Fordelen ved differentialligningen ved empirisk modellering

Bemærk, at en blandt andre fordele ved at have en differentialligning for logistisk vækst i modsætning til blot en algebraisk ligning (som jo er løsningen til differentialligningen), er, at differentialligningen kun indeholder to eksplicite parametre. Dette betyder, at hvis man har empiriske data og helst en begrundet formodning om logistisk vækst, så kan man ud fra y_i-data beregne transformerede $\tilde{y}_i$-data, f.eks. ved

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

som da forventes at approksimere $\frac{y'}{y}$. Ifølge den logistiske differentialligning er dette lig med $-ay(t) + aL$. Ved lineær regression kan konstanterne $-a$ og aL beregnes og deraf a og L. Da vi tidligere arbejdede med den logistiske ligning estimerede vi generelt værdien af to parametre vha. lineær regression på et transformeret udtryk, men dette blev gjort på baggrund af et kvalificeret gæt på systemets bærekapacitet, jvf. afsnit A.9 side 197. Med modellen på differentialligningsform er et sådan gæt ikke nødvendigt. Til gengæld inddrages viden om systemet til et givent tidspunkt, nemlig systemets begyndelsesværdi, og det er med en sådan vægt, at systemet tvinges gennem dette datapunkt.

3.8 Lineære differentialligninger af første orden

I dette afsnit skal vi se lidt nærmere på en anden kategori af differentialligninger, som kan løses analytisk, nemlig lineære differentialligninger af første orden. Lineære differentialligninger er særligt interessante matematisk set, fordi teorien om dem kan generaliseres til differentialligninger af højere orden og – som vi skal se i kapitel 4 – til systemer af koblede differentialligninger. Lineære differentialligninger er endvidere meget anvendelige i modelleringssammenhænge.

Matematisk definition

En lineær differentialligning af første orden kan generelt skrives på denne form

$$y' = a(t)y + b(t),$$

hvor $y(t)$ er den ubekendte funktion af den uafhængige variabel, som søges, og hvor $a(t)$ og $b(t)$ er kontinuerte funktioner eller eventuelt reelle tal. Grunden til at en sådan ligning kaldes lineær, er, at der kun indgår led i ligningen med y i første og nulte potens (led uden y). Der er ikke nogen led med y i andre potenser eller specielle funktioner af y f.eks $\sin(y)$. Den logistiske differentialligning $y' = y(1-y) = y - y^2$ er således et eksempel på en ikke-lineær differentialligning. At en lineær differentialligning er af første orden betyder naturligvis som hidtil, at ligningen ikke indeholder led med afledede af funktionen y af højere orden end den første afledede. Der er en klar analogi til sædvanlige lineære ligninger ($y = ax + b$), hvor den uafhængige variabel, x, kun optræder i første og nulte potens.

Homogene og inhomogene ligninger

I behandlingen af lineære differentialligninger benyttes en vigtig skelnen mellem **homogene** og **inhomogene** ligninger. En homogen lineær differentialligning indeholder ikke led uden y eller y' (svarende til at $b(t) = 0$). En homogen lineær differentialligning har altså formen

$$y' = a(t)y$$

Fuldstændig løsning til den homogene ligning

Vi kan se, at de homogene ligninger er en delmængde af de separable ligninger, som vi behandlede i forrige afsnit. Vi kan derfor umiddelbart finde den fuldstændige løsning til en homogen lineær differentialligning af første orden. Vi får ligningen

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a(t)\, dt + c$$

hvor c er en vilkårlig reel konstant. Efter opdeling i intervaller hvor $y \neq 0$, kan vi bestemme integralerne og danne ligningen

$$ln|y| = A(t) + c$$

Efter overvejelser helt analogt med dem vi gennemførte for ligningen $y' = ay$ på side 85, får vi følgende udtryk for den fuldstændige løsning til ligningen $y' = a(t)y$, nemlig

$$y(t) = Ce^{A(t)},$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$, og C er en vilkårlig reel konstant. $C = 0$ svarer til ligevægtsløsningen $y(t) = 0$.

Fuldstændig løsning til den inhomogene ligning

Der er en meget smuk sammenhæng mellem løsningen til en inhomogen lineær differentialligning og løsningen til den tilsvarende homogene ligning. Det vil sige den ligning, der fremkommer ved at fjerne leddet $b(t)$ i den inhomogene ligning. Den fuldstændige løsning til en inhomogen ligning kan nemlig fremstilles som summen af en enkelt vilkårligt valgt partikulær løsning til den inhomogene ligning og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning. Denne sammenhæng kan vi endda relativt let bevise: Vi ser på den inhomogene ligning

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Vi antager, at vi har fundet en partikulær løsning $f(t)$ til denne differentialligning. Vi har altså at

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$$

Vi undersøger nu, hvor meget en vilkårlig anden løsning $z(t)$ til den inhomogene ligning kan afvige fra vores løsning $f(t)$. Vi ser på differentialkvotienten af differensen mellem de to funktioner:

$$\begin{aligned}(z(t) - f(t))' &= z'(t) - f'(t) \\ &= (a(t)z(t) + b(t)) - (a(t)f(t) + b(t)) \\ &= a(t)(z(t) - f(t))\end{aligned}$$

Det tredje udtryk fremkommer ved at udnytte, at både $z(t)$ og $f(t)$ er løsninger til den inhomogene ligning. Ved at sammenholde det første og det sidste udtryk kan vi se, at funktionen $(z(t) - f(t))$ er løsning til den tilsvarende homogene ligning. Det betyder, at der for hvilken som helst løsning $z(t)$ findes en konstant C så

$$(z(t) - f(t)) = Ce^{A(t)}$$

Dermed kan den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning skrives på formen

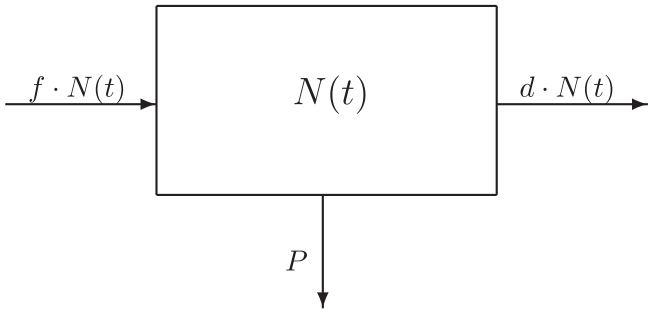
$$z(t) = Ce^{A(t)} + f(t)$$

hvor $f(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

Men hvad er det smarte ved det? Som det næste eksempel viser, er det ofte meget nemt at finde en enkelt løsning til en inhomogen ligning, og derfor er ovenstående sammenhæng et kraftfuldt redskab til løsning af inhomogene lineære differentialligninger.

Eksempel: Minkfarmen

Vi ser på en minkfarm. Vi kan opfatte bestanden af mink på farmen som et kompartment, og vi indfører betegnelsen $N(t)$ for bestanden af mink til tiden t. Minkene formerer sig naturligvis, og der er derfor en tilstrømning til kompartmentet. Det antages, at fødselsraten er konstant $F\%$ per uge. Der er imidlertid også en vis dødelighed, som ligeledes antages at kunne beskrives med en konstant rate $D\%$ per uge. Formålet med en minkfarm er naturligvis at tjene penge



Figur 3.14 Kompartmentdiagram for minkfarm.

ved at sælge minkskind. Derfor udtages der hver uge P mink til pelsning. Situation kan illustreres ved hjælp af diagrammet i figur 3.14, når vi sætter $f = \frac{F}{100}$ og $d = \frac{D}{100}$.

Ud fra diagrammet kan vi opstille følgende differentialligning for ændringen i minkbestanden målt i mink per uge:

$$N'(t) = fN(t) - dN(t) - P = (f - d)N(t) - P$$

Vi kan se, at der er tale om en inhomogen lineær differentialligning af første orden. For at finde den fuldstændige løsning til denne ligning prøver vi først, om vi kan finde en partikulær løsning. En oplagt mulighed er at søge efter en ligevægtsløsning. Det vil jo sige en løsning, hvor minkbestanden forbliver konstant. Hvis $N(t)$ er konstant, betyder det, at $N'(t) = 0$. Vi sætter derfor $N'(t)$ lig med nul

$$N'(t) = (f - d)N(t) - P = 0 \Rightarrow N(t) = \frac{P}{f - d}$$

Med værdier $F = 4\%$, $D = 1.5\%$ og $P = 150$ mink fås ligevægtsløsningen $N(t) = 6000$ mink. Det vil sige, at der med en bestand på 6000 mink er balance mellem den naturlige tilvækst og et udtag til pelsning på 150 mink per uge.

Vi finder herefter den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning

$$N'(t) = (f - d)N(t)$$

Det giver $Ce^{(f-d)t}$. Når vi hertil lægger ligevægtsløsningen og indsætter tallene for f og d, får vi følgende udtryk for den fuldstændige løsning til vores inhomogene ligning

$$N(t) = Ce^{0.025\,t} + 6000,$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

Vi kan se, at $C = 0$ giver ligevægtsløsningen $N(t) = 6000$. Vi kan nu spørge om, hvad der sker, hvis bestanden er mindre end 6000 mink, f.eks. 5000 mink. Vi skal altså finde den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $N(0) = 5000$. Vi indsætter i det generelle udtryk og får

$$N(0) = Ce^{0.025 \cdot 0} + 6000 = 5000$$

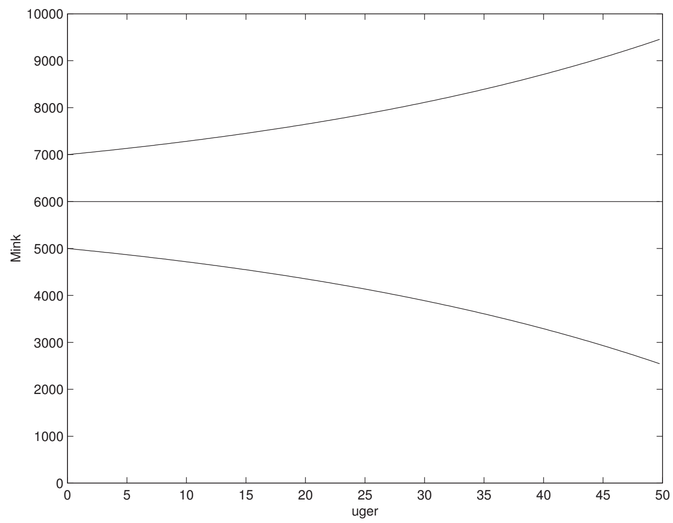
og hermed altså

$$C = -1000$$

Den søgte løsning har altså ligningen

$$N(t) = 6000 - 1000e^{0.025t}$$

Grafen for denne løsning er tegnet i figur 3.15, der også viser løsningen gennem punktet $(0, 7000)$. Vi kan se, at ligevægtsløsningen $y = 6000$ er ustabil. Hvis begyndelsespunktet ligger under dette niveau, vil minkbestanden uddø, og hvis det ligger over, vil bestanden i følge modellen vokse mod uendelig. Begge situationer er naturligvis urealistiske. Minkavleren vil formentligt regulere på systemet, inden det kommer så vidt.



Figur 3.15 Viser tre løsningskurver til ligningen $N'(t) = (f - d)N(t) - P$.

Den inhomogene differentialligning vi opstillede i eksemplet med minkfarmen er speciel simpel, derved at koefficienterne i ligningen er konstante og altså ikke afhænger af t. Løsningen af sådanne ligninger bliver behandlet nærmere efter nedenstående eksempel.

Eksempel: Frit fald med luftmodstand

Vi har tidligere set, at ligningen $a(t) = -g$ beskriver sammenhængen mellem acceleration og hastighed for en bold, der kastes lodret op i luften, når man ser bort fra luftmodstanden. Vi ser nu på en faldskærmsudspringer, der falder frit mod jorden, fordi faldskærmen ikke folder ud. Faldhastigheden vil da kun være påvirket af tyngdekraften og af luftmodstanden. I denne situation er luftmodstanden af afgørende betydning, og den må derfor indgå i modellen. Luftmodstand er en kraft, der virker modsat bevægelsesretningen, og som kan antages at være proportional med størrelsen af legemets hastighed. Vi regner hastigheden mod jorden som positiv. Tyngdekraften virker jo naturligvis i retning mod jorden, og den er konstant og proportional med legemets masse. Den resulterende kraft, der virker på vores uheldige udspringer, er summen af disse to kræfter regnet med fortegn. Vi får dermed følgende ligning

$$F_{res}(t) = m\,a(t) = m\,g - k\,v(t)$$

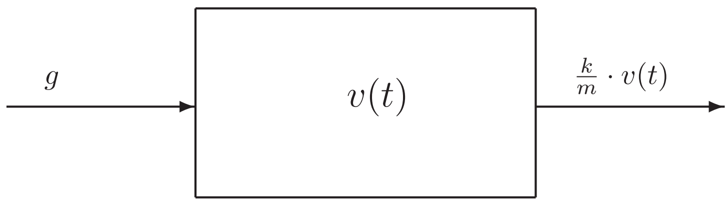
hvor m er udspringerens masse, g er tyngdeaccelerationen, og k er en friktionskonstant. Heraf fås

$$a(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$$

Da $v'(t) = a(t)$ får vi en 1. ordens lineær inhomogen differentialligning som model for udspringerens hastighed:

$$v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$$

Vi kan illustrere situationen med et kompartmentdiagram, hvor vi lader udspringerens hastighed være kompartmentet, se figur 3.16.



Figur 3.16 Kompartmentdiagram for frit fald med luftmodstand.

Vi løser ligningen; først finder vi en ligevægtsløsning:

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k}$$

Vi kan se, at v' er negativ, når $v > \frac{mg}{k}$ og positiv for $v < \frac{mg}{k}$. Det betyder, at v vil vokse op til hastigheden $\frac{mg}{k}$. Der er således tale om stabil ligevægtsløsning. Den fuldstændige løsning til den homogene del af ligningen bliver $Ce^{-\frac{k}{m}t}$, $C \in R$. Og vi får derfor følgende udtryk for den fuldstændige løsning

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Vi kan se, at uanset værdien af C vil løsningerne gå mod $\frac{mg}{k}$ for t gående mod ∞. Spørgsmålet er, hvor lang tid der går, før udspringeren når denne hastighed. Det undersøger vi ved at bestemme en forskrift for den løsning, der opfylder betingelsen $v(0) = 0$, svarende til at vi måler faldtiden fra det tidspunkt, udspringeren forlader flyet.

$$v(0) = Ce^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

Og hermed får vi løsningen

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

For at få fuldstændigt kendskab til udspringerens hastighed som funktion af faldtiden mangler vi blot parameteren k, idet vi regner med, at vi fik vejet udspringeren til 85 kg inden han sprang. Hvis vi måler hastigheden i m/sek får k enheden kg/sek, og en realistisk værdi for k er 18 kg/sek. Det giver en ligevægtshastighed på

$$\frac{9,82\,\mathrm{m/sek}^2 \cdot 85\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{kg/sek}} = 46,4\,\mathrm{m/sek}$$

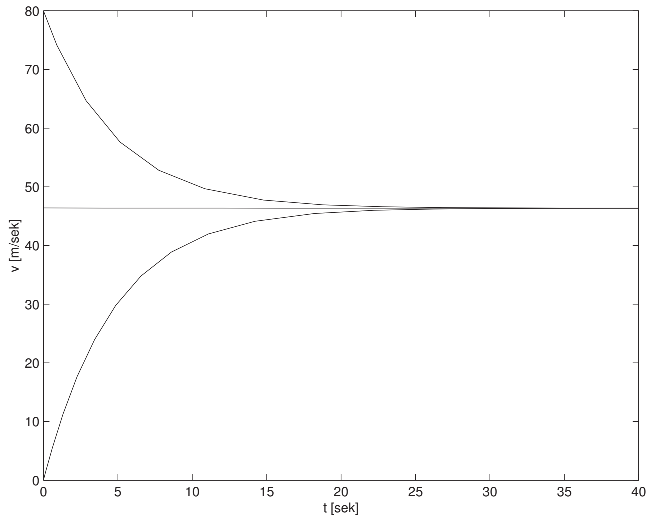
Udspringeren opnår altså en hastighed af 46,4 m/sek svarende til 167 km/time. Vi har tegnet løsningskurven for $v(t)$ i figur 3.17 sammen med ligevægtsløsningen og løsningen, der opfylder betingelsen $v(0) = 80$ m/sek. Af grafen for $v(t)$ kan vi se, at der går ca. 20 sekunder, inden udspringeren falder med ligevægtshastigheden.

Inhomogene ligninger med konstante koefficienter

For inhomogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter kan vi helt generelt angive den fuldstændige løsning.

For ligninger af formen

$$y' = ay + b$$



Figur 3.17 Tre løsninger til ligningen $v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$.

hvor $a, b \in R$, kan vi nemlig altid finde en ligevægtsløsning, da

$$y' = 0 \Rightarrow y = \frac{-b}{a}$$

som kan benyttes som en partikulær løsning. Når vi hertil lægger den fuldstændige løsning til ligningen $y' = ay$, får vi følgende udtryk for den fuldstændige løsning til en inhomogen lineær differentialligning af første orden med konstante koefficienter:

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

Der bliver rig lejlighed til at arbejde med differentialligninger af denne form, men i stedet for at forsøge at huske ovenstående generelle løsningsudtryk kan det anbefales, at man hver gang tænker forfra og bestemmer en ligevægtsløsning og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

Fuldstændig løsning til inhomogene ligninger

Selv om de fleste af de lineære differentialligninger vi skal arbejde med i dette kursus, har konstante koefficienter, kan det være nyttigt at vide, at der også findes en generel formel til bestemmelse af en partikulær løsning til en inhomogen ligning, hvor koefficienterne er kontinuerte funktioner. Vi kan nemlig bevise, at ligningen $y' = a(t)y + b(t)$ generelt har følgende partikulære løsning

$$z(t) \quad = \quad e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt \tag{3.9}$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$.

Ved differentiation efter produktreglen og kædereglen får vi

$$\begin{aligned} z'(t) &= \left(e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt\right)' \\ &= a(t)e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt + e^{A(t)}(e^{-A(t)} b(t)) \end{aligned}$$

og efter reduktion fås

$$z'(t) = a(t)(e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt) + b(t)$$

Udtrykket i parentesen er netop vores bud på en partikulær løsning $z(t)$, og vi kan derfor se, at

$$z'(t) = a(t)z(t) + b(t)$$

Og hermed har vi bevist, at funktionen $z(t)$ i alle tilfælde er en partikulær løsning til en lineær inhomogen ligning. Vi kan derfor opskrive følgende formel for den fuldstændige løsning til den lineære inhomogene differentialligning af første orden

$$y(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt \tag{3.10}$$

hvilket også kan skrives således

$$y(t) = e^{A(t)}(\int e^{-A(t)} b(t)\, dt + C)$$

hvor C er en vilkårlig reel konstant.

Eksempel: Ligningen $y' = y + t$

Som eksempel på en inhomogen ligning, der har ikke-konstante koefficienter, ser vi på ligningen $y' = y + t$. Med $a(t) = 1$ og $b(t) = t$ ses det, at ligningen er af denne type.

Vi prøver først at finde en ligevægtsløsning ved at sætte y' lig med nul. Det giver

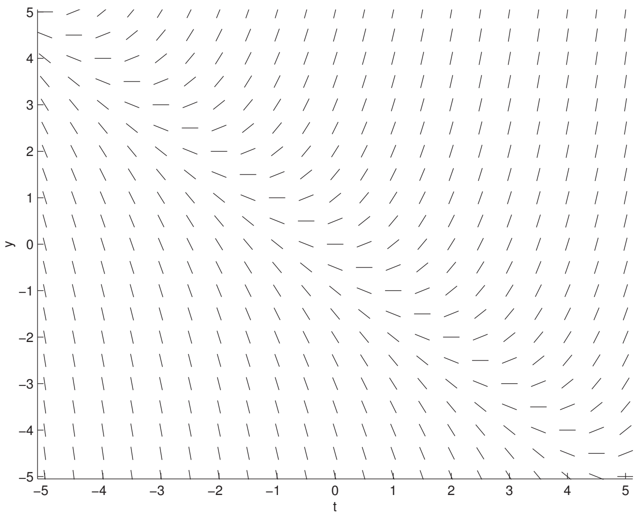
$$y' = y + t = 0 \Rightarrow y(t) = -t$$

Det vil sige, at når funktionen $y(t) = -t$ indsættes i ligningen giver højresiden nul. Men funktionen $y(t) = -t$ er jo ikke konstant, og dens differentialkvotient er derfor ikke nul. Den er derimod konstant -1, og vi får derfor -1 på venstresiden. Funktionen $y(t) = -t$ passer med andre ord ikke i differentialligningen. Men fordi dens differentialkvotient er konstant, kan vi nemt lave om på den således, at den bliver en løsning til differentialligningen. Hvis vi lægger -1 til funktionen, så vi får at $y = -t-1$, ændrer vi nemlig ikke på differentialkvotienten. Den bliver stadigvæk -1. Højresiden giver nu også -1 ved indsættelse af $y = -t - 1$, og dermed har vi fundet en partikulær løsning til den inhomogene ligning $y' = y+t$. Der er imidlertid ikke tale om en ligevægtsløsning, fordi $y' \neq 0$, men om en løsning der er retlinet, fordi y' er konstant.

Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $y' = y$ er givet ved Ce^t, og den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning $y' = y+t$ bliver da

$$y(t) = Ce^t - t - 1$$

Mængden af løsningskurver er illustreret i figur 3.18 med et hældningsfelt. Det kan ses direkte af hældningsfeltet, at funktionen med ligningen $y = -t - 1$ er en løsning til differentialligningen. Hvis man starter et sted på denne linie og tegner parallelt med hældningselementerne, kan man ikke komme væk fra linien. Starter man oven over denne linie, vil løsningskurven være eksponentialt voksende svarende til, at konstanten C er positiv. Ligger begyndelsespunktet derimod under denne linie vil løsningskurven gå eksponentialt mod $-\infty$ for t gående mod ∞. En sådan løsningskurve svarer selvfølgelig til en negativ C-værdi i udtrykket for den fuldstændige løsning. $C = 0$ giver den retlinede løsningskurve $y = -t - 1$. Denne løsningskurve deler $t - y$ planen op i to halvplaner, hvor løsningskurverne er kvalitativt forskellige.



Figur 3.18 Hældningsfelt for ligningen $y' = y + t$.

Ligningen $y' = y + t$ kan naturligvis også løses ved direkte indsættelse i formlen (3.10) for den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning. Det giver

$$y(t) = Ce^t + e^t \int e^{-t} t\, dt$$

Ved hjælp af partiel integration kan denne ligning omskrives til

$$y(t) = Ce^t + e^t \left[-e^{-t}t + \int e^{-t}\, dt \right]$$

Efter reduktion fås som forventet følgende udtryk for den fuldstændige løsning

$$y(t) = Ce^t - t - 1$$

3.9 Vigtige begreber og pointer

1. ordens differentialligning: En 1. ordens differentialligning

$$y'(t) = F(t, y)$$

fastlægger en sammenhæng mellem en ubekendt funktion $y(t)$ og dens differentialkvotient $y'(t)$.

Man kan også tænke på en første ordens differentialligning som en sammenhæng mellem en tilstandsvariabel $y(t)$ og den hastighed $y'(t)$, hvormed tilstanden ændrer sig. Denne fortolkning er specielt oplagt, hvis differentialligningen er opstillet ud fra et kompartmentdiagram. For hvert kompartment giver summen af indstrømninger minus summen af udstrømninger netop en differentialligning, der angiver den hastighed, hvormed niveauet i kompartmentet ændrer sig.

Hældningsfelt: Et hældningsfelt for en 1. ordens differentialligning viser i et (t, y)-koordinatsystem værdien af y' repræsenteret ved hældningen af et lille liniestykke (**hældningselement**) i et gitter af udvalgte punkter. Det bruges til at visualisere skaren af løsninger og identificere kvalitativt forskellige løsningsfunktioner.

Numerisk løsning: En numerisk løsning til en differentialligning af 1. orden er en løsning, der optræder i form af en numerisk beregnet tabel eller graf, der giver tilnærmede værdier til en løsningsfunktion i udvalgte punkter.

Analytisk løsning: En analytisk løsning til en differentialligning af 1. orden er en funktionsforskrift med tilhørende definitionsmængde, der opfylder differentialligningen i hele definitionsmængden.

F.eks. er funktionen $f(t) = 3\,e^{2t}$ for $t \in R$ en løsning til differentialligningen $y'(t) = 2\,y(t)$. Det kan kontrolleres ved at udregne henholdsvis venstre og højre side af differentialligningen, når $f(t)$ indsættes for $y(t)$. Venstresiden giver

$$y'(t) = (3\,e^{2t})' = 6\,e^{2t}$$

Og højresiden giver

$$2\,(3\,e^{2t}) = 6\,e^{2t}$$

Funktionen $f(t) = 3\,e^{2t}$ opfylder altså ligningen $y'(t) = 2y(t)$ for $t \in R$.

Fuldstændige løsning: Den fuldstændige løsning til en differentialligning er en angivelse af samtlige analytiske løsninger til ligningen med tilhørende definitionsmængder. Den fuldstændige løsning kan som regel sammenfattes i et eller to analytiske udtryk, hvori der indgår en eller flere konstanter. Den fuldstændige løsning til ligningen $y'(t) = 2\,y(t)$ kan f.eks. angives således:

$$y(t) = C\,e^{2t}\,,\ t \in R$$

hvor C er en vilkårlig reel konstant.

Begyndelsesværdiproblem: Et begyndelsesværdiproblem af 1. orden drejer sig om at finde en løsning $f(t)$ til en 1. ordens differentialligning, der samtidig opfylder en given begyndelsesbetingelse af typen $f(t_0) = y_0$.

F.eks er funktionen $f(t) = 3\,e^{2t}$ løsning til begyndelsesværdiproblemet: $y'(t) = 2\,y(t),\ y(0) = 3$; fordi f foruden at passe i ligningen også opfylder betingelsen $f(0) = 3$.

Partikulær løsning: En partikulær løsning til en differentialligning er en løsning, der opfylder en bestemt begyndelsesbetingelse. En partikulær løsning er med andre ord en løsning til et bestemt begyndelsesværdiproblem.

Ligevægtsløsning: En ligevægtsløsning til en differentialligning er en løsning $f(t)$ for $t \in I$, hvorom det gælder, at $f'(t) = 0$ for alle $t \in I$.

Separabel differentialligning: En separabel differentialligning har formen:

$$y' = f(t)\,g(y)$$

hvor y er en funktion af den uafhængige variabel t. I intervaller hvor $g(y)$ er nulpunktsfri, kan den fuldstændige løsning til en sådan ligning findes ved at isolere y af ligningen:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt + C$$

hvor C er en vilkårlig reel konstant.

1. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter: En 1. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter har formen:

$$y' = ay + b$$

hvor $a, b \in R$. Hvis $b = 0$ kaldes ligningen for **homogen**, og hvis $b \neq 0$ kaldes den for **inhomogen**. **Den fuldstændige løsning** har formen:

$$y' = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

hvor C er en vilkårlig reel konstant.

1. ordens lineær differentialligning: En 1. ordens lineær differentialligning af formen:

$$y' = a(t)y + b(t)$$

hvor $a(t)$ og $b(t)$ er kontinuerte funktioner af t, har den fuldstændige løsning:

$$y(t) = e^{A(t)}(\int e^{-A(t)}b(t)\,dt + C)$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$, og C er en vilkårlig reel konstant.

Ligevægt og stabilitet: En **ligevægtsløsning** til en enkelt differentialligning er en løsning, der er konstant for alle værdier af den uafhængige variabel. Grafen for en ligevægtsløsning er derfor en vandret linie. Ligevægtsløsninger kan findes ved at sætte differentialkvotienten lig med nul, $y' = 0$, og løse ligningen med hensyn til y.

En ligevægtsløsning siges at være **stabil**, hvis enhver lille forskydning i begyndelsesbetingelsen (således, at $y(t_0) = y_0 \pm \Delta y$) giver løsningskurver, der alle går mod ligevægtsløsningen, når den uafhængige variabel går mod ∞.

En ligevægtsløsning siges at være **ustabil**, hvis en lille forskydning i begyndelsesbetingelsen kan give løsningskurver, der ikke nærmer sig ligevægtsløsningen, når den uafhængige variabel går mod ∞.