinuert rentetilskrivning)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta t} = k'$$

havde vi fået $k' = rk$.
Her vil vi senere se, at der efter n år vil være en kapital på

$$k_n = k_0 e^{rn}$$

Laver man en tabel over k_n i de fire tilfælde, hvor $k_0 = 1000$ og $n = 10$ med forskellige rentesatser ses:

100r	4	6	8
$(1 + r)^n k_0$	1481	1791	2159
$(1 + \frac{r}{2})^{2n} k_0$	1486	1806	2191
$(1 + \frac{r}{4})^{4n} k_0$	1489	1814	2208
$e^{rn} k_0$	1492	1822	2226

1.2 Den fuldstændige løsning til en lineær, homogen differentialligning

De i forrige afsnit opstillede differentialligninger, f.ex.

(*) $\quad y'(t) = 0,05y(t)$

siges at være af første orden (da den kun indeholder den første afledede af y) og lineær (da den indeholder y og y' og ingen højere potenser af y og y').

Omskrives ligningen (*) således, at alle led, der indeholder den ubekendte størrelse y, sættes på ligningens venstre side, dvs.

$$y'(t) - 0{,}05y(t) = 0$$

da kaldes ligningen homogen, hvis der kun står 0-funktionen på højre side i ligningen, ellers kaldes ligningen inhomogen.

Vi vil nu søge at løse en ligning af den ovennævnte form

$$(\Delta) \qquad f' = af \qquad\qquad a \in R$$

(hvor vi underforstår, at f er en funktion af t). Antager vi nu, at $f(t) \neq 0$ for alle t ser vi, at

$$\frac{f'}{f} = a \qquad \text{eller}$$

$$(\ln f)' = a \qquad \text{eller}$$

$$\ln f = at \qquad \text{eller}$$

$$f(t) = e^{at}$$

Gør vi nu prøve (dvs. indsætter e^{at} i (Δ)) ser vi, at e^{at} opfylder ligningen.
Vi skal herefter undersøge om, der er andre løsninger til ligningen. Til dette formål antager vi, at funktionen

$$f(t) = z(t)e^{at}$$

er en løsning til (Δ), hvor $e^{at} > 0$ for alle t, og skal altså heraf bestemme funktionen z. Ved indsættelse i (Δ) fås

$$(z(t)e^{at})' - az(t)e^{at} = 0 \qquad \text{eller}$$

$$z'(t)e^{at} + z(t)ae^{at} - az(t)e^{at} = 0 \qquad \text{eller}$$

$z'(t)e^{at} = 0$ eller $z'(t) = 0$ da $e^{at} > 0$

dvs. $z(t) = k$ $k \in R$

Da bliver den fuldstændige løsning til den lineære, homogene differentialligning af første orden $f' = af$, $a \in R$ af formen

$$f(t) = ke^{at} \qquad k \in R$$

Eksempel 1.3 Et radioaktivt stof har den egenskab, at det ændres (henfalder) til et stabilt stof gennem udsendelse af γ-stråling. Dette henfald sker proportionalt med mængden af radioaktivt stof, dvs. denne (negative) tilvækst bliver da

$$f' = -\lambda f \quad , \qquad \lambda \in R$$

hvor f angiver mængden af tilstedeværende radioaktivt stof som funktion af tiden t efter henfaldet begyndte. Løsningerne til ligningen bliver da

$$\underline{f(t) = ke^{-\lambda t}} \qquad k \in R$$

Her er k imidlertid entydigt fastlagt, da jo $e^{-\lambda 0} = 1$, dvs. $k = f(0)$, altså mængden af radioaktivt stof vi startede med. Således er

$$\underline{f(t) = f(0)e^{-\lambda t}}$$

Konstanten λ kaldes stoffets henfaldskonstant. Ofte er stoffet imidlertid istedet beskrevet ved sin halveringstid T (den tid det tager at halvere mængden af radioaktivt stof). Vi skal altså bestemme T således, at

$$f(t + T) = \tfrac{1}{2}f(t)$$

dvs. $f(0)e^{-\lambda(t+T)} = \tfrac{1}{2}f(0)e^{-\lambda t}$

eller $e^{-\lambda T} = \tfrac{1}{2}$

dvs. $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Vi vender herefter tilbage til differentialligningen

$$f' = af$$

og betragter den situation, hvor a er en kontinuert funktion, dvs. $a \in C^0$. På samme måde som før indser man, at en løsning er

$$f(t) = e^{A(t)}$$

hvor $A(t) = \int a(t)dt$,
og med analoge betragtninger som $a \in R$ ser vi, at den fuldstændige løsning til den lineære, homogene differentialligning af første orden $f' = af$, $a \in C^0$, er af formen

$$f(t) = ke^{A(t)} \qquad k \in R$$

hvor $A(t) = \int a(t)dt$

Øvelse 1.1 Vis, at man kan fastlægge den fuldstændige løsning ovenfor ved at benytte beviset i tilfældet $a \in R$.

Øvelse 1.2 Antag, at φ er en løsning til ligningen $f' = af$, og at ψ er en løsning til ligningen $f' = bf$, vis da, at $\varphi\psi$ er løsning til ligningen

$$f' = (a + b)f.$$

1.3 Eksistens- og entydighedssætningen for lineære differentialligninger af første orden.

Som vi så i eksempel 1.3 kunne mængden af radioaktivt stof til et givet tidspunkt fastlægges entydigt, når man blot kendte mængden af stof ved f.ex. starten.

Vi vil vise at denne egenskab gælder alle lineære, homogene differentialligninger af første orden.

Betragter vi et punkt (t_0, s_0), hvor a er kontinuert i t_0, ser vi ved indsættelse i løsningsformlen

$$f(t) = ke^{A(t)}$$

at hvis $s_0 = ke^{A(t_0)}$, må $k = s_0 e^{-A(t_0)}$ hvilket fastlægger k, altså for ethvert forelagt talsæt (t_0, s_0) eksisterer en løsning til differentialligningen f' = af.
Antager vi nu, at der gennem punktet (t_0, s_0) går to løsninger til ligningen, dvs.

$$s_0 = k_1 e^{A(t_0)}$$

$$s_0 = k_2 e^{A(t_0)}$$

Altså er $\quad k_1 e^{A(t_0)} = k_2 e^{A(t_0)}$

eller $\quad (k_1 - k_2) e^{A(t_0)} = 0$

eller $\quad k_1 = k_2$

dvs. <u>gennem hvert punkt (t_0, s_0), hvor a er kontinuert i t_0, går en og kun en løsning til differentialligningen f' = af</u>.

<u>Øvelse 1.3</u> I forlængelse af eksempel 1.1, hvor befolkningstilvæksten i u-landene skønnedes til 3% p.a. og væksten i BNP til 5% p.a., oplyses, at de tilsvarende tal for industrilande (i-lande) er 1% p.a. og 5% p.a.. I 1970 beregnede FN, at BNP/indbygger for u-landene var 200$ og for i-landene var 2000$. Under forudsætning af at udviklingen fortsætter som skønnet, hvornår vil forholdet mellem BNP/indbygger for u-lande og i-lande være som 1:20? (Fordoblingstiden).

1.4 Den fuldstændige løsning til en lineær, inhomogen differentialligning af første orden.

Vi skal nu betragte differentialligninger af formen

$$f' - af = b$$

hvor b er en kontinuert funktion, og vi er interesserede i, hvordan sådanne ligninger løses. Betragtes de to ligninger

$$f' - af = b$$

og

$$g' - ag = b$$

ses, at $\quad (f-g)' - a(f-g) = 0$

dvs. såfremt både f og g er løsninger til den samme inhomogene ligning, vil deres differens være løsning til den tilsvarende homogene ligning. Heraf kan vi slutte, at <u>den fuldstændige løsning til en inhomogen, lineær differentialligning af første orden fås ved til en vilkårlig inhomogen løsning at addere den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning</u>.

Så når vi nu skal løse ligningen

$$(*) \qquad f' - af = b$$

skal vi blot angive én funktion, som er løsning. Vi antager som for den homogene ligning, at funktionen

$$f(t) = z(t)e^{A(t)}$$

er en løsning til (*), og ved indsættelse fås

$$(z(t)e^{A(t)})' - a(t)(z(t)e^{A(t)}) = b(t) \quad \text{eller}$$

$$z'(t)e^{A(t)} + z(t)a(t)e^{A(t)} - a(t)z(t)e^{A(t)} = b(t) \quad \text{eller}$$

$$z'(t)e^{A(t)} = b(t)$$

$$z'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

dvs. hvis f(t) skal være en inhomogen løsning må

$$z(t) = \int b(t)e^{A(t)}dt$$

Da bliver den fuldstændige løsning til en lineær, inhomogen differentialligning af første orden

$$f(t) = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}dt + ce^{A(t)}$$

hvor $A(t) = \int a(t)dt$ og $c \in R$.

Det skal dog understreges, at denne inhomogene løsning også kan fremkomme ved, at man har gættet den. Prøv at gøre dette i

Øvelse 1.4 Løs differentialligningen

$$f'(t) - \ln 2 f(t) = 2t - t^2 \ln 2.$$

Øvelse 1.5 I forlængelse af øvelse 1.3 oplyses det nu, at FN som bekendt har anbefalet sine medlemslande at yde 1% p.a. af deres BNP i ulandsstøtte. Vi ønsker nu at udvide vores model med henblik på at besvare spørgsmålet: Vil 1% af BNP fra i-landene i u-landsstøtte være tilstrækkeligt til at udjævne forskellen i BNP/indbygger mellem i- og u-landene? Hvilke supplerende oplysninger mangler for at besvare spørgsmålet?

1.5 To eksempler på anvendelse af lineære differentialligninger af første orden.

I fortsættelse af afsnit 1.3 kan I ud fra løsningsformlen for en inhomogen, lineær differentialligning af første orden slutte, at der gennem hvert punkt (t_0, s_0), hvor a er kontinuert i t_0, går en og kun en løsning gennem differentialligningen

$$f' - af = b.$$

Eksempel 1.4 Bertalanffy's ligning. Inden for fiskeribiologi benytter man følgende simpel sammenhæng

$$\frac{dw}{dt} = Hs(t) - Kw(t) \qquad H,K \in R_+$$

mellem en fisks vægt (w), dens tarmoverfladers areal (s) og dens vægtforøgelse (dw/dt) til beregning af tilvækst i biomasse for fiskepopulationer.
Der ligger følgende resonnement bag ligningen. Ændringen i fiskens vægt hænger dels sammen med den mængde føde fisken optager og dels sammen med en stadig nedbrydning af fiskens væv. Da fisken optager sin føde gennem tarmen, må tilvæksten ske proportionalt med tarmoverfladens areal, og da fiskens væv til stadighed nedbrydes, må denne nedbrydning ske proportional med mængden af væv (= fiskens vægt). Hertil gælder resonnementet i et vist omfang for de fleste fiskearter, men den fortsættelse, som gør, at ligningen kan "løses", gælder kun for få fiskearter. Man antager nemlig at fiskene vokser "isometrisk" (dvs. lige meget på alle leder), har konstant vægtfylde samt at fiskens tarmoverfladeareal og vægt hænger sammen med dens længde l som

$$s(t) = l^2(t)$$

$$w(t) = l^3(t)$$

For nu at løse ligningen omskrives denne til en ligning i l, således

$$3l^2(t)\frac{dl}{dt} = Hl^2(t) - Kl^3(t)$$

eller da $l(t) > 0$,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{H}{3} - \frac{K}{3}l(t)$$

Denne ligning er en inhomogen, lineær ligning af første orden og får således den fuldstændige løsning

$$l(t) = \frac{H}{K} + ce^{-\frac{Kt}{3}} \qquad c \in R$$

Da en fisk har en mindstelængde 0 til tiden t_0, fås, at

$$l(t) = \frac{H}{K} - \frac{H}{K}e^{-\frac{K}{3}(t-t_0)}$$

og for $t \to \infty$ fås, at $l(t) \to \frac{H}{K}$ og derfor sætter vi fiskens maximale længde

$$l_\infty = \frac{H}{K}$$

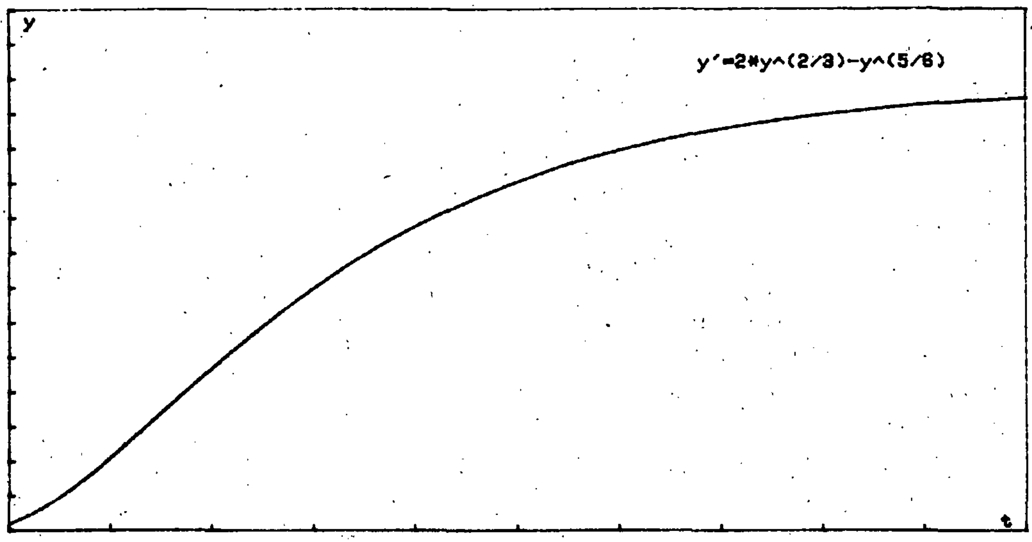
Således bliver fiskens længde til tiden t

$$l(t) = l_\infty(1 - e^{-\frac{K}{3}(t-t_0)})$$

Indføres igen fiskens vægt fås, at

$$w(t) = w_\infty(1 - e^{-\frac{K}{3}(t-t_0)})^3$$

Et kurveforløb med H = 3 og K = 1 er som vist i nedenstående figur (figuren er fremkommet ved numerisk løsning af differentialligningen, se appendix 2)



Kommentar. Gentagne observationer har vist en omtrent korrekt beskrivelse af de fleste dyrearters vægtændring kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dw}{dt} = Hw^{\alpha}(t) - Kw^{\beta}(t) \qquad H,K \in R_+$$

hvor $\alpha \approx \frac{2}{3}$ og $\beta \approx \frac{5}{6}$. Det kan anbefales at løse ligningen numerisk, hvorved man vil konstatere, at løsningens kvalitative forløb er som set på figuren ovenfor.

Eksempel 1.5. Dobbelt radioaktivt henfald. Dette eksempel er en fortsættelse af eksempel 1.3, hvor et radioaktivt stof nedbrydes til et stabilt stof. I mange tilfælde dannes imidlertid et nyt radioaktivt stof, som igen nedbrydes. Et eksempel herpå er nedbrydningen bly-214 (^{214}Pb) → Bismuth-214 (^{214}Bi) → bly-210 (^{210}Pb), hvor halveringstiderne er 27 minutter og 20 minutter (helt korrekt omdannes (^{214}Bi) til (^{214}Po) Polonium-214, som ultrahurtigt (halveringstid << 1 sekund) omdannes til (^{210}Pb)). Faktisk nedbrydes også (^{210}Pb) men med en halveringstid på 22 år, og det kan derfor betragtes som stabilt - set i forhold til halveringstider på ca. 25 minutter.

Betragtes nu to radioaktive stoffer, som f.ex. kan være ^{214}Pb og ^{214}Bi, og lader vi f(t) og g(t) betegne mængden af hver af de to radioaktive stoffer til tiden t og λ og μ betegne henfaldskonstanterne. Da bliver som i eksempel 1.3

(1) $$f'(t) = -\lambda f(t)$$

og da $\lambda f(t)$ beskriver omdannelseshastigheden for f, beskriver det tillige den hastighed, hvormed g opstår. Samtidig nedbrydes g, hvilket sker proportionalt med mængden af stoffet dvs. $-\mu g(t)$. Således får man for stoffet g

(2) $$g'(t) = \lambda f(t) - \mu g(t)$$

Startes med p gram af stof f, er der intet af stof g, da bliver startbetingelserne

(3) $$f(0) = p \quad \text{og} \quad g(0) = 0$$

Af eksempel 1.3 fås således, at

$$f(t) = pe^{-\lambda t}$$

Indsættes dette i (2) fås derfor

$$g'(t) + \mu g(t) = \lambda pe^{-\lambda t}$$

der ud fra løsningsformlen har den fuldstændige løsning

$$g(t) = \frac{\lambda p}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} + ce^{-\mu t}$$

og med betingelsen g(0) = 0 bliver

$$g(t) = \frac{\lambda p}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})$$

Heraf ser vi tillige, at

$$f(t) + g(t) = \frac{p}{\mu-\lambda}(\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t})$$

og da mængden af stabilt stof h er

$$h(t) = p - (f(t) + g(t))$$

$$h(t) = p\left(1 - \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}\right)$$

Øvelse 1.6 Hvordan bliver løsningen til differentialligningen $g'(t) = \lambda f(t) - \mu g(t)$, hvis stofferne f og g har samme halveringstid, dvs. hvis $\mu = \lambda$.

Øvelse 1.7 Hvor lang tid efter, at nedbrydningen er påbegyndt, vil mængden af ^{214}Bi være størst?

Øvelse 1.8 Hvornår vil 95% af ^{214}Pb være omdannet til det stabile ^{210}Pb?

Øvelse 1.9 Skitsér (f.ex. ved at løse ligninger (1) og (2) med startbetingelsen (3) numerisk) hvordan mængden af stofferne ^{214}Pb og ^{210}Bi varierer som funktion af tiden fra nedbrydningsprocessens start.

1.6 Eksempler på ikke-lineære ligninger af første orden.

I dette afsnit vil vi behandle to differentialligninger af første orden, som ikke er lineære, nemlig

$$f' = af - bf^2 \qquad \text{(Bernoulli-ligning)}$$

og

$$g' = c + ag - bg^2 \qquad \text{(Ricátti-ligning)}$$

hvor a, b og c er kontinuerte funktioner. Et anvendelsesområde, hvor en ligning af den første type fremkommer, bliver beskrevet i følgende eksempel.

Eksempel 1.6 Bakterievækst. En bakteriekultur, som har rigeligt med føde vokser proportionalt med mængden af individer dvs. $f' = af$ altså en eksponentiel vækst. Taget over en længere periode kan dette imidlertid ikke fortsætte, da der jo ikke kan være ubegrænset mængde føde, og hvis man med mellemrum foretager en individoptælling af en sådan bakteriekultur, vil man da også observere en stadigt langsommere tilvækst. Vi vil forsøge at forklare dette forhold. Bakteriers evne til at dele sig hænger sammen med mængden af føde samt med hvor rent miljøet er. Begge forhold hænger sammen med hvor tæt bakterierne ligger. Dette kan igen beskrives ved antallet af mulige møder mellem to bakterier på et givet tidspunkt, dvs. $\frac{1}{2}f(f - 1)$. Således vil tilvæksten i bakterier aftage proportionalt med denne størrelse, dvs.

$$f' = \alpha f - \frac{\beta}{2}f(f - 1) \qquad \text{eller}$$

$$f' = (\alpha + \frac{\beta}{2})f - \frac{\beta}{2}f^2 \qquad \text{eller}$$

$$f' = af - bf^2$$

Dette viser, at man i bakteriekulturen opnår $f' = 0$ (steady state) for $af = bf^2$ eller $f = \frac{a}{b}$, dvs. tallet $\frac{a}{b}$ beskriver det maksimale antal bakterier den pågældende bakteriekultur kan indeholde. Hvis man skal løse en ligning af denne type, må man først antage, at en løsning er $\neq 0$ (eller i det mindste betragte en løsning i alle delintervaller, hvor den er $\neq 0$). Antages nu at en løsning

$$f = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{hvor } \varphi \in C^1,$$

da er $$-\frac{\varphi'}{\varphi^2} = \frac{a}{\varphi} - \frac{b}{\varphi^2}$$

eller $$\varphi' = -a\varphi + b$$

Vi har således vist, at *en funktion f er en løsning til $f' = af - bf^2$, hvis og kun hvis $\varphi = f^{-1}$ er en løsning til*

$$\varphi' = -a\varphi + b$$

Heraf kan vi altså bestemme den fuldstændige løsning til Bernoulliligningen $f' = af - bf^2$.
Skal man herefter løse ligningen

$$(*) \qquad g' = c + ag - bg^2$$

kan man ikke umiddelbart angive en løsningsmetode, hvilket betyder, at man må gætte en løsning til ligningen.
Antages nu, at φ er en løsning til (*), samt at funktionen $g = \varphi + \psi$ er en løsning, vil vi efterforske, hvilke betingelser funktionen ψ må opfylde. Indsættes nu g i ligningen, fås

$$\varphi' + \psi' = c + a\varphi + a\psi - b\varphi^2 - b\psi^2 - 2b\varphi\psi$$

og da φ er en løsning, fås

$$\psi' = (a - 2b\varphi)\psi - b\psi^2$$

hvor altså ψ skal opfylde en Bernoulliligning af den før behandlede type.
Vi har således vist, hvordan en Ricattiligning løses, hvilket illustreres af følgende eksempel.

Eksempel 1.7 Skal man løse differentialligningen

$$g'(t) = 1 - (2\text{tgt})g(t) - g^2(t)$$

gættes først på en af de trigonometriske funktioner, og ved indsættelse ses, at $\varphi(t) = \cot t$ er en løsning. Den fuldstændige løsning $g(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ findes ved at bestemme ψ af

$$\psi'(t) = (-2\text{tgt} - 2\cot t)\psi(t) - \psi^2(t)$$

dvs.

$$\left(\frac{1}{\psi(t)}\right)' = 2(\text{tgt} + \cot t)\frac{1}{\psi(t)} + 1$$

Således er

$$\frac{1}{\psi(t)} = tg^2t\int cot^2t\ dt + ctg^2t$$

$$= -\ ttg^2t - 1 + ctg^2t$$

dvs

$$\psi(t) = \frac{1}{(c - t)tg^2t - 1} \qquad c \in R$$

Dermed er den fuldstændige løsning

$$g(t) = cott + \frac{1}{(c - t)tg^2t - 1} \qquad c \in R$$

1.7 Strukturen af løsningsmængden for en lineær differentialligning af første orden.

Betragter vi nu to funktioner f_1 og f_2 som begge er løsninger til differentialligningen $f' = af$, ser vi af

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' \\ &= af_1 + af_2 \\ &= a(f_1 + f_2)\end{aligned}$$

at funktionen $f_1 + f_2$ tillige er løsning til $f' = af$.
Ligeså viser

$$\begin{aligned}(\lambda f_1)' &= \lambda f_1' \\ &= \lambda af_1 \\ &= a(\lambda f_1)\end{aligned}$$

at funktionen λf_1 for alle $\lambda \in R$ igen er en løsning til $f' = af$.

Dvs. *løsningsmængden* $L_0 = \left\{ f \in C^1 \mid f^1 - af = 0 \right\}$ *er et underrum i det lineære rum af samtlige differentiable funktioner,* C^1.

Da vi samtidig ved at løsningsmængden kan beskrives ved $\left\{ f \in C^1 \mid f(t) = ce^{A(t)} \; ; \; c \in R \right\}$ indser man, at funktionen $e^{A(t)}$ er den eneste basisvektor i løsningsmængden, dvs.

$$dim\ L_0 = 1$$

Skal vi herefter beskrive løsningsmængden til en inhomogen, lineær differentialligning, dvs.

$$L = \left\{ f \in C^1 \mid f - af = b \right\}$$

må vi erindre, at L fremkommer ved til enhver løsning til den homogene ligning at addere en og samme løsning til den inhomogene ligning, f.ex.

$$g(t) = e^{A(t)} \int b(t) e^{-A(t)} dt$$

dvs. man får

$$L = \left\{ g \right\} + L_0$$

Nu kan man jo så spørge om disse egenskaber specielt gælder for den her beskrevne type af ligninger. Vi vil derfor betragte Bernoulliligningen

$$f' = af - bf^2$$

Betragtes her f_1 og f_2 som begge antages at være løsninger til ligninger fås, at

$$f_1' = af_1 - bf_1^2 \quad \text{og} \quad f_2' = af_2 - bf_2^2$$

og ved addition

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$$
$$= a(f_1 + f_2) - b(f_1^2 + f_2^2)$$

eller

$$(f_1 + f_2)' = a(f_1 + f_2) - b(f_1 + f_2)^2 + 2bf_1f_2$$

dvs. funktionen $f_1 + f_2$ vil ikke igen være løsning til ligningen, og derfor vil løsningsmængden

$$L = \left\{f \in C^1 \mid f' = af - bf^2\right\}$$

ikke være et underrum i C^1. Tilsvarende kan vises for Riccati-ligningen.

1.8 Differentialoperatorer

Vi vil nu undersøge nogle af de iagttagne forskelle mellem de her beskrevne differentialligninger lidt nøjere. Til dette formål vil vi betragte afbildningen

$$D : C^1 \rightsquigarrow C^0$$

defineret ved

$$\forall f \in C^1 : Df = f'$$

Denne afbildning kaldes en differentialoperator. Den har som bekendt egenskaberne

$$D(f + g) = Df + Dg \quad ; \quad f,g \in C^1$$
$$D(\lambda f) = \lambda Df \quad ; \quad f \in C^1, \lambda \in R$$

Således er differentialoperatoren D en lineær afbildning.

Benævner vi endvidere den identiske afbildning af f på f med D^0 kan man se, at

$$(D - aD^0)f = Df - aD^0f = f' - af$$

dvs. de tidligere behandlede ligninger

$$f' - af = 0 \quad \text{og} \quad f' - af = b$$

nu kan opskrives med operatorer, som

$$(D - aD^0)f = 0 \quad \text{og} \quad (D - aD^0)f = b$$

Da man let på baggrund af lineariteten af D indser, at

$$\begin{aligned}(D - aD^0)(f + g) &= (D - aD^0)f + (D - aD^0)g \\ (D - aD^0)(\lambda f) &= \lambda(D - aD^0)f\end{aligned}$$

med $f,g \in C^1$ og $\lambda \in R$, benævnes de to differentialligninger som <u>lineære</u>. Omformuleres ligeledes Bernoulli- og Riccatti-ligningerne til operatorskrivemåde, nemlig

$$\begin{aligned}(D - aD^0 + b(D^0)^2)f &= 0 \\ (D - aD^0 + b(D^0)^2)g &= c\end{aligned}$$

indser man dels, at de har samme differentialoperator dels, at den fælles operator <u>ikke</u> er lineær.

Går vi nu tilbage til differentialoperatoren $Df = f'$, samt antager at $f \in C^\infty$ (mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner), vil

$$D : C^\infty \sim C^\infty.$$

D er som vist lineær, og derfor er også DoD, DoDoD, o.s.v. lineær. Endvidere indses, at $(DoD)f = Df' = f''$, hvorfor vi definerer, at $DoD = D^2$. Tilsvarende defineres for alle $n \in N \cup \{o\}$

$$D^n = Do\cdots oD \qquad \text{(ialt n operatorer)}$$

Med henblik på senere anvendelse skal vi til slut se, hvordan man sammensætter to operatorer af formen $D - aD^0$, $a \in R$.

Da det for enhver funktion f $\in C^\infty$ gælder at

$$\begin{aligned}(D - pD^0)\circ(D - qD^0)f &= (D - pD^0)(f' - qf)\\ &= D(f' - qf) - p(f' - qf)\\ &= f'' - qf' - pf' + pqf\\ &= (D^2 - (p + q)D + pqD^0)f\end{aligned}$$

gælder altså, at

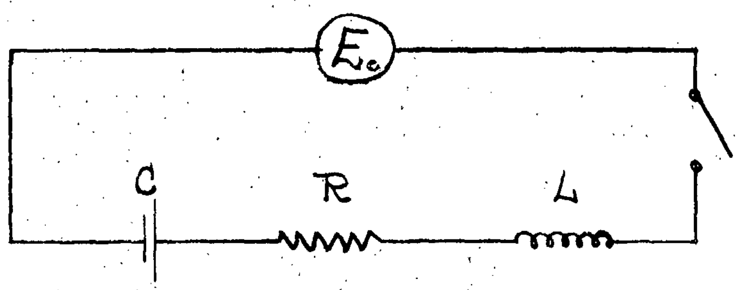
$$(D - pD^0)\circ(D - qD^0) = D^2 - (p + q)D + pqD^0$$

Kapitel 2

Lineære differentialligninger af anden orden.

2.1 Elektriske kredsløb.

Man betragter et elektrisk kredsløb bestående af en modstand, en kapasitor og en induktor forbundet i serie med en strømkilde med konstant spænding (se nedenstående figur).



Vi vil nu fastlægge, hvordan systemets strømstyrke i varierer som funktion af tiden. Man ved fra fysikken, at spændingen til tiden t over modstanden er Ri, over induktoren er $L\,\frac{di}{dt}$ og over kapasitoren er $\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$. Da får man af Kirchoffs spændingslov, at

$$L\,\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = E_0 \quad , \quad i(0) = 0$$

eller ved at differentiere på begge sider

$$L\,\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

med start betingelserne $i(0) = 0$ og $i'(0) = E_0/L$.

Da $L \neq 0$ kan vi dividere med L i ligningen og vi får da

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Ved at betragte et simpelt fysisk system kommer vi altså ind i at skulle afgøre om en differentialligning af formen

$$x'' + ax' + b = 0 \qquad a,b\in R$$

kan løses. Betragtes som i sidste kapitel differentialoperatoren

$$D:C^{\infty}(I) \sim C^{\infty}(I)$$

defineret ved $Df = f'$, $f\in C^{\infty}(I)$, kan vi omskrive ligningen til

$$(D^2 + aD + bD^0)x = 0. \qquad a,b\in R \; .$$

Ser vi nøjere på operatoren

$$L = D^2 + aD + bD^0$$

ser vi, at såfremt $x,y\in C^{\infty}(I),\lambda\in R$ vil

$$\begin{aligned}\underline{L(x+y)} &= (D^2+aD + bD^0)(x+y)\\ &= D^2(x+y) + aD(x+y) + b(x+y)\\ &= D^2x + D^2y + aDx + aDy + bx + by\\ &= (D^2+aD+bD^0)x + (D^2+aD+bD^0)y\\ &= \underline{Lx + Ly}\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}L(\lambda x) &= (D^2 + aD + bD^0)(\lambda x)\\ &= \lambda(D^2+aD+bD^0)x\\ &= \underline{\lambda Lx}\end{aligned}$$

dvs vores operator er lineær og af 2. orden, derfor kaldes ligningen

$$(D^2+aD+bD^0)x = 0$$

en lineær differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter (da $a,b\in R$). Den kaldes som i kapitel 1 homogen, når der står 0-funktionen på højre side i ligningen.

2.2 Løsning af den homogene differentialligning med konstante koefficienter.

Vi så i kapitel 1, at man kunne sammensætte to lineære operatorer af 1. orden således

$$(D-pD^0)\circ(D-qD^0) = D^2 - (p+q)D + pqD^0$$

hvor $p,q \in R$.

Ønsker man nu omvendt at lave en sådan opsplitning af vores operator

$$D^2 + aD + bD^0$$

skal vi altså bestemme p og q således at

$$p+q = -a \qquad \text{og} \qquad pq = b$$

men dette betyder præcist, at p og q skal være rødder i ligningen

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad .$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning, og funktionen

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

kaldes det karakterisktiske polynomium for operatoren

$$D^2 + aD + bD^0 \ .$$

Denne funktion vil imidlertid altid have to rødder (eventuelt sammenfaldende). Roddernes udseende afhænger af fortegnet for størrelsen

$$\Delta = a^2 - 4b$$

idet ligningen for $\Delta > 0$ har to reelle rødder
ligningen for $\Delta = 0$ har en dobbeltrod
og ligningen for $\Delta < 0$ har to komplekst konjugerede rødder.

(Vedrørende komplekse tal og komplekse funktioner henvises til appendix 1)

Vi er således under alle omstændigheder i stand til at opsplitte vores anden ordens operator i to første ordens operatorer, og det at løse differentialligningen

$$(D^2+aD+bD^0)x = 0$$

kan altså overføres i at løse differentialligningen

$$(D-pD^0)\circ(D-qD^0)x = 0 \ .$$

Indfører vi nu $y = (D-qD^0)x$ er vores problem at løse to koblede første ordens differentialligninger

$$(D-pD^0)y = 0 \quad \text{og}$$
$$(D-qD^0)x = y$$

hvor $p,q \in C$.

Dette skulle imidlertid ikke være vanskeligt, idet vi allerede har gjort det i kapitel 1, afsnit 6 om "dobbeltradioaktivt henfald".

Først bestemmer vi y, der bliver

$$y(t) = de^{pt} \qquad , \ d \in C$$

Indsættes dette i den anden ligning bliver løsningen til den inhomogene ligning

$$x(t) = ce^{qt} + e^{qt}\int de^{pt}\, e^{-qt}\, dt \qquad c \in C$$

$$x(t) = ce^{qt} + e^{qt} \frac{d}{p-q} e^{(p-q)t} \qquad p \neq q$$

eller hvis vi kalder $k = \frac{d}{p-q}$

$$x(t) = ke^{pt} + ce^{qt} \qquad k,c \in C$$

Var $p = q$ ville vi have fået

$$x(t) = kte^{pt} + ce^{pt} \qquad k,c \in C$$

<u>Eksempel 2.1</u> Tager vi udgangspunkt i den ligning, der blev opstillet først i dette kapitel, og specielt betragter den med $R = 0$ og $LC = 1$ skal vi løse ligningen

$$x'' + x = 0.$$

Den karakteristiske ligning bliver da $\lambda^2+1 = 0$, der har de komplekse rødder i og $-i$. Dermed er løsningen altså

$$x(t) = ke^{it} + ce^{-it}$$

og her skal $k,c \in C$ vælges således, at x bliver en reel funktion. Erindrer vi imidlertid fra appendix 1, at

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \, .$$

kan løsningen omskrives til

$$\begin{aligned} x(t) &= k(\cos t+i\sin t) + c(\cos t-i\sin t) \\ &= (k+c)\cos t + i(k-c)\sin t \\ &= A\cos t + B\sin t \qquad A,B \in R \end{aligned}$$

der bliver en reel funktion såfremt k og c er valgt komplekst konjugerede med samme realdel, dvs $\mathrm{Re}(k) = \mathrm{Re}(c)$ og $\mathrm{Im}(k) = -\mathrm{Im}(c)$. Dermed er $A = 2\mathrm{Re}(k)$ og $B = 2\mathrm{Im}(k)$.

Den i eksempel 2.1 viste omskrivning kan foretages generelt. Er således $p = \alpha+i\beta$ og $q = \alpha-i\beta$, $\alpha,\beta\in R$ er

$$x(t) = ke^{(\alpha+i\beta)t} + ce^{(\alpha-i\beta)t}$$

Nu benyttes, at $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ dvs

$$\begin{aligned} x(t) &= ke^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t) + ce^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}((k+c)\cos\beta t + i(k-c)\sin\beta t) \\ &= Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

hvor $A,B\in R$, netop når $\mathrm{Re}(k) = \mathrm{Re}(c)$ og $\mathrm{Im}(k) = -\mathrm{Im}(c)$. Med disse bånd på k og c kan vi altså *altid opskrive en reel løsning til* $(D^2+aD+bD^0)x = 0$ *hvis a og b er reelle.*

Øvelse 2.1 Løs differentialligningen

$$x'' + \frac{R}{L}x' + \frac{1}{LC}x = 0$$

i det tilfælde hvor $\frac{R}{L} = 4$ og $\frac{1}{LC} = 5$.

2.3 Eksistens- og entydighedssætningen for lineære, homogene differentialligninger af anden orden med konstante koefficienter.

I kapitel 1 så vi at der gennem hvert punkt (t_0,s_0) går en og kun en løsning til differentialligningen $(D - a(t)D^0)f = 0$. Vi vil nu søge at bestemme en tilsvarende egenskab for differentialligningen

$$(D^2+aD+bD^0)x = 0 \qquad a,b\in R .$$

Til dette formål ser vi på løsningsformlen

$$x(t) = ke^{pt} + ce^{qt}$$

hvor $k,c\in R$ (eller $k,c\in C$ med de ovenfor nævnte bånd).

Hvis vi som i kapitel 1 betragter et punkt (t_0, s_0) og indsætter i løsningen ser vi, at

$$s_0 = ke^{pt_0} + ce^{pt_0}$$

hvilket ikke fastlægger k og c entydigt. Betragter vi derimod et punkt (t_0, s_0, r_0) fastlagt ved $s_0 = x(t_0)$ og $r_0 = x'(t_0)$ vil vi vise

Gennem ethvert "linieelement" (t_0, s_0, r_0) går en og kun en løsning til differentialligningen $(D^2+aD+bD^0)x = 0$.

Beviset gennemføres for tilfældet $p \neq q$. Da er

$$s_0 = ke^{pt_0} + ce^{qt_0}$$
$$r_0 = kpe^{pt_0} + cqe^{qt_0}$$

Disse to ligninger med to ubekendte (k,c) har determinanten

$$\begin{vmatrix} e^{pt_0} & e^{qt_0} \\ pe^{pt_0} & qe^{qt_0} \end{vmatrix} = (q-p)\, e^{(p+q)t_0} \neq 0$$

da $e^{(p+q)t_0} \in R_+$ og $p \neq q$. Ligningssystemet har derfor et og kun et løsningssæt (k,c). Dvs. for ethvert (t_0, s_0, r_0) findes et og kun et sæt (k,c), og således en og kun en funktion

$$x(t) = ke^{pt} + ce^{qt}$$

som går gennem (t_0, s_0) og har tangenthældningen r_0 i dette punkt.

<u>Øvelse 2.2</u> Gennemfør der tilsvarende bevis, når $p = q$, og altså $x(t) = (kt+c)e^{pt}$.

Eksempel 2.2. Betragter vi den fundne løsning til differentialligningen $x'' + x = 0$, nemlig $x(t) = A\cos t + B\sin t$, og ønsker vi at finde løsningen gennem linieelementet $(0,1,0)$, da finder vi, at

$$x(t) = \cos t.$$

Dette viser, at der fremkommer en udæmpet svingning. Dette sker iøvrigt altid, da løsningen kan omskrives til

$$x(t) = A\sin(t+\varphi)$$

Øvelse 2.3. Skitser den løsning til differentialligningen $x'' + 4x' + 5x = 0$ (øvelse 2.1), som går gennem linieelementet $(0,0,1)$. Skitser tillige løsningens fasebillede ($x'(t)$ afsat som funktion af $x(t)$).

2.4 Strukturen af løsningsmængden for differentialligningen $(D^2+aD+bD^0)x = 0$.

Da vi i afsnit 2.1 betragtede operatoren $L = D^2+aD+bD^0$ viste vi, at den var lineær, dvs

$$L(x+y) = Lx + Ly$$

og $$L(\lambda x) = \lambda Lx \quad .$$

For løsningsmængden $U = \{x \in C^\infty \mid Lx=0\}$ betyder denne linearitet, at U, som jo er nulrummet for den lineære afbildning L, bliver et underrum i vektorrummet C^∞. Vi vil nu vise, at *dimensionen af U er 2*.

Da R^2 er et vektorrum af dimension 2 skal vi blot vise, at vi kan konstruere en isomorfi mellem U og R^2. Vi definerer $F: U \to R^2$ ved at

$$F(x) = (x(t_0), x'(t_0)).$$

Her er F en lineær afbildning, idet

$$F(\lambda x+\mu y) = (\lambda x(t_0)+\mu y(t_0), \lambda x'(t_0)+\mu y'(t_0))$$

$$= \lambda(x(t_0), x'(t_0)) + \mu(y(t_0), y'(t_0))$$

$$= \lambda F(x) + \mu F(y) .$$

Hvis vi derfor kan vise, at F er bijektiv, vil F være en isomorfi. Her benytter vi så eksistens- og entydighedssætningen. F er injektiv, da $F(x) = F(y) \Rightarrow$

$$(x(t_0), x'(t_0)) = (y(t_0), y'(t_0)) \Rightarrow x = y$$

hvilket følger af, at der gennem hvert linieelement går højst en løsning. F er surjektiv, da der gennem hvert linielement går mindst en løsning. Dvs.

$$\dim U = \dim R^2 = 2.$$

Derved kan enhver løsning til den lineære homogene anden ordens differentialligning med konstante koefficienter fremstilles som linearkombination af netop to lineært uafhængige løsninger.

Opsummering: *Differentialligningen* $(D^2+aD+bD^0)x = 0$, $a,b \in R$ *løses ved at betragte rødderne p og q i det karakteristiske polynomium* $F(\lambda) = \lambda^2+a\lambda+b$. *Da vil en basis for løsningsmængden afhænge af:*

1^o $\Delta = a^2-4b > 0$. *Da er rødderne p og q reelle og en basis* $\{e^{pt}, e^{qt}\}$

2^o $\Delta = a^2-4b = 0$. *Da er rødderne p og q ens og reelle og en basis* $\{e^{pt}, te^{pt}\}$

3^o $\Delta = a^2-4b < 0$. *Da er rødderne komplekst konjugerede, dvs.* $p = \alpha+i\beta$ *og* $q = \alpha-i\beta$ *med* $\alpha, \beta \in R$, *og en basis*

$$\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\} \text{ eller } \{e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Bemærk at en *ikke normeret* ligning

$$(aD^2+bD+cD^0)x = 0$$

løses ved at omskrive ligningen til

$$(D^2+\frac{b}{a}D+\frac{c}{a}D^0)x = 0$$

som så løses som foran beskrevet.

2.5 Løsning af den inhomogene differentialligning med konstante koefficienter.

I lighed med kapitel 1 kaldes en anden ordens differentialligning

$$(D^2+aD+bD^0)x = g \qquad g\in C^0$$

inhomogen, når funktionen g på højre side i ligningen ikke er 0-funktionen. Ligninger af denne type forekommer f.eks. i elektriske kredsløb (jfr. afsnit 2.1) med vekselspænding $E = E_0\cos\omega t$. I dette tilfælde giver Kirchhoff's spændingslov

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = E_0\cos\omega t$$

Eller ved at differentiere på begge sider

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = -E_0\omega\sin\omega t$$

med $i(0) = 0$ og $i'(0) = E_0/L$.

Betragter vi nu to funktioner x og y som begge er løsninger til differentialligningen $(D^2+aD+bD^0)x = g$ fås af

$$x'' + ax' + bx = g$$

og

$$y'' + ay' + by = g$$

at

$$(x-y)'' + a(x-y)' + b(x-y) = 0 \quad ,$$

dvs. differensen mellem to løsninger til den inhomogene ligning vil være en løsning til den homogene ligning. Altså kan vi så slutte, at *den fuldstændige løsning til den lineære, inhomogene anden ordens differentialligning kan bestemmes som sum af en tilfældig (partikulær) løsning til denne ligning og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.*

Øvelse 2.4. Hvis x_1 er en partikulær løsning til differentialligningen

$$(D^2+aD+bD^0)x = f_1(t)$$

og x_2 er til

$$(D^2+aD+bD^0)x = f_2(t)$$

vis da, at $x = x_1+x_2$ er en partikulær løsning til differentialligningen

$$(D^2+aD+bD^0)x = f_1(t) + f_2(t)$$

Hvordan en tilfældig løsning til den inhomogene ligning fremkommer, kan ligesom for den første ordens lineære ligning eksplicit fastlægges. I mange tilfælde vil den dog ofte være hurtigere at gætte.

Når vi skal løse ligningen $(D^2+aD+bD^0)x = g$ betyder det, at vi skal finde en funktion som opfylder de to koblede 1.ordens differentialligninger

$$(D-pD^0)y = g$$

og $$(D-qD^0)x = y \quad .$$

Her vil en løsning til den øverste være

$$y(t) = e^{pt}\int^t e^{-ps}g(s)ds \quad .$$

og en løsning til den nederste er da

$$x(t) = e^{qt}\int e^{-qt}e^{pt}\left(\int^t e^{-ps}g(s)ds\right)dt$$

$$x(t) = e^{qt}\int e^{(p-q)t}\left(\int^t e^{-ps}g(s)ds\right)dt \quad ; \ p\neq q.$$

og ved partiel integration fås videre, at

$$x(t) = e^{qt}\frac{e^{(p-q)t}}{p-q}\int^t e^{-ps}g(s)ds - e^{qt}\int^t \frac{e^{(p-q)s}}{p-q}e^{-ps}g(s)ds$$

$$= \frac{e^{pt}}{p-q}\int^t e^{-ps}g(s)ds - \frac{e^{qt}}{p-q}\int^t e^{-qs}g(s)ds$$

Øvelse 2.5 Vis, at en inhomogen løsning i det tilfælde, hvor $p=q$, er af formen

$$x(t) = te^{pt}\int^t e^{-ps}g(s)ds - e^{pt}\int^t se^{-ps}g(s)ds$$

Eksempel 2.3 Skal man løse differentialligningen

$$x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$$

løses først den homogene ligning. Da $\lambda^2-4\lambda+4 = 0$ har dobbeltroden $\lambda=2$, bliver den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$x_0(t) = (c_1t+c_2)e^{2t}.$$

En inhomogen løsning findes af

$$x(t) = te^{2t}\int^t e^{-2s}e^{2s}ds - e^{2t}\int^t se^{-2s}e^{2s}ds$$

$$= t^2e^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t} = \frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

Da bliver den fuldstændige løsning

$$x(t) = (\tfrac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2)e^{2t}$$

Øvelse 2.6 Løs differentialligningerne

$$x'' - a^2x = e^{at}$$

$$x'' - 2ax' + a^2x = e^{at}$$

for alle $a \in R$

Øvelse 2.7 Løs differentialligningen

$$x'' + ax = a\cos(at)$$

med $x(0)=a$ og $x'(0)=1$ for alle $a \in R$

2.6 Den homogene, lineære differentialligning af anden orden med kontinuerte koefficienter.

I det følgende forudsættes koefficienterne i ligning

$$(D^2 + aD + bD^0)x = 0$$

at være kontinuerte funktioner defineret på et interval $I \subseteq R$, dvs. $a,b \in C^0(I)$.

Vi vil igen forsøge at bestemme den fuldstændige løsning til ligningen ved at omskrive operatorer således at

$$D^2+aD+bD^0 = (D-pD^0)\circ(D-qD^0), \quad \text{hvor } p,q \in C^0(J), J \subseteq I$$

Ved udregning ses nu, at

$$(D-pD^0)\circ(D-qD^0) = D^2 - (p+q)D + (pq-Dq)D^0.$$

Skal man altså lave denne omskrivning må

$$p+q = -a \quad \text{og} \quad pq-Dq = b$$

eller $\quad Dq = -b-aq-q^2$

$\quad\quad\quad p = -a-q$

Denne ligning i q er en Ricatti-ligning, som kun kan løses fuldstændigt, når man har gættet en løsning. Man kan således ikke få taget hul på problemet med at bestemme den fuldstændige løsning uden først at gætte en løsning til ligningen eller til en Ricatti ligning.

Vi er således heller ikke i stand til umiddelbart at afgøre om løsningsmængdens struktur er som beskrevet for den tilsvarende differentialligning med konstante koefficienter. Vi bliver på dette punkt nødt til at antage, at eksistens- og entydighedssætningen også gælder her, dvs at *der gennem hvert linieelement (t_o, s_o, r_o) går en og kun en løsning til differentialligningen*

$$(D^2 + aD + bD^0) = 0 \quad , \quad a,b \in C^0.$$

Det vil senere blive vist, at eksistens og entydighedssætningen gælder for alle "passende" pæne differentiallinginger. Vi kan nu vise, at løsningsmængden

$$U = \{x \in C^\infty \mid (D^2+aD+bD^0)x = 0\}$$

er isomorf med R^2 og at dimU=2, idet beviset i afsnit 2.4 kan kopieres.Vi har derfor, at *enhver løsning til den lineære homogene anden ordens differentialligning kan fremstilles som linearkombination af netop to lineært uafhængige løsninger.* Vi kan tillige ved at gentage ræsonnementet i afsnit 2.5 fastlægge *samtlige løsninger til den lineære, inhomogene anden ordens differentialligning*

$$(D^2 + aD + bD^0)x = g \quad ,$$

idet disse igen *fås ved til en tilfældig (partikulær) løsning til den inhomogene ligning at addere samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning.*

2.7 Samtlige løsninger til den lineære differentialligning af anden orden.

Er nu funktionen $\varphi \in C^2$ en gættet løsning til differentialligningen

$$(D^2 + aD + bD^0)x = 0$$

vil vi som i kapitel 1 benytte de arbitrære konstanters variationsmetode til at fastlægge endnu en løsning. Hvis ligningen er af formen

$$(aD^2 + bD + cD^0)x = 0$$

skal ligningen først normeres, og ligningen kan da løses i alle delintervaller, hvor $a(t) \neq 0$. Vi antager, at funktionen $\psi\varphi$ også er en løsning til differentiallingingen, og at $\psi \in C^2$.

Af $\quad (D^2+aD+bD^0)(\psi\varphi) = 0 \quad$ fås, at

$$\varphi D^2\psi + 2D\varphi D\psi + \psi D^2\varphi + a\varphi D\psi + a\psi D\varphi + b\psi\varphi = 0$$

og da

$$\psi(D^2\varphi + aD\varphi + b\varphi) = 0$$

bliver en betingelse for, at $\varphi\psi$ er løsning, at

$$\varphi D^2\psi + (a\varphi + 2D\varphi)D\psi = 0$$

og i alle delintervaller, hvor $\varphi \neq 0$

$$(D + (a + 2D(\ln\varphi))D^0)D\psi = 0$$

Dette giver følgende betingelse på funktionen ψ

$$\psi(t) = \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-A(t)} dt$$

hvor A er en stamfunktion til a. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning bliver således

$$x(t) = c_1\varphi(t) + c_2\psi(t)\varphi(t) \;, \qquad c_1, c_2 \in R$$

idet φ og $\psi\varphi$ klart er lineært uafhængige.

Eksempel 2.4 Skal man løse differentialligningen

$$(D^2 + 2\text{tg}\,tD - D^0)x = 0$$

gættes på en af de trigonometriske funktioner, og man ser, at sin er en løsning. Derefter fastlægges ψ ved

$$\psi(t) = \int \frac{1}{\sin^2 t} \cdot e^{-\int 2tgtdt} dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t} \cdot e^{2\ln|\cos t|} dt$$

$$= \int \cot^2 t dt$$

$$= - t - \cot t$$

Da er $\psi(t)\varphi(t) = (- t - \cot t)\sin t = - t\sin t - \cos t$ og dermed bliver den fuldstændige løsning

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2(t\sin t + \cos t)$$

Vi indfører nu Wronskideterminanten $W(\varphi_1,\varphi_2)$, hvor $\varphi_1,\varphi_2 \in C^2$, ved

$$W(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 \end{vmatrix}$$

af

$$D\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1 D\varphi_2 - \varphi_2 D\varphi_1}{\varphi_1^2}$$

$$= \frac{1}{\varphi_1^2} W(\varphi_1,\varphi_2)$$

ser vi, at φ_1 og φ_2 er lineært uafhængige hvis og kun hvis $W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0$ (0-funktionen), idet $D(\varphi_2/\varphi_1) = 0$ hvis og kun hvis $\varphi_2 = k\varphi_1$.

Da Wronskideterminanten er en differentiabel funktion kan den differentieres, og man får

$$DW(\varphi_1,\varphi_2) = D(\varphi_1 D\varphi_2 - \varphi_2 D\varphi_1)$$

$$= \varphi_1 D^2\varphi_2 + D\varphi_1 D\varphi_2 - D\varphi_2 D\varphi_1 - \varphi_2 D^2\varphi_1$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 \end{vmatrix}$$

Øvelse 2.8 Idet W er defineret som ovenfor, og φ_1 og φ_2 er lineært uafhængige løsninger til $(D^2 + aD + bD^0)x = 0$, vis da, at

$$(D + aD^0)W = 0$$

og løs derpå ligningen.

Øvelse 2.9 Undersøg, hvilke basisskift for løsningsmængden U, der lader W invariant.

Går vi herefter over til at løse den inhomogene ligning $(D^2 + aD + bD^0)x = g$ (Bemærk at ligningen er normeret!), har vi jo set, at man blot behøver at bestemme en løsning til denne ligning. Vi benytter igen de arbitrære konstanters variationsmetode, idet vi antager, at funktionen

$$h = \psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2$$

er løsning til den inhomogene ligning, og at φ_1 og φ_2 er lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning, mens ψ_1 og ψ_2 er vilkårlige C^1-funktioner.
Vi antager tillige, at

$$(*) \qquad \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0$$

hvilket i dette følgende ikke vil forhindre en bestemmelse af funktionerne ψ_1 og ψ_2. Man får nu

$$h' = \psi_1\varphi_1' + \psi_2\varphi_2'$$

$$h'' = \psi_1\varphi_1'' + \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' + \psi_2\varphi_2'',$$

og da h var antaget at være en løsning til $(D^2 + aD + bD^0)x = g$

fås ved indsættelse, at

$$\psi_1\varphi_1'' + \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' + \psi_2\varphi_2''$$
$$+ a\psi_1\varphi_1' + a\psi_2\varphi_2' + b\psi_1\varphi_1 + b\psi_2\varphi_2 = g$$

eller, at

$$\psi_1(\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1) + \psi_2(\varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2)$$
$$+ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = g$$

Men da φ_1 og φ_2 var løsninger til den tilsvarende homogene ligning, er de to første led 0, og altså er

(Δ) $$\psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = g \,.$$

Sammenholdes nu (*) og (Δ) fås de to sammenhørende ligninger

$$\varphi_1\psi_1' + \varphi_2\psi_2' = 0$$
$$\varphi_1'\psi_1' + \varphi_2'\psi_2' = g$$

med to ubekendte (ψ_1' og ψ_2'). Da nu φ_1 og φ_2 er lineært uafhængige, vil ligningssystemets determinant

$$W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0$$

hvormed løsningen (ψ_1',ψ_2') bliver

$$\psi_1' = \frac{-\varphi_2 g}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \quad \text{og} \quad \psi_2' = \frac{\varphi_1 g}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \,.$$

Bestemmes derpå en stamfunktion til hver af disse fås ved indsættelse i udtrykket for h, at en løsning til den inhomogene ligning bestemmes af

$$h(t) = \varphi_2(t)\int\frac{\varphi_1(t)g(t)\,dt}{W(\varphi_1(t),\varphi_2(t))} - \varphi_1(t)\int\frac{\varphi_2(t)g(t)\,dt}{W(\varphi_1(t),\varphi_2(t)}$$

Øvelse 2.1o Vis, at de to løsningsformler i afsnit 2.5 til den inhomogene ligning med konstante koefficienter er specialtilfælde af den netop opstillede løsningsmel.

Eksempel 2.5 Skal man løse differentialligningen $(tD^2 + 2D - tD^0)x = 1$, må man først omskrive den så den får formen $(D^2 + aD + bD^0)x = g$, d.v.s. $(D^2 + \frac{2}{t}D - D^0)x = \frac{1}{t}$ hvor $t \neq 0$. Man ser først, at funktionen $\varphi_1: t \sim \frac{e^t}{t}$ vil være en løsning til den homogene ligning, og en anden løsning bliver da

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{e^t}{t}\int \frac{t^2}{e^{2t}}\, e^{-\int \frac{2}{t}dt}\, dt \\ &= \frac{e^t}{t}\int e^{-2t}dt \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^{-t}}{t} .\end{aligned}$$

Da bliver den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$\varphi_0(t) = c_1\frac{e^t}{t} + c_2\frac{e^{-t}}{t}$$

Da

$$W(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{vmatrix} \frac{e^t}{t} & \frac{e^{-t}}{t} \\ \frac{te^t - e^t}{t^2} & \frac{-te^{-t} - e^{-t}}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{-2}{t^2}$$

bliver en løsning til den inhomogene ligning

$$\begin{aligned}\varphi_i(t) &= \frac{e^{-t}}{t}\int\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\frac{e^t}{t}\,dt - \frac{e^t}{t}\int\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \frac{e^{-t}}{t}\int\left(-\frac{1}{2}\right)e^t dt - \frac{e^t}{t}\int\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t}dt \\ &= -\frac{1}{t}\end{aligned}$$

Dermed bliver den fuldstændige løsning

$$\varphi(t) = c_1 \frac{e^t}{t} + c_2 \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t}$$

2.8 Eulers ligning

En differentialligning af formen

$$(t^2D^2 + atD + bD^0)x = 0$$

med $a,b \in R$ kaldes en Euler ligning, og den kan løses som beskrevet i sidste afsnit ved at gætte en løsning. Den kan imidlertid også løses direkte. Foretages således transformationen

$$t \sim s = \ln t \quad , \quad t > 0$$

($t \sim s = \ln(-t)$ for $t < 0$) ser man, at $t = e^s$ og $Ds = \frac{1}{t} = e^{-s}$. Herefter bliver

$$D_t x = D_s x \cdot Ds = e^{-s} D_s x$$

og

$$\begin{aligned} D_t^2 x &= D_t(D_t x) \\ &= D_t(e^{-s} D_s x) \\ &= D_s(e^{-s} D_s x) \cdot e^{-s} \\ &= (-e^{-s} D_s x + e^{-s} D_s^2 x) \cdot e^{-s} \\ &= e^{-2s}(D_s^2 x - D_s x) \end{aligned}$$

Indsættes dette i den oprindelige ligning samtidig med $t = e^s$, fås

$$e^{2s} \cdot e^{-2s}(D_s^2 x - D_s x) + ae^s \cdot e^{-s} D_s x + bx = 0$$

eller

$$(D_s^2 + (a - 1)D_s + bD_s^0)x = 0$$

Denne ligning har imidlertid konstante koefficienter, og den løses derfor ved først at bestemme rødderne i det karakteristiske polynomium

$$F(\lambda) = \lambda^2 + (a - 1)\lambda + b \,.$$

Kaldes disse rødder p og q fås, at for p,q ∈ R og

$p \neq q$:

$$x(s) = c_1 e^{ps} + c_2 e^{qs} \qquad \text{eller}$$

$$x(t) = c_1 t^p + c_2 t^q$$

$p = q$:

$$x(s) = (c_1 s + c_2)e^{ps} \qquad \text{eller}$$

$$x(t) = (c_1 \ln t + c_2)t^p$$

$p = \alpha + i\beta, \; q = \alpha - i\beta$:

$$x(s) = e^{\alpha s}(c_1 \cos\beta s + c_2 \sin\beta s) \qquad \text{eller}$$

$$x(t) = t^\alpha(c_1 \cos(\ln t^\beta) + c_2 \sin(\ln t^\beta))$$

Sammenfattende kan vi nu sige, at såfremt vi havde startet med, at gætte på, at funktionen $\varphi : t \sim t^p$ *var løsning til differentialligningen*

$$(t^2D^2 + atD + bD^0)x = 0$$

for et eller andet p, havde vi ved at indsætte φ *i ligningen fået, at p skulle opfylde den karakteristiske ligning*

$$p^2 + (a - 1)p + b = 0$$

Herved bestemmer vi umiddelbart den fuldstændige løsning til Euler ligningen, sådan som den er udregnet ovenfor.

<u>Eksempel 2.6</u> Skal man løse ligningen $(t^2D^2 + 3tD + D^0)x = 0$ for $t > 0$, vil $\varphi : t \sim t^p$ være løsning såfremt p opfylder ligningen $p^2 + (3 - 1)p + 1 = 0$ eller hvis $(p + 1)^2 = 0$. Da bli-

ver den fuldstændige løsning

$$x(t) = \frac{1}{t}(c_1 \ln t + c_2)$$

2.9 Løsning af to koblede differentialligninger af første orden

I det følgende kapitel vil blive beskrevet en metode til løsning af n koblede lineære differentialligninger af første orden med konstante koefficienter, og derfor vil løsning af de to sammenhørende ligninger

$$Dx = ax + by$$
$$Dy = cx + dy \qquad a,b,c,d \in R$$

blot være et specialtilfælde af denne metode. Man kan imidlertid ikke angive en generel løsningsmetode, hvis ligningerne har kontinuerte (eller differentiable) funktioner som koefficienter, og vi vil derfor i dette specialtilfælde søge at angive en løsningsmetode.

Vi antager altså nu, at $a,b \in C^1$ og $c,d \in C^0$. Da vil i alle delintervaller, hvor $b \neq 0$, det oprindelige ligningssystem være identisk med systemet

$$y = \frac{1}{b}(D - aD^0)x$$

og

$$(D - dD^0)y = cx$$

eller identisk med

$$(D - dD^0)\left[\frac{1}{b}(D - aD^0)\right] x = cx$$

og

$$y = \frac{1}{b}(D - aD^0)x \ .$$

Ved simple differentiationer fås, at den fuldstændige løsning til ligningssystemet fastlægges af

$$[D^2 - (a + d + \frac{Db}{b})D + (ad - bc - bD\left(\frac{a}{b}\right))D^0]x = 0$$

og

$$y = \frac{1}{b}(D - aD^0)x$$

Sætter vi

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kan ligningssystemet skrives som

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Er nu den fuldstændige løsning til den anden ordens ligning bestemt til $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, vil løsningen til ligningssystemet være

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{1}{b}(\varphi_1' - a\varphi_1) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \frac{1}{b}(\varphi_2' - a\varphi_2) \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{1}{b}(\varphi_1' - a\varphi_1) & \frac{1}{b}(\varphi_2' - a\varphi_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

sættes

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{1}{b}(\varphi_1' - a\varphi_2) & \frac{1}{b}(\varphi_2' - a\varphi_2) \end{pmatrix}$$

ses, at

$$det\ \underline{M} = \frac{1}{b}W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0$$

dvs. at søjlerne i M vil være lineært uafhængige, altså vil

$$V = \left\{\varphi,\psi \in C^2 \mid D\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \underline{A}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\}$$

have dim V = 2.

Bemærk, at såfremt $a,b \in R$, vil løsningen til lignings-systemet kunne bestemmes af:

$$(D^2 - tr(A)D + det(A)D^0)x = 0$$

og

$$y = \frac{1}{b}(D - aD^0)x \quad .$$

hvor $tr(A) = a + d$ og $det(A) = ad - bc$

Eksempel 2.7 Skal man løse ligningssystemet

$$Dx = \frac{4}{t}x - 2y$$

$$Dy = \frac{2}{t^2}x - \frac{1}{t}y$$

skal man altså først løse den anden ordens ligning

$$(D^2 - \frac{3}{t}D + \frac{4}{t^2}D^0)x = 0 \qquad \text{eller}$$

$$(t^2D^2 - 3tD + 4D^0)x = 0$$

der er en Euler ligning. Det karakteristiske polynomium er således

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \qquad \text{eller}$$

$$F(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

og dermed er

$$x(t) = (c_1 \ln t + c_2)t^2$$

Da nu

$$y = \frac{2}{t}x - \frac{1}{2}Dx$$

fås, at

$$y(t) = (c_1 \ln t + c_2 - \frac{c_1}{2})t$$

Da bliver den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} t^2 \ln t \\ t \ln t - \frac{t}{2} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Kapitel 3

Systemer med n lineære differentialligninger af første orden samt lineære differentialligninger af n-te orden.

3.1 Et eksempel.

Vil man forsøge at beskrive udviklingen i befolkningssammensægningen, kan der f.ex. foretages en opdeling i aldersmæssigt mere ensartede grupper såsom

x_1: antal personer i alder 0 - 14 år
x_2: antal personer i alder 15 - 29 år
x_3: antal personer i alder 30 - 44 år
x_4: antal personer i alder 45 - 59 år
x_5: antal personer i alder 60 - 74 år
x_6: antal personer i alder over 75 år.

Da kan tilvæksten inden for hver af grupperne beskrives ved

$$x_1' = A_2x_2+A_3x_3-B_1x_1 \qquad x_2' = B_1x_1-B_2x_2$$

$$x_3' = B_2x_2-(B_3+D_3)x_3 \qquad x_4' = B_3x_3-(B_4+D_4)x_4$$

$$x_5' = B_4x_4-(B_5+D_5)x_5 \qquad x_6' = B_5x_5-D_6x_6$$

hvor A_2 og A_3 beskriver fødselsraten fra gruppe 2 og 3, B_j beskriver fragangsraten fra gruppe j og D_j beskriver dødsraten i gruppe j. Denne forsimplede model forudsætter tillige, at antallet af personer i hver gruppe fordeler sig jævnt. Ligningssystemet kan opskrives på vektorform

$$D\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_1 & A_2 & A_3 & o & o & o\\ B_1 & -B_2 & o & o & o & o\\ o & B_2 & -B_3-D_3 & o & o & o\\ o & o & B_3 & -B_4-D_4 & o & o\\ o & o & o & B_4 & -B_5-D_5 & o\\ o & o & o & o & B_5 & -D_6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix}$$

og vi vil i det følgende forsøge at beskrive løsningsmængden og løsningsmetoder for differentialligningssystemer af denne type.

3.2 Sammenhængen mellem n lineære ligninger af første orden og en lineær ligning af n-te orden.

Vi skal her arbejde dels med ligningssystemer af formen

$$\begin{aligned} Dx_1 &= a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\dots+a_{1n}(t)x_n+q_1(t)\\ Dx_2 &= a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\dots+a_{2n}(t)x_n+q_2(t)\\ &\vdots\\ Dx_n &= a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\dots+a_{nn}(t)x_n+q_n(t), \end{aligned}$$

hvor $q_i, a_{ij} \in C^o$ og $x_i \in C^1$ for $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ dels med differentialligninger af formen

$$(D^n+b_{n-1}(t)D^{n-1}+\dots+b_1(t)D+b_o(t)D^o)f=g$$

hvor $g, b_i \in C^o$ og $f \in C^n$ for $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Omskrives ligningssystemet til matrix-form

$$D\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\\ \vdots\\ q_n(t)\end{pmatrix}$$

kan det opskrives på en kompakt form

$$D\underline{x} = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{q}\ (t)$$

hvor $\underline{x}$ og $\underline{q}$ skal opfattes som søjlevektorer.

Vælges specielt matricen $\underline{B}$ og vektoren $\underline{q}$ som

$$\underline{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -b_o(t) & -b_1(t) & -b_2(t) \ldots -b_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}$$

kan systemet

$$D\underline{x} = \underline{B}(t)\underline{x} + \underline{q}\ (t)$$

omskrives til

$$Dx_1 = x_2, Dx_2 = x_3 \ldots, Dx_{n-1} = x_n$$

$$Dx_n = -b_o(t)x_1 - b_1(t)x_2 - \ldots - b_{n-1}(t)x_n + g(t)$$

der kan trækkes sammen til

$$D^n x_1 = -b_o(t)x_1 - b_1(t)Dx_1 - \ldots - b_{n-1}(t)D^{n-1}x_1 + g(t)$$

eller

$$(D^n + b_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + b_1(t)D + b_o(t)D^o)x_1 = g(t)$$

Dette viser, at den lineære differentialligning af n-te orden kan betragtes som et specialtilfælde af et system med n lineære første ordens differentialligninger.

Det er derfor tilstrækkeligt at undersøge et sådant system af n lineære differentialligninger af første orden.

3.3 n sammenhørende lineære ligninger af første orden.

Indledningsvis betragtes et *homogent* system (d.v.s. $\forall i: q_i(t) = o$). Er blot et $q_i(t) \neq o$ kaldes systemet *inhomogent*.

Til dette formål forudsætter vi, at eksistens- og entydighedssætningen for systemer af differentialligninger er opfyldt, hvilket betyder, at *der til ethvert punkt* $(t_o, \underline{x}_o) \in R^{n+1}$ *findes en og kun en funktion* $\underline{\varphi} \in C_n^1$, *som opfylder* $D\underline{\varphi} = A(t)\underline{\varphi}$, *og som har* $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$.

Benævner vi $U = \{\underline{\varphi} \in C_n^1 \mid D\underline{\varphi} = \underline{A}(t)\underline{\varphi}\}$, og definerer vi afbildningen $F: U \to R^n$ ved $F(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}(t_o)$, er der herved sikret, at F er en lineær afbildning, idet

$$\begin{aligned} F(\lambda\underline{\varphi}+\mu\underline{\psi}) &= (\lambda\underline{\varphi}+\mu\underline{\psi})(t_o) \\ &= \lambda\varphi(t_o)+\mu\underline{\psi}(t_o) \\ &= \lambda F(\underline{\varphi})+\mu F(\underline{\psi}) \end{aligned}$$

Da det tillige let ses, at F er bijektiv, som følge af eksistens- og entydighedssætningen, er F altså en isomorfi, og derfor er $\dim U = \dim R^n = n$. Heraf slutter vi, at *den fuldstændige løsning til et system med n lineære differentialligninger af første orden er af formen* $c_1\underline{\varphi}_1 + \dots + c_n\underline{\varphi}_n$, $c_i \in R$, *når* $(\underline{\varphi}_i)_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$ *er et sæt af n lineært uafhængige løsninger til systemet.*

Benævnes disse løsninger

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \vdots \\ \varphi_{1n} \end{pmatrix}, \dots\dots, \quad \underline{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

bliver betingelsen for, at $(\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_n)$ er lineært uafhængige, at

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \dots\dots\dots\dots \varphi_{n1} \\ \varphi_{12} \dots\dots\dots\dots \varphi_{n2} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{1n} \dots\dots\dots\dots \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

har det $\underline{\Phi} \neq o$, og den fuldstændige løsning til det homogene system kan således skrives

$$\underline{x} = \underline{\Phi}\,\underline{c}$$

hvor $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Sættes $W(t) = \det \underline{\Phi}(t)$, kalder vi W en Wronskideterminant, og man kan bevise, at

$$DW(t) = (tr\,\underline{A}(t))W(t)$$

$$hvor \quad tr\underline{A}(t) = a_{11}(t)+a_{22}(t)+\ldots+a_{nn}(t)$$

Beviset gennemføres for n=3, men kan i princippet gennemføres for vilkårligt n.

Da $$DW(t) = D[\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{13}\varphi_{21}\varphi_{32} + \varphi_{31}\varphi_{12}\varphi_{23} - \varphi_{13}\varphi_{22}\varphi_{31} - \varphi_{11}\varphi_{23}\varphi_{32} - \varphi_{12}\varphi_{21}\varphi_{33}]$$

kan de ialt 18 led, der fremkommer ved differentiationen, grupperes, så man får, at

$$DW(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{21}' & \varphi_{31}' \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ \varphi_{12}' & \varphi_{22}' & \varphi_{32}' \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{13}' & \varphi_{23}' & \varphi_{33}' \end{vmatrix}$$

Vi erindrer, at søjlerne i $\underline{\Phi}(t)$ var en løsning til ligningen $D\underline{\varphi}=\underline{A}(t)\underline{\varphi}$, og anvender vi dette på hver af de tre determinanter ovenfor, får vi f.ex. for den midterste:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ a_{21}\varphi_{11}+a_{22}\varphi_{12}+a_{23}\varphi_{13} & a_{21}\varphi_{21}+a_{22}\varphi_{22}+a_{23}\varphi_{23} & a_{21}\varphi_{31}+a_{22}\varphi_{32}+a_{23}\varphi_{33} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$$

der ved udregning giver $a_{22}W(t)$, og tilsammen får vi, at

$$DW(t)=(a_{11}(t)+a_{22}(t)+a_{33}(t))W(t)$$

Sætningen giver herefter, at

$$W(t) = W(t_o)\ exp(\int_{t_o}^{t} tr(\underline{A}(t))dt)$$

Går man nu over til at betragte løsningen til det inhomogene ligningssystem

$$D\underline{x} = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{q}(t)$$

skal vi bevise, at *den fuldstændige løsning* er

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{c} + \underline{\Phi}(t)\int_{t_o}^{t} \underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{q}(t)dt.$$

Ved beviset benyttes de "arbitrærer konstanters variationsmetode". Da $\underline{\Phi}(t)$ er regulær (da $W(t) \neq o$), kan enhver funktion $\underline{\varphi}(t)$ entydigt skrives på formen $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{\psi}(t)$, nemlig ved at sætte $\underline{\psi}(t) = \underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)$.
Antages $\underline{\varphi}(t)$ nu at være løsning til det inhomogene system, får man

$$\underline{\Phi}(t)D\underline{\psi}(t) + (D\underline{\Phi}(t))\underline{\psi}(t) = \underline{A}(t)\underline{\Phi}(t)\underline{\psi}(t) + \underline{q}(t)$$

Men da hver søjle i $\underline{\Phi}(t)$ er løsning til det homogene system, gælder, at

$$D\underline{\Phi}(t) = \underline{A}(t)\underline{\Phi}(t)$$

Derfor reduceres betingelsen på $\underline{\psi}$ ovenfor til:

$$D\underline{\psi}(t) = \underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{q}(t)$$

og samtlige løsninger til ligningen er da

$$\underline{\psi}(t) = \underline{c} + \int_{t_o}^{t} \underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{q}(t)dt$$

idet søjlevektorer integreres elementvis.

Heraf følger tillige, at *den fuldstændige løsning til det inhomogene system fås ved til en partikulær løsning til systemet at addere den fuldstændige løsning til det homogene system.*

3.4 Den lineære ligning af n-te orden.

Vi overfører det nu viste på den lineære differentialligning af n-te orden

$$(D^n+b_{n-1}(t)D^{n-1}+\dots+b_1(t)D+b_o(t)D^o)f=g.$$

Da ligningen som tidligere vist blot er et specialtilfælde af et system med n lineære differentialligninger af første orden, vil en løsning $\varphi(t)$ til ligningen af n-te orden modsvare en løsning til systemet af n ligninger af formen

$$\underline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

idet jo $Dx_1=x_2, Dx_2=x_3, \dots, Dx_{n-1}=x_n$, og vi kan slutte, at *løsningsrummet for en homogen, lineær differentialligning af n-te orden er af dimension n.*

For et vilkårligt sæt af n lineært uafhængige løsninger $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ til den homogene ligning af n-te orden vil matricen

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) \ldots\ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

have det $\underline{\Phi} \neq 0$. Og sætter vi igen $W(t) = \det \underline{\Phi}(t)$, vil i dette tilfælde *W(t) opfylde differentialligningen* $DW(t) = -b_{n-1}(t)W(t)$.

Går vi nemlig tilbage til side , ser vi, at

$$\operatorname{tr}(\underline{B}(t)) = -b_{n-1}(t),$$

og derfor bliver

$$W(t) = W(t_o)\cdot \exp\left(\int_{t_o}^{t} -b_{n-1}(t)dt\right) .$$

(Bemærk, at dette for n=2 allerede er vist i øvelse 2.8).

Når vi skal løse den inhomogene ligning af n-te orden, kræver det lidt forberedelse. For det første skal vi erindre, at

$$\underline{\Phi}^{-1}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots & W_{nn} \end{pmatrix}$$

hvor W_{ij} er den underdeterminant, der fremkommer af W ved at slette den j-te række og den i-te søjle i $\underline{\Phi}$ samt multipliceret med faktoren $(-1)^{i+j}$. For det andet består $\underline{q}(t)$ i dette tilfælde af lutter o'er undtagen på sidste (n-te) plads, hvor der står g(t).

Når vi skal udregne $\underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{g}(t)$ bliver

$$\underline{\Phi}^{-1}(t)\underline{g}(t) = \frac{1}{W(t)}\begin{pmatrix} W_{1n} \\ W_{2n} \\ \vdots \\ W_{nn} \end{pmatrix} g(t)$$

altså kun de underdeterminanter, hvor sidste række i $\underline{\Phi}$ slettes, har interesse. Benævner vi nu netop den underdeterminant, hvor i-te søjle og sidste række i $\underline{\Phi}$ slettes, med $W_i(t)$ er

$$W_{in} = (-1)^{i+n} W_i(t)$$

og *den fuldstændige løsning til den inhomogene lineære differentialligning af n-te orden er da*

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t)+..+c_n\varphi_n(t) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}\varphi_i(t)\int_{t_o}^{t}\frac{W_i(t)}{W(t)}g(t)dt$$

Heraf følger tillige, at *den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning fås ved til en partikulær løsning til den inhomogene at addere samtlige løsninger til den homogene ligning.*

3.5 n sammenhørende lineære ligninger af første orden med konstante koefficienter.

Vi skal nu betragte det tilfælde, hvor alle koefficienterne er reelle tal, hvorefter det homogene ligningssystem er af formen

$$D\underline{x} = \underline{Ax}$$

hvilket dog ikke umiddelbart bliver lettere at løse! Foretager vi imidlertid et bijektivt parameterskift (en lineær bijektiv afbildning)

$$\underline{x} = \underline{S}\,\underline{y}$$

vil $D\underline{x} = \underline{S}\,D\underline{y}$ og hele systemet bliver derfor ændret til

$$D\,\underline{y} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}\,\underline{y}\,.$$

Spørgsmålet er nu, om vi med passende valg af $\underline{S}$ kan bringe det nye system på en løsbar form.

Hvis $\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}$ kunne bringes til at blive en diagonalmatrix, var vores sorger slukket. Dette lader sig imidlertid ikke altid gøre.

Til dette formål vil vi finde de tal $\lambda \in C$ som opfylder

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$$

hvor $\underline{E}$ er enhedsmatricen, d.v.s. finde de til $\underline{A}$ svarende egenværdier. Er de ialt n λ-værdier vi finder indbyrdes forskellige, kan $\underline{S}$ vælges således at

$$\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

idet søjlerne i $\underline{S}$ netop vil være egenvektorerne svarende til de respektive egenværdier, taget i samme rækkefølge som λ-erne.

Dermed er $Dy_i = \lambda_i y_i \quad i \in \{1,\ldots,n\}$ og altså $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$. Hvorefter

$$\underline{x} = \underline{S} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Gentages imidlertid den samme λ-værdi flere gange (altså er multipliciteten af visse λ-er større end 1), kan der opstå forskellige situationer.

3.5.1 $\underline{A}$ symmetrisk

Da ved man fra lineær algebra, at $\underline{A}$ altid kan diagonaliseres, d.v.s. at $\underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}$ er en diagonalmatrix med egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ i diagonalen, hvor λ_j, $j = 1,\ldots, p$ gentages netop så ofte i diagonalen som det er rod i den karakteristiske ligning $\det(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = o$. I dette tilfælde vil $\underline{S}$ udgøres af lineært uafhængige egenvektorer svarende til de respektive egenværdier. Har altså λ_j multipliciteten m_j, vil de ialt n egenvektorer i $\underline{S}$ bestå af netop m_j egenvektorer svarende til λ_j og netop opskrevet i de søjler i $\underline{S}$, hvis numre er identiske med numrene for de søjler i $\underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}$, hvor der står λ_j. Derefter bliver løsningen til systemet

$$\underline{x} = \underline{S}\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}$$

hvor altså $e^{\lambda_j t}$ forekommer netop m_j gange.

3.5.2 $\underline{A}$ ikke symmetrisk

Betegner K_j egenrummet svarende til λ_j (d.v.s. rummet udspændt af egenvektorerne svarende til λ_j) kan det ske, at enten $\dim K_j = m_j$ eller $\dim K_j < m_j$. Er $\dim K_j = m_j$ for alle j, kan $\underline{S}$ igen bestå af n lineært uafhængige egenvektorer svarende til $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, og denne situation behandles som under 1. Er derimod $\dim K_j = m_j - k_j = n_j$, hvor $k_j \in Z_+$, kan $\underline{S}$ ikke udelukkende bestå af egenvektorer svarende til rødder i det karakteristiske polynomium. Man kan da vise (hvilket dog ikke vil blive gjort her), at $\underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}$ kan omskrives til

$$\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & \underline{o} \dots & \underline{o} \\ \underline{o} & \underline{B}_2 \dots & \underline{o} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{o} & \underline{o} \dots & \underline{B}_p \end{pmatrix}$$

hvor hvert $\underline{B}_j$, $j=1,\dots,p$ er en $m_j x m_j$-matrix af formen

$$\underline{B}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \delta & o \dots & o \\ o & \lambda_j & \delta \dots & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o & o & o \dots & \delta \\ o & o & o \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Her står egenværdien λ_j i diagonalen m_j gange og i skrålinien lige over står δ-er ($\delta = o \vee \delta = 1$), hvor $\delta = 1$ netop k_j gange. I resten af matricen står nuller. Man kan her vælge, at 1-tallerne står på de sidste k_j pladser.

Står nu $\underline{B}_j$ i $\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}$ fra søjlenummer $i+1$ til $i+m_j$, vil de tilsvarende søjlenumre i $\underline{S}$ svare til λ_j, således at de første n_j af disse søjler netop er n_j lineært uafhængige egenvektorer svarende til λ_j, mens de sidste k_j af disse søjler bestemmes, som følger.

Sættes $\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}$ fås naturligvis, at $\underline{S}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{S}$, og antages de k_j søjler i $\underline{S}$ ubekendte, som er i række $i+n_j+1$ til $i+m_j$, kan deres talværdier bestemmes af ligningen $\underline{S}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{S}$.
Bemærk, at rækkefølgen af egenvektorerne i søjle nr. $i+1$ til $i+n_j$ ikke er ligegyldig (se øvelse 3.1).

Efter transformationen med $\underline{S}$ vil ligningerne altså falde i klasser, hver svarende til en matrix $\underline{B}_j$, hvor man først n_j-1 gange skal løse ligningen $Dy_i = \lambda_j y_i$, altså n_j-1 gange får $y_i = e^{\lambda_j t}$, og dernæst har netop følgende k_j+1 ligninger:

./..

$$
\begin{aligned}
Dz_1 &= \lambda_j z_1 + z_2 \\
Dz_2 &= \lambda_j z_2 + z_3 \\
Dz_k &= \lambda_j z_k + z_{k+1} \\
Dz_{k+1} &= \lambda_j z_{k+1}
\end{aligned}
$$

For at løse disse ligninger indser vi, at hvert enkelt z_i må have en løsning af formen $z_i = u_i e^{\lambda_j t}$, $u_i \in C^1$ og da er $Dz_i = (Du_i + \lambda_j u_i) e^{\lambda_j t}$, hvoraf følger ved indsættelse, at $Du_1 = u_2$, $Du_2 = u_3, \ldots, Du_k = u_{k+1}$, $Du_{k+1} = o$

Her er løsningerne netop et polynomium $p(t)$ samt alle dets afledede, hvor $p(t)$ er af grad k, d.v.s.

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) = (p(t), p'(t), \ldots, p^{(k)}(t))$$

Da bliver de ialt m_j løsninger svarende til $\underline{B}_j$

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_j - 1} \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n_j - 1} \\ p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(k)}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}
$$

Da findes den fuldstændige løsning ved at tage løsningerne svarende til alle $\underline{B}_j$ og dernæst at multiplicere dem til $\underline{S}$.

Der optræder således ialt n koefficienter i disse løsninger, og man får derfor udskrevet samtlige n lineært uafhængige løsninger til systemet ved (på skift) at sætte alle disse koefficienter på nær en til 0 og denne ene til 1.

$$\underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & \underline{o} & \dots & \underline{o} \\ \underline{o} & \underline{B}_2 & \dots & \underline{o} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{o} & \underline{o} & \dots & \underline{B}_p \end{pmatrix}$$

hvor hvert $\underline{B}_j$, $j=1,\dots,p$ er en $m_j x m_j$-matrix af formen

$$\underline{B}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \delta & o \dots & o \\ o & \lambda_j & \delta \dots & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o & o & o \dots & \delta \\ o & o & o \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Her står egenværdien λ_j i diagonalen m_j gange og i skrålinien lige over står δ-er ($\delta = o \vee \delta = 1$), hvor $\delta = 1$ netop k_j gange. I resten af matricen står nuller. Man kan her vælge, at 1-tallerne står på de sidste k_j pladser.

Står nu $\underline{B}_j$ i $\underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}$ fra søjlenummer $i+1$ til $i+m_j$, vil de tilsvarende søjlenumre i $\underline{S}$ svare til λ_j, således at de første n_j af disse søjler netop er n_j lineært uafhængige egenvektorer svarende til λ_j, mens de sidste k_j af disse søjler bestemmes, som følger.

Sættes $\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\ \underline{S}$ fås naturligvis, at $\underline{S}\ \underline{B} = \underline{A}\ \underline{S}$, og antages de k_j søjler i $\underline{S}$ ubekendte, som er i række $i+n_j+1$ til $i+m_j$, kan deres talværdier bestemmes af ligningen $\underline{S}\ \underline{B} = \underline{A}\ \underline{S}$.
Bemærk, at rækkefølgen af egenvektorerne i søjle nr. $i+1$ til $i+n_j$ ikke er ligegyldig (se øvelse 3.1).

Efter transformationen med $\underline{S}$ vil ligningerne altså falde i klasser, hver svarende til en matrix $\underline{B}_j$, hvor man først n_j-1 gange skal løse ligningen $Dy_i = \lambda_j y_i$, altså n_j-1 gange får $y_i = e^{\lambda_j t}$, og dernæst har netop følgende k_j+1 ligninger:

./..

$$
\begin{aligned}
Dz_1 &= \lambda_j z_1 + z_2 \\
Dz_2 &= \lambda_j z_2 + z_3 \\
Dz_k &= \lambda_j z_k + z_{k+1} \\
Dz_{k+1} &= \lambda_j z_{k+1}
\end{aligned}
$$

For at løse disse ligninger indser vi, at hvert enkelt z_i må have en løsning af formen $z_i = u_i e^{\lambda_j t}$, $u_i \in C^1$ og da er $Dz_i = (Du_i + \lambda_j u_i)e^{\lambda_j t}$, hvoraf følger ved indsættelse, at $Du_1 = u_2$, $Du_2 = u_3, \ldots, Du_k = u_{k+1}$, $Du_{k+1} = o$

Her er løsningerne netop et polynomium $p(t)$ samt alle dets afledede, hvor $p(t)$ er af grad k, d.v.s.

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) = (p(t), p'(t), \ldots, p^{(k)}(t))$$

Da bliver de ialt m_j løsninger svarende til $\underline{B}_j$

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_j-1} \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n_j-1} \\ p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(k)}(t) \end{pmatrix}
e^{\lambda_j t}
$$

Da findes den fuldstændige løsning ved at tage løsningerne svarende til alle $\underline{B}_j$ og dernæst at multiplicere dem til $\underline{S}$.

Der optræder således ialt n koefficienter i disse løsninger, og man får derfor udskrevet samtlige n lineært uafhængige løsninger til systemet ved (på skift) at sætte alle disse koefficienter på nær en til 0 og denne ene til 1.

<u>Eksempel 3.1.</u> Løs differentialligningssystemet

$$Dx = x+y-2z$$
$$Dy = -2x+4y-4z$$
$$Dz = -x+y$$

Her er $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hvilket viser,

at $\underline{A}$ ikke er symmetrisk. Af det $(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = o$ fås, at $\lambda=1$ og $\lambda=2$ (dobbelt rod).

og $\underline{S}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ med $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dermed bliver løsningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

<u>Eksempel 3.2.</u> Løs differentialligningssystemet

$$Dx = \quad -2y+z$$
$$Dy = x -3y+z$$
$$Dz = x -2y$$

Her er $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ hvilket viser,

at $\underline{A}$ ikke er symmetrisk. Ved udregning af det$(\underline{A}-\lambda\underline{E}) = o$ ses, at $\lambda = -1$ (tredobbelt rod), men ved indsættelse i

$$\underline{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ses, at $K_{-1} = \{(x,y,z) \mid x -2y+z = o\}$, eller at dim $K_{-1} = 2$.
Da bliver

$$\underline{S}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

hvor kun de to første søjler i $\underline{S}$ er egenvektorer for $\underline{A}$, og den sidste søjle er bestemt af $\underline{S}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{S}$.

Da bliver løsningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ t \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}]e^{-t}$$

<u>Øvelse 3.1.</u> Vis, at man ikke kan bestemme sidste søjle i $\underline{S}$ (eksempel 3.2), såfremt egenvektorerne $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bytter rækkefølge.

<u>Eksempel 3.3.</u> Betragter vi igen ligningssystemet (fra eksempel 3.2)

(1) $Dx = -2y+z$

(2) $Dy = x -3y+z$

(3) $Dz = x -2y$

skal vi gennem dette eksempel illustrere en anden metode til at løse et sådant ligningssystem.

Af (1)-(3) fås $D(x-z) = -(x-z)$
eller $x-z = c_1e^{-t}$

Af (1)+(3) fås $D(x+z) = (x+z)-4y$, og
ved omskrivning af (2) fås

(2') $\quad x+z = Dy+3y$

der differentieret giver

(2") $\quad D(x+z) = D^2y+3Dy$

Indsættes (2') og (2") i (1)+(3) ses, at

$$D^2y+2Dy+y = 0$$

eller $\quad y = (c_3t+c_2)e^{-t}$

Indsættes dette i (2') fås

$$x+z = (2c_3t+2c_2-c_3)e^{-t}$$

Af x-z og x+z finder vi så

$$x = (\tfrac{1}{2}c_1+c_2+(t-\tfrac{1}{2})c_3)e^{-t}$$

$$z = (-\tfrac{1}{2}c_1+c_2+(t-\tfrac{1}{2})c_3)e^{-t}$$

eller opskrevet på vektorform (og med c_1 erstattende $\frac{1}{2}c_1$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [\, c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} t-\frac{1}{2} \\ t \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}]\, e^{-t}$$

Bemærk, at vektoren (1,0,-1) kan vælges som egenvektor i stedet for (2,1,0), idet (1,0,-1) = (2,1,0) - (1,1,1).

3.6 Den lineære ligning af n-te orden med konstante koefficienter.

Vi vil nu finde den fuldstændige løsning til den lineære homogene differentialligning af n-te orden med konstante koefficienter. Fra side har vi, at den kan omskrives til

$$D\underline{x} = \underline{B}\underline{x}$$

Vi vil derfor finde egenværdierne i denne matrix $\underline{B}$. Til dette formål indses, at

$$\det(\underline{B}-\lambda\underline{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_o & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_o & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(\lambda) & * & * & & * \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot (-1)^{n+1} F(\lambda)(-1)^{n-1}$$

$$= F(\lambda)(-1)^n$$

hvor

$$F(\lambda) = b_o + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Dette fremkommer ved, at man i skridtet mellem de to sidste determinanter multiplicerer den i-te søjle med λ^{i-1} og adderer til den 1.søjle $i=\{2,\ldots,n\}$. * angiver blot nogle uinteressante tal, idet determinanten udvikles efter 1.søjle. Således er egenværdierne til $\underline{B}$ ensbetydende med nulpunkterne til $F(\lambda)$, som kaldes *det karakteristiske polynomium* svarende til differentialligningen af n-te orden.

Vi kan nu slutte, at

1. $e^{\lambda t}$ *er løsning, hvis og kun hvis* $F(\lambda)=o$,

2. $t^q e^{\lambda t}$ *er løsning hvis og kun hvis* λ *er rod* $q+1$ *gange i* $F(\lambda)$.

Beviset for 1. ses af

$$D^n e^{\lambda t} + b_{n-1}D^{n-1}e^{\lambda t} + \ldots + b_1 De^{\lambda t} + b_o e^{\lambda t} =$$

$$\lambda^n e^{\lambda t} + \lambda^{n-1} b_{n-1} e^{\lambda t} + \ldots + b_1 \lambda e^{\lambda t} + b_o e^{\lambda t} =$$

$$F(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Beviset for 2. gennemføres for q=1, men metoden kan bruges generelt.

$$D^n(te^{\lambda t}) + b_{n-1}D^{n-1}(te^{\lambda t}) + \ldots + b_1 D(te^{\lambda t}) + b_o te^{\lambda t} =$$

$$\lambda^n te^{\lambda t} + n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \ldots\ldots\ldots + b_1\lambda te^{\lambda t} + b_1 e^{\lambda t} + b_o te^{\lambda t} =$$

$$(F'(\lambda) + tF(\lambda))e^{\lambda t}.$$

Her vil $te^{\lambda t}$ være en løsning, hvis og kun hvis $F(\lambda)=o$ og $F'(\lambda)=o$ eller hvis og kun hvis λ er dobbeltrod.

Generelt vil man så få, at

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots + b_1 D + b_o D^o)(t^q e^{\lambda t}) =$$

$$e^{\lambda t}[F^{(q)}(\lambda) + \binom{q}{1} tF^{(q-1)} + \ldots + \binom{q}{q-1} t^{q-1}F'(\lambda) + t^q F(\lambda)].$$

Heraf indser man, at $t^q e^{\lambda t}$ vil være en løsning hvis og kun hvis $F(\lambda)=F'(\lambda) = \ldots = F^{(q)}(\lambda)=o$ eller hvis og kun hvis λ er rod i F netop q+1 gange.

Derfor vil *den fuldstændige løsning til den lineære, homogene differentialligning af n-te orden udspændes af funktionerne*

$$e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}, \ldots, t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}$$

hvor $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$ *og* m_i *angiver multipliciteten af roden* λ_i.

<u>Eksempel 3.4.</u> Løs differentialligningen

$$(D^4-2D^2+D^0)f = t.$$

Det karakteristiske polynomium er

$\lambda^4-2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0$

d.v.s. såvel $\lambda=1$ som $\lambda = -1$ er dobbelt rod. Derved bliver den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$f_o(t) = (c_1t+c_2)e^t + (c_3t+c_4)e^{-t}$$

Det ses let at f(t)=t er en løsning til den inhomogene ligning, og da er den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

$$f(t) = t+f_o(t).$$

<u>Øvelse 3.2.</u> Betragt differentialligningen

$$(D^n+b_{n-1}D^{n-1}+\ldots+b_1D+b_0D^0)x = e^{\alpha t}$$

med det karakteristiske polynomium $F(\lambda)$.

Vis da, at med α rod q gange i $F(\lambda)$ vil en løsning til differentialligningen være

$$\varphi(t) = \frac{1}{F^{(q)}(\alpha)} t^q e^{\alpha t}$$

Øvelse 3.3. Angiv tillige en løsning til differentialligningen

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots + b_1 D + b_o D^o)x = te^{\alpha t}$$

under de i øvelse 3.2 udstukne antagelser.

Øvelse 3.4. Vis, at differentialligningen

$$(t^3D^3 + at^2D + btD + cD^o)x = o$$

for t>o ved transformationen $t \rightsquigarrow s = \ln t$ føres over i en lineær differentialligning af tredie orden med konstante koefficienter.

Kapitel 4

Eksistens- og entydighedssætningen for differentialligningssystemer af 1.orden.

4.1 Indledning.

I dette kapitel beskæftiger vi os med differentialligningssystemer af formen

$$D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

hvor $\underline{x} \in V(=R^n$ el. $C^n)$, $(t,\underline{x}) \in \Omega \subseteq R \times V$ og $\underline{f}:\Omega \to V$ er en kontinuert afbildning. I V definerer vi en norm ved

$$||\underline{x}|| = \max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$$

når $\underline{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

En løsning $\underline{\varphi}:J \to V$ til systemet kaldes maksimal, hvis den ikke er ægte restriktion af nogen anden løsning.
Enhver løsning $\underline{\varphi}:J \to V$ til systemet vil have kontinuert differentialkvotient, idet

(*) $$\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$$

og $\underline{f}$ var antaget kontinuert.

Er $\underline{\varphi}$ en løsning til systemet, og er samtidig $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$ for $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$, kan man ved at integrere (*) fra $t = t_o$ få

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

4.2 Hjælpesætninger.

Definition: En funktion $f(t,x):\Omega \to V$ på en åben mængde Ω i

$R\times V$ siges i en delmængde X af Ω at tilfredsstille en *Lipschitz betingelse* (m.h.t. $\underline{x}$), hvis der findes $C \geq o$ således, at der for vilkårlige punkter $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in X$ (d.v.s. for samme t) gælder, at

$$||\underline{f}(t,\underline{x}_2)-\underline{f}(t,\underline{x}_1)|| \leq C||\underline{x}_2-\underline{x}_1||$$

Man kan da vise følgende sætning, som udskiller en række funktioner, der lokalt opfylder en Lipschitz betingelse.

Sætning: Hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ er kontinuert i Ω, og hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ har kontinuerte partielle aflëdede $D_1\underline{f},\ldots, D_n\underline{f}$ i Ω, da tilfredsstiller $\underline{f}$ lokalt en Lipschitz betingelse.

__Bevis:__ Vi vil vise, at $\underline{f}$ tilfredsstiller en Lipschitz betingelse på enhver mængde

$$X = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \leq a \wedge ||\underline{x}-\underline{x}_o|| \leq b\}$$

hvor $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$ er vilkårligt valgt. Da $D_i\underline{f}$ er antaget kontinuert, og da X er afsluttet findes et tal

$$A = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{\sup_{(t,\underline{x})\in X} ||D_i\underline{f}||\right\}$$

Hvis $(t,\underline{x}_1)$, $(t,\underline{x}_2) \in X$ vil for $\Theta \in [0,1]$ også $(t,\underline{x}_1+\Theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1)) \in X$. Ifølge kædereglen fås da, at

$$D_\theta\underline{f}(t,\underline{x}_1+\Theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1)) = \sum_{i=1}^{n} D_i\underline{f}\cdot(x_{2i}-x_{1i})$$

Da bliver

$$||D_\theta\underline{f}(t,\underline{x}_1+\Theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1))|| = ||\sum_{i=1}^{n} D_i\underline{f}\cdot(x_{2i}-x_{1i})||$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} ||D_i \underline{f}|| \; |x_{2i}-x_{1i}|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} ||D_i \underline{f}|| \cdot ||\underline{x}_2-\underline{x}_1||$$

$$\leq n\ A\ ||\underline{x}_2-\underline{x}_1||$$

Det gælder for enhver kontinuert funktion $\underline{h}:[\alpha,\beta]\rightarrow V$, at

$$||\int_\alpha^\beta \underline{h}(t)dt|| = \max\{|\int_\alpha^\beta h_1(t)dt|,\ldots\ldots,|\int_\alpha^\beta h_n(t)dt|\}$$

$$\leq \max\{\int_\alpha^\beta |h_1(t)|dt,\ldots\ldots,\int_\alpha^\beta |h_n(t)|dt\}$$

$$= \int_\alpha^\beta ||\underline{h}(t)||dt$$

Da $\underline{g}(1)-\underline{g}(0) = \int_0^1 \underline{g}'(\Theta)d\Theta$ fås, at

$$||\underline{f}(t,\underline{x}_2) - \underline{f}(t,\underline{x}_1)|| = ||\int_0^1 D_\Theta \underline{f}(t,\underline{x}_1+\Theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1))d\Theta||$$

$$\leq \int_0^1 ||D_\Theta \underline{f}(t,\underline{x}_1+\Theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1))||d\Theta \leq nA||\underline{x}_2-\underline{x}_1||$$

D.v.s. $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse på X med konstanten nA.

Lad der være givet en mængde S med et afstandsmål dist. En afbildning $T:S\rightarrow S$ siges at have et *fixpunkt* $z\in S$, såfremt $Tz=z$.

Afbildningen T kaldes en *kontraktion* (sammentrækning), såfremt der findes et tal $0\leq k<1$ således, at

$$\forall x,y\in S: \text{dist}(Tx,Ty) \leq k\ \text{dist}(x,y).$$

Sætning: Hvis rummet (S, dist) er fuldstændigt (d.v.s. enhver fundamentalfølge er konvergent), og hvis $T:S \to S$ er en kontraktion, da har T netop et fixpunkt.

<u>Bevis:</u> (1) T har højst et fixpunkt, thi hvis z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ begge var fixpunkter, var

$$0 < \text{dist}(z_1, z_2) = \text{dist}(Tz_1, Tz_2) \leq k\ \text{dist}(z_1, z_2)$$

dvs $k \geq 1$, hvilket er i modstrid med antagelsen $k<1$

(2) Hvis z nu var et fixpunkt, kan vi forsøge at analysere, hvordan z må kunne bestemmes. For vilkårligt $y \in S$ gælder nemlig

$$\text{dist}(Ty, z) = \text{dist}(Ty, Tz) \leq k\ \text{dist}(y, z)$$

Er nu x et vilkårligt element i S, og anvendes denne ulighed successivt for $y=x$, $y=Tx$, $y=T^2x = T(Tx)$, o.s.v., ser vi, at

$$\begin{aligned} \text{dist}(Tx, z) &\leq k\ \text{dist}(x, z) \\ \text{dist}(T^2x, z) &\leq k\ \text{dist}(Tx, z) \\ &\vdots \\ \text{dist}(T^nx, z) &\leq k\ \text{dist}(T^{n-1}x, z) \end{aligned}$$

og ved sammentrækning bliver

$$\text{dist}(T^nx, z) \leq k^n \text{dist}(x, z).$$

Da vil $\text{dist}(T^nx, z) \to 0$ for $n \to \infty$, og punktfølgen $x, Tx, T^2x, \ldots, T^nx, \ldots$ konvergerer altså mod fixpunktet z.

(3) Skal vi nu vise eksistensen af et fixpunkt for T i S, tager vi udgangspunkt i en punktfølge

$$x,\ Tx,\ T^2x, \ldots, T^nx, \ldots$$

for vilkårligt $x \in S$. Kan vi blot vise at denne følge er en fundamentalfølge, vil den ifølge fuldstændigheden af S tillige være konvergent (med et punkt z som grænsepunkt). Da $y_n \to y$ medfører at $Ty_n \to Ty$, idet $\text{dist}(Ty_n, Ty) \leq k\ \text{dist}(y_n, y)$, får vi specielt for denne punktfølge, at

$$T^nx \to z \Rightarrow T^{n+1}x \to Tz$$

men da en konvergent følge kun har en grænseværdi er $Tz=z$

Tilbage er altså at vise, at $(T^n x)_{n\in N}$ er en fundamentalfølge.

Af $\mathrm{dist}(T^{n+1}x,\ T^n x) \leqq k\ \mathrm{dist}(T^n x, T^{n-1}x)$

$$\vdots$$

$$\leqq k^n \mathrm{dist}(Tx,x)$$

ses, at for m>o er

$$\mathrm{dist}(T^{n+m}x,\ T^n x) \leqq \sum_{\lambda=o}^{m-1} \mathrm{dist}(T^{n+\lambda+1}x,\ T^{n+\lambda}x)$$

$$\leqq \sum_{\lambda=o}^{m-1} k^{n+\lambda} \mathrm{dist}(tx,x)$$

$$\leqq \left(\sum_{\lambda=o}^{\infty} k^{n+\lambda}\right) \mathrm{dist}(Tx,x)$$

$$= \frac{k^n}{1-k} \mathrm{dist}(Tx,x)$$

Men da findes for ethvert $\varepsilon>o$ et tal n_o således at

$$\frac{k^n}{1-k} \mathrm{dist}(Tx,x)<\varepsilon$$

for $n \geqq n_o$. Dvs for ethvert $n \geqq n_o$ og $m>o$ vil $\mathrm{dist}(T^{n+m}x, T^n x)<\varepsilon$, dvs $(T^n x)_{n\in N}$ er en fundamentalfølge.

4.3 Eksistens- og entydighedssætningen.

Vi går herefter over til beviset for hovedsætningen:
Når $\underline{f}(t,\underline{x}):\Omega \rightsquigarrow V$ er kontinuert på en åben mængde $\Omega \subseteqq R \times V$ og lokalt tilfredsstiller en Lipschitz betingelse (m.h.t. $\underline{x}$), da findes for ethvert punkt $(t_o, \underline{x}_o) \in \Omega$ en og kun en maksimal løsning $\underline{\varphi}: J \rightsquigarrow V$ til ligningen

$$D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

for hvilken $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$, og enhver løsning til differentialligningen er en restriktion til en maksimal løsning.

Bevis: Beviset falder i to dele.

(1) For et vilkårligt $(t_o, \underline{x}_o) \in \Omega$ defineres
$X = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \leqq \alpha \wedge \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \leqq \beta\} \subset \Omega$

hvori $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse, lad os antage med konstant C. Vi vælger tillige et positivt tal k<1.

Endvidere sættes

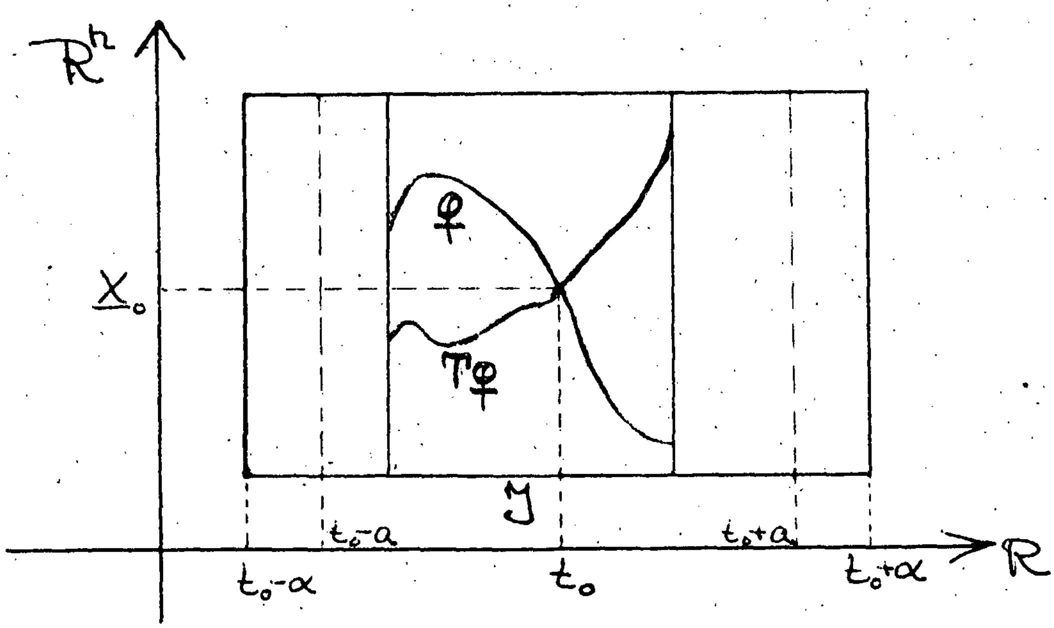
$$\sup_{(t,\underline{x})\in X} \|\underline{f}(t,\underline{x})\| = M.$$

Der bliver da behov for at definere et tal a ved

$$a = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{k}{C}\}$$

(hvor f.ex. $\beta/M = \infty$, hvis $M = o$)

Vi betragter da et vilkårligt interval
$I \subseteqq [t_o-a, t_o+a]$, som indeholder t.



Vi definerer nu en mængde S, som består af samtlige kontinuerte funktioner

$$\underline{\varphi}: I \to \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \leqq \beta\}$$

med normen

$$\|\underline{\varphi}_1-\underline{\varphi}_2\|_S = \sup_{t\in I}\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\|$$

Da vil $(S, \|\ \|_s)$ være et fuldstændigt rum (da S er afsluttet i det fuldstændige rum $\{\underline{\varphi}|\underline{\varphi}: I \sim V\}$)

For alle $\underline{\varphi} \in S$ kan vi danne funktionen $\underline{\psi} = T\underline{\varphi}$ defineret ved

$$\underline{\psi}(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}(\tau))d\tau \qquad t \in I$$

Da vil

$$\begin{aligned}
\|\underline{\psi}(t) - \underline{x}_o\| &= \left\| \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}(\tau))d\tau \right\| \\
&\leqq \left| \int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}(\tau))\| d\tau \right| \\
&\leqq M\ |t - t_o| \leqq Ma \leqq \beta
\end{aligned}$$

dvs $T: S \sim S$. Kan vi da vise, at T er en kontraktion, kan vi benytte fixpunktsætningen. Er $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \in S$ og sætter vi $\underline{\psi}_1 = T\underline{\varphi}_1$ og $\underline{\psi}_2 = T\underline{\varphi}_2$ får man

$$\begin{aligned}
\|\underline{\psi}_2(t) - \underline{\psi}_1(t)\| &= \left\| \int_{t_o}^{t} [\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_2(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_1(\tau))]d\tau \right\| \\
&\leqq \left| \int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_2(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_1(\tau))\| d\tau \right| \\
&\leqq \left| \int_{t_o}^{t} C\|\underline{\varphi}_2(t) - \underline{\varphi}_1(t)\| d\tau \right| \\
&\leqq C \cdot a \sup_{t \in I} \|\underline{\varphi}_2(t) - \underline{\varphi}_1(t)\| \\
&\leqq k\ \|\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1\|_s
\end{aligned}$$

Dvs $\|T\underline{\varphi}_2 - T\underline{\varphi}_1\| \leqq k\|\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1\|$, hvilket viser, at T er en kontraktion. Af fixpunktsætningen fremgår således, at der findes et og kun et $\underline{\varphi} \in S$ således, at $\underline{\varphi} \doteq T\underline{\varphi}$ eller

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_o + \int_{+}^{t} \underline{f}(t)\underline{\varphi}(\tau))d\tau \qquad t \in I$$

Under (1) har vi således vist, at *på hvert interval* $I \subseteq [t_o - a,\ t_o + a]$ *med* $t_o \in I$ *findes en og kun en funktion* $\underline{\varphi}$, *som er løsning til differentialligningen således, at* $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$ *og* $\|\underline{\varphi}(t) - \underline{x}_o\| \leq \beta$ *for alle* $t \in I$.

(2) Tilbage er at undersøge om, hvordan forholdene er på $J_1 \cap J_2$, hvor $\underline{\varphi}_1 : J_1 \rightsquigarrow V$ og $\underline{\varphi}_2 \rightsquigarrow V$ er to løsninger til differentialligningen med $t_o \in J_1 \cap J_2$ og med $\underline{\varphi}_1(t_o) = \underline{x}_o$ og $\underline{\varphi}_2(t_o) = \underline{x}_o$. Vi vil da søge at vise, at $\forall t \in J_1 \cap J_2 : \underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$. Hvis $J_1 \cap J_2 = \{t_o\}$ er dette indlysende. Er derimod $J_1 \cap J_2$ et interval, kan vi i overensstemmelse med (1) finde et $a_o \in [o, a]$ således, at

$$\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{x}_o\| \leq \beta \text{ og } \|\underline{\varphi}_2(t) - \underline{x}_o\| \leq \beta$$

for alle $t \in I_o = J_1 \cap J_2 \cap [t_o - a_o, t_o + a_o]$. Da må som følge af (1) gælde, at $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for alle $t \in I_o$. Herefter vil for ethvert $t_1 \in J_1 \cap J_2$, hvor $\underline{\varphi}_1(t_1) = \underline{\varphi}_2(t_1)$ analogt findes et $a_1 > o$, således at $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for alle $t \in I_1 = J_1 \cap J_2 \cap [t_1 - a_1, t_1 + a_1]$ o.s.v. Da ses, at

$$\forall t \in J_1 \cap J_2 : \underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$$

Vi kan herefter konkludere, at samtlige løsninger $\underline{\varphi}_i : J_i \rightsquigarrow V$ til differentialligningen på intervallet J_i som til $t_o \in J_i$ har $\underline{\varphi}_i(t_o) = \underline{x}_o$, er restriktioner af en og samme funktion $\underline{\varphi} : J \rightsquigarrow V$ med $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. Denne er klart en løsning, og ifølge sin konstruktion er den en maksimal løsning, og enhver løsning $\underline{\varphi}_i : J_i \rightsquigarrow V$ med $t_o \in J_i$ og $\underline{\varphi}_i(t_o) = \underline{x}_o$ er en restriktion af $\underline{\varphi}$.

4.4 Lineære differentialligninger.

Er nu specielt

$$\underline{f}(t, \underline{x}) = \underline{A}(t)\underline{x}$$

ses, at $D_i \underline{f} = (a_{1i}(t), a_{2i}(t), \ldots, a_{ni}(t))$

d.v.s. $D_i\underline{f}$ er kontinuert. Således gælder eksistens- og entydighedssætningen for alle systemer af lineære differentialligninger af første orden, som vi har behandlet, idet $\underline{A}(t)\underline{x}$ altid opfylder en Lipschitz betingelse.

Da vi endvidere har set, at en lineær differentialligning af n-te orden er et specialtilfælde af et system af n lineære differentialligninger af første orden, vil eksistens- og entydighedssætningen også gælde for denne.

Kapitel 5

Opgaver

5.1 Opgaver til kapitel 1.

1. Man har en tom, rektangulær beholder med hul i bunden. Vi poster vand i med konstant hastighed. Vandet vil nu løbe ud af hullet, men hvordan kan man antage, at udløbshastigheden vil hænge sammen med den mængde vand, som er i beholderen?

   Opstil på denne baggrund en model for, hvordan vandmængden i beholderen varierer.

   Hvilken af modellens løsninger beskriver den foreliggende situation?

   Skitser grafen for denne løsning.

2. Vi forestiller os, at man ønsker at beskrive bevægelsen af en partikel, der synker lodret ned gennem en væske.

   Hvordan kunne man beskrive partiklens bevægelse, når den som her bevæger sig på en ret linie?

   Lad os antage, at partiklen kun er påvirket af tyngdekraften og af en opdriftskraft, der tænkes proportional med partiklens hastighed. Bestem på denne baggrund den resulterende kraft, der påvirker partiklen.

   Opstil på grundlag af Newtons 2. lov en model for partiklens bevægelse. Hvilken af løsningerne vil være en rimelig beskrivelse af den foreliggende partikelbevægelse?

   Skitser grafen for denne løsning.

3. Løs differentialligningen

$$f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = 1$$

og skitsér et passende antal løsningskurver.

4. Løs differentialligningen

$$f'(t) - 2f(t) = e^{2t}$$

5. En differentiabel funktion $\varphi: R \curvearrowright R$ er løsning til begge differentialligningerne

$$(\sin tD - \cos tD^0)f(t) = tg^2 t - 1$$

$$(\cos tD - \sin tD^0)g(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

Benyt dette til at fastlægge φ entydigt.

6. Idet $\alpha: R \curvearrowright R$ er en differentiabel funktion, skal man i alle intervaller, hvor $\alpha(t) \neq 0$ løse differentialligningen (m.h.t.f)

$$\alpha(t)f'(t) - \alpha'(t)f(t) = \alpha^3(t)\alpha'(t)$$

Bestem derpå α, når den løsning til differentialligningen, som går gennem $(\frac{\pi}{4},0)$ er identisk med

$$g: t \curvearrowright -\frac{1}{4}\sin t\cos 2t$$

7. Løs hver af differentialligningerne

$$f'(t) = 1 + t - f(t) - tf^2(t)$$

$$g'(t) = 2 - (\cot t)g(t) + g^2(t)$$

8. Angiv for alle t den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$tf'(t) = f(t) + t^2f^2(t)$$

9. To differentialoperatorer er defineret ved

$$\Phi = tD - pD^0 \quad , \Psi = tD - qD^0$$

hvor $p,q \in R$. Udregn da $\Phi \circ \Psi$ og $\Psi \circ \Phi$.

10. En differentialoperator er defineret ved

$$\Phi = D^3 + \cos t D^2 + \sin t D - \cos t D^0 .$$

Udregn $\Phi \circ D$ og $D \circ \Phi$.

11. En ikke lineær differentialoperator Φ defineres ved

$$\Phi f = Df + e^t f^2$$

Udregn $\Phi \circ \Phi$.

12. Skitsér løsningskurver til differentialligningen

$$(D - 2tD^0)f(t) = 1$$

13. Skitsér løsningskurver til differentialligningen

$$f' = af - bf^2$$

gennem (0,1) for forskellige valg af konstanterne a og b.

14. Skitsér for p=1 og q=0.001 løsningskurven gennem (0,50) for hver af differentialligningerne

$$f' = p(1 - qf)f$$

$$f' = p\cos(qf\tfrac{\pi}{2})f$$

$$f' = p(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos(qf\pi))f$$

Det anbefales at optegne de tre løsningskurver i samme koordinatsystem.

15. Skitsér løsningskurverne for differentialligningen

$$(D - \ln 2 D^0 f(t) = 2t - t^2 \ln 2$$

gennem punkterne (0,1), (0,0), og (0,-1).

5.2 Opgaver til kapitel 2.

1. Afgør for hvert af følgende funktionspar, om de kan være to lineært uafhængige løsninger til differentialligningen

$$(D^2 + aD + bD^0)x = 0 \quad , \quad a,b \in R$$

a) $x_1: t \sim 1$, $y_1: t \sim t$
b) $x_2: t \sim e^t$, $y_2: t \sim e^{3t}$
c) $x_3: t \sim \sin t$, $y_3: t \sim \cos 2t$
d) $x_4: t \sim e^{-t}$, $y_4: t \sim te^{-t}$
e) $x_5: t \sim t$, $y_5: t \sim t^2$
f) $x_6: t \sim e^t$, $y_6: t \sim \sin t$
g) $x_7: t \sim e^{2t}\sin t$, $y_7: t \sim e^{2t}\cos t$

2. Løs differentialligningerne

a) $(D^2 + D)x = 0$
b) $(D^2 + 4D + 4D^0)x = 0$
c) $(3D^2 + 14D + 8D^0)x = 0$
d) $(D^2 - D + \frac{5}{2}D^0)x = 0$

3. Bestem strømstyrken i som funktion af t for den i afsnit 2.1 nævnte strømkreds, når modstanden er forsvindende (dvs. $R \approx 0$).

4. Bestem tilsvarende strømstyrken i som funktion af t, når strømkredsen påføres vekselspænding $E = E_0 \cos\omega t$ (og fortsat $R \approx 0$).

5. Hvordan vil strømstyrken i opføre sig, når $1/LC \to \omega^2$?

6. Løs de to sammenhørende differentialligninger

$$D^2x = -x - 3y \qquad D^2y = -3x - y$$

7. Idet $F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ er det karakteristiske polynomium for differentialligningen

$$(D^2 + aD + bD^0)x = e^{\alpha t} \quad , \quad \alpha \in R$$

skal man vise, at en inhomogen løsning φ til ligningen, vil have en af følgende tre former

a) $\varphi(t) = \frac{1}{F(\alpha)} e^{\alpha t}$, når α ikke er rod i $F(\lambda)$

b) $\varphi(t) = \frac{1}{F'(\alpha)} te^{\alpha t}$, når α er enkeltrod i $F(\lambda)$

c) $\varphi(t) = \frac{1}{F''(\alpha)} t^2 e^{\alpha t}$, når α er dobbeltrod i $F(\lambda)$

8. Løs hver af differentialligningerne

$$(D - D^0)^2 x = te^t$$
$$(D^2 - D^0)x = te^t$$

9. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 + aD + bD^0)x = t$$

10. Vis, at hvis $p: t \curvearrowright p(t)$ er et polynomium af grad k, da vil differentialligningen

$$(D^2 + aD + bD^0)x = p(t) \quad , \quad b \neq 0$$

have en inhomogen løsning, der ligeledes er et polynomium af grad k.
Bestem en inhomogen løsning til differentialligningen

$$(D^2 + D^0)x = t^2 - 2t + 2$$

11. Idet $F(\lambda) = \lambda^2 + (a - 1)\lambda + b$ er det karakteristiske polynomium svarende til differentialligningen

$$(t^2 D^2 + atD + bD^0)x = t^\alpha \quad , \quad \alpha \in R$$

forsøg da (analogt med opgave 7) at bestemme en inhomogen løsning til ligningen.

12. På hvilken måde kan vi drage nytte af opgave lo, hvis vi vil bestemme en inhomogen løsning til differentialligningen

$$(t^2D^2 + atD + bD^0)x = p(\ln t) \quad , \quad t > 0$$

hvor p igen er et polynomium af grad k ?

13. Bestem den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$(t^2D^2 - 5tD + 9D^0)x = 9(\ln t)^2$$
$$(t^2D^2 - 5tD + 9D^0)x = t$$
$$(t^2D^2 - 5tD + 9D^0)x = t^3$$

14. Bestem den løsning til differentialligningen

$$((t^2 + 4t + 1)D^2 - 2(t + 2)D + 2D^0)x = 0$$

som går gennem (o, 1/2, 3/4)

15. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(\cos^2 tD^2 - \sin t\cos tD - D^0)x = 0$$

16. Vis, at funktion φ: $t \rightsquigarrow e^{at^2}$ for passende valg af a, vil være en løsning til differentialligningen

$$(D^2 - \frac{1}{t}D - 16t^2D^0)x = 0$$

og angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^2 - \frac{1}{t}D - 16t^2D^0)x = 8t^4$$

17. Funktionerne $\varphi, \psi \in C^2$ er løsninger til differentialligningen

$$(D^2 - \operatorname{tg}t D + b(t)D^0)x = o$$

Bestem funktionen b samt løsningerne, når tillige $\varphi^2 = \psi^2 - 1$.

18. Idet $\alpha \in C^2$ og funktionen β er bestemt ved $\beta(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, skal man i alle intervaller, hvor $\beta(t) > o$, løse differentialligningen

$$(\beta(t)D^2 - \beta'(t)D - \beta^3(t)D^0)x = 3(\alpha'(t))^3$$

19. Idet $\varphi, \psi \in C^2$ er lineært uafhængige løsninger til differentialligningen

$$(D^2 + a(t)D + b(t)D^0)x = 0$$

Skal man bestemme funktionerne $p, q \in C^0$ således at φ^2 og ψ^2 er løsninger til differentialligningen

$$(D^2 + p(t)D + q(t)D^0)x = 0$$

20. Idet $\alpha \in C^2$, skal man i alle delintervaller, hvor $\alpha(t) \neq 0$ og $\alpha'(t) \neq 0$, løse differentialligningen

$$(D^2 - (2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)})D + 2(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)})^2 D^0)x = (\alpha'(t))^2$$

21. Løs for alle værdier af $a \in R$ ligningssystemet

$$Dx = (a + 1)x + ay + t$$
$$Dy = ax + (a + 1)y + 1$$

22. Løs ligningssystemet

$$Dx = t^2x - y$$
$$Dy = (t^4 - t^2 + t)x + (\frac{1}{t} - t^2)y + t^2$$

og angiv den løsning, som for $t = 2$ går gennem $(1,0)$.

23. Løs differentialligningen

$$(t^2\ln^2 tD^2 + t\ln t(\ln t - 2)D + 2D^0)x = 0 \quad , \quad t > 0$$

24. Skitsér fasebilledet for differentialligningen

$$(D^2 + kD^0)y = 0$$

gennem linieelementet $(0,2,0)$ for forskellige valg af konstanten k.

25. Skitsér løsningen og fasebilledet for differentialligningen

$$(D^2 + \frac{1}{4}D + D^0)y = 0$$

gennem linieelementet $(0,5,0)$.

26. Skitsér løsningskurver til differentialligningen

$$(D^2 + 2tD - D^0)y = 0$$

27. Skitsér fasebilledet for differentialligningen

$$(D^2 + \frac{2}{t^2}D + D^0)y = 0$$

gennem linieelementet $(1,5,0)$.

5.3 Opgaver til kapitel 3

1. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= y + z \\ Dy &= x + z \\ Dz &= x + y \end{aligned}$$

og angiv løsningen gennem $(x(0), y(0), z(0)) = (1,0,0)$.

2. Løs (i forlængelse af eksempel (3.1)) ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + y - 2z + t \\ Dy &= -2x + 4y - 4z + 2t \\ Dz &= -x + y + t \end{aligned}$$

3. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 2x - y - z + w \\ Dy &= -x + 2y - z + w \\ Dz &= -x - y + 2z + w \\ Dw &= x + y + z + 2w \end{aligned}$$

4. Løs (i forlængelse af eksempel (3.2)) ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= -2y + z + 2t^2 \\ Dy &= x - 3y + z + t^2 \\ Dz &= x - 2y \end{aligned}$$

5. Løs de sammenhørende differentialligninger

$$\begin{aligned} D^2y + 2Dy &= 2x + 3y \\ Dx + 2Dy &= x + 2y \end{aligned}$$

6. Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + 2y \\ Dy &= 4x + 2y - 3z \\ Dz &= y + 2z \end{aligned}$$

og fastlæg den løsning, som for $t = 0$ indeholder $(0,0,8)$.

7. Løs for enhver værdi af $a \in R$, ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x - y + az \\ Dy &= 3x + ay - 3z \\ Dz &= ax - y + z \end{aligned}$$

8. Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + 2y + z \\ Dy &= \tfrac{3}{2}x - y - \tfrac{3}{2}z \\ Dz &= x - 2y + z \end{aligned}$$

9. Løs for $t > 0$ differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + ty + z \\ tDy &= 2x - y - 2z \\ Dz &= x - ty + z \end{aligned}$$

1o. Løs for enhver værdi $b \in R$ differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + by + bz \\ Dy &= bx - y + bz \\ Dz &= bx - by + z \end{aligned}$$

11. Løs hver af differentialligningerne

$$(D^3 + D^2 + 4D + 4D^0)x = \sin 2t$$
$$(D^3 + D^2 + 4D + 4D^0)x = e^{-t}$$

12. Løs differentialligningen

$$(D^5 - D^4 - 2D^3 + 2D^2 + D - D^0)x = 0$$

13. Løs differentialligningen

$$(D^3 - 3D + 2D^0)x = e^t$$

når $(t,x,x',x'') = (0,0,0,-\frac{8}{3})$.

14. Løs differentialligningen

$$(D^4 - 2D^2 + D^0)x = e^t + e^{-t}$$

15. Bestem den løsning til differentialligningen

$$(D^3 - D^2 + D - D^0)x = \cos t$$

som indeholder linieelementet (0,0,0,0).

16. Løs differentialligningen

$$(tD^3 - D^2 - tD + D^0)x = t^2$$

17. Løs for $t > 0$ differentialligningen

$$(t^3D^3 + 6D^0)x = 0$$

18. Er der givet en differentialligning

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0) = 0 ,$$

hvor alle rødder i det karakteristiske polynomium har multiplicitet 1, d.v.s. løsningerne til ligningen bliver

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots , e^{\lambda_n t}$$

Opskriv da Wronskideterminanten W(t) for ligningen, og vis at

$$W(t) = e^{(\lambda_1+ \cdots +\lambda_n)t} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(denne determinant kaldes en "Vandermonde"-determinant) Udregn denne determinant for $n = 2$ og $n = 3$ samt ved induktion for vilkårligt n.

19. Løs hver af differentialligningerne

$$(t^3D^3 + 2t^2D^2 - tD + D^0)x = t^2$$
$$(t^3D^3 + 2t^2D^2 - tD + D^0)x = t^{-1}$$
$$(t^3D^3 + 2t^2D^2 - tD + D^0)x = t$$
$$(t^3D^3 + 2t^2D^2 - tD + D^0)x = \ln t$$

5.4 Opgaver til kapitel 4.

1. Vil eksistens- og entydighedssætningen gælde for Bernoulli-ligningen og Ricatti-ligningen?

2. Vil ligningssystemet

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by^{\alpha} \\ a + by + x^2 \end{pmatrix} \qquad \alpha > 0$$

opfylde eksistens- og entydighedssætningen?

3. En simpel model for sammenhængen mellem antal rovdyr (x) og antal byttedyr (y) på samme biotop har formen

$$x' = axy - bx$$
$$y' = cy - dxy$$

Vil dette ligningssystem opfylde eksistens- og entydighedssætningen?

4. Redegør for i hvilke områder $\Omega \subseteq R \times R^2$ hver af følgende funktioner lokal tilfredsstiller en Lipschitz betingelse

$$\underline{f}_1(t,x,y) = [\ln(tx + ty),(\ln(tx - ty)]$$
$$\underline{f}_2(t,x,y) = [tg(xy),\cot(xy)]$$
$$\underline{f}_3(t,x,y) = [y^{-1}t\sin(xy),x^{-1}t\sin(xy)]$$
$$\underline{f}_4(t,x,y) = [|x - y|,|x + y|]$$

5. Løs differentialligningssystemet

$$yDx = 2t$$
$$xDy = -2t$$

og angiv den maksimale løsning, som for t = 0 går gennem (1,1).

6. Løs differentialligningssystemet

$$yDx = t^2$$
$$xDy = 2t^2$$

og angiv den maksimale løsning som for $t = 1$ går gennem $(1,1)$.

7. Løs differentialligningssystemet

$$t^2Dx = 2y$$
$$Dy = 3x$$

og angiv den maksimale løsning, som for $t = 1$ går gennem $(1,1)$.

5.5 Repetitionsopgaver.

1 Løs differentialligningerne

$$(D^3+3D^2-4D^0)f(t) = 5+4t-2t^2$$

$$(D^3+3D^2-4D^0)f(t) = e^{-t}$$

$$(D^3+3D^2-4D^0)f(t) = e^{-2t}$$

2 Vis, at funktionen $\varphi: t \rightsquigarrow t^{\alpha}$ for passende valg af $\alpha \in R$ tilfredsstiller differentialligningen

$$(t^3D^3-2t^2D^2+3tD-3D^0)f(t) = 0$$

Bestem $a \in R$ således, at funktionen $\psi: t \rightsquigarrow at^2$ er løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3-2t^2D^2+3tD-3D^0)f(t) = t^2$$

Løs derpå differentialligningen

$$(t^3D^3-2t^2D^2+3tD-3D^0)f(t) = t$$

Løs endelig differentialligningen

$$(t^3D^3-2t^2D^2+3tD-3D^0)f(t) = 3(\ln t)^2$$

3 Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(t\ln tD - D^0)f(t) = (n-1)(\ln t)^n$$

for $t \in]1,+\infty[$ og $n \in R$.

4 Angiv den løsning til differentialligningen for $t>0$

$$(3tD-D^0)f(t) = \sqrt[3]{t}$$

som går gennem (1,2).

5 Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D - \ln t D^{o}) f(t) = (et)^{t} \cos t$$

for $t>o$.

6 Løs differentialligningssystemet

$$Dx = 3x+2y-1$$
$$Dy = -4x-3y+t$$

ved at løse en 1.ordens ligning i $x+y$.

7 Løs differentialligningen

$$Dx = 1+t^2-2tx+x^2$$

8 Løs differentialligningen

$$(\sin^2 t \cos t D^2 - (2\cos^2 t-\sin^2 t)\sin t D + 2\cos^3 t D^{o}) f(t) = o$$

9 Angiv den fuldstændige løsning til de sammenhørende differentialligninger $(h,k \in R)$

$$D^2x = -h^2x+k^2(y-x)$$
$$D^2y = -h^2y+k^2(x-y)$$

og angiv den løsning (φ,ψ), der har $\varphi(o)=\psi(o)=o$, $D\varphi(o)=a$, $D\psi(o)=o$ med $a \in R$.

Hvad er det fysiske indhold i ligningssystemet?

10 Løs differentialligningen

$$(D^3+4D^2+4D) f(t) = 8t-4$$

11 Løs differentialligningen

$$D(D^2+4D^o)f(t) = \cos 2t$$

12 Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = (a-1)x+2y$$
$$Dy = 2x+ay-2z$$
$$Dz = -2y+(a+1)z$$

for hver værdi af $a\in R$.

Fastlæg derpå a, når den løsning til systemet, der for t=o går gennem (4,-1,1), er af formen

$$\underline{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}e^{3t} - \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

13 Løs differentialligningen

$$(t^2D^2-tD+D^o)f(t) = t$$

for t>o.

14 Løs for enhver værdi af $a\in R$ differentialligningssystemet

$$Dx = ax+ y+ z$$
$$Dy = x-ay+ z$$
$$Dz = x- y+az.$$

15 Løs differentialligningssystemet

$$Dx = ax+ y+ z$$
$$Dy = x+ay+ z$$
$$Dz = x+ y+az$$

for alle $a\in R$.

16 Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + 2y + az \\ Dy &= 2x + 2ay - 2z \\ Dz &= ax + 2y + z \end{aligned}$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

17 Bestem den maksimale løsning til de sammenhørende differentialligninger

$$\begin{aligned} txDx &= -y^{-2} \\ tyDy &= x^{-2} \end{aligned}$$

som går gennem $(1,2,\frac{1}{2})$

18 Løs for $t > 0$ differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + ty + z \\ Dy &= -2tx - 4ty + 2tz \\ Dz &= x - ty + z \end{aligned}$$

5.6 Eksamensopgaver

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen:

Differentialligninger.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor man kan vælge mellem opgaverne 5A og 5B, og en fuldstændig besvarelse omfatter således opgaverne 1-4 samt en af opgaverne 5A og 5B.

Den skriftlige eksamen er tilordnet modul 3 for 3 studerende

onsdag, den 4. januar 1978 kl. 09^{30} - 13^{30}.
Alle hjælpemidler er tilladt.

1° Der er givet en differentiabel funktion $a: R \to R$ samt differentialligningssystemet

$$Dx = -ty + \frac{1}{t}a(t)z$$
$$Dy = x - (1+a(t))z$$
$$Dz = tx + a(t)y$$

Funktionen $\underline{\varphi}_1 : R_+ \to R^3$ givet ved

$$\underline{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

vides at være løsning til systemet. Angiv samtlige funktioner $\underline{\varphi}_1$, som opfylder denne betingelse.

2° Løs for $t \in R_+$ differentialligningen

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = 0.$$

Bestem derpå $a \in R$ således, at funktionen $\varphi: t \to at^2$ er løsning til differentialligningen

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t^2$$

Løs endelig differentialligningerne

$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t$$
$$(t^4D^4 - 3t^2D^2 + 9tD - 9D^0)f(t) = t^3$$

3° Løs differentialligningen

$$(\cos^2 t D^2 - \cos t \sin t D - D^0)f(t) = 3\frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

og vis, at den løsning, som går gennem (0,1,1) er af formen

$$g: t \to \sqrt{2}\,\frac{\sin(t+\frac{\pi}{4})}{\cos^2 t}$$

4° Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = \tfrac{1}{2}tx - \tfrac{1}{2}y + t$$
$$Dy = (\tfrac{1}{2}t^2 - 1)x - \tfrac{1}{2}ty + t^2$$

5A° Givet differentialligningssystemet med $a,b \in R \setminus \{o\}$

$$Dx = ay + bz$$
$$Dy = bx + (a-b)y + bz$$
$$Dz = bx + ay$$

Angiv for hvert valg af (a,b) den løsning til systemet, som til $t=o$ går gennem $(x,y,z) = (3,1,-1)$.

5B° Idet a,b er differentiable funktioner, skal man eftervise følgende sætning:
Hvis φ,ψ er løsninger til differentialligningen $(D^2+aD+bD^o)f = o$, da vil $\varphi^2, \varphi\psi, \psi^2$ være løsninger til differentialligningen

$$(D^3+3aD^2+(2a^2+a'+4b)D+(4ab+2b')D^o)f=o$$

Benyt denne sætning til at løse differentialligningen

$$(D^3+(6tgt-3cott)D^2+(18tg^2t-5+3cot^2t)D+24tg^3tD^o)f=o$$

Prøveeksamen i matematik i emnekredsen: Differentialligninger.

Der stilles ialt seks opgaver, hvor man kan vælge mellem opgaverne 5A og 5B, og en fuldstændig besvarelse omfatter således opgaverne 1-4 samt en af opgaverne 5A og 5B.

1^{o} Vis, at funktionen $\varphi: t \rightsquigarrow e^{at^2}$ for passende valg af $a \in R$ vil være en løsning til differentialligningen

$$(tD^2 - D - t^3 D^o) f(t) = o$$

og angiv derpå den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(tD^2 - D - t^3 D^o) f(t) = 3t^3$$

2^{o} Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= 5x+2y \\ Dy &= 2x+6y-2z \\ Dz &= \quad -2y+7z \end{aligned}$$

3^{o} En integralligning er givet ved

$$u(t) = 1+4a\int_o^1 e^{a|t-x|} u(x)\,dx.$$

Idet $u: R \rightsquigarrow R$ forudsættes to gange differentiabel, skal ligningen omskrives til en differentialligning med passende randbetingelser.
Løs derpå differentialligningen.

4° Vis, at funktionen $\varphi: t \rightsquigarrow t^{\alpha}$ for passende valg af $\alpha \in R$ tilfredsstiller differentialligningen:

$$(t^3D^3+3t^2D^2-2tD+2D^{\circ})f(t) = o$$

og benyt dette til at fastlægge den fuldstændige løsning til denne ligning.
Bestem derpå en partikulær løsning til den inhomogene ligning

$$(t^3D^3+3t^2D^2-2tD+2D^{\circ})f(t) = -3+2\ln t.$$

$5A^{\circ}$ Idet a og b er kontinuerte funktioner, skal man eftervise følgende påstand:

φ og φ^2 er løsninger til differentialligningen $f''+af'+bf = o$ hvis og kun hvis φ er løsning til både $f''+af'+bf=o$ og $(f')^2-\frac{b}{2}f^2=o$.
Benyt denne påstand til at løse differentialligningen

$$(D^2-2(\cot t+2\operatorname{tg} t)D + 2(\cot t+\operatorname{tg} t)^2D^{\circ})f(t) = o$$

$5B^{\circ}$ Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D^3+2\operatorname{tg}2t D^2+D+2\operatorname{tg}2t D^{\circ})f(t) = \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

Den skriftlige eksamen er tilordnet modul 1 for 3 studerende, modul 2 for 2 studerende samt modul 3 for 3 studerende tirsdag, den 6. juni 1978 kl. o9$^{\underline{oo}}$ - 13$^{\underline{oo}}$.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Løs hver af differentialligningerne

$$(D-2D^o)^3 f(t) = e^{-2t}$$

$$(D-2D^o)^3 f(t) = e^{2t}$$

$$(D-2D^o)^3 f(t) = te^{2t}$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$D^2 \binom{x}{y} = \underline{M}^2 \binom{x}{y}$$

hvor $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. For $t>o$ er funktionen $\varphi: t \mapsto t^{-1}\ln t$ løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+at^2D^2+(a+b)tD+bD^o)f = o.$$

Benyt dette til at fastlægge $(a,b) \in R^2$.
Bestem derpå den løsning til differentialligningen, som går gennem $(t,y,y',y'') = (1,1,0,0)$.

4. Løs differentialligningen

$$D\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{y} \\ \frac{t}{x} + \frac{2ty}{t^2-4} \end{pmatrix}$$

og angiv den maksimale løsning, som går gennem $(t,x,y) = (0,1,2)$.

5. En integrallinging har formen

$$u(t) = \sin 2t - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|t-x|u(x)dx.$$

Idet u:R~R forudsættes to gange differentiabel, skal ligningen omskrives til en differentialligning med passende randbetingelser.
Løs differentialligningen.

6. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx &= x + y - z \\ Dy &= -x + 2y + t \\ Dz &= -x + y + z \end{aligned}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i matematik i emnekredsen

Differentialligninger

Der stilles ialt 6 opgaver. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 5 opgaver er korrekt besvaret.

Den skriftlige eksamen er tilordnet modul 3 for 2 studerende torsdag, den 4. januar 1979 kl. 10^{00} - 14^{00}.

Alle hjælpemidler er tilladt.

1. Bestem den løsning til differentialligningen

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f = o$$

som opfylder betingelserne

$$f(1) = o, \; f'(1) = o \text{ og } f''(1) = -9$$

Fastlæg derpå for t>o den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^2$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t$$

$$(t^3D^3+6t^2D^2+4tD-4D^o)f(t) = t^{-2}$$

2. Idet man har $a \in R$ og matricen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

skal man, idet $\underline{M}^t$ betegner den transponerede matrix til $\underline{M}$, bestemme a, således at differentialligningen

$$D\underline{\varphi} = (\underline{M} + a\underline{M}^t)\underline{\varphi}$$

har løsningsmængden

$$\left\{ \underline{\psi} \in C^\infty \;\middle|\; \underline{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in R^2 \right\}$$

3. Vis, at funktionen $\varphi : t \curvearrowright e^{at^2}$ for passende valg af $a \in R$ vil være løsning til differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^o)f(t) = o$$

og bestem endnu en løsning til ligningen.

Løs derpå differentialligningen

$$(D^2+2tD+(t^2+1)D^o)f(t) = t^4-3.$$

4. Angiv for t>o den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(tD^3-2D^2+4tD-8D^o)f(t) = 4t$$

5. Løs differentialligningssystemet

$$y^2Dy = \frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{3}e^x$$

$$Dx = 1 + 2y^3e^{-x}$$

og angiv den maksimale løsning til systemet gennem $(t,x,y) = (o,3\ln 2,2)$

6. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$Dx = -2x+2y+ z$$
$$Dy = -6x+ y+6z$$
$$Dz = -3x+2y+2z$$

Appendix 1: Komplekse tal og komplekse funktioner.

1.1 Egenskaber ved de reelle tal.

Mængden af reelle tal R er som bekendt defineret med en addition + og en multiplication $\cdot$, således at $(R,+)$ og $(R\setminus\{o\},\cdot)$ er kommutative grupper samt at den distributive lov

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$$

er opfyldt. I R er der endvidere ved relationen <, defineret ved

$$a<b \Leftrightarrow b-a\in R_+$$

fastsat en total ordning af R.

I de reelle tal defineres en numerisk værdi $|\;|$ ved, at

$$|t| = \begin{cases} t & \text{når } t>o \\ o & \text{når } t=o \\ -t & \text{når } t<o \end{cases}$$

og den har som bekendt følgende fire egenskaber

1) $\forall x\in R: \ |x| = o \Leftrightarrow x=o$
2) $\forall x\in R: \ o\leqq|x|$
3) $\forall x,y\in R: \ |xy| = |x|\cdot|y|$
4) $\forall x,y\in R: \ |x+y|\leqq|x|+|y|$

Endeligt gælder det inden for R, at $x^2\geqq o$, hvorfor det ikke vil være muligt at løse ligningen $x^2+1=o$ inden for R.

Vi har tidligere oplevet en lignende situation. Som bekendt har ligningen $x^2-2=o$ ingen løsninger $x\in Q$, men løsningerne $\sqrt{2}$ og $-\sqrt{2}$ i R.

Vi vil derfor søge at konstruere en mere omfattende talmængde C med $R\subset C$ således, at ligningen $x^2+1=o$ har løsninger $x\in C$. Vi vil endvidere søge at overføre så mange af egenskaberne fra R som muligt. Det vil faktisk vise sig, at alle de foran beskrevne egenskaber kan overføres undtagen den totale ordning.

1.2 Egenskaber ved de komplekse tal.

I mængden $R^2 = \{a,b) \mid a \in R \wedge b \in R\}$ defineres to kompositioner $*$, som kaldes addition, og Δ, som kaldes multiplikation, ved

$$(a_1,b_1) * (a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$$
$$(a_1,b_1) \,\Delta\, (a_2,b_2) = (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$$

Det eftervises let, at $(R^2,*)$ er en kommutativ gruppe med (o,o) som neutralt element, og hvor det inverse element til (a,b) er (-a,-b). Tilsvarende vises med noget regnearbejde, at $(R^2 \setminus \{(o,o)\}, \Delta)$ er en kommutativ gruppe med (1,o) som neutralt element, og hvor det inverse element til (a,b) er

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Endvidere gælder de distributive love, idet

$$[(a_1,b_1)*(a_2,b_2)]\Delta(a_3,b_3) =$$
$$(a_1+a_2, b_1+b_2) \,\Delta\, (a_3,b_3) =$$
$$((a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3, (a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3) =$$
$$(a_1a_3-b_1b_3, a_1b_3+b_1a_3) * (a_2a_3-b_2b_3, a_2b_3+b_2a_3) =$$
$$[(a_1,b_1)\Delta(a_3,b_3)]*[(a_2,b_2)\Delta(a_3,b_3)],$$

og da såvel $(R^2,*)$ som $(R^2 \{(o,o)\},\Delta)$ er en kommutative gruppe vil den anden distributive lov automatisk være opfyldt.

Betragter vi afbildningen $f:R \to R^2$ defineret ved $f(a)=(a,o)$ vil den reelle akse blive indlejret i R^2. Da f klart er injektiv og

$$f(R) = \{(a,b) \in R^2 \mid b = o\}$$

ser vi, at R og f(R) er isomorfe, da

$$\forall a_1, a_2 \in R : f(a_1+a_2) = f(a_1)*f(a_2)$$

$$\forall a_1, a_2 \in R : f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1)\Delta f(a_2).$$

Vi identificerer på denne baggrund R med f(R) ved at skrive a i stedet for f(a). Heraf fås, at

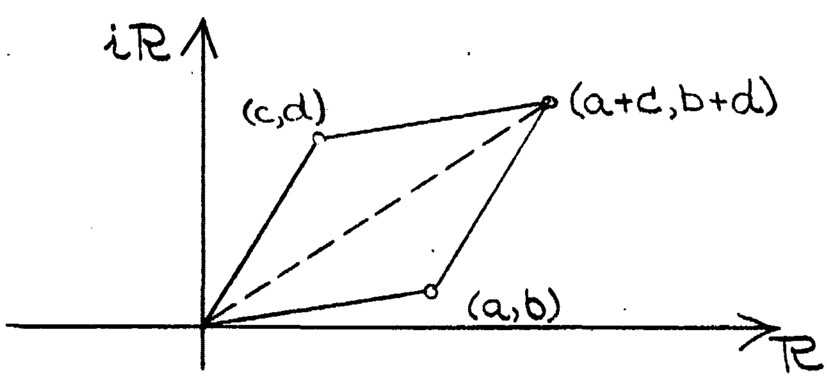
$$a_1 * a_2 = f(a_1)*f(a_2) = f(a_1+a_2) = a_1+a_2$$

og $$a_1 \Delta a_2 = f(a_1)\Delta f(a_2) = f(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot a_2 ,$$

hvilket viser, at * stemmer overens med + på den reelle akse, og at Δ stemmer overens med · på den reelle akse.
Vi vil derfor fremover tillade os at skrive + i stedet for * og · i stedet for Δ (som ved reelle tal vil vi som regel undlade at skrive ·).

For at minde om det specielle produkt i R^2 benævner vi den netop konstruerede mængde med C, og elementerne i C kalder vi *de komplekse tal.*

Da additionen i C svarer til den sædvanlige vektoraddition i R^2



benævnes C ofte *den komplekse plan,* og akserne kaldes den reelle akse og den imaginære akse.

Dette sidste skyldes, at man betegner det komplekse tal (o,1) med i, d.v.s.

$$i = (o,1)$$

der kaldes *den imaginære enhed*. Hermed kan man skrive tallet

$$(a,b) = (a,o) + (o,b) = (a,o) + (o,1)(b,o) = a+ib$$

hvor a kaldes *realdelen*, og b *imaginærdelen* af tallet (a,b).

Øvelse 1.1 Udregn i^2 og i^{-1}.

1.3 Kompleks konjugering og numerisk værdi.

Afbildningen $k:C \sim C$ defineret ved

$$k(a+ib) = a-ib$$

kaldes *kompleks konjugering* og betegnes med overstregning sådan, at man med $z \in C$ skriver $\bar{z}$ i stedet for $k(z)$. Bemærk at hvis $a \in R$ er $\bar{a}=a$.

Øvelse 1.2 Vis, at hvis det for $z \in C$ gælder, at $\bar{z}=z$, da vil $z \in R$.

Sætter vi $z = a+ib \in C$ får vi, at

$$z+\bar{z} = a+ib+a-ib = 2a \quad \text{og}$$
$$z-\bar{z} = a+ib-a+ib = i2b.$$

Herved kan vi omvendt se, at

$$a = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad \text{og} \quad b = \frac{1}{2}(\bar{z}-z)$$

Bemærk at $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$

Afbildningen $n : C \sim R$ defineres ved

$$n(a+ib) = \sqrt{a^2+b^2}$$

Denne afbildning har de i afsnit 1 opskrevne egenskaber 1)-4):

1) $\forall z \in C: n(z) = o \Leftrightarrow z = o$
2) $\forall z \in C: n(z) \geqq o$
3) $\forall z_1, z_2 \in C: n(z_1 z_2) = n(z_1)n(z_2)$
4) $\forall z_1, z_2 \in C: n(z_1+z_2) \leqq n(z_1)+n(z_2)$

Her indses 1) og 2) klart. 3) indses af

$$n((a+ib)(c+id)) = n(ac-bd+i(ad+bc)) =$$
$$((ac)^2+(bd)^2-2abcd+(ad)^2+(bc)^2+2abcd)^{\frac{1}{2}} =$$
$$((ac)^2+(bd)^2-2abcd+(ad)^2+(bc)^2+2abcd)^{\frac{1}{2}} =$$
$$(a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2))^{\frac{1}{2}} = ((a^2+b^2)(c^2+d^2))^{\frac{1}{2}} =$$
$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (c^2+d^2)^{\frac{1}{2}} = n(a+ib) \cdot n(c+id).$$

mens 4) let indses ved at opfatte a+ib geometrisk og n(a+ib) som "længden" af a+ib, herved vil de tre udtryk i uligheden være længden af siderne i en trekant (j.fr. tegningen i afsnit 1.2).

Da n opfylder de samme egenskaber som $|\ |$ for de reelle tal, kaldes funktionen n *den numeriske værdi*. Er nu $z = a+ib \in C$ vil

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2, \text{ og dermed}$$
$$n(z) = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Da der specielt for $x \in R$ fås $\bar{x}=x$, vil $n(x) = \sqrt{x \cdot x} = |x|$, og n vil derfor stemme overens med $||$ på de reelle tal. n(x) erstattes derfor af $||$, altså er

$$\forall z = a+ib \in C : \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

<u>Øvelse 1.3</u> Vis, at for $z \in C \setminus \{o\}$ gælder der, at

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{og} \quad |\bar{z}| = |z|$$

1.4 Produktet af to komplekse tal.

For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sætter vi

$$w = \frac{z}{|z|} \quad \text{d.v.s.} \quad z = |z|w$$

hvor $|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$

Ethvert komplekst tal kan således skives som produkt af et reelt, ikke negativt tal og et komplekst tal med numerisk værdi 1.

Er nu $z_1 = |z_1|w_1$ og $z_2 = |z_2|w_2$

fås $z_1 \cdot z_2 = |z_1 z_2| \cdot w_1 w_2$

Vi vil her se lidt nøjere på $w_1 w_2$

Når $w = x+iy$ har $|w| = 1$ er $x^2+y^2 = 1$, og vi kan da finde et tal $\varphi \in R$ så

$$x = \cos\varphi$$
$$y = \sin\varphi$$

hvor φ er entydigt bestemt af (x,y) på nær multiplum af 2π

Vi kan derfor til w_1 og w_2 bestemme φ_1 og φ_2 således, at

$$w_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$$
$$w_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$$

Derfor bliver

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\qquad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1) \\ &= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) \end{aligned}$$

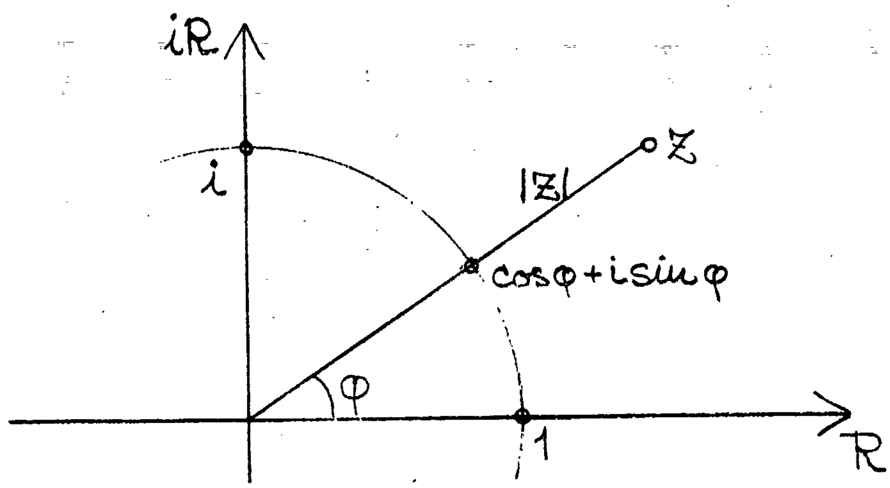
Derfor kan produktet af to vilkårlige komplekse tal

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{og}$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

udregnes til

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Geometrisk kan denne beskrivelse af komplekse tal opfattes sådan, at $\cos\varphi + i\sin\varphi$ er en retningsvektor i z's retning, mens $|z|$ angiver længden af vektoren z.



Her betegnes $|z|$ *modulus af z*, mens samtlige φ'er, der er løsning til ligningerne $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ betegnes *argumentet af z*.

Såfremt $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vil man se, at $\bar{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$, d.v.s. hvis z har argumentet φ, vil $\bar{z}$ have argumentet $-\varphi$

Såfremt $w_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$ og
$w_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$

vil
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

$$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

D.v.s. man bestemmer kvotienten mellem to komplekse tal med modulus 1 ved at subtrahere deres argumenter.
Dette viser tillige, at når $|w| = 1$ er

$$w^{-1} = \bar{w}$$

Øvelse 1.4 Vis, at de Mowres formel

$$(\cos\varphi + i\sin n\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

gælder for alle $n \in Z$.

1.5 Komplekse funktioner (af en reel variabel).

En funktion $f: I \sim C$, $I \subseteq R$ kaldes en kompleks funktion (af en reel variabel). For hvert $t \in I$ kan $f(t) \in C$ således skrives som $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, hvor $f_1(t) \in R$ er realdelen og $f_2(t) \in R$ er imaginærdelen af $f(t)$. Herved er således defineret to funktioner $f_1, f_2: I \sim R$.

Vi vil nu definere, hvad det skal betyde, at f er kontinuert henholdsvis differentiabel.

$f: I \sim C$ siges at være kontinuert i $t_o \in I$ hvis og kun hvis

$$\lim_{t \to t_o} f(t) = f(t_o)$$

og

$f: I \sim C$ siges at være differentiabel i $t_o \in I$ hvis og kun hvis

$$\lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

eksisterer. Hvis f er differentiabel, betegner vi denne grænseværdi $f'(t_o)$.

Heraf vil man umiddelbart kunne slutte, at, såfremt $f = f_1 + if_2$, vil

f være kontinuert i t_o hvis og kun hvis f_1 og f_2 er kontinuerte i t_o

og

f være differentiabel i t_o hvis og kun hvis f_1 og f_2 er differentiable i t_o.

Vi kan derfor udvide differentialoperatoren D til også at gælde for komplekse funktioner ved at sætte

$$Df = Df_1 + iDf_2$$

Tilsvarende kan vi sige, at en kompleks funktion g er stamfunktion til f, hvis $Dg=f$, og man indser let, at $g=g_1+ig_2$ er stamfunktion til $f=f_1+if_2$ hvis og kun hvis g_1 er stamfunktion til f_1 og g_2 er stamfunktion til f_2.

Vi betragter nu differentialligningen

$$(*) \qquad (D-iD^o)f = o.$$

Sætter vi $f=f_1+if_2$ har vi altså

$$Df=if \quad \text{eller} \quad Df_1+iDf_2 = -f_2+if_1.$$

Betragter vi real- og imaginærdel for sig, får vi to koblede ligninger

$$Df_1 = -f_2$$
$$Df_2 = f_1$$

Det er klart, at $f_1 = \cos$ og $f_2 = \sin$ i hvert fald vil være løsninger. D.v.s. funktionen f med

$$f(t) = \cos t + i \sin t$$

vil være en løsning til (*).

På den anden side ville det være nærliggende at antage, at noget man kunne kalde *en kompleks eksponentialfunktion* var løsning til (*); i det reelle tilfælde ved vi jo, at e^{at} er løsning til ligningen $(D-aD^o)f=o$. Lad os derfor definere en funktion $\exp: R \to C$ ved at $\exp(it) = \cos t + i \sin t$.

Vi vil nu eftervise, at funktionen exp har de samme egenskaber som den kendte (reelle) eksponentialfunktion, d.v.s.

1) $D(e^{at}) = ae^{at}$

2) $e^{s+t} = e^{s} \cdot e^{t}$, $e^{s-t} = e^{s} : e^{t}$.

ad 1) Da exp(it) = cost+isint er en løsning til ligningen $Df = if$ må

$$D(exp(it)) = i\ exp(it)$$

ad 2) I afsnit 1.4 så vi, at man ganger to komplekse tal med modulus 1 ved at addere argumenterne, men dette giver netop, at

$$\begin{aligned} exp(is) \cdot exp(it) &= (\cos s+i\sin s)(\cos t+i\sin t) \\ &= \cos(s+t)+i\sin(s+t) \\ &= exp(i(s+t)) \end{aligned}$$

og analogt fås for en kvotient

$$\begin{aligned} \frac{exp(is)}{exp(it)} &= \frac{\cos s+i\sin s}{\cos t+i\sin t} = \cos(s-t)+i\sin(s-t) \\ &= exp(i(s-t)) \end{aligned}$$

Vi kalder derfor exp den komplekse eksponentialfunktion og betegner den som den reelle med e.

Betragter vi nu to funktioner f, g, hvor f er løsning til differentialligningen $(D-pD^{o})f=o$ og g er løsning til differentialligningen $(D-qD^{o})g=o$, med $p,q \in C^{o}(I)$ defineret på samme interval $I \subseteq R$. Da gælder, at

$D(fg) = gDf+fDg = g(pf)+f(qg) = (p+q)(fg)$

d.v.s. fg vil da være løsning til ligningen

$$(D - (p+q)D^{o})\varphi=o$$

Skal vi derfor løse differentialligningen

$$(D - (a+ib)D^{o})\varphi=o$$

sker det ved at løse ligningerne

$$(D-aD^{o})\varphi=o \quad \text{og} \quad (D - ibD^{o})\varphi=o,$$

da vil løsningen til den oprindelige ligning blive produktet af løsningerne til de to sidste ligninger.

Vi får derfor den fuldstændige løsning til ligningen

$$(D - (a+ib)D^{o})\varphi=o$$

nemlig $\varphi(t) = c\, e^{(a+ib)t} \quad c\in C$

eller $\varphi(t) = ce^{at}(\cos bt + i\sin bt) \quad c\in C$

Skal vi herefter løse den almene lineære, homogene ligning af første orden

$$(D - a(t)D^{o})f=o$$

hvor $a(t) = a_1(t)+ia_2(t)$, gøres det som ovenfor ved at løse ligningerne

$$(D - a_1(t)D^{o})\varphi=o \quad \text{og} \quad (D - ia_2(t)D^{o})\varphi,$$

og da vil produktet af løsningerne være løsning til den oprindelige ligning.

Opgaver til appendix 1.

1. Udregn for $b \geq o$ udtrykket

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)^2$$

og for $b \leq o$ udtrykket

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)^2$$

2. Angiv løsningerne $z \in C$ til ligningen

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma = o$$

når $\alpha, \beta, \gamma \in C$ og $\alpha \neq o$

3. Idet $z_1 = a_1+ib_1$ og $z_2 = a_2+ib_2$ udregn da $\overline{z_1+z_2}$ og $\overline{z_1 z_2}$

4. Vis, at $e^{i\pi} = -1$, og at $|e^{iy}| = 1$ for alle $y \in R$.

5. Tegn i planen mængden

$$\{z \in C \mid |z| \leq 1\}$$

6. Find samtlige løsninger $z \in C$ til ligningerne

$$z^3+1 = o$$
$$z^3-1 = o$$
$$z^3+i = o$$

7. Løs differentialligningen

$$(D + (\text{tg}t+i\text{cot}t)D^{o})f = o$$

Appendix 2: Numerisk løsning af differentialligningssystemer.

2.1 Indledning.

Som allerede anført i kapitel 1 har mange differentialligningsproblemer deres oprindelse i differensligninger, og man indførte netop differentialligninger - hvorved man jo ændrede det system man beskrev - fordi disse i mange situationer var lettere at løse. Her kan man imidlertid også komme ud i vanskeligheder, hvis man blot vil bestemme den fuldstændige løsning til en af følgende to differentialligninger

$$(D - 2tD^0)f(t) = 1$$

$$(D^2 + 2tD - D^0)g(t) = 0$$

så kan løsningen ikke udtrykkes i analytiske funktioner. Man kan derfor vælge at bestemme løsningen numerisk. For at gøre så er man imidlertid nødt til at gå tilbage til den oprindelige differensligning. Det er derfor af afgørende betydning at vide hvor stor skridtlængden Δt er (i dette appendix erstattes Δt med h). I nogle situationer, især differentialligninger der modellerer fysiske fænomener, kender man som regel ikke de differensligninger - men kun de ræsonnementer - der ligger bag differentialligningernes opståen. Her vil det ofte være en fordel at vælge sin numeriske løsningsmetode således, at man undervejs i løsningen let kan ændre på skridtlængden h. Der tænkes her naturligvis på numerisk løsning ved brug af EDB.

Formålet med dette appendix er ikke at give en udtømmende beskrivelse og vurdering af forskellige metoder til numerisk løsning af differential(differens-)ligningssystemer, men blot at præsentere (men ikke at udlede) Runge-Kutta metoderne. Vi vil imidlertid forberede dette lidt.

Vi betragter et system af differentialligninger

(*) $\quad \underline{y}' = \underline{f}(t,\underline{y}) \qquad\qquad \underline{y} \in C^{\infty}(R^q)$

af første orden. Man ønsker nu at bestemme en løsning til systemet i punktet $t_{n+1} = t_n + h$ ud fra kendskab til løsningens værdi i t_n. Dette lader sig f.ex. gøre ud fra en taylorrækkeudvikling af y. Da er

$$\underline{y}(t_{n+1}) = \underline{y}(t_n) + h\Delta(t_n,\underline{y},h)$$

hvor $\quad \Delta(t,\underline{y},h) = \underline{y}'(t) + \frac{h}{2}\underline{y}''(t) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{p!}\underline{y}^{(p)}(t) + \ldots$

Betragter vi nu det p-te afsnit af taylorrækken, erstatter vi $\underline{y}(t_n)$ med $\underline{y}_n$, og benytter vi (*), fås (omtrent) det samme som før gennem

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + h\Delta_p(t_n,\underline{y}_n,h)$$

hvor $\Delta_p(t,\underline{y},h) = \underline{f}(t,\underline{y}) + \frac{h}{2}\underline{f}'(t,\underline{y}) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{p!}\underline{f}^{(p)}(t,\underline{y})$.

Dette giver for p = 1:

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + h\underline{f}(t_n,\underline{y}_n)$$

som kaldes *Eulers metode* til numerisk løsning af (*).

For p = 2 får man tilsvarende, at

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + h[\underline{f}(t_n,\underline{y}_n) + \frac{h}{2}(\underline{f}_t(t_n,\underline{y}_n) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}\underline{f}(t_n,\underline{y}_n))]$$

I almindelighed vil de afledede i taylorrækken være vanskelige at beregne, hvilket gør, at denne metode for $p \geq 2$ ikke er særlig anvendelig. Man søger derfor at erstatte $\Delta_p(t,\underline{y},h)$ med et udtryk, som kun indeholder funktionen $\underline{f}$ eventuelt udregnet i nabopunkter til $(t_n,\underline{y}_n)$, men som ikke indeholder de afledede af $\underline{f}$.

2.2 Runge-Kutta metoderne.

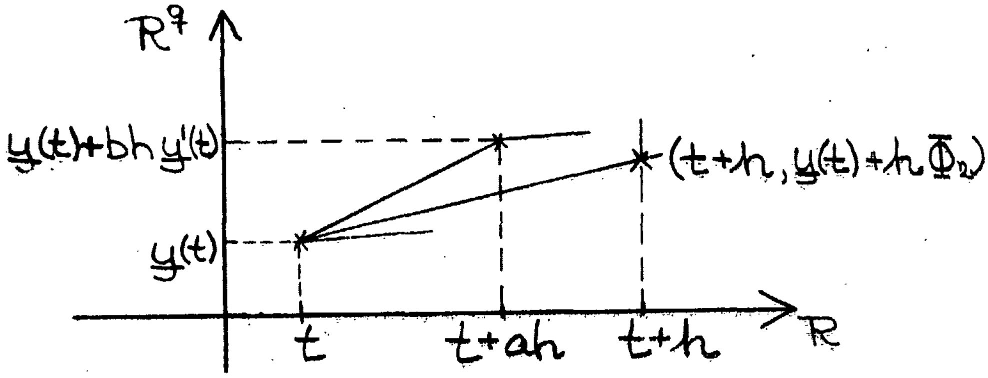
Præsentationen af disse metoder sker ved at vise, hvordan man behandler tilfældet p=2 ovenfor. Til dette formål ønsker vi at bestemme konstanterne c,k,a og b således, at

$$\Phi_2(t,\underline{y},h) = c\underline{f}(t,\underline{y}) + k\underline{f}(t+ah,\ \underline{y}+bh\underline{f}(t,\underline{y}))$$

stemmer overens med

$$\Delta_2(t,\underline{y},h) = \underline{f}(t,\underline{y}) + \frac{h}{2}(\underline{f}_t(t,\underline{y}) + \frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{y}}\cdot\underline{f}(t,\underline{y})).$$

Vi vil imidlertid først undersøge, hvad der geometrisk ligger i $\Phi_2(t,\underline{y},h)$. Vi betragter følgende figur



Her fremkommer altså $\Phi_2(t,\underline{y},h)$ som et vægtet gennemsnit mellem tangenthældningerne $\underline{y}'(t) = \underline{f}(t,\underline{y})$

og $\underline{y}'(t+ah) = \underline{f}(t+ah,\underline{y}+bh\underline{y}'(t))$.

Den $\underline{y}$-værdi, som benyttes i den anden tangenthældning, fremkommer ved en lineær fremskrivning $(\underline{y} = \underline{y}(t) + bh\underline{y}'(t))$ fra $\underline{y}(t)$. Således fremtræder $\Phi_2(t,\underline{y},h)$ som en tangenthældning, der fremkommer ved at lægge to evalueringer til grund for fremskrivningen stykket h.

For nu at bestemme konstanterne i $\Phi_2(t,\underline{y},h)$ foretages en rækkeudvikling med hensyn til h. Da er

$$\Phi_2(t,\underline{y},h) = (c+k)\underline{f}(t,y) + kh[a\underline{f}_t(t,\underline{y})+b\frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{y}}\underline{f}(t,\underline{y})] + O(h^2)$$

og identificeres med leddene i $\Delta_2(t,\underline{y},h)$ fås, at

$$c + k = 1 \quad , \quad ak = \tfrac{1}{2} \quad , \quad bk = \tfrac{1}{2}$$

dvs. tre ligninger med fire ubekendte. Sættes $k=\frac{1}{2}$ fås:

$$y_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{2}[\underline{f}(t_n,\underline{y}_n) + \underline{f}(t_n+h,\underline{y}_n+h\underline{f}(t_n,y_n))]$$

Man ser endvidere, at den fejl man eventuelt begår ved denne approximation, vil være proportional med h^3.

Den her beskrevne metode med to evalueringer til grund for fremskrivningen kaldes en 2.ordens Runge-Kutta metode. Tilsvarende kan man bestemme konstanterne i en p-te ordens Runge-Kutta metode således at

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + h\Phi_p(t_n,\underline{y}_n,h)$$

hvor $\Phi_p(t,\underline{y},h) = \sum_{m=1}^{p} C_m \underline{k}_m$

med $\underline{k}_1 = \underline{f}(t,\underline{y})$

og $\underline{k}_m = \underline{f}(t+a_m h \ , \ y+h\sum_{m-1}^{s-1} b_{sm} \underline{k}_s)$

$m \in \{2,3,\ldots,p\}$ og man ser analogt som før, at den fejl man begår ved denne approximation er proportional med h^{p+1}. Metoderne er som man kan se ret praktiske til f.ex. EDB-mæssig behandling, idet de er "selvstartende" - hvis man opgiver er $(t_0,\underline{y}_0)$ kan processen fortsætte - og skridtlængden h kan ændres let efter hvert skridt. Den mest anvendte af de ovennævnte metoder er den 4.ordens Runge-Kutta metode, der giver

$$y_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{6}(\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4)$$

med $\underline{k}_1 = \underline{f}(t_n,\underline{y}_n)$, $\quad \underline{k}_2 = \underline{f}(t_n + \frac{h}{2} \ , \ \underline{y}_n + \frac{h}{2}\underline{k}_1)$

$\underline{k}_3 = \underline{f}(t_n + \frac{h}{2} \ , \ \underline{y}_n + \frac{h}{2}\underline{k}_2)$, $\quad \underline{k}_4 = \underline{f}(t_n + h \ , \ \underline{y}_n + h\underline{k}_3)$.

2.3 Simpsons integrationsformel.

Som et specialtilfælde af den 4.ordens Runge-Kutta metode kan man få en god metode til numerisk stamfunktionsbestemmelse. Er nemlig

$$\underline{f}(t,\underline{y}) = \underline{f}(t)$$

bliver differentialligningssystemet særlig simpelt, idet

(*) $\underline{y}' = \underline{f}(t)$

Dette giver som bekendt med $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ at

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau)d\tau .$$

Anvendes nu 4.ordens Runge-Kutta på (*), og erstatter 2h det anvendte h fås, at

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{3}(\underline{k}_1 + 4\underline{k}_2 + \underline{k}_4)$$

idet $\underline{k}_1 = \underline{f}(t_n)$, $\underline{k}_2 = \underline{k}_3 = \underline{f}(t_n+h)$, $\underline{k}_4 = \underline{f}(t_n+2h)$.

Denne formel kaldes <u>Simpsons integrationsformel.</u>